Diagonal da matriz: a_{ii} (a_{ij} com $j = i$)

Ficha nº 1

(2) a) $M = [\text{mdc}(i,j)]$

$i = 1, \ldots, 6$ tipo 6×6

na coluna 1 é o mesmo que a linha $j = 1, \ldots, 6$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

→ na linha 1 é o máximo divisor comum de 1 e 2...6 que é sempre

b) $A = [2i \times (j-2)]$

$i = 1,2,3$ tipo 3×2

$j = 1,2$

$[A]_{11} = 2 \times 1 \times (-2) = -4$ $[A]_{21} = 2 \times 2 \times -1 = -4$

$[A]_{12} = 2 \times 1 \times 0 = 0$ $[A]_{22} = 0$

$[A]_{31} = 2 \times 3 \times (-1) = 6$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$B = [b_{ij}]$ $i = 1,2,3$, onde $b_{ij} = |1 + j - 1|$

$j = 1,2$

tipo 3×2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $A + 2B$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$A + 2B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$

3

a) $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ → matriz quadrada

3×3

$[A]_{11} = 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) 3×3

$a_{ij} = \begin{cases} 2i \text{ se } i > j \\ 0 \text{ se } i = j \\ 2j \text{ se } i < j \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

CL ⚠ Para poder realizar o produto o nº de colunas da 1.ª tem de ser igual ao número de linhas da segunda ou seja $j\,1.^a = i\,2.^a$

LC ⚠ Depois do produto o tipo da matriz resultante será $i\,1.^o \times j\,2.^o$

4) a) AC

$[AC]_{11} = -6 + (-2) + 2 = -6$

$[AC]_{21} = 3 + 4 + 3 = 10$

$[AC]_{31} = -3 + 2 + 2 = 1$

$[AC]_{41} = -12 + (-2) + 0 = -14$

$AC = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$ 4x1

b)

$[BC]_{11} = -2 + 2 = 0$

$[BC]_{21} = -9 + 4 = -5$

$[BC]_{31} = -2$

$BC = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ 3x1

c) LA

$[LA]_{11} = 6 + (-1) + 16 = 21$

$[LA]_{12} = 3 + 1 + 4 = 8$

$[LA]_{13} = 6 - 2 = 4$

1x3 $\begin{bmatrix} 21 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

d) LD

$[LD]_{11} = 8$

$[LD]_{12} = 3 + 4 = 7$

$[LD]_{13} = 6 + 4 = 10$

$[LD]_{14} = 4$

1x4 $LD = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

e) $[AB]_{32} = 1+2+2 = 5$

$[AB]_{32} = 5$

f) $[DA]_{32} = 0$

g) $B^2 = B \times B$

$[B^2]_{11} = 3$ $[B^2]_{12} = -2+2=0$ $[B^2]_{13} = 0$

$[B^2]_{21} = -2$ $[B^2]_{22} = 3+4 = 7$ $[B^2]_{23} = 6$

$[B^2]_{31} = 3$ $[B^2]_{32} = -2$ $[B^2] = 0$

3×3 $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

h) $[CL]_{11} = -9$ $[CL]_{12} = 0$ $[CL]_{13} = 3$ $[CL]_{14} = -12$

3×4

$CL = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 & -12 \\ -6 & 0 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $A^T \rightarrow$ matriz transposta de A quando as linhas trocam com as "colunas"

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 8 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

b)

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(6) a)(5) A C A ~~1x3~~ é do tipo 1x3 Como o nº de colunas de A (3) não é
C é do tipo 2x2 o mesmo número de linhas de C (2)
não posso multiplicar as duas matrizes. $3 \neq 2$

(6) não são do mesmo tipo não se soma

(10)

$I_3 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ⚠ Qualquer matriz, A, produto com I_n dá a própria matriz A

(12) (11) não é possível porque $j\,I\,(2) \neq i\,B\,(3)$

b) $B + X = D \Leftrightarrow X = D - B$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $-B = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $D + (-B) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Só existe uma solução

7

a)

- $[AB]_{11} = 0+(-2)+3 = 1$ $\quad 2\times 2$

$[AB]_{12} = -1+1 = 0$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[AB]_{21} = -0+2 = 1$ $\quad AB = I_2$

$[AB]_{22} = -1+2 = 1$

- BA

$[BA]_{11} = -1$ $\quad [BA]_{21} = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\quad 4\times 4$

$[BA]_{12} = 0$ $\quad [BA]_{22} = -2$

$[BA]_{13} = 0$ $\quad [BA]_{23} = -3$

$[BA]_{14} = -2$ $\quad [BA]_{24} = 1$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 4\times 4$$

b) $\cancel{[AB]_{11}} =$

2×2

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

8 $\Leftrightarrow X + A = 2(X - AB^T)$

$\Leftrightarrow X + A = 2X - 2AB^T$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X - 2X = -A - 2AB^T$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

8 continuação

$$-2AB^T = \begin{bmatrix} -8 & -14 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ -8 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$[-2AB^T]_{11} = 0 + 4 + (-12) = -8$$

$$[-2AB^T]_{12} = -2 + (-12) = -14$$

$$[-2AB^T]_{13} = -4 + 4 = 0$$

$$[-2AB]_{21} = -2 \qquad [-2AB]_{23} = -4$$

$$[-2AB]_{22} = 0$$

$$[-2AB]_{31} = -8$$

$$[-2AB]_{32} = -2$$

$$[-2AB]_{33} = -4 - 8 = -12 \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A - 2AB^T = \begin{bmatrix} -9 & -13 & -3 \\ -4 & -1 & -4 \\ -9 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -9 & -13 & -3 \\ -4 & -1 & -4 \\ -9 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$