Fernanda Pérez A01742102

Sea f(x) una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que f(x) sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \le 1]$.

A)

$$\int_0^2 x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 cx^2 = 1$$

$$c\int_0^2 x^2 = 1$$

$$c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$c = \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)}$$

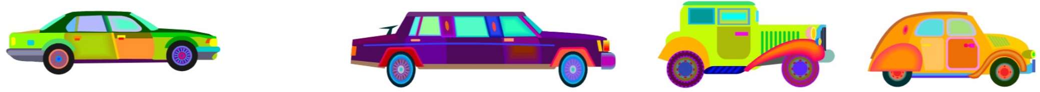
$$c = \frac{3}{8}$$

B)

$P[0 < X \leq 1]$

$$\int_0^1 \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{8}\int_0^1 x^2 = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$



Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^4}, & si \quad x>1\\ 0 & si \quad x\le 1\end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual f(x) es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

a)

$$K\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4} = K\int_1^{\infty} x^{-4} = (K)\left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_1^{\infty} = (K)\frac{1}{3} = (K)\frac{1}{3}$$

$$K\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

$$K=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$K=3$$

b)

Esperado $E[X]$

$$E[X] = \int_1^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{K}{x^4}\,dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^4} = 3\int_1^\infty \frac{x}{x^4} = 3\int_1^\infty \frac{1}{x^3} = 3\int_1^\infty x^{-3}$$

$$= (3)\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^\infty = (3)\frac{0^{-2}}{-2} - (3)\frac{1^{-2}}{-2} = 0 - \left[-\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}$$

$$E[X] = \frac{3}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx$$

Varianza

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty x^2 \cdot \frac{1}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 3\int_1^\infty x^{-2}\,dx =$$

$$3\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^\infty = -3x^{-1}\Bigg|_1^\infty = 0 - [-3] = 3$$

$$E[X^2] = 3$$

Varianza

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var(x) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

c)

$$P(X>2) = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^4}\, dx = 3\int_2^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = 3\int_2^{\infty} x^{-4} dx = 3\,\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_2^{\infty} = 0 - \left[-\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{8}$$

$$P(X>2) = \frac{1}{8} \qquad P(X<2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X\leqslant 2) = \int_1^{2} \frac{3}{x^4}\, dx = 3\int_1^{2} \frac{1}{x^4}\, dx = 3\int_1^{2} x^{-4} dx = (3)\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{2} = (3)\,\frac{(2)^{-3}}{-3} - \left[(3)\frac{(1)^{-3}}{-3}\right] = -\frac{1}{8} - [-1] = 7/8$$

$$P(X\leqslant x) = \int_1^{x} \frac{3}{x^4}\, dx = 3\int_1^{x} \frac{1}{x^4}\, dx = 3\int_1^{x} x^{-4} = (3)\,\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{x} = (3)\,\frac{x^{-3}}{-3} - \left[(3)\,\frac{1^{-3}}{-3}\right] = -\frac{3x^{-3}}{3} - [-1] = -x^{-3} + 1$$

Probabilidad de que se tarde más de 2 seg. $= 1/8$

Probabilidad de que se tarde a lo más 2 seg. $= 7/8$

Probabilidad de que se tarde x seg. o menos : $-x^{-3} + 1$