

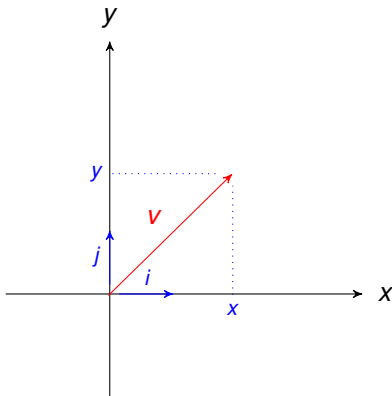
- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de equações lineares
- 3 Determinantes
- 4 Espaços Vetoriais
  - Escalares e vetores
  - Operações com vetores
  - Definição axiomática de espaço vetorial
  - Subespaços
  - Geradores
  - Independência linear
  - Base e dimensão
  - Característica de uma matriz e classificação de sistemas

O tipo mais simples de grandeza física pode ser caracterizada por um número e uma unidade de medida. Uma tal quantidade é designada por **escalar**.

Exemplos: temperatura, massa, resistência de um condutor elétrico, número de bactérias por  $cm^3$ , preço.

No entanto grandezas como, por exemplo, deslocamento, velocidade e força necessitam da indicação de um número que representa a sua magnitude e da indicação de uma direção e um sentido, que podem ser representados por sequências de números mediante a introdução de um referencial. Tais quantidades são designadas por **vetores**.

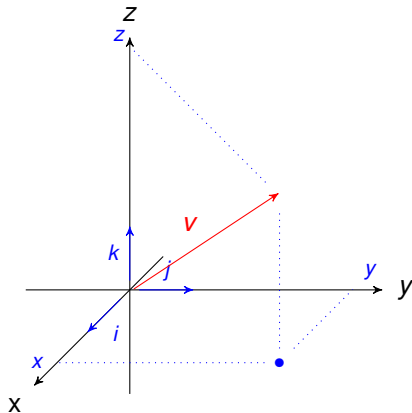
## Reperesentação de vetores no plano



$$v = x i + y j = (x, y).$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

## Representação de vetores no espaço



$$v = xi + yj + zk = (x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

## Operações fundamentais com vetores

1 a adição de vetores:

$$u, v \text{ vetores} \mapsto u + v \text{ vetor},$$

2 a multiplicação por um escalar:

$$\alpha \in \mathbb{R}, \text{ } u \text{ vetor} \mapsto \alpha u \text{ vetor}$$

As operações vetoriais podem ser definidas usando a representação analítica dos vetores. Por exemplo em  $\mathbb{R}^3$ ,

$$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

$$u = (x_1, y_1, z_1)$$

$$v = x_2i + y_2j + z_2k$$

$$V = (x_2, y_2, z_2)$$

$$u + v = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$$

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\alpha U = (\alpha x_1)i + (\alpha y_1)j + (\alpha z_1)k$$

$$\alpha U = (\alpha X_1, \alpha Y_1, \alpha Z_1)$$

## Definição

Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

No conjunto  $\mathbb{R}^n$  as operações de adição e de multiplicação por um escalar definem-se da seguinte forma: para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $u = (x_1, \dots, x_n)$  e  $v = (y_1, \dots, y_n)$  elementos de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha U = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Os elementos de  $\mathbb{R}^n$  designam-se **vetores** e os números reais designam-se **escalares**. Num vetor  $u = (x_1, \dots, x_n)$  o número  $x_i$  diz-se a  **$i$ -ésima coordenada** de  $u$ .

## Definição

Sejam  $u$  e  $v$  vetores. Um vetor  $w$  é combinação linear de  $u$  e  $v$  se existirem escalares  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$w = \alpha u + \beta v.$$

Podemos generalizar a definição anterior para um número qualquer  $k$  de vetores. Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são escalares e  $v_1, \dots, v_k$  são vetores, então o vetor

$$\alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

diz-se uma combinação linear de  $v_1, \dots, v_k$ .

## Definição axiomática de espaço vetorial

Se  $\mathcal{V}$  é um conjunto onde estão definidas as aplicações:

- 1 a adição em  $\mathcal{V}$ ,  $+$  :  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , tal que
  - 1 para quaisquer  $u, v \in \mathcal{V}$ ,  $u + v = v + u$ ,
  - 2 para quaisquer  $u, v, w \in \mathcal{V}$ ,  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,
  - 3 existe  $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$  tal que, para qualquer  $u \in \mathcal{V}$ ,  $u + 0_{\mathcal{V}} = u$ , o qual se designa vetor nulo,
  - 4 para qualquer  $u \in \mathcal{V}$ , existe  $-u \in \mathcal{V}$  tal que  $u + (-u) = 0_{\mathcal{V}}$ , o qual se designa simétrico de  $u$ ;
- 2 a multiplicação por um escalar,  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , tal que
  - 1 para quaisquer  $u, v \in \mathcal{V}$ ,  
 $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$ ,
  - 2 para quaisquer  $u \in \mathcal{V}$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda + \gamma) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\gamma \cdot u)$ ,
  - 3 para quaisquer  $u \in \mathcal{V}$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda\gamma) \cdot u = \lambda \cdot (\gamma \cdot u)$ ,
  - 4 para qualquer  $u \in \mathcal{V}$ ,  $1 \cdot u = u$ ;

então diz-se que a estrutura  $(\mathcal{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$  é um espaço vetorial ou, abreviadamente, que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial real.

## Proposição

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial. Então,

- para qualquer escalar  $\lambda$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ ;
- para qualquer  $v \in V$ ,  $\mathbf{0} \cdot v = \mathbf{0}_V$ ;
- dados um escalar  $\lambda$  e  $v \in V$ , se  $\lambda \cdot v = \mathbf{0}_V$ , então  $\lambda = 0$  ou  $v = \mathbf{0}_V$ ;
- para quaisquer escalar  $\lambda$  e  $v \in V$ ,

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v).$$

## EXEMPLO 1

O conjunto  $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 0\}$  com as operações

$$\begin{aligned}
 + : \quad S \times S &\longrightarrow S \\
 ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \cdot : \quad \mathbb{R} \times S &\longrightarrow S \\
 (\lambda, (x_1, x_2)) &\longmapsto (\lambda x_1, \lambda x_2)
 \end{aligned}$$

é um espaço vetorial, em que a soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar são as restrições a  $S$  das respectivas operações em  $\mathbb{R}^2$ . Em particular, o vetor nulo em  $\mathbb{R}^2$ ,  $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ , pertence a  $S$  e o simétrico de um vetor  $(a, b) \in S$  é o vetor  $(-a, -b)$  que também pertence a  $S$ .

Dado um espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , que propriedades deve satisfazer um seu subconjunto  $S$  para que sejam preservadas as propriedades de espaço vetorial?

## Definição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ . Diz-se que  $\mathcal{S}$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{V}$ , e escreve-se  $\mathcal{S} \leq \mathcal{V}$ , se:

- 1  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ;
- 2 se  $u, v \in \mathcal{S}$ , então  $u + v \in \mathcal{S}$  (i.e.,  $\mathcal{S}$  é fechado para a adição);
- 3 se  $v \in \mathcal{S}$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \cdot v \in \mathcal{S}$  (i.e.,  $\mathcal{S}$  é fechado para a multiplicação por um escalar).

Um subespaço vetorial  $\mathcal{S}$  é um espaço vetorial em que o conjunto dos vetores está contido no conjunto dos vetores de outro espaço vetorial  $\mathcal{V}$  e em que as operações são a restrição a  $\mathcal{S}$  das operações de  $\mathcal{V}$ .

## EXEMPLOS 2

Os seguintes conjuntos são subespaços de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Será  $S_1 \cap S_2$  um subespaço? E  $S_1 \cup S_2$ ?

### EXEMPLOS 3

Os seguintes conjuntos são subespaços de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(x, x - y, y + x) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0, y + z = 0\}.$$

Será  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  um subespaço? E  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$ ? E  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ? E  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_3$ ?

## EXEMPLOS 4

Quais dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, serão espaços vetoriais:

- $\mathbb{R}^2$ ?
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ ?
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\}$ ?
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\}$ ?
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ ?
- Que subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  são espaços vetoriais?

## EXEMPLOS 5

Quais dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ , com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, serão espaços vetoriais:

- $\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + 2\}$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, 2x + y + z = 0\}$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, x - y + z = 0\}$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, x - y + z = 1\}$ ?
- Que subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  são espaços vetoriais?

### Proposição

Dado um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  qualquer, são subespaços vetoriais de  $\mathcal{V}$  o próprio  $\mathcal{V}$  e  $\{0_{\mathcal{V}}\}$ .

Mais ainda, qualquer subespaço  $S$  de  $\mathcal{V}$  é tal que  $\{0_{\mathcal{V}}\} \subseteq S \subseteq \mathcal{V}$ .

### Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $S_1, S_2 \leq \mathcal{V}$ . Então,  $S_1 \cap S_2 \leq \mathcal{V}$ .

### Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $S_1, S_2 \leq \mathcal{V}$ . Então,  $S_1 \cup S_2 \leq \mathcal{V}$  se e só se  $S_1 \subseteq S_2$  ou  $S_2 \subseteq S_1$ .

## EXEMPLO 6

Considere o seguinte sistema homogêneo de equações lineares em 4 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$C_S = \{(-2\alpha, \alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Notar que:

- $(0, 0, 0, 0)$  é solução do sistema;
- sendo  $(-2a, a, a, 0), (-2b, b, b, 0) \in C_S$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então
  - $(-2a, a, a, 0) + (-2b, b, b, 0) = (-2(a+b), a+b, a+b, 0) \in C_S$ ;
  - $\lambda(-2a, a, a, 0) = (-2\lambda a, \lambda a, \lambda a, 0) \in C_S$ .

Logo  $C_S \leq \mathbb{R}^4$ .

## Subespaços

Será que o exemplo anterior é um caso particular, ou será que as soluções de um qualquer sistema homogéneo  $AX = 0$  de  $m$  equações em  $n$  incógnitas constituem um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ ?

## Proposição

O conjunto das soluções de um sistema homogéneo de  $m$  equações em  $n$  incógnitas é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

Mais, veremos que todo o subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  é o conjunto das soluções de um sistema homogéneo de equações lineares em  $n$  incógnitas.

E relativamente ao conjunto das soluções de um sistema não homogéneo, será que é um subespaço vetorial?

O conjunto das soluções de um sistema de equações lineares não homogéneo não é um subespaço vetorial.

## Proposição

Num espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , dado  $C \subseteq \mathcal{V}$ , o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de  $C$ ,

$$\{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de  $\mathcal{V}$  e é o menor subespaço que contém  $C$ .

O subespaço das combinações lineares de vetores de  $C$  representa-se por  $\langle C \rangle$ .

## Definição

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $C \subseteq \mathcal{V}$ .

Se  $\mathcal{V} = \langle C \rangle$ , então diz-se que  $C$  gera  $\mathcal{V}$  ou que  $C$  é um conjunto gerador de  $\mathcal{V}$ .

O espaço vetorial  $\langle C \rangle$  diz-se o espaço gerado por  $C$ .

## EXEMPLO 7

$$C_1 = \{(1, 2, 0, -1), (-1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Os vetores de  $\mathbb{R}^4$  que pertencem a  $\langle C_1 \rangle$  são os vetores  $(x, y, z, w)$  tais que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

é possível.

O sistema só é possível se  $2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0$ . Logo,

$$\langle C_1 \rangle = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0\},$$

ou seja,  $\langle C_1 \rangle$  é conjunto das soluções do sistema homogêneo formado pela equação

$$\left\{ 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0. \right.$$

## EXEMPLO 8

$$C_2 = \{(1, -1, 2), (-1, 0, 1), (0, 0, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Será  $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$ ? Isto é, será que existem  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tais que, para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$(a, b, c) = \alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(-1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 2) ?$$

O sistema  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  é possível e determinado.

Logo,  $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$ . Resolvendo o sistema conclui-se que a solução do sistema é

$$\left(-b, -a-b, \frac{a+3b+c}{2}\right)$$

pelo que

$$(a, b, c) = -b \cdot (1, -1, 2) + (-a-b) \cdot (-1, 0, 1) + \frac{a+3b+c}{2} \cdot (0, 0, 2).$$

## EXEMPLO 9

Como calcular um conjunto gerador de um espaço vetorial?

$$\begin{aligned} S &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + b\} \\ &= \{(a, b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, 0, a) + (0, b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,  $S = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$ .

Pode também verificar-se que

$$S = \langle (2, 1, 3), (0 - 1 - 1) \rangle,$$

o que permite concluir que **um subespaço vetorial admite vários conjuntos geradores**.

## Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $u, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ .

- 1 Qualquer subconjunto de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  gera um subespaço de  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .
- 2  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u, v_1, \dots, v_n \rangle$  se e só se  $u$  é combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

## Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$  e  $\lambda \neq 0$  um escalar. Então,

- 1  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ ;
- 2  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ .

Se um vetor  $v_1$  se escreve como combinação linear dos vetores de um conjunto  $C = \{v_2, \dots, v_n\}$  diremos que  $v_1$  é linearmente dependente dos vetores de  $C$ . Notar que se  $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , então

$$v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n = 0_{\mathcal{V}}.$$

### Definição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial,  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ . Diz-se que  $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes se sendo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  escalares tais que

$$0_{\mathcal{V}} = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n,$$

então  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Se  $v_1, \dots, v_n$  não são vetores linearmente independentes, então dizem-se linearmente dependentes.

## EXEMPLOS 10

$$\bullet C_1 = \{(1, 3, 0, -1), (2, 3, -4, 1), (4, 3, -12, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) &= 2(1, 3, 0, -1) - 3(2, 3, -4, 1) + (4, 3, -12, 5) \\ &= -(1, 3, 0, -1) + \frac{3}{2}(2, 3, -4, 1) - \frac{1}{2}(4, 3, -12, 5). \end{aligned}$$

Os vetores de  $C_1$  não são linearmente independentes.

$$\bullet C_2 = \{(1, 2, 1, 3), (-2, 0, 1, -2), (0, -2, 0, 1)\}$$

Serão os vetores de  $C_2$  linearmente independentes?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado. Assim, o vetor nulo, escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores de  $C_2$ , ou seja, os vetores de  $C_2$  são linearmente independentes.

## EXEMPLOS 11

Será um vetor genérico de  $\mathbb{R}^4$ ,  $v = (a, b, c, d)$ , combinação linear dos vetores do conjunto  $C_2 = \{(1, 2, 1, 3), (-2, 0, 1, -2), (0, -2, 0, 1)\}$ ?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Já vimos que o sistema homogêneo associado é possível e determinado, pelo que a característica da matriz simples é 3 e, conseqüentemente, o sistema é impossível ou possível e determinado.

Assim, se a coluna dos termos independentes for formada pelas coordenadas de vetores de  $\mathbb{R}^4$  que são combinação linear de vetores de  $C_2$ , a característica da matriz ampliada é 3 e o sistema é possível e determinado. Neste caso, os coeficientes da combinação linear são únicos e verifica-se

$$-2a + \frac{b}{2} - 2c + d = 0.$$

Caso contrário, a característica da matriz ampliada é 4 o sistema é impossível.

## Proposição

Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial e  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ . Os vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$  são  $n$  **vetores linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$  tem coeficientes únicos.**

## Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_1, \dots, v_n, u \in \mathcal{V}$ .

- 1 Se  $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente dependentes, então  $u, v_1, \dots, v_n$  são  $n + 1$  vetores linearmente dependentes.
- 2 Se  $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é constituído por vetores linearmente independentes.
- 3 Se  $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes e  $u, v_1, \dots, v_n$  são  $n + 1$  vetores linearmente dependentes, então  $u$  é combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

### Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$  e  $\lambda \neq 0$  um escalar. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- 1  $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes;
- 2  $v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes;
- 3  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes.

## Definição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial finitamente gerado,  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ . A sequência  $(v_1, \dots, v_n)$  diz-se uma **base de  $\mathcal{V}$**  se:

- $\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ;
- $v_1, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente independentes.

De acordo com esta definição, será que o subespaço  $\{0_{\mathcal{V}}\}$  admite uma base?

Um subespaço vetorial que admite uma base finita diz-se **finitamente baseado**.

Base  $\iff$  Conjunto maximal de vetores  
linearmente independentes

## EXEMPLOS 12

Será  $((1, 0, -2), (1, 1, -1), (-1, -1, 3))$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ ?

Para isso é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível, para quaisquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , e o sistema homogêneo associado

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

seja determinado. Equivalentemente, é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível e determinado, para quaisquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

## EXEMPLOS 13

Será  $((0, \frac{1}{2}, 1, 1), (-1, 0, 1, 2))$  uma base do subespaço

$$S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - 2b + c = 0, -d + c = a\}?$$

$S = \{(c - d, c - \frac{1}{2}d, c, d) \mid d, c \in \mathbb{R}\}$ , pelo que a resposta é afirmativa se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - d \\ c - \frac{1}{2}d \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

for possível e determinado, para quaisquer  $c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & c - d \\ \frac{1}{2} & 0 & c - \frac{d}{2} \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{array} \right] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{\text{condensação}} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d \\ 0 & 1 & -c + d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Confirma-se que o sistema é possível e determinado, pelo que qualquer vetor de  $S$  escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores  $(0, \frac{1}{2}, 1, 1)$  e  $(-1, 0, 1, 2)$ .

## Proposição

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial finitamente gerado,  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ . As seguintes condições são equivalentes:

- $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $\mathcal{V}$ ;
- qualquer vetor de  $\mathcal{V}$  escreve-se de forma única como combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

Se  $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $\mathcal{V}$ , e  $v \in \mathcal{V}$ , os coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  da combinação linear  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  dizem-se **as coordenadas de  $v$  na base  $(v_1, \dots, v_n)$** .





## Proposição

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial finitamente baseado. Então, as bases de  $\mathcal{V}$  têm todas o mesmo número de elementos.

### Definição

Sendo  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial finitamente baseado, chama-se **dimensão de  $\mathcal{V}$**  ao número de vetores de uma base de  $\mathcal{V}$ .  
Se  $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$ , então a dimensão de  $\mathcal{V}$  é 0

A dimensão de um espaço  $\mathcal{V}$  finitamente gerado representa-se por

$\dim \mathcal{V}$

Um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão 1 diz-se uma **reta**. Um subespaço de dimensão 2 diz-se um **plano**. Um subespaço de dimensão  $n - 1$  diz-se um **hiperplano**.

Repare-se que em  $\mathbb{R}^m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , um vetor  $(x_1, \dots, x_m)$  pode-se escrever na forma

$$(x_1, \dots, x_m) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m(0, \dots, 0, 1)$$

e os coeficientes  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são únicos.

A sequência

$$((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$$

é uma base de  $\mathbb{R}^m$ , usualmente designada por **base canónica**, e consequentemente

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Os coeficientes  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são as coordenadas de  $(x_1, \dots, x_m)$  na base canónica.

## Caraterística de uma matriz e classificação de sistemas

As colunas de uma matriz de tipo  $m \times n$  podem ser encaradas como sendo  $n$  vetores do espaço  $\mathbb{R}^m$  e as linhas de  $A$  como sendo  $m$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [C_1 C_2 \cdots C_n] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

onde

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} L_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ L_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ L_n &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]. \end{aligned}$$

## Caraterística de uma matriz e classificação de sistemas

- Transformações elementares nas linhas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.
- Transformações elementares nas colunas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.

O número de linhas linearmente independentes de uma matriz  $A$  é igual ao número de colunas linearmente independentes de  $A$  e igual ao número de pivôs da matriz em forma de escada que resulta de  $A$  por condensação de Gauss.

## Definição

Seja  $A$  uma matriz. A dimensão do espaço gerado pelas linhas de  $A$  diz-se a **caraterística de  $A$**  e representa-se por  $r(A)$ .

Seja  $AX = B$  um sistema de  $m$  equações em  $n$  incógnitas. Então,

$$AX = B \Leftrightarrow [C_1 \cdots C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

### Proposição

Seja  $AX = B$  um sistema de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas.

- 1  $AX = B$  é possível se e só se  $B$  é combinação linear das colunas de  $A$ , isto é, se e só se

$$r(A) = r([A|B]).$$

- 2  $AX = 0$  é determinado se e só se as colunas de  $A$  são linearmente independentes, isto é, se e só se

$$r(A) = n.$$