

1 Matrizes

2 Sistemas de equações lineares

3 Determinantes

4 Espaços Vetoriais

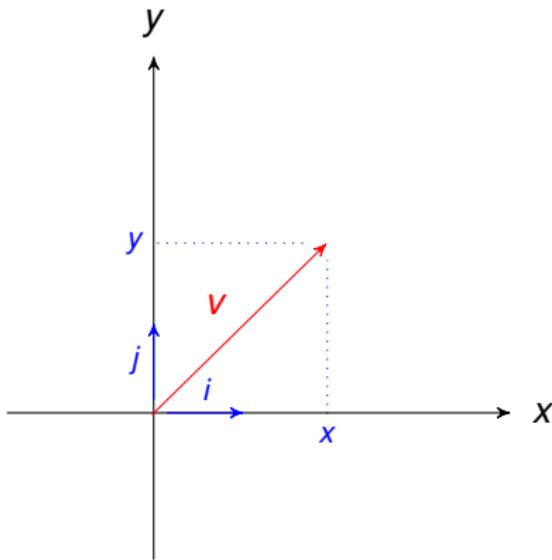
- Escalares e vetores
- Operações com vetores
- Definição axiomática de espaço vetorial
- Subespaços
- Geradores
- Independência linear
- Base e dimensão
- Característica de uma matriz e classificação de sistemas

O tipo mais simples de grandeza física pode ser caracterizada por um número e uma unidade de medida. Uma tal quantidade é designada por **escalar**.

Exemplos: temperatura, massa, resistência de um condutor elétrico, número de bactérias por cm^3 , preço.

No entanto grandezas como, por exemplo, deslocamento, velocidade e força necessitam da indicação de um número que representa a sua magnitude e da indicação de uma direção e um sentido, que podem ser representados por sequências de números mediante a introdução de um referencial. Tais quantidades são designadas por **vetores**.

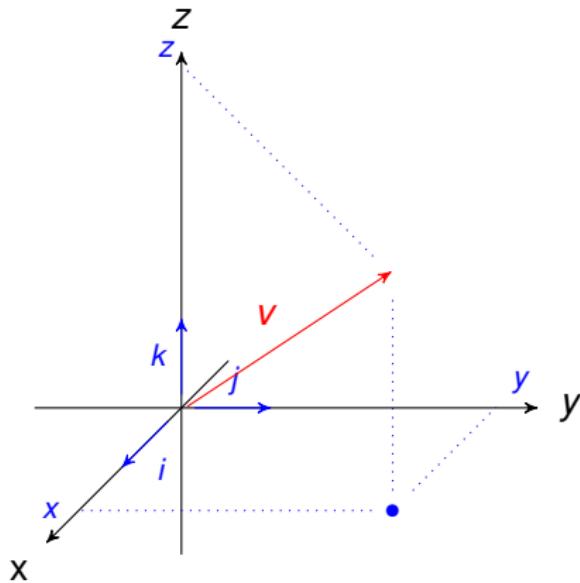
Reperesentação de vetores no plano



$$v = x i + y j = (x, y).$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Representação de vetores no espaço



$$v = x i + y j + z k = (x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Operações com vetores

Operações fundamentais com vetores

- ## 1 a adição de vetores:

u, v vetores $\mapsto u + v$ vetor ,

- 2 a multiplicação por um escalar:

$\alpha \in \mathbb{R}$, u vector $\mapsto \alpha u$ vector

As operações vetoriais podem ser definidas usando a representação analítica dos vetores. Por exemplo em \mathbb{R}^3 ,

$$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

$$u = (x_1, y_1, z_1)$$

$$v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

$$v = (x_2, y_2, z_2)$$

$$u + v = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$$

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\alpha u = (\alpha x_1)i + (\alpha y_1)j + (\alpha z_1)k$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Operações com vetores

Definição

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

No conjunto \mathbb{R}^n as operações de adição e de multiplicação por um escalar definem-se da seguinte forma: para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n ,

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha u = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Os elementos de \mathbb{R}^n designam-se **vetores** e os números reais designam-se **escalares**. Num vetor $u = (x_1, \dots, x_n)$ o número x_i diz-se a *i*-ésima coordenada de u .

Operações com vetores

Definição

Sejam u e v vetores. Um vetor w é combinação linear de u e v se existirem escalares α e β tais que

$$w = \alpha u + \beta v.$$

Podemos generalizar a definição anterior para um número qualquer k de vetores. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são escalares e v_1, \dots, v_k são vetores, então o vetor

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

diz-se uma combinação linear de v_1, \dots, v_k .

Definição axiomática de espaço vetorial

Se \mathcal{V} é um conjunto onde estão definidas as aplicações:

- 1 a adição em \mathcal{V} , $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que

 - 1 para quaisquer $u, v \in \mathcal{V}$, $u + v = v + u$,
 - 2 para quaisquer $u, v, w \in \mathcal{V}$, $(u + v) + w = u + (v + w)$,
 - 3 existe $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ tal que, para qualquer $u \in \mathcal{V}$, $u + 0_{\mathcal{V}} = u$, o qual se designa vetor nulo,
 - 4 para qualquer $u \in \mathcal{V}$, existe $-u \in \mathcal{V}$ tal que $u + (-u) = 0_{\mathcal{V}}$, o qual se designa simétrico de u ;

2 a multiplicação por um escalar, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que

 - 1 para quaisquer $u, v \in \mathcal{V}$,
 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$,
 - 2 para quaisquer $u \in \mathcal{V}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\lambda + \gamma) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\gamma \cdot u)$,
 - 3 para quaisquer $u \in \mathcal{V}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\lambda\gamma) \cdot u = \lambda \cdot (\gamma \cdot u)$,
 - 4 para qualquer $u \in \mathcal{V}$, $1 \cdot u = u$;

então diz-se que a estrutura $(\mathcal{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ é um espaço vetorial ou, abreviadamente, que \mathcal{V} é um espaço vetorial real.



Definição axiomática de espaço vetorial

Proposição

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial. Então,

- para qualquer escalar λ , $\lambda \cdot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$;
 - para qualquer $v \in \mathcal{V}$, $0 \cdot v = 0_{\mathcal{V}}$;
 - dados um escalar λ e $v \in \mathcal{V}$, se $\lambda \cdot v = 0_{\mathcal{V}}$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0_{\mathcal{V}}$;
 - para quaisquer escalar λ e $v \in \mathcal{V}$,

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v).$$

Subespacos

EXEMPLO 1

O conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 0\}$ com as operações

$$+ : \begin{matrix} S \times S \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} S \\ (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{matrix}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S & \longrightarrow & S \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{array}$$

é um espaço vetorial, em que a soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar são as restrições a S das respectivas operações em \mathbb{R}^2 . Em particular, o vetor nulo em \mathbb{R}^2 , $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, pertence a S e o simétrico de um vetor $(a, b) \in S$ é o vetor $(-a, -b)$ que também pertence a S .

Dado um espaço vetorial \mathcal{V} , que propriedades deve satisfazer um seu subconjunto S para que sejam preservadas as propriedades de espaço vetorial?

Definição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Diz-se que \mathcal{S} é um subespaço vetorial de \mathcal{V} , e escreve-se $\mathcal{S} \leq \mathcal{V}$, se:

- 1 $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
 - 2 se $u, v \in \mathcal{S}$, então $u + v \in \mathcal{S}$ (i.e., \mathcal{S} é fechado para a adição);
 - 3 se $v \in \mathcal{S}$ e λ é um escalar, então $\lambda \cdot v \in \mathcal{S}$ (i.e., \mathcal{S} é fechado para a multiplicação por um escalar).

Um subespaço vetorial S é um espaço vetorial em que o conjunto dos vetores está contido no conjunto dos vetores de outro espaço vetorial V e em que as operações são a restrição a S das operações de V .

EXEMPLOS 2

Os seguintes conjuntos são subespaços de \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Será $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ um subespaço? E $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$?

EXEMPLOS 3

Os seguintes conjuntos são subespaços de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(x, x - y, y + x) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0, y + z = 0\}.$$

Será $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ um subespaço? E $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$? E $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$? E $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_3$?

EXEMPLOS 4

Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 , com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, serão espaços vetoriais:

- \mathbb{R}^2 ?
 - $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$?
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\}$?
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\}$?
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$?
 - Que subconjuntos de \mathbb{R}^2 são espaços vetoriais?

EXEMPLOS 5

Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 , com a adição e multiplicação por escalar definida atrás, serão espaços vetoriais:

- \mathbb{R}^3
 - $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$?
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}$?
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + 2\}$?
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, 2x + y + z = 0\}$?
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, x - y + z = 0\}$?
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, x - y + z = 1\}$?
 - Que subconjuntos de \mathbb{R}^3 são espaços vetoriais

Subespacos

Proposição

Dado um espaço vetorial \mathcal{V} qualquer, são subespaços vetoriais de \mathcal{V} o próprio \mathcal{V} e $\{0_{\mathcal{V}}\}$.

Mais ainda, qualquer subespaço S de \mathcal{V} é tal que $\{0_{\mathcal{V}}\} \subseteq S \subseteq \mathcal{V}$.

Proposição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial e $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{V}$. Então, $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathcal{V}$.

Proposição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial e $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{V}$. Então, $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathcal{V}$ se e só se $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_1$.

EXEMPLO 6

Considere o seguinte sistema homogéneo de equações lineares em 4 incógnitas:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

$$C_S = \{(-2\alpha, \alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Notar que:

- $(0, 0, 0, 0)$ é solução do sistema;
 - sendo $(-2a, a, a, 0), (-2b, b, b, 0) \in C_S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então
 - $(-2a, a, a, 0) + (-2b, b, b, 0) = (-2(a+b), a+b, a+b, 0) \in C_S$;
 - $\lambda(-2a, a, a, 0) = (-2\lambda a, \lambda a, \lambda a, 0) \in C_S$.

Logo $C_S \leq \mathbb{R}^4$.

Será que o exemplo anterior é um caso particular, ou será que as soluções de um qualquer sistema homogéneo $AX = 0$ de m equações em n incógnitas constituem um subespaço de \mathbb{R}^n ?

Proposição

O conjunto das soluções de um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

Mais, veremos que todo o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n é o conjunto das soluções de um sistema homogéneo de equações lineares em n incógnitas.

E relativamente ao conjunto das soluções de um sistema não homogéneo, será que é um subespaço vetorial?

O conjunto das soluções de um sistema de equações lineares não homogéneo não é um subespaço vetorial.

Proposição

Num espaço vetorial \mathcal{V} , dado $C \subseteq \mathcal{V}$, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de C ,

$$\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de \mathcal{V} e é o menor subespaço que contém C .

O subespaço das combinações lineares de vetores de C representa-se por $\langle C \rangle$.

Definição

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial e $C \subseteq \mathcal{V}$.

Se $\mathcal{V} = \langle C \rangle$, então diz-se que C gera \mathcal{V} ou que C é um conjunto gerador de \mathcal{V} .

O espaço vetorial $\langle C \rangle$ diz-se o espaço gerado por C .

EXEMPLO 7

$$C_1 = \{(1, 2, 0, -1), (-1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Os vetores de \mathbb{R}^4 que pertencem a $\langle C_1 \rangle$ são os vetores (x, y, z, w) tais que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

é possível.

O sistema só é possível se $2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0$. Logo,

$$\langle C_1 \rangle = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0\},$$

ou seja, $\langle C_1 \rangle$ é conjunto das soluções do sistema homogéneo formado pela equação

$$\left\{ 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0. \right.$$

EXEMPLO 8

$$C_2 = \{(1, -1, 2), (-1, 0, 1), (0, 0, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Será $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$? Isto é, será que existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(a, b, c) = \alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(-1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 2) ?$$

O sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ é possível e determinado.

Logo, $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$. Resolvendo o sistema conclui-se que a solução do sistema é

$$(-b, -a - b, \frac{a + 3b + c}{2})$$

pelo que

$$(a, b, c) = -b \cdot (1, -1, 2) + (-a - b) \cdot (-1, 0, 1) + \frac{a + 3b + c}{2} \cdot (0, 0, 2).$$

EXEMPLO 9

Como calcular um conjunto gerador de um espaço vetorial?

$$\begin{aligned}
 S &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + b\} \\
 &= \{(a, b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(a, 0, a) + (0, b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle,
 \end{aligned}$$

ou seja, $S = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$.

Pode também verificar-se que

$$S = \langle (2, 1, 3), (0 - 1 - 1) \rangle,$$

o que permite concluir que um subespaço vetorial admite vários conjuntos geradores.

Proposição

Sejam \mathcal{V} , $n \in \mathbb{N}$ e $u, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$.

- 1 Qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera um subespaço de $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
 - 2 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u, v_1, \dots, v_n \rangle$ se e só se u é combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Proposição

Sejam \mathcal{V} , $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então,

- 1 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle;$

2 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle.$

Independência linear

Se um vetor v_1 se escreve como combinação linear dos vetores de um conjunto $C = \{v_2, \dots, v_n\}$ diremos que v_1 é linearmente dependente dos vetores de C . Notar que se $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, então

$$v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n = 0_{\mathcal{V}}.$$

Definição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$. Diz-se que v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes se sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares tais que

$$0_{\mathcal{V}} = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n,$$

então $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Se v_1, \dots, v_n não são vetores linearmente independentes, então dizem-se linearmente dependentes.

EXEMPLOS 10

- $$\bullet \quad C_1 = \{(1, 3, 0, -1), (2, 3, -4, 1), (4, 3, -12, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= 2(1,3,0,-1) - 3(2,3,-4,1) + (4,3,-12,5) \\ &= -(1,3,0,-1) + \frac{3}{2}(2,3,-4,1) - \frac{1}{2}(4,3,-12,5).\end{aligned}$$

Os vetores de C_1 não são linearmente independentes.

- $$\bullet \quad C_2 = \{(1, 2, 1, 3), (-2, 0, 1, -2), (0, -2, 0, 1)\}$$

Serão os vetores de C_2 linearmente independentes?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado. Assim, o vetor nulo, escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores de C_2 , ou seja, os vetores de C_2 são linearmente independentes.

EXEMPLOS 11

Será um vetor genérico de \mathbb{R}^4 , $v = (a, b, c, d)$, combinação linear dos vetores do conjunto $C_2 = \{(1, 2, 1, 3), (-2, 0, 1, -2), (0, -2, 0, 1)\}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Já vimos que o sistema homogéneo associado é possível e determinado, pelo que a característica da matriz simples é 3 e, consequentemente, o sistema é impossível ou possível e determinado.

Assim, se a coluna dos termos independentes for formada pelas coordenadas de vetores de \mathbb{R}^4 que são combinação linear de vetores de C_2 , a característica da matriz ampliada é 3 e o sistema é possível e determinado. Neste caso, os coeficientes da combinação linear são únicos e verifica-se

$$-2a + \frac{b}{2} - 2c + d = 0.$$

Caso contrário, a característica da matriz ampliada é 4 o sistema é impossível.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{V} um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$. Os vetores $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ são **n vetores linearmente independentes** se e só se qualquer combinação linear de v_1, \dots, v_n tem coeficientes únicos.

Proposição

Sejam \mathcal{V} , $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n, u \in \mathcal{V}$.

- 1 Se v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente dependentes, então u, v_1, \dots, v_n são $n + 1$ vetores linearmente dependentes.
 - 2 Se v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_n\}$ é constituído por vetores linearmente independentes.
 - 3 Se v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes e u, v_1, \dots, v_n são $n + 1$ vetores linearmente dependentes, então u é combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Proposição

Sejam \mathcal{V} , $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- 1 v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes;
- 2 $v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;
- 3 $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes.

Definição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$. A sequência (v_1, \dots, v_n) diz-se uma **base de \mathcal{V}** se:

- $\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$;
 - v_1, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes.

De acordo com esta definição, será que o subespaço $\{0_V\}$ admite uma base?

Um subespaço vetorial que admite uma base finita diz-se **finitamente baseado**.

Base \Leftrightarrow Conjunto maximal de vetores linearmente independentes

Base e dimensão

EXEMPLOS 12

Será $((1, 0, -2), (1, 1, -1), (-1, -1, 3))$ uma base de \mathbb{R}^3 ?

Para isso é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível, para quaisquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, e o sistema homogéneo associado

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

seja determinado. Equivalentemente, é necessário que o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

seja possível e determinado, para quaisquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Base e dimensão

EXEMPLOS 13

Será $((0, \frac{1}{2}, 1, 1), (-1, 0, 1, 2))$ uma base do subespaço

$$\mathcal{S} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - 2b + c = 0, -d + c = a\}?$$

$\mathcal{S} = \{(c - d, c - \frac{1}{2}d, c, d) \mid d, c \in \mathbb{R}\}$, pelo que a resposta é afirmativa se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - d \\ c - \frac{1}{2}d \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

for possível e determinado, para quaisquer $c, d \in \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & c - d \\ \frac{1}{2} & 0 & c - \frac{d}{2} \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{condensação} \\ \text{Gauss-Jordan}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d \\ 0 & 1 & -c + d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Confirma-se que o sistema é possível e determinado, pelo que qualquer vetor de \mathcal{S} escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores $(0, \frac{1}{2}, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1, 2)$.

Proposição

Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$. As seguintes condições são equivalentes:

- (v_1, \dots, v_n) é uma base de \mathcal{V} ;
 - qualquer vetor de \mathcal{V} escreve-se de forma única como combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Se (v_1, \dots, v_n) é uma base de \mathcal{V} , e $v \in \mathcal{V}$, os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ dizem-se **as coordenadas de v na base (v_1, \dots, v_n)** .

EXEMPLOS 14

Será $((-1, 1, 2), (0, -1, -1), (0, -1, 0), (2, 2, 1))$ uma base de \mathbb{R}^3 ?

Para isso é necessário que o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right]$$

seja possível e determinado, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Como o número de incógnitas é superior ao número de linhas da matriz simples, o sistema não é possível e determinado.

- Se o sistema for impossível, então os vetores dados não geram \mathbb{R}^3 .
 - Se o sistema for possível, então não é determinado, pelo que os vetores não são linearmente independentes.

Questões

- Será que existem 7 vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^6 ?
 - Será que existe um conjunto com cardinal 5 que gere \mathbb{R}^6 ?

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, uma base de \mathbb{R}^n tem exatamente n vetores.

E num subespaço genérico?

Lema

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial finitamente gerado. Suponhamos que existe um conjunto finito C com m elementos que gera \mathcal{V} . Se I é um subconjunto de \mathcal{V} constituído por p vetores linearmente independentes, então $p \leq m$.

Proposição

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial finitamente baseado. Então, as bases de \mathcal{V} têm todas o mesmo número de elementos.

Definição

Sendo \mathcal{V} um espaço vetorial finitamente baseado, chama-se dimensão de \mathcal{V} ao número de vetores de uma base de \mathcal{V} .

Se $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$, então a dimensão de \mathcal{V} é 0

A dimensão de um espaço \mathcal{V} finitamente gerado representa-se por

$\dim \mathcal{V}$

Um subespaço de \mathbb{R}^n de dimensão 1 diz-se uma **reta**. Um subespaço de dimensão 2 diz-se um **plano**. Um subespaço de dimensão $n - 1$ diz-se um **hiperplano**.

Base e dimensão

Repare-se que em \mathbb{R}^m , com $m \in \mathbb{N}$, um vetor (x_1, \dots, x_m) pode-se escrever na forma

$$(x_1, \dots, x_m) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m(0, \dots, 0, 1)$$

e os coeficientes x_1, x_2, \dots, x_m são únicos.

A sequência

$$((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$$

é uma base de \mathbb{R}^m , usualmente designada por **base canónica**, e consequentemente

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

Os coeficientes x_1, x_2, \dots, x_m são as coordenadas de (x_1, \dots, x_m) na base canónica.

As colunas de uma matriz de tipo $m \times n$ podem ser encaradas como sendo n vetores do espaço \mathbb{R}^m e as linhas de A como sendo m vetores de \mathbb{R}^n :

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n] = \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{array} \right]$$

onde

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

e

$$L_1 = [\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{array}]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

100

$$L_n = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Transformações elementares nas linhas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.
 - Transformações elementares nas colunas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas linearmente independentes.

O número de linhas linearmente independentes de uma matriz A é igual ao número de colunas linearmente independentes de A e igual ao número de pivôs da matriz em forma de escada que resulta de A por condensação de Gauss.

Definição

Seja A uma matriz. A dimensão do espaço gerado pelas linhas de A diz-se a **característica de A** e representa-se por $r(A)$.

Característica de uma matriz e classificação de sistemas

Seja $AX = B$ um sistema de m equações em n incógnitas. Então,

$$AX = B \Leftrightarrow [C_1 \cdots C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Proposição

Seja $AX = B$ um sistema de m equações lineares em n incógnitas.

- 1 $AX = B$ é possível se e só se B é combinação linear das colunas de A , isto é, se e só se

$$r(A) = r([A|B]).$$

- 2 $AX = 0$ é determinado se e só se as colunas de A são linearmente independentes, isto é, se e só se

$$r(A) = n.$$