departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se possível, a soma S de cada uma das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série numérica cuja sucessão das somas parciais associadas é dada por $S_n = \sqrt[n]{\dfrac{e}{n^n}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Calcule, se possível, a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+b_n\right)$.

3. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica convergente e de soma igual a S.

   Calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(3a_n+\frac{2}{3^n}\right)$.

4. Determine, se existir, a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde

$$u_n = \begin{cases} 1+2(n-1) & \text{se } n<4 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}.$$

5. Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$, onde a é um parâmetro real diferente de 1.

   (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.

(b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, então a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(b) Se a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(c) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(d) A série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se só se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$

(e) A série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se só se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k < 1$

(f) A série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se só se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$

7. Estude a natureza das séries numéricas seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2x)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{((-1)^n+5)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^3}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$ (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ (t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+n-1}$ (u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n+1}{2^n-1}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$

8. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas de termos não negativos, tais que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e $a_n = b_n + \frac{1}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$.

9. Verifique se as séries numéricas seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+4}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

10. Sabendo que as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são tais que

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = 15, \qquad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ para } n \geq 9 \qquad \text{e} \qquad b_n > a_n, \text{ para } n > 20$$

estude a natureza das séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

11. Considere as séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.
    (a) Estude a natureza de cada uma das séries.
    (b) Indique o limite do termo geral das séries.
    (c) Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$, indique a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.

12. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe $\dfrac{2}{3}$ da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

13. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

14. Calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$, sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ é convergente. Prove que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ é convergente.

16. Mostre que se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ converge.

17. Estude a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n!}\right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

18. Verifique se as séries numéricas seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+2)}$

19. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{arctg}(n) + a_n)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{3 + (a_n)^2}$

1. (a) $S_n = 2^{n+1} - 2$ e é divergente; (b) $S_n = \frac{27}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$ e $S = \frac{27}{8}$;
   (c) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}$ e $S = -\frac{3}{2}$; (d) $S_n = n(n+1)$ e é divergente;
   (e) $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ e $S = \frac{3}{2}$; (f) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ e $S = 1$
2. $\frac{2}{3}$
3. $3S + 1$
4. $\frac{259}{27}$
5. (a) $a \in]-\infty, -6[\cup]4, +\infty[$.
6. (a) Falso; (b) Verdadeiro; (c) Verdadeiro; (d) Falso; (e) Falso; (f) Verdadeiro.
7. (a) divergente; (b) divergente; (c) divergente; (d) divergente; (e) divergente;
   (f) convergente; (g) convergente; (h) convergente; (i) convergente; (j) convergente;
   (k) divergente; (l) convergente; (m) divergente; (n) convergente; (o) divergente;
   (p) convergente; (q) convergente; (r) convergente; (s) convergente; (t) convergente;
   (u) divergente; (v) convergente; (w) convergente.
8. (a) divergente.
9. (a) simplesmente convergente; (b) absolutamente convergente;
   (c) absolutamente convergente; (d) simplesmente convergente;
   (e) absolutamente convergente; (f) absolutamente convergente;
   (g) absolutamente convergente; (h) absolutamente convergente;
   (i) simplesmente convergente; (j) simplesmente convergente; (k) divergente.
10. (a) são ambas divergentes.
11. (a) são ambas absolutamente convergente; (b) 0; (c) convergente.
12. (a) 50 metros.
13. (a) absolutamente convergente.
14. (a) $\frac{\pi^2+3}{6}$.

17. (a) convergente e a sua soma é $-\frac{3}{2}$.
18. (a) absolutamente convergente; (b) simplesmente convergente.
19. (a) divergente; (b) convergente.