# Procesos Poisson

Catherine Rojas

2024-10-15

## Los clientes

En un almacén particular los clientes llegan al mostrador de una caja con un promedio de 7 por hora.

### a) En la hora, ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 5 clientes?

- X: No. del cliente
- T: tiempo P(X>5)
- Dado que la media de llegadas es $\lambda = 7$ por hora, utilizamos la distribución Poisson:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

```r
# Parámetro lambda (media de llegadas por hora)
lambda <- 7

# Probabilidad de que lleguen más de 5 clientes
probabilidad_a <- 1 - ppois(5, lambda)
probabilidad_a

## [1] 0.6992917
```

### b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona espere más de 30 minutos para ser atendida?

- P(T>30) <- un solo cliente
- La distribución del tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial con media $1/\lambda$. La probabilidad de esperar más de 30 minutos (0.5 horas) es:

$$P(T > 0.5) = e^{-\lambda \cdot t}$$

```r
# Tiempo en horas
t <- 0.5

# Probabilidad de esperar más de 30 minutos
probabilidad_b <- exp(-lambda * t)
probabilidad_b

## [1] 0.03019738
```

### c) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un cliente en sus dos horas de comida?

- P(X=1) en 2h
- En dos horas, la nueva media de llegadas será $\lambda' = 7 \times 2 = 14$. La probabilidad de que llegue al menos un cliente es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

```r
# Nueva lambda para dos horas
lambda_2h <- 7 * 2

# Probabilidad de que llegue al menos un cliente en dos horas
probabilidad_c <- 1 - dpois(0, lambda_2h)
probabilidad_c

## [1] 0.9999992
```

## DRIVE THRU

El tiempo de llegada a una ventanilla de toma de órdenes desde un automóvil de un cierto comercio de hamburguesas sigue un proceso de Poisson con un promedio de 12 llegadas por hora.

### a) ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas sea a lo más de 20 minutos?

Si tenemos una distribución exponencial para el tiempo entre llegadas, el tiempo total para tres personas sigue una distribución gamma con forma $k = 3$ y tasa $\lambda_{\text{min}} = 0.2$.

$$P(T \leq 20) = \text{pgamma}(20,\text{shape} = 3,\text{rate} = 0.2)$$

```r
# Parámetros de la distribución gamma
shape <- 3  # Tres personas
rate <- 0.2  # Llegadas por minuto

# Probabilidad de que el tiempo total sea menor o igual a 20 minutos
probabilidad_a <- pgamma(20, shape = shape, rate = rate)
probabilidad_a

## [1] 0.7618967
```

### b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de una persona esté entre 5 y 10 segundos?

Primero, convertimos segundos a minutos:

$$5 \text{ segundos} = \frac{5}{60} \text{ minutos}$$

$$10 \text{ segundos} = \frac{10}{60} \text{ minutos}$$

Usamos la distribución exponencial para obtener la probabilidad:

$$P(5 \leq T \leq 10) = P(T \leq 10) - P(T \leq 5)$$

```r
# Tiempos en minutos
t1 <- 5 / 60
t2 <- 10 / 60

# Probabilidades acumuladas
P_t2 <- pexp(t2, rate = 0.2)
P_t1 <- pexp(t1, rate = 0.2)

# Probabilidad de estar entre 5 y 10 segundos
probabilidad_b <- P_t2 - P_t1
probabilidad_b

## [1] 0.01625535
```

### c) ¿Cuál será la probabilidad de que en 15 minutos lleguen a lo más tres personas?

En 15 minutos, la tasa promedio será:

$$\lambda_{15 \text{ min}} = 0.2 \times 15 = 3$$

Ahora usamos la distribución Poisson para calcular:

$$P(X \leq 3) = \text{ppois}(3, \lambda_{15 \text{ min}})$$

```r
# Lambda para 15 minutos
lambda_15min <- 3

# Probabilidad de que lleguen a lo más 3 personas
probabilidad_c <- ppois(3, lambda_15min)
probabilidad_c

## [1] 0.6472319
```

## DRIVE THRU 2

El tiempo de llegada a una ventanilla de toma de órdenes desde un automóvil de un cierto comercio de hamburguesas sigue un proceso de Poisson con un promedio de 12 llegadas por hora.

## d) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas esté entre 5 y 10 segundos?

El tiempo total para tres personas sigue una distribución gamma con parámetros $k = 3$ (número de personas) y $\lambda = \frac{12}{3600}$ (tasa por segundo, dado que 12 llegadas por hora equivalen a $\frac{12}{3600}$ llegadas por segundo).

### Cálculo:

$$P(5 \leq T \leq 10) = P(T \leq 10) - P(T \leq 5)$$

```
# Parámetros de la distribución gamma
shape <- 3  # Tres personas
rate <- 12 / 3600  # Tasa por segundo

# Probabilidades acumuladas
P_10 <- pgamma(10, shape = shape, rate = rate)
P_5 <- pgamma(5, shape = shape, rate = rate)

# Probabilidad de que el tiempo esté entre 5 y 10 segundos
probabilidad_d <- P_10 - P_5
probabilidad_d

## [1] 5.258533e-06
```

## e) Determine la media y varianza del tiempo de espera de tres personas.

Para una distribución gamma, la media es:

$$\text{Media} = \frac{k}{\lambda}$$

Y la varianza es:

$$\text{Varianza} = \frac{k}{\lambda^2}$$

```
# Parámetros
k <- 3  # Tres personas
lambda <- 12

# Cálculo de media y varianza
media_e <- k / lambda
varianza_e <- k / (lambda^2)
# Cálculo de desviación estándar
desviacion_estandar <- sqrt(varianza_e)

# Mostrar resultados
cat("Media:", media_e, "\n")
```

```
## Media: 0.25
cat("Varianza:", varianza_e, "\n")
## Varianza: 0.02083333
cat("Desviación estándar:", desviacion_estandar, "\n")
## Desviación estándar: 0.1443376
```

### f) ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas exceda una desviación estándar arriba de la media?

Queremos calcular la probabilidad de:

$$P(T > \text{Media} + \sigma)$$

Donde:

$$\sigma = \text{Varianza}$$

```
# Desviación estándar
sigma <- sqrt(varianza_e)

# Tiempo límite (media + desviación estándar)
limite <- media_e + sigma

# Probabilidad de exceder el límite
probabilidad_f <- 1 - pgamma(limite, shape = k, rate = lambda)
probabilidad_f

## [1] 0.1491102
```

## Entre partículas

Una masa radioactiva emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson con una razón promedio de 15 partículas por minuto. En algún punto inicia el reloj.

### a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los siguientes 3 minutos la masa radioactiva emita 30 partículas?

En 3 minutos, el parámetro de Poisson es:

$$\lambda_{3\text{ min}} = 15 \times 3 = 45$$

Queremos calcular la probabilidad de exactamente 30 partículas:

$$P(X = 30) = \text{dpois}(30, \lambda = 45)$$

```
# Parámetros
lambda_3min <- 15 * 3
```

```r
# Probabilidad de exactamente 30 partículas
probabilidad_a <- dpois(30, lambda = lambda_3min)
probabilidad_a

## [1] 0.00426053
```

### b) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran cinco segundos a lo más antes de la siguiente emisión?

La espera entre emisiones sigue una distribución exponencial con:

$$\lambda = \frac{15}{60} \text{ (llegadas por segundo)}$$

Queremos calcular la probabilidad de que $T \leq 5$:

$$P(T \leq 5) = \text{pexp}\left(5, \text{rate} = \frac{15}{60}\right)$$

```r
# Parámetros
lambda_segundos <- 15 / 60

# Probabilidad de que T <= 5 segundos
probabilidad_b <- pexp(5, rate = lambda_segundos)
probabilidad_b

## [1] 0.7134952
```

### c) ¿Cuánto es la mediana del tiempo de espera de la siguiente emisión?

La mediana de una distribución exponencial es:

$$\text{Mediana} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

```r
lambda <- 15
# Cálculo de la mediana
mediana_c <- log(2) / lambda
mediana_c

## [1] 0.04620981
```

### d) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran a lo más cinco segundos antes de la segunda emisión?

La espera para la segunda emisión sigue una distribución gamma con:

$$k = 2, \quad \lambda = \frac{15}{60}$$

Queremos calcular la probabilidad de que $T \leq 5$:

$$P(T \leq 5) = \text{pgamma}\left(5,\text{shape} = 2,\text{rate} = \frac{15}{60}\right)$$

```
# Probabilidad para la segunda emisión
probabilidad_d <- pgamma(5, shape = 2, rate = lambda_segundos)
probabilidad_d

## [1] 0.3553642
```

## e) ¿En que rango se encuentra el 50% del tiempo central que transcurre antes de la segunda emisión?

Buscamos el percentil 25% y 75% de una distribución gamma con:

$$k = 2, \quad \lambda = 15$$

Los percentiles se calculan usando la función de cuantiles de la distribución gamma:

- Percentil 25%:

$$Q(0.25) = \text{qgamma}(0.25,\text{shape} = 2,\text{rate} = 15$$

- Percentil 75%:

$$Q(0.75) = \text{qgamma}(0.75,\text{shape} = 2,\text{rate} = 15$$

```
# Cálculo de los percentiles 25% y 75%
percentil_25 <- qgamma(0.25, shape = 2, rate = lambda)
percentil_75 <- qgamma(0.75, shape = 2, rate = lambda)

# Mostrar el rango
cat("Rango central del 50%:", percentil_25, "-", percentil_75, "\n")

## Rango central del 50%: 0.06408525 - 0.179509
```