

# tópicos de matemática discreta | LEI

cláudia m. araújo

## relações binárias

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a$  está associado a  $b$ .

### definição 4.1

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Chamamos relação binária de  $A$  em  $B$  (ou correspondência de  $A$  para  $B$ ) a qualquer subconjunto  $R$  do produto cartesiano  $A \times B$ . Os conjuntos  $A$  e  $B$  dizem-se, respectivamente, o conjunto de partida e o conjunto de chegada de  $R$ . Quando  $A = B$ , dizemos simplesmente que  $R$  é uma relação binária em  $A$ .  $R$  é um subconjunto de  $A \times B$ . Logo  $R$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$ .

Se  $(a, b) \in R$ , então dizemos que  $a$  está relacionado com  $b$  por  $R$  e escrevemos  $a R b$ .

Se  $(a, b) \notin R$ , escrevemos  $a \not R b$  e dizemos que  $a$  não está relacionado com  $b$  por  $R$ .

## relações binárias

## exemplo 4.2

1 | Sejam  $A = \{0, 2, 4\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Então

$$R_1 = \{(0, 1)\},$$

R1,R2,R3 são subconjuntos de  $A^*B$ ,  $R_2 = \{(0, 1), (0, 2), (2, 2), (4, 1)\}$ ,

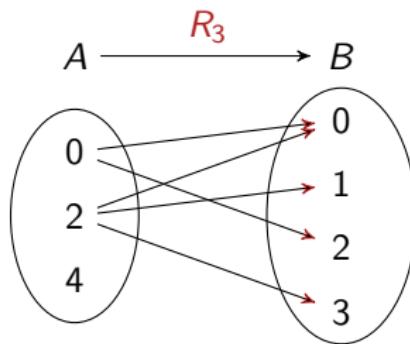
ou seja são relações binárias de A em B.

$$R_3 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$$

são relações binárias de  $A$  em  $B$ , enquanto que

$$S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

não o é pois  $S \not\subseteq A \times B$ . A correspondência  $R_3$ , por exemplo, pode ser descrita pelo seguinte diagrama



## relações binárias

2 | Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$ , e seja  $R$  a relação de  $A$  em  $B$  definida por

$a R b$  se e só se  $a|b$  (ou seja,  $a$  divide  $b$ ).

Então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}.$$

Note-se que

$2 R 9$  pois  $2 \nmid 9$ , embora  $(2, 9) \in A \times B$ ;

$5 R 10$  pois  $(5, 10) \notin A \times B$ , embora  $5|10$ .

3 | Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$ . Então,  $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$  que pode ser definida por

$a R b$  se e só se  $b = a^2$  ( $a \in A, b \in B$ ).

## relações binárias

4 | Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ . Então

$$\emptyset, \quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}, \quad \{(1, 2), (3, 3)\}, \quad A^2$$

são relações em  $A$ .

$$A = \mathbb{Z} \text{ e } B = \mathbb{Z}$$

5 |  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y = 2x\}$  é uma relação em  $\mathbb{Z}$ . Por exemplo,

$$(0, 0) \in R, \quad (1, 2) \in R, \quad (4, 8) \in R, \\ (-2, -4) \in R, \quad (2, 3) \notin R, \quad (8, 4) \notin R.$$

## relações binárias

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , o conjunto de todas as relações binárias de  $A$  em  $B$  é o conjunto  $\mathcal{P}(A \times B)$ .

Se os conjuntos  $A$  e  $B$  forem finitos e tiverem  $n$  e  $m$  elementos, respectivamente, então  $A \times B$  tem  $n \times m$  elementos, pelo que  $\mathcal{P}(A \times B)$  tem  $2^{n \times m}$  elementos. Assim, existem  $2^{n \times m}$  relações binárias de  $A$  em  $B$ .

Os conjuntos  $\emptyset$  e  $A \times B$  são relações binárias de  $A$  em  $B$ , designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

### definição 4.3

Seja  $A$  um conjunto não vazio. Então,

$$\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$$

são relações binárias em  $A$ . A  $\text{id}_A$  chamamos **relação identidade em  $A$**  e a  $\omega_A$  chamamos **relação universal em  $A$** .

## relações binárias

## definição 4.4

Sejam  $A, B$  conjuntos e  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ . Chamamos **domínio de  $R$**  ao conjunto

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b \in B} (a, b) \in R\};$$

Chamamos **imagem ou contradomínio de  $R$**  ao conjunto

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a \in A} (a, b) \in R\}.$$

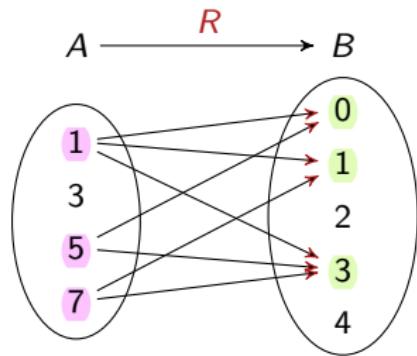
## exemplo 4.5

1 | Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e a relação  $R$  de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  se e só se  $a < b$ . Então,

- i.  $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\};$
- ii.  $\text{Dom}(R) = \{2, 4\};$
- iii.  $\text{Im}(R) = \{3, 4, 5\}.$

## relações binárias

2 | Seja  $R = \{(1, 0), (1, 1), (1, 3), (5, 0), (5, 3), (7, 1), (7, 3)\}$  a relação do conjunto  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  no conjunto  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , ilustrada pelo seguinte diagrama



Então,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 5, 7\},$$

$$\text{Im}(R) = \{0, 1, 3\}.$$

3 | Seja  $R$  a relação binária em  $\mathbb{Z}$  definida por

$$a R b \quad \text{se e só se} \quad |a| = 2b.$$

Temos  $\text{Dom}(R) = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\}$  e  $\text{Im}(R) = \mathbb{N}_0$ .

## relações binárias

Duas relações binárias  $R$  e  $S$  de um conjunto  $A$  num conjunto  $B$  são iguais quando os conjuntos  $R$  e  $S$  são iguais. Em particular,  $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$  e  $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$ . Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que  $R = S$  sempre que  $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$  e  $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$ .

## exemplo 4.6

Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ . Seja  $R$  a relação de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  se e só se  $a < b$  e seja  $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ . Então,

- i.  $\text{Dom}(R) = \{2, 4\} = \text{Dom}(S)$ ;
- ii.  $\text{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \text{Im}(S)$ ;
- iii.  $(2, 5) \in R$  mas  $(2, 5) \notin S$ , pelo que  $R \neq S$ .

## relações binárias

Considere dois conjuntos: o conjunto **X** com elementos  $x$  e o conjunto **Y** com elementos  $y$ . Isto é:

$$f : X \rightarrow Y$$

diz-se que a função  $f$  de **X** em **Y** que relaciona cada elemento  $x$  em **X**, um único elemento  $y = f(x)$  em **Y**.<sup>[3]</sup>

Outra maneira de dizer isto é afirmar que  $f$  é uma [relação binária](#) entre os dois conjuntos tal que:

### definição 4.7

1.  **$f$  é unívoca**: se  $y = f(x)$  e  $z = f(x)$ , então  $y = z$ ;
2.  **$f$  é total**: para todos  $x$  em **X**, existe um  $y$  em **Y** tal que  $y = f(x)$ .

Dados conjuntos  $A$  e  $B$ , uma relação binária  $R$  de  $A$  em  $B$  diz-se:

**total** quando  $\text{Dom}(R) = A$ ;

**unívoca** quando  $\forall_{a \in A} \forall_{b_1, b_2 \in B} ((a R b_1 \wedge a R b_2) \rightarrow b_1 = b_2)$ ;

**uma função ou aplicação** quando  $R$  é uma relação total e unívoca.

### observação 4.8

Escreve-se  $f : A \rightarrow B$  para indicar que  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ .

Se  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$  então, para cada  $a \in A$ , escreve-se  $f(a) = b$ , onde  $b$  é o único elemento de  $B$  tal que  $(a, b) \in f$ , e diz-se que  $b$  é a **imagem de  $a$  por  $f$**  ou que  $b$  é o **valor que a função  $f$  assume em  $a$** .

## relações binárias

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se  $R$  e  $S$  são relações binárias de  $A$  em  $B$ , o mesmo acontece com  $R \cup S$ ,  $R \cap S$ ,  $R \setminus S$ , pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de  $A \times B$ .

## exemplo 4.9

Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e as relações  $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$  e  $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ . Então,

- i.  $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$ ;
- ii.  $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$ ;
- iii.  $R \setminus S = \{(2, 5)\}$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$ .

## relações binárias

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

### definição 4.10

Sejam  $A, B$  conjuntos e  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ . Chama-se **relação inversa de  $R$** , e representa-se por  $R^{-1}$ , a relação de  $B$  em  $A$  definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

### exemplo 4.11

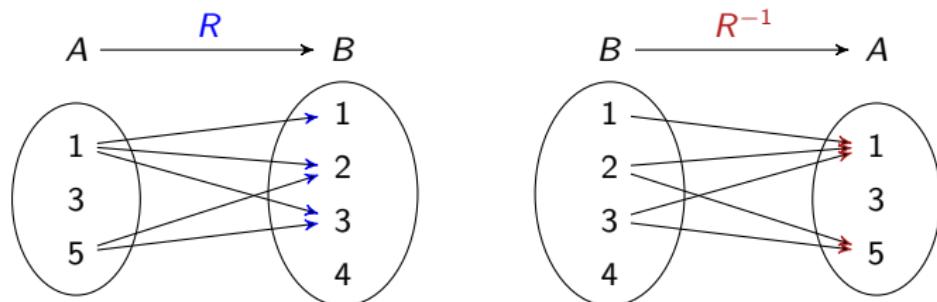
1 | Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e a relação  $R$  de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  se e só se  $a < b$ . Uma vez que

$R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ , tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

## relações binárias

2 | Consideremos os conjuntos  $A = \{1, 3, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . A relação  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 2), (5, 3)\}$  de  $A$  em  $B$  tem como inversa a relação  $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 5), (3, 5)\}$  de  $B$  em  $A$ .



3 | A relação  $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$  em  $\mathbb{N}$  tem como inversa a relação em  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \\ &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : y \geq x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\}. \end{aligned}$$

## relações binárias

## proposição 4.12

Sejam  $A, B$  conjuntos e  $R$  e  $S$  relações binárias de  $A$  em  $B$ . Então,

$$1 \mid \text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R) \text{ e } \text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R).$$

$$2 \mid (R^{-1})^{-1} = R.$$

$$3 \mid \text{Se } R \subseteq S, \text{ então } R^{-1} \subseteq S^{-1}.$$

## definição 4.13

Sejam  $A, B, C, D$  conjuntos,  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$  e  $S$  uma relação binária de  $C$  em  $D$ . Chama-se **relação composta de  $S$  com  $R$** , e representa-se por  $S \circ R$ , a relação binária de  $A$  em  $D$  definida por

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

É de notar que, nas condições da definição anterior, se  $B \cap C = \emptyset$ , então  $S \circ R = \emptyset$ .

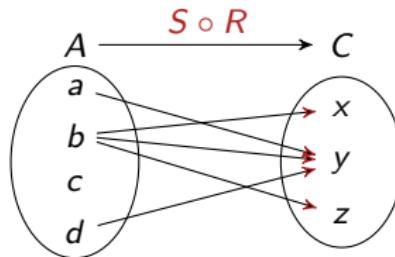
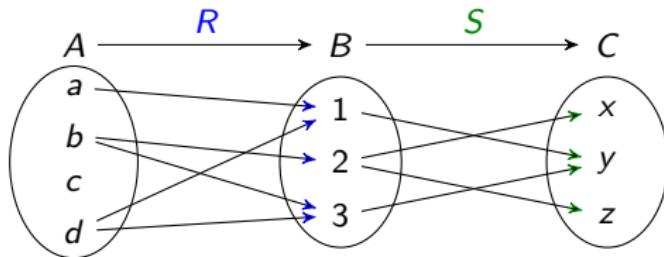
## relações binárias

## exemplo 4.14

1 | Sejam  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ . Dadas as relações  $R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1), (d, 3)\}$ , de  $A$  em  $B$ , e  $S = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}$ , de  $B$  em  $C$ , temos que

$$S \circ R = \{(a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (d, y)\}$$

é uma relação binária de  $A$  em  $C$ .



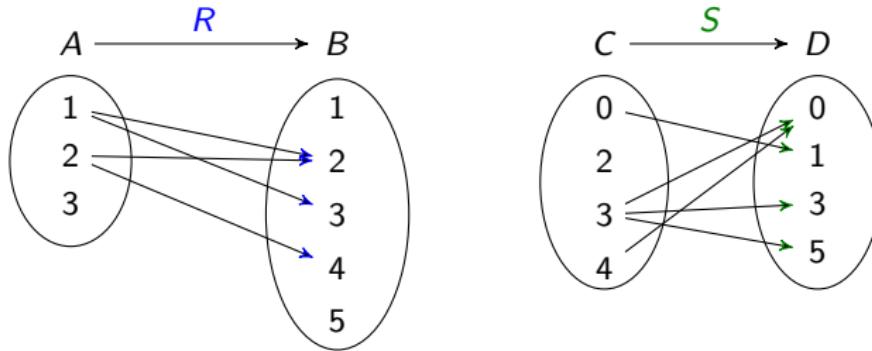
## relações binárias

2 | Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{0, 2, 3, 4\}$  e  $D = \{0, 1, 3, 5\}$ . Consideremos as relações binárias

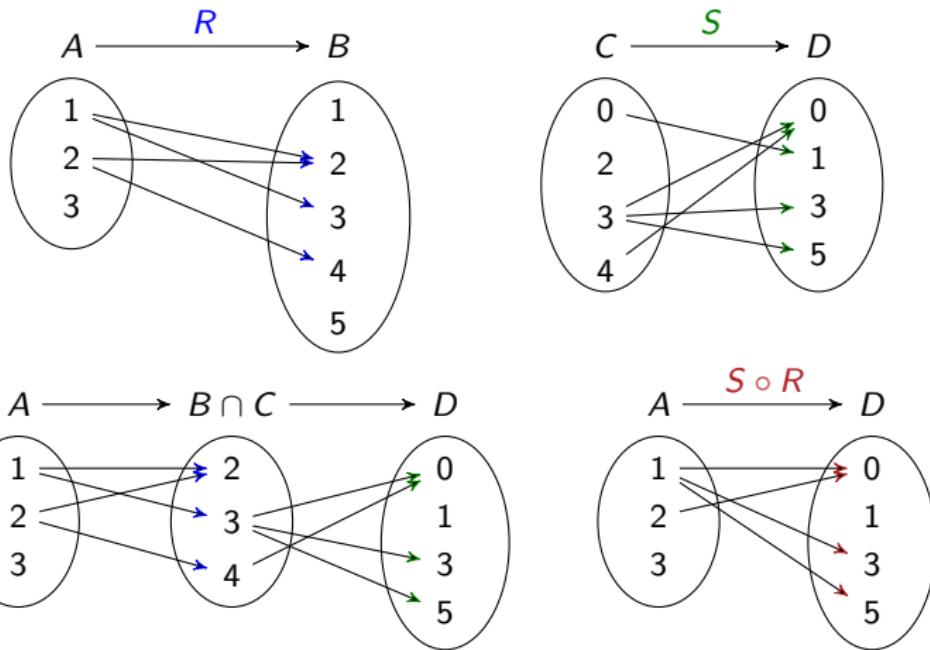
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(0, 1), (3, 0), (3, 3), (3, 5), (4, 0)\} \subseteq C \times D.$$

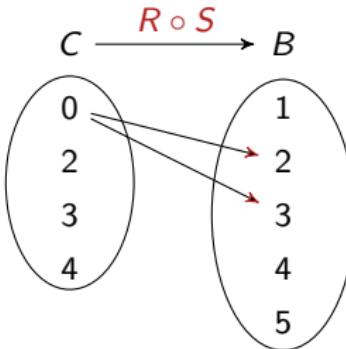
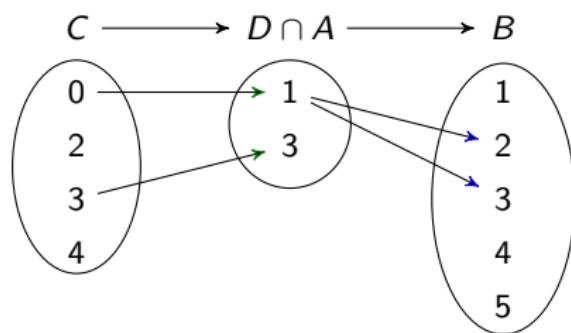
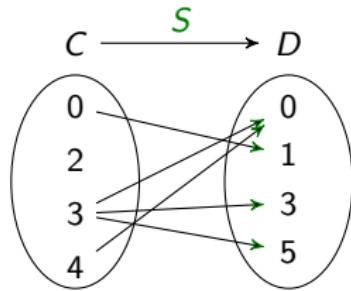
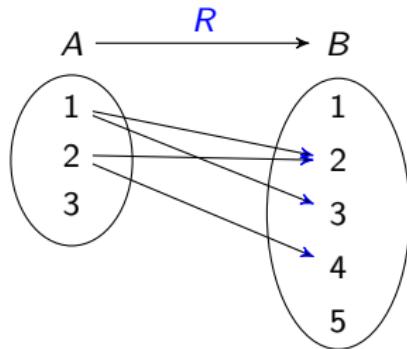


## relações binárias



Tem-se  $S \circ R = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0)\}$ .

## relações binárias



Além disso,  $R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}$ .

## relações binárias

Atendendo ao exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

**proposição 4.15**

Sejam  $R$ ,  $S$  e  $T$  relações binárias onde  $R \subseteq A \times B$ . Então,

$$1 | \text{ Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R) \text{ e } \text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S).$$

$$2 | (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

$$3 | R \circ \text{id}_A = R = \text{id}_B \circ R.$$

$$4 | (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

**demonstração**

1 | Comecemos por mostrar que  $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R)$ .

Dado  $x \in \text{Dom}(S \circ R)$ , existe  $y$  tal que  $(x, y) \in S \circ R$ . Por definição de relação composta,  $(x, z) \in R$  e  $(z, y) \in S$  para algum  $z$ .

Em particular,  $(x, z) \in R$ , pelo que  $x \in \text{Dom}(R)$ .

De forma semelhante prova-se que  $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$ .

## relações binárias

2 | Seja  $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$ . Então,  $(x, z) \in R$  e  $(z, y) \in T \circ S$  para algum  $z$ .

De  $(z, y) \in T \circ S$  segue que  $(z, w) \in S$  e  $(w, y) \in T$  para algum  $w$ .

Ora, como  $(x, z) \in R$  e  $(z, w) \in S$ , temos que  $(x, w) \in S \circ R$ .

Assim,  $(x, w) \in S \circ R$  e  $(w, y) \in T$ , pelo que  $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$ . Logo,

$(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ .

De modo análogo prova-se que  $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ .

3 | exercício

4 | Para todo o objeto  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\quad \text{se e só se } (y, x) \in S \circ R \\
 &\quad \text{se e só se } \exists_z ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S) \\
 &\quad \text{se e só se } \exists_z ((z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}) \\
 &\quad \text{se e só se } \exists_z ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \\
 &\quad \text{se e só se } (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

## propriedades das relações binárias

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caracterizar algumas classes especiais de relações binárias.

### definição 4.16

Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Dizemos que

- 1 |  $R$  é **reflexiva** quando  $\forall_{a \in A} (a, a) \in R$ ;
- 2 |  $R$  é **simétrica** quando  $\forall_{a, b \in A} ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$ ;
- 3 |  $R$  é **antissimétrica** quando  $\forall_{a, b \in A} (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b)$ ;
- 4 |  $R$  é **transitiva** quando  $\forall_{a, b, c \in A} (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$ .

Note-se que uma relação binária  $R$  em  $A$  é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a, b \in A} (((a, b) \in R \wedge a \neq b) \rightarrow (b, a) \notin R).$$

## propriedades das relações binárias

## exemplo 4.17

Seja  $A$  um conjunto.

- 1 | A relação  $\text{id}_A$  é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em  $A$ .
- 2 | A relação  $\omega_A$  é reflexiva, simétrica e transitiva em  $A$ . Esta relação é antissimétrica se e só se  $A$  tem no máximo um elemento.
- 3 | A relação  $\emptyset$  é simétrica, transitiva e antissimétrica em  $A$ . Esta relação é reflexiva se e só se  $A = \emptyset$ .
- 4 | Se  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$ , então:
  - i. uma vez que  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$ , a relação  $R$  é reflexiva;

## propriedades das relações binárias

- ii. o par  $(1, 2)$  é elemento de  $R$ , mas  $(2, 1) \notin R$ , pelo que  $R$  não é simétrica;
- iii. como não existem elementos distintos  $a, b \in A$  tais que  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , podemos afirmar que a relação  $R$  é antissimétrica;
- iv.  $R$  é transitiva, visto que

$$\begin{aligned}
 ((1, 1) \in R \wedge (1, 1) \in R) &\rightarrow (1, 1) \in R \\
 ((1, 1) \in R \wedge (1, 2) \in R) &\rightarrow (1, 2) \in R \\
 ((1, 1) \in R \wedge (1, 3) \in R) &\rightarrow (1, 3) \in R \\
 ((1, 2) \in R \wedge (2, 2) \in R) &\rightarrow (1, 2) \in R \\
 ((1, 2) \in R \wedge (2, 3) \in R) &\rightarrow (1, 3) \in R \\
 ((1, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) &\rightarrow (1, 3) \in R \\
 ((2, 2) \in R \wedge (2, 2) \in R) &\rightarrow (2, 2) \in R \\
 ((2, 2) \in R \wedge (2, 3) \in R) &\rightarrow (2, 3) \in R \\
 ((2, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) &\rightarrow (2, 3) \in R \\
 ((3, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) &\rightarrow (3, 3) \in R \\
 ((4, 4) \in R \wedge (4, 4) \in R) &\rightarrow (4, 4) \in R
 \end{aligned}$$

e o antecedente da implicação  $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$  é falso para as restantes combinações de valores para  $a, b$  e  $c$ .

## propriedades das relações binárias

### proposição 4.18

Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Então

- 1 |  $R$  é reflexiva se e só se  $\text{id}_A \subseteq R$ ;
- 2 |  $R$  é simétrica se e só se  $R^{-1} = R$ ;
- 3 |  $R$  é transitiva se e só se  $R \circ R \subseteq R$ ;
- 4 |  $R$  é antissimétrica se e só se  $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$ .

[demonstração](#) | [exercício](#).

## relações de equivalência

### definição 4.19

Seja  $A$  um conjunto. Uma relação binária  $R$  diz-se uma **relação de equivalência em  $A$**  quando  $R$  é reflexiva, simétrica e transitiva.

### exemplo 4.20

1 | Dado um conjunto  $A$  não vazio, as relações  $id_A$  e  $\omega_A$  são relações de equivalência em  $A$ .

2 | Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ . Então,

i.  $R$  é reflexiva uma vez que

$$id_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii.  $R$  é simétrica pois

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii.  $R$  é transitiva porque

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii.,  $R$  é uma relação de equivalência em  $A$ .

## relações de equivalência

3 | Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos e  $f : A \rightarrow B$  uma função. A relação binária definida em  $A$  por

$$x R_f y \text{ se e só se } f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em  $A$ . De facto,

- i.  $R_f$  é reflexiva:  $\forall_{x \in A} f(x) = f(x)$ ;
- ii.  $R_f$  é simétrica:  $\forall_{x,y \in A} (f(x) = f(y) \rightarrow f(y) = f(x))$ ;
- iii.  $R_f$  é transitiva:  $\forall_{x,y,z \in A} ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \rightarrow f(x) = f(z))$ .

## relações de equivalência

4 | Seja  $R$  a relação binária em  $\mathbb{Z}$  definida por

$$a R b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível por } 3.$$

Facilmente verificamos que  $R$  é uma relação de equivalência. Com efeito,

- i. para todo o  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a - a = 0$  é divisível por 3, pelo que  $a R a$ . Portanto,  $R$  é reflexiva;
- ii. para todos os  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se  $a R b$ , então  $a - b = 3k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , pelo que  $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$ , com  $-k \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $b R a$  e, assim,  $R$  é simétrica;
- iii. para todos os  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a R b$  e  $b R c$ , então  $a - b = 3k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , e  $b - c = 3k'$ , para algum  $k' \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$ , com  $k + k' \in \mathbb{Z}$ , pelo que  $a R c$ . Logo,  $R$  é transitiva.

## relações de equivalência

Notemos que, dado  $a \in \mathbb{Z}$ ,

- $1 R a$  se e só se  $1 - a = 3k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$
- se e só se  $a = 3k + 1$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$
- se e só se  $a$  tem resto 1 na divisão inteira por 3.

De modo análogo se prova que  $2 R a$  se e só se  $a$  tem resto 2 na divisão inteira por 3 e  $0 R a$  se e só se  $a$  tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e  $R$  é uma relação de equivalência, os elementos de  $\mathbb{Z}$  podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

## relações de equivalência

### definição 4.21

Sejam  $R$  uma relação de equivalência num conjunto  $A$  e  $x \in A$ . Chama-se **classe de equivalência de  $x$  módulo  $R$**  ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de  $x$** , ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de  $A$  chamamos **conjunto quociente de  $A$  módulo  $R$**  e representamo-lo por  $A/R$ , ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

### exemplo 4.22

1 | Consideremos a relação de equivalência  $R$  definida no exemplo anterior. Então,

$$[0]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k\}$$

$$[1]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 1\}$$

$$[2]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 2 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 2\}$$

e  $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$ .

## relações de equivalência

2 | Seja  $A \neq \emptyset$ . Consideremos a relação de equivalência  $\text{id}_A$ . Para  $x \in A$ , temos que

$$[x]_{\text{id}_A} = \{y \in A \mid y \text{id}_A x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\text{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja  $A \neq \emptyset$ . Consideremos a relação de equivalência  $\omega_A$ . Para  $x \in A$ , temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y \omega_A x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Consideremos a relação de equivalência  $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ . Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim,  $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ .

## relações de equivalência

## exemplo 4.23

Consideremos de novo as relações referidas no exemplo 4.22 e os respectivos conjuntos quociente.

- 1 | O conjunto quociente  $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$ , onde  $R$  é a relação de equivalência definida por  $a R b$  se e só se  $a - b$  é divisível por 3, é uma partição de  $\mathbb{Z}$ .
- 2 | Dado  $A \neq \emptyset$ , temos que  $A/\text{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$ . É claro que  $A/\text{id}_A$  é uma partição de  $A$ .
- 3 | Dado  $A \neq \emptyset$ , temos que  $A/\omega_A = \{A\}$  e  $\{A\}$  é uma partição de  $A$ .
- 4 | Se  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ , então  $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ . Facilmente se verifica que  $A/R$  é uma partição de  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

## relações de equivalência

Tal como se estabelece no resultado seguinte, a cada relação de equivalência definida num conjunto  $A$  está associada uma partição de  $A$ .

### proposição 4.24

Seja  $R$  uma relação de equivalência num conjunto  $A$ . Então,  $A/R$  é uma partição de  $A$ .

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

### proposição 4.25

Sejam  $A$  um conjunto,  $\Pi$  uma partição de  $A$  e  $\mathcal{R}_\Pi$  a relação binária em  $A$  definida por

$$x \mathcal{R}_\Pi y \text{ se e só se } \text{ existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então,  $\mathcal{R}_\Pi$  é uma relação de equivalência em  $A$ .

## relações de equivalência

## exemplo 4.26

1 | Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$  uma partição de  $A$ . Então,

$$\mathcal{R}_\Pi = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4), (5, 5)\}.$$

2 | Sejam  $A = \mathbb{Z}$  e  $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$ , onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \mathcal{R}_\Pi y \text{ se e só se } x - y \text{ é divisível por } 3.$$

## relações de equivalência

## observação 4.27

Sejam  $A$  um conjunto,  $R$  uma relação de equivalência em  $A$  e  $\Pi$  uma partição de  $A$ . Então,

1 |  $A/R$  é uma partição de  $A$  e

$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 |  $\mathcal{R}_\Pi$  é uma relação de equivalência em  $A$  e

$$A/(\mathcal{R}_\Pi) = \Pi.$$

## relações de ordem parcial

### definição 4.28

Seja  $A$  um conjunto. Uma relação binária  $R$  diz-se uma **relação de ordem parcial em  $A$**  quando  $R$  é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par  $(A, R)$  dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

### exemplo 4.29

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

- 1 |  $(A, \text{id}_A)$ , onde  $A$  é um conjunto e  $\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$ .
- 2 |  $(\mathbb{N}, \leq)$ , onde  $\leq$  é a relação “menor ou igual” usual em  $\mathbb{N}$  (para todo  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \leq x$ , logo  $\leq$  é reflexiva; para todos  $x, y \in \mathbb{N}$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$  e, portanto,  $\leq$  é antissimétrica; para todos  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$ , pelo que  $\leq$  é transitiva).
- 3 |  $(\mathbb{N}, |)$ , onde  $|$  é a relação “divide” em  $\mathbb{N}$ .
- 4 |  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ , onde  $A$  é um conjunto qualquer e  $\subseteq$  é a relação de inclusão usual.

## relações de ordem parcial

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto  $A$  por  $\leq$  e o respetivo c.p.o. por  $(A, \leq)$ .

### notação

Dado um c.p.o.  $(A, \leq)$  e dados  $a, b \in A$ , escrevemos

$a \leq b$  e lemos “ $a$  é menor ou igual a  $b$ ” ou “ $a$  precede  $b$ ” para representar  $(a, b) \in \leq$ ;

$a \not\leq b$  e lemos “ $a$  não é menor ou igual a  $b$ ” se  $(a, b) \notin \leq$ ;

$a < b$  e lemos “ $a$  é menor do que  $b$ ” ou “ $a$  precede propriamente  $b$ ” se  $a \leq b$  e  $a \neq b$ ;

$a << b$  e lemos “ $b$  é sucessor de  $a$ ” ou “ $a$  é sucedido por  $b$ ” ou “ $b$  cobre  $a$ ” ou “ $a$  é coberto por  $b$ ” se  $a < b$  e  $\neg(\exists_{c \in A} (a < c \wedge c < b))$ .

## relações de ordem parcial &amp; diagrama de Hasse

## definição 4.30

Dado um c.p.o.  $(A, \leq)$  e dados  $a, b \in A$ , dizemos que  $a, b$  são **comparáveis** quando  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Por outro lado, quando  $a \not\leq b$  e  $b \not\leq a$ , dizemos que  $a$  e  $b$  são **incomparáveis** e escrevemos  $a \parallel b$ .

Um c.p.o.  $(A, \leq)$ , em que  $A$  é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

**1** | cada elemento  $a \in A$  é representado por um ponto do plano:



**2** | se  $a$  e  $b$  são dois elementos de  $A$  tais que  $a \leq b$ , representa-se  $b$  acima de  $a$ ; além disso, se  $a \ll b$  unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.



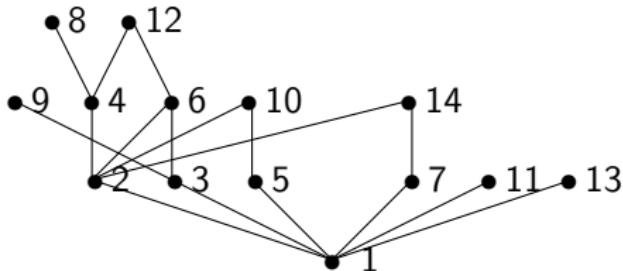
## diagrama de Hasse

## exemplo 4.31

1 | Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$  e  $|$  a ordem parcial definida por

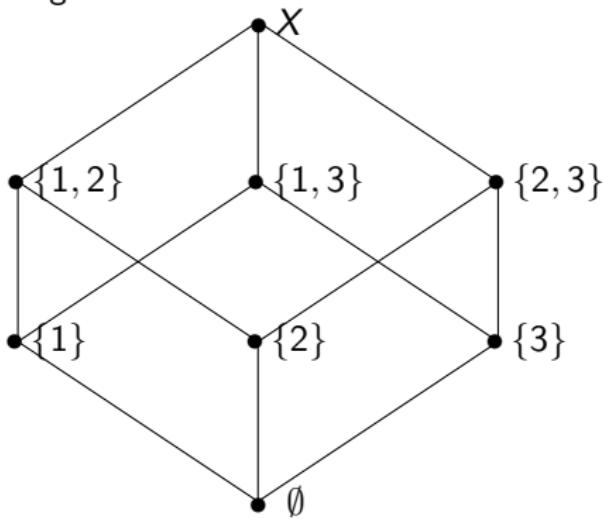
$$x|y \leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} y = kx.$$

O c.p.o.  $(A, |)$  pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



## diagrama de Hasse

2 | Seja  $X = \{1, 2, 3\}$ . O c.p.o.  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



## elementos especiais de um c.p.o.

Dados um c.p.o.  $(A, \leq)$  e  $X$  um suconjunto de  $A$ , podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a  $X$ .

### definição 4.32

Sejam  $(A, \leq)$  um c.p.o.,  $X$  um subconjunto de  $A$  e  $m \in A$ . Dizemos que  $m$  é:

- 1 | **elemento maximal de  $X$**  quando  $m \in X$  e  $\neg(\exists_{x \in X} m < x)$ ;
- 2 | **elemento minimal de  $X$**  quando  $m \in X$  e  $\neg(\exists_{x \in X} x < m)$ ;
- 3 | **majorante de  $X$**  quando  $\forall_{x \in X} x \leq m$ ;
- 4 | **minorante de  $X$**  quando  $\forall_{x \in X} m \leq x$ ;
- 5 | **supremo de  $X$**  quando  $m$  é majorante de  $X$  e  $m \leq m'$ , para qualquer  $m'$  majorante de  $X$ ;
- 6 | **ínfimo de  $X$**  quando  $m$  é minorante de  $X$  e  $m' \leq m$ , para qualquer  $m'$  minorante de  $X$ ;
- 7 | **máximo de  $X$**  quando  $m$  é majorante de  $X$  e  $m \in X$ ;
- 8 | **mínimo de  $X$**  quando  $m$  é minorante de  $X$  e  $m \in X$ .

## elementos especiais de um c.p.o.

O conjunto dos majorantes de  $X$  e o conjunto dos minorantes de  $X$  são representados por  $\text{Maj}(X)$  e  $\text{Min}(X)$ , respectivamente.

Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto  $X$  de  $A$  é único e representa-se por  $\sup(X)$  (resp.:  $\inf(X)$ ,  $\max(X)$ ,  $\min(X)$ ).

Note-se que, em particular,  $A$  tem um máximo se existir  $m \in A$  tal que  $x \leq m$ , para todo  $x \in A$ ;  $A$  tem elemento mínimo se existir  $m \in A$  tal que  $m \leq x$ , para todo  $x \in A$ .

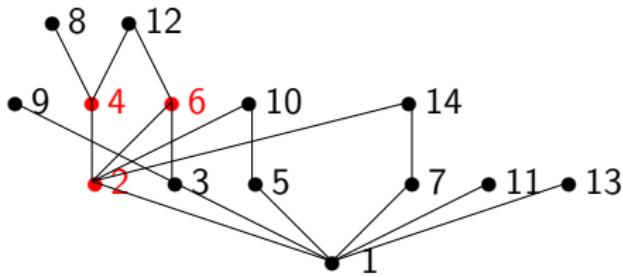
### exemplo 4.33

Consideremos, de novo, o c.p.o.  $(A, |)$  do exemplo 4.31.

Os elementos maximais de  $A$  são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de  $A$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Min}(A) &= \{1\}, & \text{Maj}(A) &= \emptyset, & \inf(A) &= 1, \\ \min(A) &= 1, & \sup(A) &\text{ não existe,} & \max(A) &\text{ não existe.} \end{aligned}$$

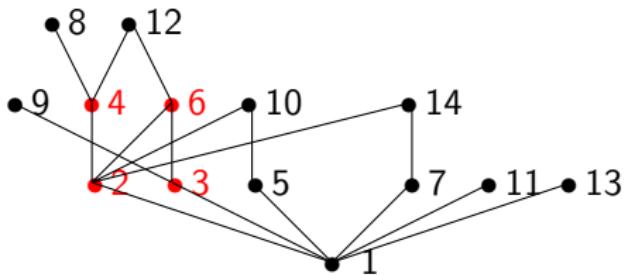
## elementos especiais de um c.p.o.



Se  $X = \{2, 4, 6\}$ , então os elementos maximais de  $X$  são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de  $X$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) &= \{1, 2\}, & \text{Maj}(X) &= \{12\}, & \inf(X) &= 2, \\ \min(X) &= 2, & \sup(X) &= 12, & \max(X) & \text{ não existe.} \end{aligned}$$

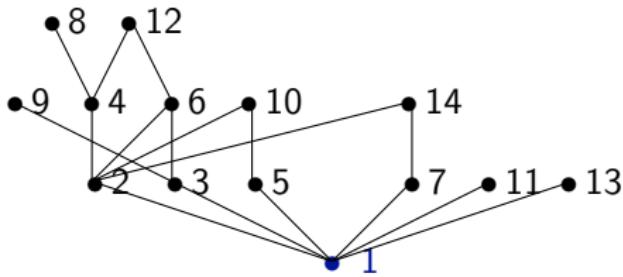
## elementos especiais de um c.p.o.



Se  $X = \{2, 3, 4, 6\}$ , então os elementos maximais de  $X$  são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de  $X$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) &= \{1\}, & \text{Maj}(X) &= \{12\}, & \inf(X) &= 1, \\ \min(X) &\text{ não existe,} & \sup(X) &= 12, & \max(X) &\text{ não existe.} \end{aligned}$$

## elementos especiais de um c.p.o.



Se  $X = A \setminus \{1\}$ , então os elementos maximais de  $X$  são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de  $X$  são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \text{Min}(X) = \{1\}, & \text{Maj}(X) = \emptyset, & \inf(X) = 1, \\ \text{min}(X) \text{ não existe,} & \text{sup}(X) \text{ não existe,} & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$

## elementos especiais de um c.p.o.

### proposição 4.34

Num c.p.o.  $(A, \leq)$ , são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer  $a, b \in A$ :

- 1 |  $a \leq b$ ;
- 2 |  $\sup\{a, b\} = b$ ;
- 3 |  $\inf\{a, b\} = a$ .

## reticulados

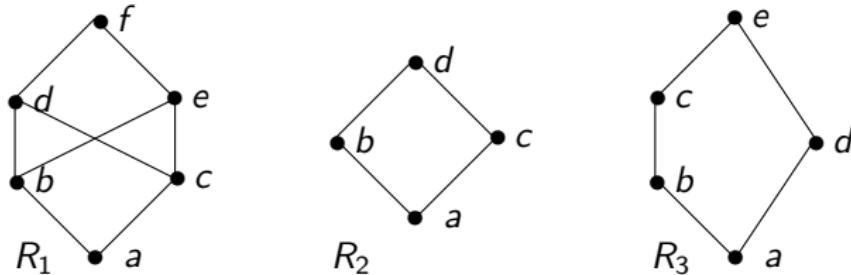
Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

## definição 4.35

Um c.p.o.  $(A, \leq)$  diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer  $x, y \in A$ , existem o supremo e o ínfimo do conjunto  $\{x, y\}$ .

## exemplo 4.36

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s  $R_2$  e  $R_3$  são reticulados.

$R_1$  não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de  $\{b, c\}$ .

## cadeias

### definição 4.37

Uma ordem parcial  $\leq$  num conjunto  $A$  diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos  $a$  e  $b$  de  $A$  são comparáveis. Neste caso,  $(A, \leq)$  diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto  $X$  de  $A$  diz-se uma **cadeia em**  $(A, \leq)$  ou um **subconjunto totalmente ordenado de**  $(A, \leq)$  quando, para quaisquer  $x, y \in X$ ,  $x$  e  $y$  são comparáveis.

### exemplo 4.38

1 |  $\{3, 6, 12\}$  e  $\{2, 4\}$  são cadeias em  $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$ , mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 |  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$  são cadeias.

### observação 4.39

Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica.