

# **GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR: UMA VISÃO GEOMÉTRICA**

**TOMO II**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Reitor: Clélio Campolina Diniz

Vice-Reitora: Rocksane de Carvalho Norton

Pró-Reitoria de Graduação

Pró-Reitora: Antônia Vitória Soares Aranha

Pró-Reitor Adjunto: André Luiz dos Santos Cabral

Diretor do CAED: Fernando Fidalgo

Coordenador da UAB-UFMG: Wagner José Corradi Barbosa

Coordenador Adjunto UAG-UFMG: Hormindo Pereira de Souza Júnior

EDITORA UFMG

Diretor: Wander Melo Miranda

Vice-Diretor: Roberto Alexandre do Carmo Said

Conselho Editorial

Wander Melo Miranda (presidente)

Flávio de Lemos Carsalade

Heloisa Maria Murgel Starling

Márcio Gomes Soares

Maria das Graças Santa Bárbara

Maria Helena Damasceno e Silva Megale

Paulo Sérgio Lacerda Beirão

Roberto Alexandre do Carmo Said

DAN AVRITZER

# GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR: UMA VISÃO GEOMÉTRICA

TOMO II

BELO HORIZONTE  
EDITORIA UFMG  
2009

© 2009, Dan Avritzer  
© 2009, Editora UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização escrita do Editor.

A963g Avritzer, Dan  
Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica / Dan Avritzer.  
– Belo Horizonte : Editora UFMG, 2009.  
t. 2 : il. – (Educação a distância)

Inclui bibliografia.  
ISBN: 978-85-7041-754-1

1. Geometria analítica. 2. Álgebra linear. I.Título. II. Série.

CDD: 371.39  
CDU: 37.018.43

Elaborada pela Central de Controle de Qualidade da Catalogação da Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE MATEMÁTICA: Dan Avritzer

ASSISTÊNCIA EDITORIAL: Euclídia Macedo

EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro

REVISÃO DE PROVAS: Beatriz Trindade, Cláudia Campos, Maria do Rosário Alves Pereira,

Renata Passos e Renilde Silveira

PROJETO GRÁFICO: Eduardo Ferreira

FORMATAÇÃO E CAPA: Sérgio Luz

PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren Marilac

**EDITORA UFMG**  
Av. Antônio Carlos, 6627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo  
Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG  
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768  
[www.editora.ufmg.br](http://www.editora.ufmg.br) - [editora@ufmg.br](mailto:editora@ufmg.br)

**PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO**

Av. Antônio Carlos, 6627 - Reitoria - 6º andar  
Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG  
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax: + 55 31 3409-4060  
[www.ufmg.br](mailto:www.ufmg.br) - [info@prograd.ufmg.br](mailto:info@prograd.ufmg.br) - [educacaoadistancia@ufmg.br](mailto:educacaoadistancia@ufmg.br)

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro deles se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma lista de exercícios com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. Essa lista auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo, e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

*Maria do Carmo Vila  
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância  
UFMG*



# Sumário

<b>Apresentação .....</b>	<b>9</b>
<b>AULA 1 - Equação cartesiana do plano no espaço .....</b>	<b>11</b>
1.1 A equação do plano .....	11
1.2 Produto vetorial de dois vetores .....	13
1.3 Vetores linearmente dependentes e independentes .....	16
1.4 Interseção de dois planos no espaço .....	18
1.5 Exercícios .....	20
<b>AULA 2 - Equações paramétricas da reta .....</b>	<b>21</b>
2.1 Equações paramétricas da reta .....	21
2.2 Retas dadas por dois planos .....	24
2.3 Resolvendo a geometria pela álgebra: o caso de sistemas lineares .....	25
2.4 Exercícios .....	28
<b>AULA 3 - Posições relativas de retas e planos no espaço .....</b>	<b>29</b>
3.1 Reta e reta .....	29
3.2 Plano e plano .....	32
3.3 Exercícios .....	33
<b>AULA 4 Perpendicularismo e ortogonalidade .....</b>	<b>35</b>
4.1 Retas e planos perpendiculares .....	35
4.2 Retas ortogonais .....	36
4.3 Exercícios .....	38
<b>AULA 5 - Transformações lineares do plano no plano .....</b>	<b>39</b>
5.1 Bases do plano .....	39
5.2 Geometria das transformações lineares do plano .....	40
5.3 Aplicações à computação gráfica .....	43
5.4 Exercícios .....	46
<b>AULA 6 - Transformações lineares mais gerais, aplicações à identificação de cônicas .....</b>	<b>47</b>
6.1 Transformações lineares do espaço .....	47
6.2 Autovetores e autovalores .....	49
6.3 Diagonalização de matrizes .....	52
6.4 Aplicações à identificação de cônicas planas .....	56
6.5 Exercícios .....	63

<b>AULA 7 - Estudo das superfícies . . . . .</b>	<b>65</b>
7.1 Como esboçar superfícies . . . . .	65
7.2 Superfícies cilíndricas . . . . .	67
7.3 As superfícies quádricas padrão . . . . .	68
7.4 As superfícies quádricas mais gerais . . . . .	76
7.5 Exercícios . . . . .	80
<b>Referências bibliográficas . . . . .</b>	<b>81</b>

## Apresentação

Este livro foi escrito para ser utilizado nos cursos de Educação a distância oferecidos pela UFMG para a licenciatura em Matemática. Ele está dividido em dois tomos. No primeiro, tratamos de vetores no plano e no espaço, aplicações ao estudo das cônicas, matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares. No segundo, trataremos da equação cartesiana de um plano no espaço, de equações paramétricas da reta no espaço, de posições relativas de retas e planos no espaço e de transformações lineares.

Estes livros estão assentados na experiência de mais de 30 anos do autor em ministrar não só a disciplina de Geometria Analítica, mas outras disciplinas de Cálculo, História da Matemática, Álgebra Abstrata e Geometria Algébrica no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, além da experiência de escrever um primeiro livro de Geometria Analítica e Álgebra Linear para a licenciatura a distância em Química ([2]).

Tal experiência talvez possa ser resumida em dois princípios básicos que orientaram a elaboração da obra. O primeiro é que se deve, no ensino da Matemática, respeitar a evolução histórica dos conceitos, explicitando para o aluno como eles evoluíram. A ideia aqui é que as dificuldades que o aluno enfrenta em seu aprendizado são, muitas vezes, semelhantes àquelas que a ciência enfrentou em sua evolução.

O segundo é que a Matemática se articula sempre em torno de exemplos, da mesma maneira que a Química e outras ciências experimentais se baseiam na experiência. Essa observação é válida, tanto nos estudos mais elementares de Matemática como na pesquisa mais sofisticada. Assim, procuramos desenvolver o texto enfatizando sempre o exemplo. Por outro lado, como este livro está voltado para alunos de Matemática, procuramos dar um tratamento mais formal demonstrando alguns resultados, principalmente no estágio final do livro.

Tivemos sempre em mente que este trabalho se destina a cursos a distância. Dessa forma, o texto possui várias características específicas para ser assim utilizado. Dentre elas chamamos atenção para as seguintes:

1. Cada aula é aberta com objetivos gerais. Recomendamos que o aluno leia-os inicialmente e volte a eles no final certificando-se de que eles foram atingidos, e, se não o forem, que tente sanar a deficiência.
2. No decorrer do texto, existem exercícios. Eles foram incluídos com o objetivo de testar o entendimento do assunto tratado anteriormente. É importante que o aluno faça esses exercícios, pois eles são necessários para o seu amadurecimento.
3. Ao final de cada aula, incluímos numerosos exercícios, ordenados por nível de dificuldade. É um pouco pessoal a escolha de quantos exercícios fazer, mas o aluno deve fazer um número suficiente para se sentir seguro do conteúdo a que eles se referem.

Finalmente, ao concluir esta apresentação, gostaríamos de agradecer ao Ministério de Educação e Cultura e a Universidade Aberta do Brasil pela oportunidade de escrever estas notas e à Profa. Maria do Carmo Vila, coordenadora do programa de ensino a distância da UFMG, pela sua eficiente coordenação do programa. Gostaria de agradecer também aos colegas Hamilton Prado Bueno, Seme Gebara Neto e Maria Cristina Ferreira pelas discussões frutíferas que tivemos sobre o texto, bem como por algumas sugestões e correções, e a Joana David Avritzer, que revisou parte do texto.

Esperamos que este livro possa ser útil a esse importante programa de formação de professores tão necessário ao desenvolvimento de nosso país.

# AULA 1

## Equação cartesiana do plano no espaço

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Deduzir a equação cartesiana de um plano no espaço, ortogonal a um vetor dado e passando por um ponto.
2. Resolver vários problemas sobre planos no espaço como, por exemplo, encontrar a equação de um plano passando por três pontos.
3. Conhecer o produto vetorial de dois vetores e suas propriedades.
4. Saber o que é um conjunto de dois ou três vetores linearmente dependentes ou linearmente independentes no plano ou no espaço.

### 1.1 - A EQUAÇÃO DO PLANO

Uma reta no plano fica determinada pela sua inclinação e um de seus pontos. Da mesma maneira, um plano no espaço fica determinado conhecendo-se um vetor normal a ele e um de seus pontos. É o que veremos a seguir.

Considere um ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  no espaço e um vetor  $N = (a, b, c)$ . Vamos considerar a equação do plano  $\alpha$  ortogonal ao vetor  $N$  passando pelo ponto  $P$ . Para isso, considere um ponto  $X = (x, y, z)$  do plano. A condição para que o ponto  $X$  pertença ao plano é que o vetor  $\vec{PX}$  seja ortogonal a  $N$ . Assim, o plano  $\alpha$  pode ser descrito pela equação:

$\vec{PX} \cdot \vec{N} = 0$ , ou ainda  $(X - P) \cdot N = 0$ , ou seja,

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0$$

Portanto, teremos  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$ . Efetuando,  $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ . É usual denotar  $ax_0 + by_0 + cz_0$  por  $d$  e obtemos assim a equação geral do plano que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e é ortogonal ao vetor  $\vec{N} = (a, b, c)$ :

$$ax + by + cz = d, \text{ onde } d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

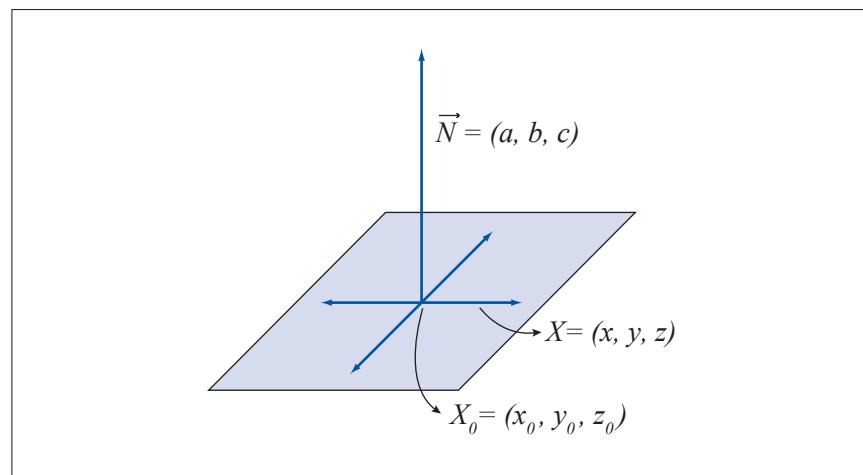


Figura 1.1: A equação cartesiana de um plano no espaço

**Exemplo 1.1** Encontre a equação do plano que passa pelo ponto  $P = (3, -1, 7)$  e é perpendicular ao vetor  $N = (4, 2, -5)$ . Como na dedução da fórmula feita acima, um vetor arbitrário do plano é dado por  $\overrightarrow{PX} = X - P = (x - 3, y + 1, z - 7)$ . Impondo a condição do vetor arbitrário ser normal ao vetor  $N$ , obtemos:  $(x - 3, y + 1, z - 7) \cdot (4, 2, -5) = 0$ , ou seja,  $4x + 2y - 5z = -25$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 1.2** Encontre a equação do plano que passa pelos pontos  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (2, 3, -1)$  e  $C = (3, -1, 2)$ . Já sabemos que um plano no espaço possui equação  $ax + by + cz = d$ , mas ainda não temos como calcular o vetor normal ao plano pedido  $N = (a, b, c)$ . No próximo parágrafo veremos como fazer isso. Neste exemplo, vamos observar que como  $(x, y, z)$  é um ponto arbitrário do plano, substituindo sucessivamente as coordenadas dos pontos  $A, B, C$  na equação do plano, temos:

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= d \\ 2a + 3b - c &= d \\ 3a - b + 2c &= d \end{aligned} \tag{1.1}$$

Resolvendo o sistema obtemos  $a = \frac{3}{2}t$ ,  $b = -\frac{3}{2}t$ ,  $c = -\frac{5}{2}t$ ,  $d = t$ . Tomando  $t = 2$  obtemos uma equação para o plano  $3x - 3y - 5z = 2$ .

Observe que qualquer valor não nulo de  $t$  nos fornece uma equação para o plano pedido.

□

## 1.2 - PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

Já vimos na Aula 2, Tomo I, que o produto escalar de dois vetores, no plano ou no espaço, nos fornece um número. Veremos agora um outro produto de dois vetores no espaço que nos fornece um terceiro vetor perpendicular ao plano gerado pelos dois primeiros. Para isso introduziremos a seguinte notação. Denotaremos por  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  os vetores unitários na direção dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente. Ou seja,  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

**Definição 1.3** Dados dois vetores  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , o produto vetorial de  $\vec{v}$  por  $\vec{w}$ , que será denotado por  $\vec{v} \times \vec{w}$ , será o “determinante”

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= (v_2 w_3 - w_2 v_3) \vec{i} - (v_1 w_3 - w_1 v_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - w_1 v_2) \vec{k} = \\ &= (v_2 w_3 - w_2 v_3, -(v_1 w_3 - w_1 v_3), v_1 w_2 - w_1 v_2).\end{aligned}$$

**Observação 1.4** Na definição dada optamos por usar o determinante acima por ser a forma mais fácil de guardar a definição, mas observe que na realidade não se trata de um determinante, pois a primeira linha é constituída por vetores e as outras duas, por coordenadas de vetores, ou seja, escalares. Daí colocarmos a palavra determinante entre aspas. Em particular só faz sentido desenvolver este “determinante” pela primeira linha. A forma que aparece mais abaixo poderia ser também utilizada como definição e seria a mais correta, mas é de memorização mais difícil.

**Observação 1.5** Já observamos que o produto escalar de dois vetores é um número, enquanto o produto vetorial é um vetor. Uma outra diferença é que o produto vetorial não é comutativo, isto é, em geral  $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{w} \times \vec{v}$ . Observe os exemplos a seguir:

**Exemplo 1.6** Encontre o produto vetorial dos vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , nesta ordem. Temos que o vetor  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  e o vetor  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ .

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 1 \vec{k}) = \vec{k} = (0, 0, 1).$$

□

**Exemplo 1.7** Calcule o produto vetorial  $\vec{j} \times \vec{i}$ . (O mesmo produto que no exemplo anterior, mas na ordem inversa.)

$$\vec{j} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k}) = -\vec{k} = (0, 0, -1).$$

□

No Exemplo 1.6, obtivemos um vetor ortogonal aos outros dois. No Exemplo 1.7 também obtivemos um vetor ortogonal aos outros dois, porém de sentido contrário ao vetor do Exemplo 1.6. Isso é sempre verdade. Faça os exercícios abaixo e em seguida estude a proposição que lhe segue.

**Exercício 1.8** Calcule:

1.  $\vec{j} \times \vec{k}$
2.  $\vec{k} \times \vec{j}$
3.  $\vec{i} \times \vec{k}$
4.  $\vec{k} \times \vec{i}$
5.  $(1, -2, 3) \times (2, 5, 7)$
6.  $(2, 5, 7) \times (1, -2, 3)$

**Proposição 1.9** Sejam  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  dois vetores não nulos tais que não existe  $c \neq 0$  tal que  $\vec{w} = c\vec{v}$ . Então, o produto vetorial  $\vec{x} = \vec{v} \times \vec{w}$  é um vetor ortogonal aos outros dois. Além disso,  $\vec{y} = \vec{w} \times \vec{v}$  é um vetor distinto de  $\vec{x}$  também perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e tal que  $\vec{y} = -\vec{x}$ .

**Demonstração:** Considere

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= (v_2 w_3 - w_2 v_3) \vec{i} - (v_1 w_3 - w_1 v_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - w_1 v_2) \vec{k} = \\ &= (v_2 w_3 - w_2 v_3, -(v_1 w_3 - w_1 v_3), v_1 w_2 - w_1 v_2) = \end{aligned}$$

Vamos calcular  $\vec{x} \cdot \vec{v}$  e  $\vec{x} \cdot \vec{w}$ . Lembre-se que de acordo com a Definição 2.16 (Aula 2, Tomo I) dois vetores  $A$  e  $B$  são ortogonais se e somente se  $A \cdot B = 0$ . Temos:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{v} &= (v_2 w_3 - w_2 v_3, -(v_1 w_3 - w_1 v_3), v_1 w_2 - w_1 v_2) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \\ &= v_1 v_2 w_3 - v_1 w_2 v_3 - v_2 v_1 w_3 + v_2 w_1 v_3 + v_3 v_1 w_2 - v_3 w_1 v_2 = 0.\end{aligned}$$

De maneira semelhante calculamos:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{w} &= (v_2 w_3 - w_2 v_3, -(v_1 w_3 - w_1 v_3), v_1 w_2 - w_1 v_2) \cdot (w_1, w_2, w_3) = \\ &= w_1 v_2 w_3 - w_1 w_2 v_3 - w_2 v_1 w_3 + w_2 w_1 v_3 + w_3 v_1 w_2 - w_3 w_1 v_2 = 0.\end{aligned}$$

Ou seja,  $\vec{x}$  é ortogonal a  $\vec{v}$  e a  $\vec{w}$ .

Para demonstrar a 2ª parte calculamos:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= (w_2 v_3 - v_2 w_3) \vec{i} - (w_1 v_3 - v_1 w_3) \vec{j} + (w_1 v_2 - v_1 w_2) \vec{k} = \\ &= (w_2 v_3 - v_2 w_3, -(w_1 v_3 - v_1 w_3), w_1 v_2 - v_1 w_2) = -\vec{x}\end{aligned}$$

Observe que temos sempre que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , pois do contrário  $v = cw$  para algum  $c \neq 0$ .  $\square$

**Exemplo 1.10** Uma aplicação interessante do produto vetorial é um outro método, distinto do Exemplo 1.2, para calcular a equação do plano passando por três pontos dados. Vamos, pois, repetir o cálculo lá feito utilizando outro método. Encontre a equação do plano passando pelos pontos  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (2, 3, -1)$  e  $C = (3, -1, 2)$ . Observe inicialmente que dois vetores do plano procurado são:  $\vec{v} = B - A = (1, 1, 0)$  e  $\vec{w} = C - A = (2, -3, 3)$ . O vetor  $N = \vec{v} \times \vec{w}$  será, como vimos, normal ao plano.

$$N = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, -3, -2) = (3, -3, -5).$$

Conhecendo o vetor normal  $N$  do plano e um de seus pontos ( $B$ , por exemplo), determinamos a equação do plano que coincide com a que encontramos no Exemplo 1.2:

$$(3, -3, -5) \cdot (x - 2, y - 3, z + 1) = 0, \text{ ou seja, } 3x - 3y - 5z = 2.$$

$\square$

**Exercício 1.11** Utilize o produto vetorial para encontrar a equação de um plano no espaço passando pelos seguintes ternos de pontos:

1.  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Faça um esboço deste plano.
2.  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, -2)$  e  $(3, 0, 1)$ .
3.  $(1, 1, 1)$ ,  $(-2, 1, 3)$  e  $(0, 2, 7)$ .

### 1.3 - VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E INDEPENDENTES

No que segue, pensaremos sempre em um vetor  $v$  com o ponto inicial na origem. Como, de acordo com a Observação 2.9 (Aula 2, Tomo I), isso é sempre possível, não perderemos generalidade assim procedendo.

**Definição 1.12** Dois vetores do plano são linearmente dependentes se estão sobre uma mesma reta que passa pela origem.

Dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente dependentes se existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ . Abreviamos dizendo que  $u$  e  $v$  são l.d.

**Definição 1.13** Dois vetores que não são linearmente dependentes são ditos linearmente independentes (abreviadamente dizemos l.i.).

Portanto, dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$ , temos que  $u, v$  são linearmente independentes (l.i.) se não existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ .

**Exemplo 1.14** Os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  são linearmente dependentes, pois estão sobre a reta  $y = x$ . Uma outra maneira de ver isso é observar que  $(1, 1) = -1(-1, -1)$ . Por outro lado, os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$  são linearmente independentes.  $\triangleleft$

Até aqui consideramos vetores no plano  $xy$ . Considere agora pares de vetores em um plano no espaço. As mesmas definições e os mesmos conceitos fazem perfeito sentido. Dois vetores  $v, w$  não nulos no espaço serão l.d. se estão sobre uma mesma reta e l.i. caso contrário. Pensando, como sempre, nos vetores com o ponto inicial na origem, isso é equivalente a existência de uma constante  $k \neq 0$  tal que  $w = kv$  (l.d.) ou a  $w \neq kv$  para todo  $k \neq 0$ .

**Exercício 1.15** Verifique quais pares de vetores são linearmente independentes e quais são linearmente dependentes:

1.  $u = (1, 0)$  e  $v = (5, 0)$ .
2.  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 2)$ .
3.  $u = (1, 0)$  e  $v = (-1, 0)$ .
4.  $u = (1, 1)$  e  $v = (1, -1)$ .
5.  $u = (1, 2, 1)$  e  $v = (2, 1, 7)$ .
6.  $u = (0, 0, 1)$  e  $v = (0, 1, 0)$ .
7.  $u = (-1, 2, 3)$  e  $v = (1, -2, -3)$ .

**Definição 1.16** Um conjunto de dois vetores linearmente independentes de um plano é chamado uma base do plano.

**Definição 1.17** Um conjunto de três vetores do plano  $xy$  é sempre linearmente dependente. De maneira análoga, um conjunto de três vetores em um plano do espaço é também linearmente dependente.

**Definição 1.18** Um conjunto de três vetores do espaço é dito linearmente independente se eles não estão no mesmo plano.

**Exemplo 1.19** O conjunto  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  de vetores do espaço é linearmente independente, pois não há um plano que os contém. Com efeito, suponha que o plano  $ax + by + cz = 0$  (que passa pela origem já que o ponto inicial dos três vetores é a origem) contenha os três vetores. Se o plano contém  $\vec{i}$ , temos  $a = 0$ . Se o plano contém  $\vec{j}$ , segue que  $b = 0$ , e, finalmente, se o plano contém  $\vec{k}$ , segue que  $c = 0$ . Absurdo. O conjunto  $\{\vec{i}, \vec{j}, (1, 1, 0)\}$  de vetores do espaço é linearmente dependente. Com efeito, os três vetores estão contidos no plano  $z = 0$ .

□

**Proposição 1.20** Considere o conjunto de  $n$  vetores no espaço  $v_1, \dots, v_n$ , ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ) não nulos e a equação  $\sum a_i v_i = 0$  que possui sempre a solução trivial  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Então, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é linearmente independente se e somente se a solução trivial é única.

**Demonstração:** Temos dois casos a considerar:

1.  $n=2$

Neste caso, suponha que existam  $a_1, a_2$  tais que  $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ , com  $v_1, v_2$  não nulos e  $a_1, a_2$  idem. Segue que  $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ , o que contraria a hipótese dos vetores serem linearmente independentes.

2.  $n=3$

Neste caso, suponha que existam  $a_1, a_2, a_3$  tais que  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ , com  $v_1, v_2, v_3$  não nulos e  $a_1, a_2, a_3$  nem todos nulos. Segue que, supondo, sem perda de generalidade,  $a_3$  é não nulo,  $v_3 = -\frac{a_1}{a_3} v_1 - \frac{a_2}{a_3} v_2$ , o que mostra que  $v_1, v_2, v_3$  estão no mesmo plano, isso contraria a hipótese dos vetores serem linearmente independentes.

□

**Proposição 1.21** Sejam  $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$ ,  $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})$ ,  $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$  três vetores no espaço e considere a matriz  $A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$ .

Se  $\text{Det}(A) = 0$ , os vetores são l.d., e se  $\text{Det}(A) \neq 0$ , os vetores são l.i.

**Demonstração:** Suponha  $v_1, v_2, v_3$  l.d. Então,  $v_3 = a_1v_1 + a_2v_2$ .

Segue que  $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ a_1v_1 + a_2v_2 \end{vmatrix} = 0$ , de acordo com a Proposição 5.8 (Aula 5, Tomo I).

Reciprocamente suponha  $v_1, v_2, v_3$  l.i. Então:  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$  possui apenas a solução nula  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Segue que  $\text{Det}(A) \neq 0$  pelo Teorema 7.12 (Aula 7, Tomo I).  $\square$

No próximo parágrafo, bem como nas próximas aulas aplicaremos os conceitos aqui estudados à geometria.

#### 1.4 - INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS NO ESPAÇO

Dado um plano  $\alpha$  no espaço de equação  $ax + by + cz = d$ , vimos na seção 1.1 que ele possui vetor normal  $N = (a, b, c)$ . Como o próprio nome diz, o vetor normal não é unicamente determinado, qualquer vetor na direção de  $N$  pode ser pensado como o vetor normal de  $\alpha$ . Temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.22** *Dado um plano  $\alpha$  no espaço de equação  $ax + by + cz = d$  cujo vetor normal é  $N = (a, b, c)$ , considere um outro plano  $\beta$  dado por  $a'x + b'y + c'z = d'$  com vetor normal  $N' = (a', b', c')$ . Se  $N$  e  $N'$  são linearmente dependentes então  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes ou são paralelos.*

**Demonstração:** Suponha  $N$  e  $N'$  linearmente dependentes. Isso significa que eles estão na mesma reta que passa pela origem, ou, dito algebraicamente, existe  $k \neq 0$  tal que  $N' = kN$ , ou seja,  $(a', b', c') = k(a, b, c)$ . Podemos escrever as equações de  $\alpha$  e  $\beta$  assim:

$$\alpha := ax + by + cz = d \quad \beta := kax + kby + kc'z = d'$$

Suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  possuam um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  em comum. Temos  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$  e  $kax_0 + kby_0 + kc'z_0 = d'$ , donde  $kd = d'$ . Como  $k \neq 0$ , temos  $\alpha = \beta$ . Caso contrário, temos  $kax_0 + kby_0 + kc'z_0 \neq d'$ , para qualquer solução  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $\alpha$ . Em particular  $kd \neq d'$ , ou ainda  $kd - d' \neq 0$ . Considere o sistema de equações dado por  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ kax + kby + kc'z &= d' \end{aligned}$$

Multiplicando a 1ª equação por  $k$  e subtraindo encontramos:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ 0 &= kd - d' \end{aligned}$$

Como  $kd - d' \neq 0$ , o sistema é impossível, portanto não existe um ponto satisfazendo  $\alpha$  e  $\beta$  e os planos são paralelos.  $\square$

**Exercício 1.23** Verifique quais pares de planos são paralelos e quais são coincidentes:

1.  $3x + 2y + 5z = 8$  e  $6x + 4y + 10z = 6$
2.  $2x + 3y + 10z = 0$  e  $2x + 3y + 10z = 1$
3.  $x + y + z = 9$  e  $9x + 9y + 9z = 81$

Considere novamente dois planos no espaço, um plano  $\alpha$  de equação  $ax + by + cz = d$  cujo vetor normal é  $N = (a, b, c)$  e um outro plano  $\beta$  dado por  $a'x + b'y + c'z = d'$  com vetor normal  $N' = (a', b', c')$ . Suponha agora que  $N$  e  $N'$  são linearmente independentes. Sabemos que  $N' \neq kN$  para toda constante  $k$ .

Considere o sistema de equações dado por  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned}$$

Multiplicando a 1<sup>a</sup> equação por  $a'$ , a 2<sup>a</sup> por  $a$  encontramos:

$$\begin{aligned} a'ax + a'by + a'cz &= a'd \\ a'ax + b'ay + c'az &= ad' \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro:

$$\begin{aligned} a'ax + a'by + a'cz &= a'd \\ (a'b - b'a)y + (a'c - c'a)z &= a'd - ad' \end{aligned}$$

Como os vetores  $N$  e  $N'$  são linearmente independentes temos que  $(a'b - b'a)$  e  $(a'c - c'a)$  não podem ser ambos nulos, do contrário teríamos  $N' = aN$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $a'b - b'a \neq 0$ . Supondo também que  $(a'c - c'a) \neq 0$  segue que a variável  $z$  é independente e o sistema possui infinitas soluções. Sabemos da geometria elementar que dois planos no espaço que não são paralelos nem coincidentes se encontram numa reta, vamos ver na próxima aula que é isso que está acontecendo neste caso, ou seja, as infinitas soluções do sistema acima são os pontos de uma reta.

### 1.5 - EXERCÍCIOS

1. Encontre a equação cartesiana do plano passando por  $P$  e que possui vetor normal  $\vec{n}$ :

- (a)  $P = (2, -1, 1)$  e  $n = (-1, 1, 2)$ .
- (b)  $P = (-1, 3, 2)$  e  $n = (0, 4, -1)$ .
- (c)  $P = (2, -1, 5)$  e  $n = (-1, -1, -1)$ .
- (d)  $P = (\pi - 1, 3, -1)$  e  $n = (\pi, -3, 7)$ .

2. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos  $P, Q, R$  dados:

- (a)  $P = (1, -2, 1)$   $Q = (1, 0, 2)$  e  $R = (-1, 2, 4)$ .
- (b)  $P = (-2, 1, 3)$   $Q = (1, 0, -2)$  e  $R = (1, 1, 4)$ .

3. Demonstre a chamada identidade de Lagrange:

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

4. Utilize a identidade de Lagrange para demonstrar a seguinte relação:

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen}(\theta),$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ .

5. Quais dos seguintes conjuntos de vetores do  $\mathbb{R}^3$  são linearmente dependentes?

- (a)  $(4, -1, 2), (-4, 10, 2)$ .
- (b)  $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$ .
- (c)  $(8, -1, 3), (-4, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ .

# AULA 2

## Equações paramétricas da reta

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Saber o que são equações paramétricas.
2. Representar uma reta no espaço por equações paramétricas.
3. Resolver problemas sobre retas no espaço tais como encontrar as equações paramétricas da reta que passa por dois pontos ou determinar a interseção de uma reta, dada por equações paramétricas, com um plano, dado por uma equação cartesiana.

### 2.1 - EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja  $\ell$  uma reta no espaço passando pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e paralela ao vetor  $\vec{v}_d = (a, b, c)$ . A reta  $\ell$  consiste dos pontos  $(x, y, z)$  tais que:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Essa equação é chamada equação paramétrica da reta  $\ell$  ou equação vetorial da reta  $\ell$ . O vetor  $\vec{v}_d = (a, b, c)$  é chamado vetor diretor da reta. Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.1** Encontre a equação paramétrica da reta  $r$  passando pelo ponto  $(1, 2, -3)$  e paralela ao vetor  $(4, 5, -7)$ . Temos:

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -7)$$

Podemos também escrever as equações acima da seguinte maneira:

$$x = 1 + 4t \quad y = 2 + 5t \quad z = -3 - 7t$$



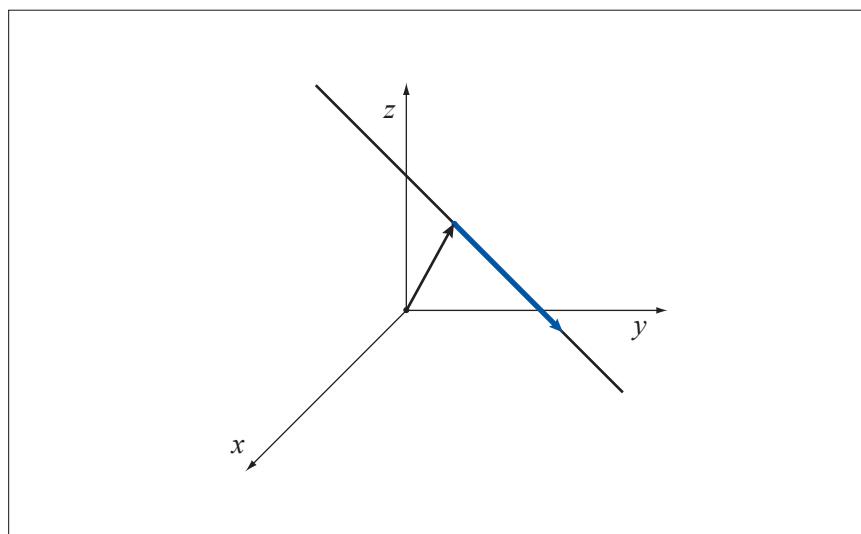


Figura 2.1: Equação paramétrica da reta

Observe que a equação depende de um parâmetro  $t$  que deve ser entendido da seguinte maneira: a medida que  $t$  percorre os números reais, o ponto  $(x, y, z)$  percorre os pontos da reta. Por exemplo, considere os seguintes valores de  $t$  e os correspondentes valores do ponto  $(x, y, z)$ :

$t$	0	1	2	-1
$(x, y, z)$	$(1, 2, -3)$	$(5, 7, -10)$	$(9, 12, -17)$	$(-3, -3, 4)$

Veja a Figura 2.1, onde o vetor diretor aparece em azul.

As equações paramétricas de uma reta não são dadas unicamente. Na tabela acima, temos vários pontos da reta. Tome, por exemplo, o ponto  $P_1 = (5, 7, -10)$ . Considere a reta  $s$  passando por  $P_1$  e com mesmo vetor diretor de  $r$ :

$$s := (x, y, z) = (5, 7, -10) + t(4, 5, -7)$$

As retas  $r$  e  $s$  já têm um ponto em comum  $P_1$ . Além disso, fazendo  $t = -1$  obtemos o ponto  $(1, 2, -3)$  que é um outro ponto de  $r$ . Ora, uma reta fica determinada por dois pontos, logo  $r = s$ ! Por outro lado, considere agora a reta  $u$  passando pelo mesmo ponto  $P_0 = (1, 2, -3)$  que  $r$ , mas com vetor diretor l.d. com o vetor diretor de  $r$ , por exemplo, o vetor diretor  $2(4, 5, -7) = (8, 10, -14)$ :

$$u := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(8, 10, -14)$$

Tomando  $t = \frac{1}{2}$  obtemos o ponto  $Q$  de  $u$ ,  $Q = (5, 7, -10) \in r$ . Novamente  $r = u$ . Vemos assim que podemos escrever de muitas maneiras uma reta  $r$  passando por um ponto  $P_0$  e com vetor diretor  $v_d$ . Basta escolher qualquer ponto da reta e qualquer vetor diretor linearmente dependente com  $v_d$  isto é  $v'_d = kv_d$ , com  $k \neq 0$ .

As equações paramétricas podem ser muito úteis para resolver problemas. Considere os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.2** Encontre a interseção da reta  $r$  dada por

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -7)$$

com o plano  $\alpha$  dado por  $-x + 2y + z = 2$ . Temos que um ponto da reta  $r$  é dado por  $x = 1 + 4t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = -3 - 7t$ . Substituindo na equação do plano temos:

$$-1 - 4t + 2(2 + 5t) + (-3 - 7t) = 2,$$

onde  $t = -2$ . Voltando à equação da reta encontramos o ponto  $X_0$  de interseção da reta  $r$  e do plano  $\alpha$ ,  $X_0 = (-7, -8, 11)$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 2.3** Encontre a interseção da reta  $r$  dada por

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -6)$$

com o plano  $\alpha$  dado por  $-x + 2y + z = 2$ . Temos que  $r$  é dada por  $x = 1 + 4t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = -3 - 6t$ . Substituindo na equação do plano temos:

$$-1 - 4t + 2(2 + 5t) + (-3 - 6t) = 2,$$

onde  $0t = 2$ . Ou seja, não existe valor de  $t$  que satisfaça as equações. Concluímos que a reta é paralela ao plano.  $\triangleleft$

**Exemplo 2.4** Encontre a interseção da reta  $r$  dada por

$$r := (x, y, z) = (-3, 1, -3) + t(4, 5, -6)$$

com o plano  $\alpha$  dado por  $-x + 2y + z = 2$ . Temos que  $r$  é dada por  $x = -3 + 4t$ ,  $y = 1 + 5t$ ,  $z = -3 - 6t$ . Substituindo na equação do plano temos:

$$3 - 4t + 2(1 + 5t) + (-3 - 6t) = 2,$$

onde  $2 = 2$ . Ou seja, todo valor de  $t$  satisfaz as equações. Concluímos que a reta está contida no plano.



## 2.2 - RETAS DADAS POR DOIS PLANOS

Vamos tratar novamente da situação do final da Aula 1. Considere o sistema de duas equações dado pelas equações de dois planos  $\alpha := -x + 2y + z = 0$  e  $\beta := 2x + 3y - z = 6$ :

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 6 \end{aligned}$$

Multiplicando a 1<sup>a</sup> equação por 2 e somando com a 2<sup>a</sup> equação encontramos:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ 0 + 7y + z &= 6 \end{aligned}$$

Passando à matriz aumentada e multiplicando a 1<sup>a</sup> linha por  $-1$  para aparecer um pivô temos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Dividindo a 2<sup>a</sup> linha por 7 obtemos um pivô na 2<sup>a</sup> linha na entrada (2, 2):

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right).$$

Com esse pivô zeramos a entrada (1, 2):

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right),$$

que é a forma escalonada por linhas da matriz dada. Vemos que a variável  $z$  é livre. Fazendo  $z = t$  concluímos:

$$y = \frac{6}{7} - \frac{1}{7}t \quad x = \frac{12}{7} + \frac{5}{7}t$$

Obtemos infinitas soluções o que já sabíamos. Mas, de posse de nossos novos conhecimentos, vemos que essas infinitas soluções são os pontos da reta de intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$  dados. As equações acima se escrevem:

$$(x, y, z) = \left( \frac{12}{7}, \frac{6}{7}, 0 \right) + t \left( -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 1 \right),$$

que a equação da reta que passa por  $(\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, 0)$  e possui vetor diretor  $(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 1)$ .

**Exercício 2.5** Determine se os seguintes sistemas de equações definem planos coincidentes, paralelos ou retas e no último caso encontre um ponto e o vetor diretor da reta:

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 6y - 7z = 6 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 2 \end{cases}$$

### 2.3 - RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA: O CASO DE SISTEMAS LINEARES

Vimos na Aula 6, Tomo I, Observação 6.14 e exemplos anteriores que um sistema linear de três equações e três incógnitas pode ser impossível, possuir infinitas soluções ou ter uma única solução. Já interpretamos geometricamente o que acontece quando consideramos sistemas de equações lineares de duas equações e três incógnitas. Vejamos o que acontece quando consideramos três ou mais equações:

**Exemplo 2.6** Considere o seguinte sistema de três equações e três incógnitas já estudado na Aula 6, Tomo I, Exemplo 6.12.

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Naquela oportunidade, sem interpretar as equações de maneira geométrica vimos que o sistema possui solução única  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = -3$ . Sabendo agora que cada equação linear corresponde a um plano vemos que os três planos acima possuem como interseção um único ponto.

□

**Exemplo 2.7** Considere agora o seguinte sistema de três equações e três incógnitas:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 3y &= 11 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Passando a matriz aumentada temos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 11 \end{array} \right).$$

Multiplicando a 1<sup>a</sup> linha por  $-3$  e adicionando à segunda multiplicada por  $2$  e em seguida multiplicando-a por  $-5$  e adicionando à terceira multiplicada por  $2$  temos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \end{array} \right)$$

Observamos que a 2<sup>a</sup> e terceira linhas são idênticas e subtraindo uma da outra obtemos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e sem terminar o escalonamento já podemos concluir que o sistema terá infinitas soluções, ou seja, os três planos acima têm por interseção uma reta, ou seja o terceiro plano passa pela interseção dos dois primeiros.  $\triangleleft$

**Exercício 2.8** Encontre as equações paramétricas da reta de interseção dos três planos acima.

**Exercício 2.9** Determine as posições relativas dos planos dados pelos seguintes sistemas de três ou quatro equações. Diga se eles são todos paralelos, ou se determinam retas ou a qual outra configuração geométrica sua interseção corresponde.

1.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + y - z & = & 0 \\ x + y - z & = & 6 \\ x + y - z & = & 2 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 3y + 5z & = & 0 \\ 4x + 6y - 7z & = & 6 \\ 6x + 9y - 2z & = & 6 \\ 10x + 15y - 9z & = & 12 \end{array} \right.$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 3y + 5z & = & 1 \\ 4x + 6y + 10z & = & 2 \\ 20x + 30y + 50z & = & 10 \end{array} \right.$$

Combinando estas observações com as observações feitas na Aula 1, Proposição 1.22, vemos que um sistema de três equações a três incógnitas visto como interseção de três planos possui três possibilidades ou ele é impossível, ou ele possui solução única, ou ele possui infinitas soluções. Estes três casos correspondem geometricamente às seguintes situações respectivamente: ou os planos não possuem interseção, ou eles se interceptam em um ponto ou no caso de possuírem infinitas soluções eles se interceptam segundo uma reta ou são coincidentes.

## 2.4 - EXERCÍCIOS

1. Considere os pontos  $A$  e  $B$  no espaço, e calcule a equação paramétrica da reta que passa por  $A$  e  $B$ . (Sugestão: observe que o vetor diretor da reta é dado por  $B - A$ .)
  - (a)  $A = (2, -1, 1)$  e  $B = (-1, 1, 2)$ .
  - (b)  $A = (-1, 3, 2)$  e  $B = (0, 4, -1)$ .
  - (c)  $A = (2, -1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 1)$ .
  - (d)  $A = (\pi, 3, -1)$  e  $B = (2\pi, -3, 7)$ .
2. Encontre uma equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 1)$  e é paralela à reta  $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-1, 2, 4)$ .
3. Encontre uma equação paramétrica de uma reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 3)$  e é paralela ao plano  $x + y + z = 1$ .
4. Encontre uma equação paramétrica de uma reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 3)$  e é perpendicular ao vetor  $(1, 2, 2)$ .
5. Encontre a equação cartesiana do plano que contém as retas concorrentes:

$$r := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 2, 1) \quad s := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 2, 3).$$

6. Encontre a equação cartesiana do plano que é paralelo às retas:

$$r := (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-2, 2, 1) \quad s := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, 3).$$

e passa por  $(-1, -1, 2)$ .

7. Encontre uma equação paramétrica da reta que é paralela à interseção dos planos  $x + y + z = 1$  e  $x - y - 2z = 0$  e passa pelo ponto  $(-1, 2, 3)$ .
8. Encontre uma equação de uma reta paralela ao plano  $x + y + z = 1$  na direção do vetor  $(-1, -2, 3)$ .
9. Encontre uma equação da reta paralela ao plano  $x + y + z = 1$  e paralela a reta do plano que passa pelos pontos  $(1, 1, -1)$  e  $(2, 2, -3)$  e passa pelo ponto  $(-1, 2, 3)$ .

# AULA 3

## Posições relativas de retas e planos no espaço

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Determinar a posição relativa de duas retas a partir do estudo de seus vetores diretores.
2. Saber quando dois ou mais planos são ou não paralelos a partir do estudo de seus vetores normais.
3. Determinar a posição relativa de um plano e uma reta no espaço.

### 3.1 - RETA E RETA

Em nossos estudos de geometria, no ensino médio, aprendemos que duas retas no espaço podem se interceptar, ser paralelas ou ainda ser reversas. Recordando o que lá aprendemos, duas retas, no espaço, podem estar ou não em um mesmo plano. Se elas estão em um mesmo plano e são distintas, elas se interceptam ou são paralelas. Se não estão em um mesmo plano, então elas são reversas. É isso o que se entende por determinar a posição relativa de duas retas no espaço, determinar se elas se interceptam, são paralelas ou reversas.

Vamos agora aplicar o estudo que fizemos até aqui para determinar a posição relativa de duas retas no espaço dadas parametricamente. Considere duas retas no espaço dadas parametricamente:

$$r := \vec{X} = P_1 + \lambda \vec{A}_1 \quad s := \vec{X} = P_2 + \lambda \vec{A}_2$$

onde  $\vec{X} = (x, y, z)$  e a reta  $r$ (respectivamente  $s$ ) é a reta que passa por  $P_1$ (respectivamente  $P_2$ ) e possui vetor diretor  $\vec{A}_1$ (respectivamente  $\vec{A}_2$ ).

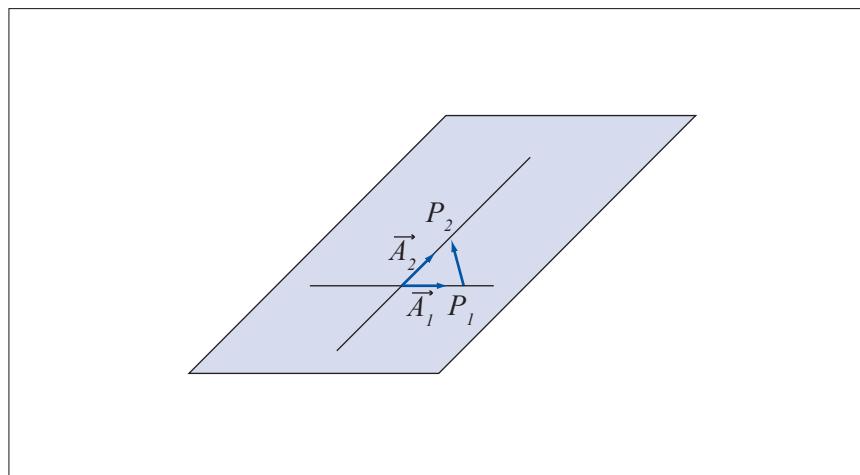


Figura 3.1: Retas em um mesmo plano

Temos duas possibilidades para os vetores diretores  $\vec{A}_1$  e  $\vec{A}_2$ . Eles podem ser linearmente dependentes ou independentes. Se os vetores diretores de duas retas distintas são linearmente dependentes, então elas são paralelas. Por outro lado, se os vetores diretores de duas retas são linearmente independentes, então temos duas possibilidades:

1. As duas retas estão no mesmo plano. Nesse caso, elas têm que se interceptar. Dizemos também que elas são concorrentes.
2. As duas retas não estão em um mesmo plano. Nesse caso, elas necessariamente são reversas.

Para determinar se duas retas que possuem vetores diretores l.i. são reversas ou se interceptam procedemos como se segue. Consideraremos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  das retas  $r$  e  $s$  e o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Consideraremos, agora, o conjunto de três vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{A}_1, \vec{A}_2$ . Temos, novamente, duas possibilidades:

1. Se os três vetores são l.d., as retas  $r$  e  $s$  estão no mesmo plano e como não são paralelas são concorrentes (ver Figura 3.1).
2. Se os três vetores são l.i., as retas  $r$  e  $s$  não estão em um mesmo plano e são, portanto, reversas.

Consideremos alguns exemplos.

**Exemplo 3.1** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$$

Primeiramente, olhamos para os vetores diretores das retas:  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (1, 1, 1)$ . Não existe  $k \neq 0$ , tal que  $A_2 = kA_1$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.i. Sejam agora os pontos  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$  e  $P_2 = (0, 1, 0) \in s$  e considere o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, 1, 0) - (1, 2, 3) = (-1, -1, -3)$ . Vamos verificar se o terno  $\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$  é l.d. ou l.i. Para isso, de acordo com a Proposição 1.21 formamos o determinante

da matriz  $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1} \\ \overrightarrow{A_2} \\ \overrightarrow{P_1P_2} \end{pmatrix}$ . Se  $\text{Det}(A) \neq 0$  os vetores são l.i., caso contrário, eles são l.d.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1(-3 + 1) + 3(-1 + 1) = 2 \neq 0$$

Logo os vetores são l.i. e as retas são reversas.  $\diamond$

**Exemplo 3.2** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (1, 3, 6) + \mu(0, 2, 6)$$

Primeiramente, olhamos para os vetores diretores das retas:  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (0, 2, 6)$ . Nesse caso existe  $k \neq 0$ , tal que  $A_2 = kA_1$ , a saber  $k = 2$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.d. Pelo nosso critério as retas são paralelas se forem distintas. Considere o ponto  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$ . Veja que  $P_1 \in s$ , pois se  $(1, 2, 3) = (1, 3, 6) + \mu(0, 2, 6)$ , temos três equações  $1 = 1, 2 = 3 + 2\mu$  e  $3 = 6 + 6\mu$ . Concluímos que as equações são satisfeitas para  $\mu = -\frac{1}{2}$ . Portanto as retas são coincidentes.  $r = s$   $\diamond$

**Observação 3.3** Já observamos antes que a forma paramétrica de uma reta não é única e duas retas podem ser coincidentes, embora à primeira vista isso não seja claro. É o que aconteceu no exemplo acima. Se duas retas possuem vetores diretores l.d. elas podem ser paralelas ou coincidentes. A coincidência pode ser verificada como fizemos acima, toma-se qualquer ponto da primeira reta e verifica-se se pertence à segunda, se este for o caso as retas coincidem.

**Exemplo 3.4** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (1, 5, 0) + \mu(0, -1, 1)$$

Primeiramente, consideramos os vetores diretores das retas:  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (0, -1, 1)$ . Não existe  $k \neq 0$ , tal que  $A_2 = kA_1$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.i. Sejam agora os pontos  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$  e  $P_2 = (1, 5, 0) \in s$  e considere o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1, 5, 0) - (1, 2, 3) = (0, 3, -3)$ . Vamos verificar se o terno  $\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$  é l.d. ou l.i.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a primeira coluna é nula.}$$

Logo, os vetores são l.d. e as retas são concorrentes.  $\diamond$

**Exemplo 3.5** Como as retas anteriores são concorrentes podemos facilmente encontrar seu ponto  $P$  de interseção, igualando seus vetores posição.

$$(1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) = (1, 5, 0) + \mu(0, -1, 1)$$

Obtemos:

$$(0, -3, 3) + (0, \lambda, 3\lambda) - (0, -\mu, \mu) = 0$$

Donde,

$$0 = 0 - 3 + \lambda + \mu = 0 \quad 3 + 3\lambda - \mu = 0$$

Obtemos  $\lambda = 0$  e  $\mu = 3$ . Substituindo  $\lambda$  em  $r$  ou  $\mu$  em  $s$  obtemos o ponto  $P$  de interseção:  $P = (1, 2, 3)$ .  $\triangleleft$

**Observação 3.6** Observe que no exemplo acima utilizamos parâmetros distintos  $\lambda$  e  $\mu$  para parametrizar as duas retas. Essa é a única maneira de resolvemos o problema, se utilizássemos o mesmo parâmetro para ambas as retas não encontrariam a solução e a razão geométrica é simples. À medida que o parâmetro varia percorremos os pontos da reta. O que estamos procurando é o valor dos parâmetros na primeira e na segunda reta que nos dê o único ponto de interseção, foi o que fizemos acima.

### 3.2 - PLANO E PLANO

Considere o sistema abaixo de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 6 \\ 5x + 5y - 5z = 2 \end{cases}$$

Vimos na Aula 1, Proposição 1.22, que a condição para que dois planos sejam paralelos é que os vetores normais sejam l.d. Veremos agora que é fácil concluir observando as equações de três ou mais planos se eles são paralelos. Já vimos que os vetores normais dos planos são dados pelos coeficientes de  $x, y, z$  na equação. Ora, se três planos possuem o mesmo vetor normal, como acima, é evidente que eles são paralelos.

### 3.3 - EXERCÍCIOS

1. Considere, novamente, as retas que passam pelos pontos  $A$  e  $B$  no espaço, já consideradas nos exercícios da aula anterior. Determine a posição relativa das retas dos itens a) e b), ou seja, diga se elas são paralelas, reversas ou concorrentes. O mesmo para as retas dos itens b) e c).

- (a)  $A = (2, -1, 1)$  e  $B = (-1, 1, 2)$ .
- (b)  $A = (-1, 3, 2)$  e  $B = (0, 4, -1)$ .
- (c)  $A = (2, -1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 1)$ .

2. Determine a posição relativa dos planos dados por:

$$x + 2y + 2z = 1 \quad x + 2y + 2z = 2 \quad x + 2y + 2z = 5.$$

3. Considere as posições relativas das seguintes retas e planos, determinando se eles se interceptam ou são paralelos, e caso se interceptem, encontre a interseção. (Veja também o Exemplo 2.2)

- (a)  $r := (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 2, 5)$  e  $\alpha := 2x + 4y + 4z = 5$ .
- (b)  $r := (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(-2, -2, 4)$  e  $\alpha := 2x + 2y + z = 5$ .
- (c)  $r := (x, y, z) = (1, 1, 2) + t(1, 4, 5)$  e  $\alpha := -2x - 4y + 4z = 5$ .

4. Calcule  $m$  para que as retas:

$r$  dada pela interseção dos planos  $x - my + 1 = 0$  e  $z - y + 1 = 0$  e  
 $s$  dada por  $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, m, 1)$

- (a) sejam paralelas.
- (b) sejam concorrentes.





# AULA 4

## Perpendicularismo e ortogonalidade

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Saber quando uma reta é perpendicular a um plano.
2. Saber quando duas retas são ortogonais.
3. Determinar a equação de uma reta perpendicular simultaneamente a duas retas dadas.

### 4.1 - RETAS E PLANOS PERPENDICULARES

**Definição 4.1** Uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$  são *perpendiculares* se o vetor diretor de  $r$  é paralelo ao vetor normal de  $\alpha$ .

De posse das ferramentas que já desenvolvemos, podemos resolver muitos problemas sobre retas e planos no espaço perpendiculares ou não. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4.2** Considere o plano  $\alpha$  dado por  $x - 2y + 3z = 0$  e o ponto  $P = (-1, 2, 1)$ . Encontre a reta  $r$  que passa por  $P$  e é perpendicular a  $\alpha$ . O vetor normal do plano  $\alpha$  é dado por  $N = (1, -2, 3)$ . Esse será também um vetor diretor para a reta perpendicular ao plano. Logo as equações de  $r$  são:

$$r := \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

**Exemplo 4.3** Considere os dois planos paralelos  $2x - 3y + z = 1$  e  $4x - 6y + 2z = 4$ . Encontre a equação de uma perpendicular comum aos dois planos. Para resolver esse problema, muito semelhante ao anterior, observe que é conhecido um vetor diretor da reta que é de novo o vetor normal de um dos planos  $N_1 = (2, -3, 1)$  ou  $N_2 = (4, -6, 2)$ . Qualquer reta  $r$  que tenha um desses vetores como vetor diretor é solução como por exemplo:

$$r := \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

**Exemplo 4.4** Verifique se o plano dado por  $\alpha := x + 2z = 14$  e a reta  $r$  dada pela interseção dos dois planos  $2x - y - z = 0$  e  $2x + y - z = 0$  são perpendiculares.

Considere os vetores normais aos dois planos  $N_1 = (2, -1, -1)$  e  $N_2 = (2, 1, -1)$ . O produto vetorial  $N_1 \times N_2$  dá um vetor diretor  $v_d$  para a reta  $r$  de interseção. Obtemos:

$$v_d = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 0, 4).$$

O vetor normal do plano  $\alpha$  também é  $(2, 0, 4)$ . Logo, a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

## 4.2 - RETAS ORTOGONALIS

**Definição 4.5** Duas retas são *ortogonais* se seus vetores diretores são ortogonais. Se, além disso, as retas se interceptam dizemos que elas são *perpendiculares*.

**Exemplo 4.6** Encontre a equação paramétrica da reta  $r$  que passa por  $P = (-1, 3, 1)$  e é perpendicular a reta  $s$  dada por:

$$x = 1 + 2\lambda, \quad y = 1 + 3\lambda, \quad z = \lambda$$

Um ponto arbitrário de  $s$  é dado por  $Q = (1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda, \lambda)$  e seu vetor diretor por  $v_d = (2, 3, 1)$ .

Considere o vetor:

$$PQ = Q - P = (1 + 2\lambda + 1, 1 + 3\lambda - 3, \lambda - 1) = (2\lambda + 2, 3\lambda - 2, \lambda - 1)$$

Impondo a condição de ortogonalidade, temos que  $PQ \cdot v_d = 0$ , logo  $4\lambda + 4 + 9\lambda - 6 + \lambda - 1 = 0$ , ou seja,  $\lambda = \frac{3}{14}$ . Consequentemente, o vetor diretor da reta  $r$  procurada é  $PQ = (\frac{34}{14}, -\frac{19}{14}, -\frac{11}{14})$ . Portanto, as equações de  $r$  são:

$$x = -1 + 34t, \quad y = 3 - 19t, \quad z = 1 - 11t$$

**Exemplo 4.7** Encontre a equação paramétrica da reta  $t$  perpendicular simultaneamente às retas reversas:

$$r := \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$s := \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, as retas são dadas por:

$$r := \vec{X} = (2 + \lambda, \lambda, -1 + \lambda)$$

e

$$s := \vec{X} = (\mu, 2 - \mu, 0).$$

Seja  $P$  um ponto arbitrário de  $r$  e  $Q$  um ponto arbitrário de  $s$ . Então,  $\vec{PQ}$  é dado por:

$$\vec{PQ} = Q - P = (\mu - 2 - \lambda, 2 - \mu - \lambda, 1 - \lambda).$$

Impondo a condição que  $\vec{PQ}$  seja ortogonal simultaneamente aos vetores diretores de  $r$  e  $s$ , temos:

$$\vec{PQ} \cdot (1, 1, 1) = 0, \text{ donde } \mu - 2 - \lambda + 2 - \mu - \lambda + 1 - \lambda = 0$$

e

$$\vec{PQ} \cdot (1, -1, 0) = 0, \text{ donde } \mu - 2 - \lambda - 2 + \mu + \lambda = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos  $\lambda = \frac{1}{3}$  e  $\mu = 2$ .

Substituindo o valor de  $\lambda$  na equação de  $r$ , obtemos o ponto de interseção  $P$  de  $r$  com a reta procurada  $t$ ,

$$P = (2, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

De forma análoga, obtemos o ponto  $Q = (2, 0, 0)$ . A reta  $t$  pedida será dada por:

$$t := \vec{X} = (2, 0, 0) + \nu\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

### 4.3 - EXERCÍCIOS

1. Verifique se as retas  $r$  e  $s$  são ortogonais e, em caso afirmativo, se são também perpendiculares.

$$r := \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

$$s := \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

2. Encontre a equação paramétrica da reta passando por  $P = (-1, 2, 1)$  e que é perpendicular ao plano  $x - 2y + 3z = 0$ .
3. Considere o Exemplo 2.3 de uma reta  $r$  paralela a um plano  $\alpha$ . Encontre a distância de  $r$  a  $\alpha$ .
4. Considere os planos paralelos  $2x - 3y + z = 1$  e  $4x - 6y + 2z = 4$ . Encontre a distância entre os dois planos.
5. Encontre a equação da reta perpendicular simultaneamente às retas  $r$  e  $s$  dadas por:

$$r := \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

e  $s$  é a interseção dos planos  $x + y = 2$  e  $z = 0$ .

# AULA 5

## Transformações lineares do plano no plano

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Compreender o que é uma base do plano.
2. Compreender o que é uma transformação linear do plano no plano.
3. Operar com transformações lineares do plano no plano e reconhecer vários tipos de tais transformações.

### 5.1 - BASES DO PLANO

Já estudamos na Aula 1, o que são vetores linearmente dependentes e independentes no plano e o que é uma base do plano. Vamos rever aqui esses conceitos e utilizá-los para estudar um certo tipo de funções do plano para o plano.

**Definição 5.1** Dois vetores do plano são *linearmente dependentes* se estão sobre uma mesma reta que passa pela origem.

Dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente dependentes se existe  $k \neq 0$ , tal que  $u = kv$ .

**Definição 5.2** Dois vetores que não são linearmente dependentes são ditos *linearmente independentes*.

Portanto, dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente independentes se não existe  $k \neq 0$ , tal que  $u = kv$ .

**Definição 5.3** Um conjunto de dois vetores linearmente independentes do plano é chamado uma *base* do plano.

A utilidade de bases do plano é que dada uma base, por exemplo,  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 1)$ , podemos escrever qualquer outro vetor do plano, por exemplo,  $w = (0, 1)$  como  $w = au + bv$ , para constantes  $a, b$ , que podemos calcular. No caso tomamos  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = \frac{1}{2}$ , pois  $\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1) = (0, 1) = w$ .

Observe que o fato acima é verdade para qualquer vetor  $w = (w_1, w_2)$  do plano não apenas para o exemplo escolhido. Para ver isso, suponha que  $(w_1, w_2) = a(1, 1) + b(-1, 1)$ . Isso nos dá as seguintes equações:

$$w_1 = a - b \text{ e } w_2 = a + b$$

Resolvendo o sistema temos as soluções  $a = \frac{w_1+w_2}{2}$  e  $b = \frac{w_2-w_1}{2}$ . Geometricamente isso significa que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. eles não estão sobre uma mesma reta e, portanto, é possível decompor qualquer vetor  $\vec{w}$  do plano como soma de dois vetores, um deles paralelo a  $\vec{v}$  ( $a\vec{v}$ ) e o outro paralelo a  $\vec{u}$  ( $b\vec{u}$ ).

## 5.2 - GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO

Inicialmente, faremos uma revisão do conceito de função visto no ensino médio e neste curso, em outra disciplina e que será fundamental nesta aula.

**Definição 5.4** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma lei que associa a *cada* elemento de  $A$ , *um único* elemento de  $B$ . O conjunto  $A$  é chamado o domínio da função  $f$  e o conjunto  $B$  é o contradomínio.

**Observação 5.5** As expressões em itálico cada e um único, merecem atenção especial. Cada significa que não sobram elementos no domínio aos quais não correspondem uma imagem, um único significa que cada elemento do domínio tem por imagem um único elemento do contradomínio.

**Exemplo 5.6** Ainda na Aula 1, Tomo I, vimos exemplos de leis que são funções e leis que não são. Por exemplo, a reta  $y = 2x + 3$  é o gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada  $x \in \mathbb{R}$  associa  $f(x) = 2x + 3$ . Já a lei dada por  $x^2 + y^2 = 4$  também vista ali não é uma função, pois vimos que um valor de  $x$  corresponde a dois valores de  $y$ .  $\triangleleft$

Vamos estudar agora um tipo de função que ainda não havia aparecido. São as chamadas transformações lineares do plano no plano; isso significa que o domínio e o contradomínio da função são o plano  $\mathbb{R}^2$ . Linear significa que a lei pode ser dada por uma matriz  $2 \times 2$ .

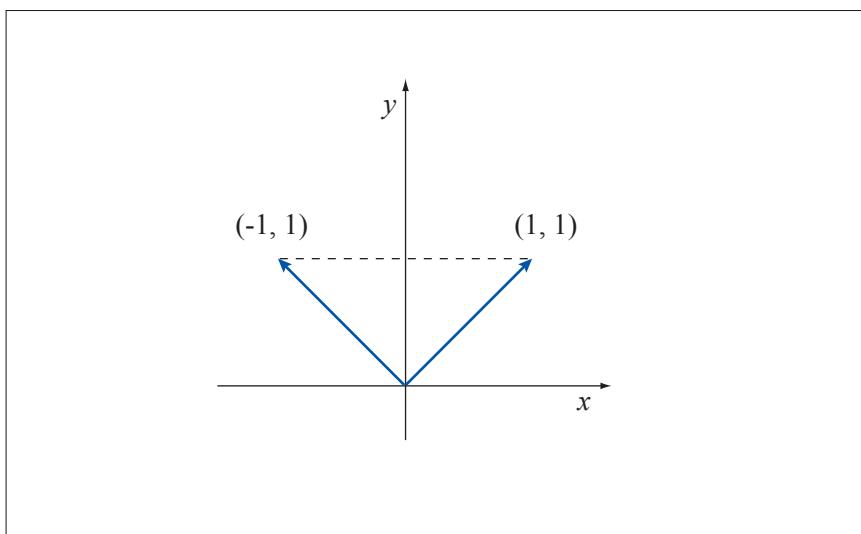


Figura 5.1: A transformação que associa a cada ponto sua imagem simétrica em relação ao eixo dos y's

### Definição 5.7 Uma transformação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (w_1, w_2)$$

é uma função definida por equações da seguinte forma:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

onde  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  são constantes e  $w_1, w_2, x_1, x_2$  são as variáveis. Observe que as variáveis aparecem em grau 1.

Podemos também escrever a função  $T$  acima da seguinte maneira: Notamos os pontos do  $\mathbb{R}^2$  por  $w = (w_1, w_2)$  e  $x = (x_1, x_2)$ . Então,  $T$

se escreve  $w = Ax$ , onde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

**Exemplo 5.8** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em relação ao eixo dos  $y'$ s.  $T(x) = (-x_1, x_2)$ . Nesse caso,  $w_1 = -x_1 + 0x_2$   $w_2 = 0x_1 + x_2$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando-se o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 1)$  é  $(-1, 1)$ , a imagem de  $(1, 0)$  é  $(-1, 0)$  e a de  $(0, 1)$  é  $(0, 1)$ . Veja a Figura 5.2.  $\triangleleft$

**Exercício 5.9**

$(x_1, x_2)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$				
$(w_1, w_2)$	$(-1, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$				

Complete a tabela dando mais quatro valores para  $(x_1, x_2)$  a sua escolha e encontrando os valores correspondentes para  $(w_1, w_2)$ .

**Exemplo 5.10** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  ele mesmo.  $T(x) = (x_1, x_2)$ . Nesse caso,  $w_1 = x_1 + 0x_2$   $w_2 = 0x_1 + x_2$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $2 \times 2$  correspondente a  $T$  é, nesse caso, a matriz identidade,  $I_2$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 5.11** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em torno da reta  $y = x$ .  $T$  é dado por  $w_1 = x_2$   $w_2 = x_1$ . Nesse caso,  $w_1 = 0x_1 + x_2$   $w_2 = 1x_1 + 0x_2$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(0, 1)$ , a imagem de  $(1, 1)$  é ele mesmo, em geral, a imagem de  $(x, x)$  é ele mesmo. Veja a Figura 5.2.  $\triangleleft$

**Exercício 5.12** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que reflete cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  em relação ao eixo dos  $x'$ s.  $T$  é dado por  $w_1 = x_1$   $w_2 = -x_2$ . Nesse caso,  $w_1 = x_1$   $w_2 = -x_2$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. Calcule a imagem de  $(1, 0)$ , a imagem de  $(1, 1)$  e a imagem de  $(0, 1)$ . Faça um esboço da transformação.

**Exemplo 5.13** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ .  $T$  é dado por  $w_1 = -x_2$   $w_2 = x_1$ . Nesse caso,  $w_1 = 0x_1 - x_2$   $w_2 = 1x_1 + 0x_2$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

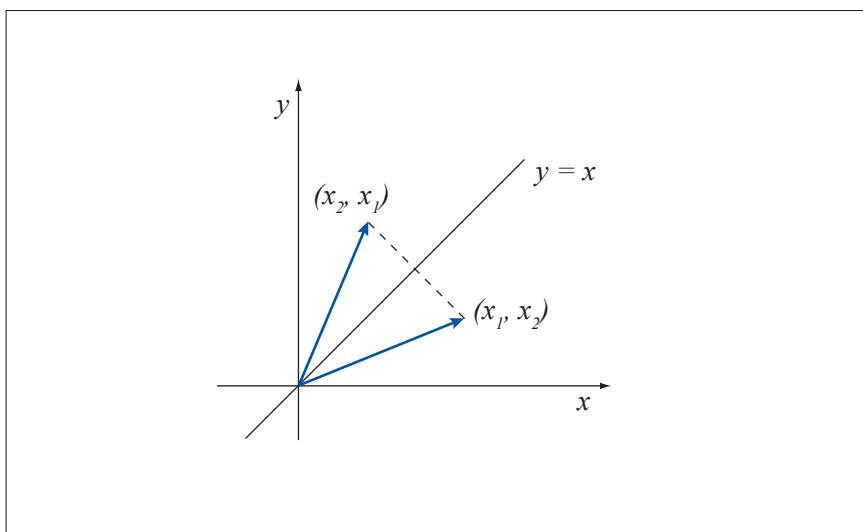


Figura 5.2: A transformação que associa a cada ponto sua imagem simétrica em relação a reta  $y=x$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada anteriormente. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(0, 1)$ , a imagem de  $(1, 1)$  é  $(-1, 1)$ .  $\triangleleft$

Operadores que rodam cada vetor  $\mathbb{R}^2$  de um ângulo  $\phi$  são chamados operadores de rotação. Eles são muito importantes, não só na matemática, como também nas aplicações. Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  de um ângulo de  $\phi$ .  $T$  é dado por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ , a imagem de  $(1, 1)$  é  $(\cos(\phi) - \sin(\phi), \cos(\phi) + \sin(\phi))$ . Veja a Figura 5.3.

### 5.3 - APLICAÇÕES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Imagine uma tela de computador. Ela é formada de pequenas luzes chamadas pixels que se acendem e se apagam. Elas estão dispostas em um plano, o plano da tela. Podemos dotar esse plano de coordenadas  $(x, y)$  pensando, por exemplo, que a origem do plano está no canto inferior esquerdo da tela. Assim, cada pixel corresponderá a um par ordenado  $(x, y)$  e poderemos falar nas coordenadas de um pixel.

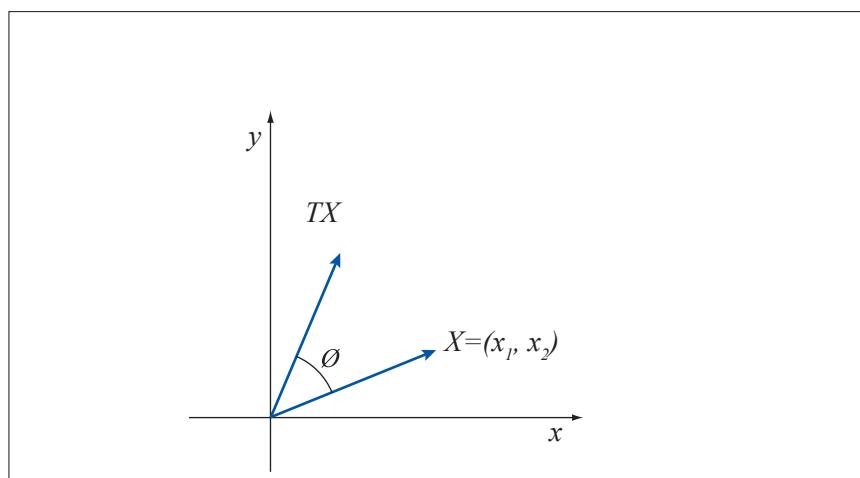


Figura 5.3: A transformação que associa a cada ponto sua imagem obtida a partir de uma rotação de  $\theta$

Muitas das aplicações que vemos diariamente na tela de um televisor ou de um computador são produzidas por aplicações simples do material que vimos nesta aula. Imagine uma figura  $S$  desenhada na tela. Ela corresponde a uma tabela de pixels onde determinamos quais os pixels que estão acesos e quais apagados. Poderíamos complicar um pouco o modelo associando a cada pixel uma cor, mas vamos imaginar apenas duas posições apagado e aceso. Suponha que desejamos girar esta figura  $S$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ . Vimos na seção 5.2, Exemplo 5.13 como proceder para girar um vetor de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ . Tomamos a transformação linear dada por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando cada vetor pela matriz acima, temos o efeito desejado. Na aplicação em questão, se tomamos a figura  $S$  com sua tabela de pixels acesos e apagados e multiplicarmos cada vetor  $x = (x_1, x_2)$  que dá as coordenadas de cada pixel pela matriz acima obtemos uma nova tabela de pixels acesos e apagados cujo resultado será girar a figura  $S$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ .

Uma observação interessante é que se giramos um vetor (ou uma figura), primeiro de um ângulo  $\phi_1$  e depois de um ângulo  $\phi_2$ , podemos obter a matriz que dá a rotação do ângulo total  $\phi_1 + \phi_2$  da seguinte maneira. Tomamos a matriz de rotação que já estudamos na seção 5.2.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e substituímos  $\phi$  por  $\phi_1 + \phi_2$ . Obtemos:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando agora as conhecidas relações trigonométricas

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2,$$

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2,$$

temos que a matriz de rotação de um ângulo  $\phi_1 + \phi_2$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 & -\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2 \\ \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2 & \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & -\sin(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) & -\sin(\phi_2) \\ \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a matriz que dá a rotação de um ângulo  $(\phi_1 + \phi_2)$  é o produto da matriz que dá a rotação do ângulo  $\phi_1$  pela matriz que dá a rotação do ângulo  $\phi_2$ . Esse fato possui muitas aplicações ao tratamento de imagens utilizando computação. Poderíamos imaginar um filme em que uma certa figura  $S$  fosse girando continuamente até completar um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Escrevemos 90 matrizes de rotação cada uma girando a figura de  $1^\circ$ . Tomamos a tabela de pixels que dá a figura  $S$  e vamos operando a tabela sucessivamente com cada uma das 90 matrizes. O resultado será um filme em que temos a impressão de uma rotação contínua de  $90^\circ$ .

**Exercício 5.14** Considere duas rotações  $\phi_1, \phi_2$  sucessivas de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ . Calcule a matriz de rotação  $A$  e em seguida a matriz  $A^2$ , que, como vimos, corresponde a uma rotação de  $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Calcule a matriz de rotação  $B$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  diretamente. Verifique que  $A = B$ .

**Observação 5.15** Podemos fazer muito mais que girar figuras utilizando transformações lineares do plano no plano. Podemos também deformar figuras expandindo-as em uma ou várias direções do plano e compô-las com rotações e reflexões obtendo aplicações as mais variadas.

**Observação 5.16** Os resultados vistos acima servem como justificativas da definição que adotamos de multiplicação de matrizes que, a princípio, é pouco natural. Se pensarmos na rotação de um ângulo  $\phi_1$  como uma função  $f_1$  e a rotação de uma ângulo  $\phi_2$  como uma função  $f_2$  a rotação de um ângulo  $\phi_1 + \phi_2$  é a função composta  $f_2 \circ f_1$ . Isto é, um fato bem mais geral. Dadas duas transformações lineares definidas por matrizes  $A$  e  $B$  sua composição corresponde a multiplicação das matrizes correspondentes.

### 5.4 - EXERCÍCIOS

1. Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em relação à origem,  $T(x) = (-x_1, -x_2)$ .
  - (a) Mostre que  $T$  é dada por:
 
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
  - (b) Calcule a imagem de:
    - i.  $(1, 1)$
    - ii.  $(1, 0)$
    - iii.  $(-1, -1)$
  - (c) Faça um esboço dos três pontos acima e de suas imagens.
  - (d) Considere o quadrado  $Q$  de vértices  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ . Encontre a imagem de  $Q$  por  $T$ . Faça um esboço de  $Q$  e sua imagem  $T(Q)$ .
2. Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por:
 
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
  - (a) Calcule a imagem de:
    - i.  $(1, 1)$
    - ii.  $(1, 0)$
    - iii.  $(-1, -1)$
    - iv.  $(x, y)$
  - (b) Faça um esboço dos três pontos acima e de suas imagens.
  - (c) Considere o quadrado  $Q$  de vértices  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ . Encontre a imagem de  $Q$  por  $T$ . Faça um esboço de  $Q$  e sua imagem  $T(Q)$ .
  - (d) Descreva geometricamente o operador em questão.
3. Encontre a matriz do operador que gira um ponto  $(x, y)$  em torno da origem de um ângulo de:
  - (a)  $30^\circ$
  - (b)  $45^\circ$
  - (c)  $-30^\circ$
4. Considere uma rotação  $\phi_1$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ . Calcule a matriz de rotação  $A$  e em seguida as matrizes  $A^2, A^3$  e  $A^4$ . Calcule a matriz de rotação  $B$  de um ângulo de  $\pi$  diretamente. Verifique que  $A^4 = B$ . Interprete geometricamente.

# AULA 6

## Transformações lineares mais gerais, aplicações à identificação de cônicas

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Compreender o que é uma transformação linear do espaço no espaço.
2. Operar com transformações lineares do espaço no espaço e reconhecer vários tipos de tais transformações.
3. Calcular autovetores e autovalores de transformações lineares e diagonalizar tais operadores quando possível.
4. Aplicar os conceitos acima à identificação de cônicas.

### 6.1 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO ESPAÇO

Já estudamos as transformações lineares do plano no plano que, como vimos, são dadas por matrizes  $2 \times 2$ . Vamos estudar agora as transformações lineares do espaço e veremos que elas são dadas por matrizes  $3 \times 3$ .

**Definição 6.1** Um conjunto de três vetores linearmente independentes do espaço é chamado uma *base* do espaço.

**Definição 6.2** Uma transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3)$$

é uma função definida por equações da seguinte forma:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$w_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Podemos também escrever a função  $T$  anterior da seguinte maneira: Notamos os pontos do  $\mathbb{R}^3$  por  $w = (w_1, w_2, w_3)$  e  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Então  $T$  se escreve  $w = Ax$ , onde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .

**Exemplo 6.3** Considere o operador  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que leva cada ponto  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , em  $T_1(x) = (-x_2, x_1, x_3)$ . Neste caso,  $w_1 = 0x_1 - x_2 + 0x_3$ ,  $w_2 = x_1 + 0x_2 + 0x_3$ ,  $w_3 = x_3$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T_1$  dada acima. A imagem de  $(1, 0, 0)$  é  $(0, 1, 0)$ , a imagem de  $(0, 1, 0)$  é  $(-1, 0, 0)$ , a imagem de  $(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 6.4** Considere o operador  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que leva cada ponto  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , em  $T_2(x) = (x_1, x_2, -x_3)$ . Neste caso,  $w_1 = x_1 + 0x_2 + 0x_3$ ,  $w_2 = 0x_1 + x_2 + 0x_3$ ,  $w_3 = 0x_1 + 0x_2 - x_3$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Como anteriormente, a imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T_2$  dada acima. A imagem de  $(1, 0, 0)$  é  $(1, 0, 0)$ , a imagem de  $(0, 1, 0)$  é  $(0, 1, 0)$ , a imagem de  $(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ . A transformação  $T$  leva cada ponto no seu simétrico em relação ao plano  $xy$ .  $\triangleleft$

### Exercício 6.5

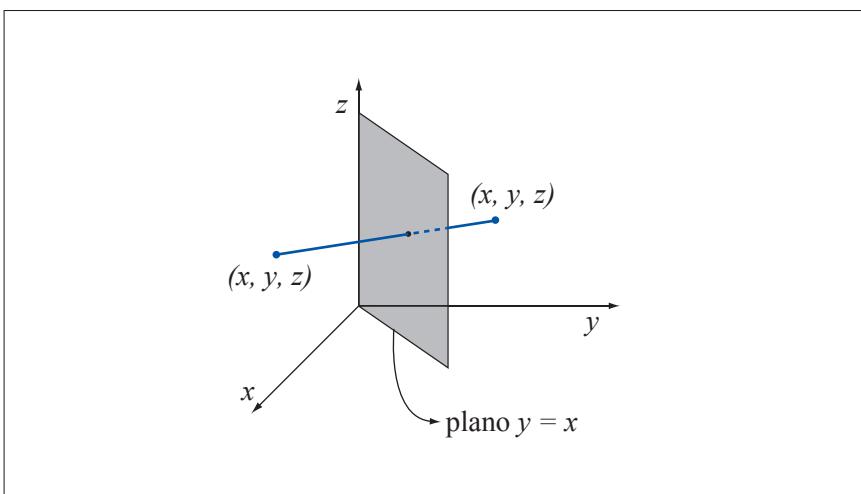
$(x_1, x_2, x_3)$	$(-1, 0, 0)$	$(1, -1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 2)$	$(0, 0, 3)$	$(1, 0, 0)$
$(w_1, w_2, w_3)$						

Complete a tabela encontrando os valores para  $(w_1, w_2, w_3)$  imagens dos valores dados de  $(x_1, x_2, x_3)$ , por  $T_1$  e também por  $T_2$ .

Observe no exercício que a transformação linear  $T_1$  dada no exemplo fixa todos os pontos sobre o eixo dos  $z$ 's e gira os vetores no plano  $z = 0$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Este tipo de transformação que fixa um eixo é muito utilizado nas aplicações, como veremos.

**Exemplo 6.6** Considere o operador  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que leva cada ponto  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , em  $T_3(x) = (x_2, x_1, x_3)$ . Neste caso,  $w_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3$ ,  $w_2 = x_1 + 0x_2 + 0x_3$ ,  $w_3 = x_3$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Figura 6.1: A transformação  $T_3$ 

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T_3$  dada acima. A imagem de  $(1, 0, 0)$  é  $(0, 1, 0)$ , a imagem de  $(0, 1, 0)$  é  $(1, 0, 0)$ , a imagem de  $(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ . A transformação  $T_3$  leva cada ponto  $(x, y, z)$  no seu simétrico em relação ao plano  $y = x$ . Veja a Figura 6.1.  $\triangleleft$

## 6.2 - AUTOVETORES E AUTOVALORES

**Definição 6.7** Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  (respectivamente  $3 \times 3$ ) um vetor  $x$  não nulo do plano (respectivamente do espaço) é chamado um *autovetor* de  $A$  se  $Ax$  é um múltiplo escalar de  $x$ , isto é, se

$$Ax = \lambda x$$

para algum escalar  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de  $A$  e  $x$  um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ .

A definição acima está dizendo que os vetores  $Ax$  e  $x$  são linearmente dependentes, ou seja, estão na mesma reta. Este fato terá algumas aplicações. Observe o exemplo:

**Exemplo 6.8** O vetor  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  é um autovetor para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3u$$

O autovalor é 3 e a reta sobre a qual estão  $Au$  e  $u$  é a reta  $y = 2x$ .  $\triangleleft$

Para encontrar os autovalores de uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ , (respectivamente  $3 \times 3$ ), procedemos da seguinte forma. Se  $Ax = \lambda x$  temos  $Ax - \lambda Ix = 0$  onde  $I$  é a matriz identidade. Esta igualdade pode ainda ser escrita como  $(A - \lambda I)x = 0$ . Estamos procurando soluções não triviais  $x = (x_1, x_2)$  (respectivamente  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ) para o sistema homogêneo cuja matriz de coeficientes é  $A - \lambda I$ . Pelo Teorema 7.15 da Aula 7, Tomo I, temos que isto acontece se e somente se  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Impondo esta condição, obtemos uma equação do segundo (respectivamente terceiro) grau em  $\lambda$ , chamada *polinômio característico* de  $A$ , que podemos resolver e cujas soluções serão os autovalores procurados.

**Exemplo 6.9** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Encontre todos os autovalores de  $A$  e os autovetores correspondentes. Para encontrar os autovalores resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ , obtemos a equação  $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0$  ou ainda  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$ . Temos, portanto, dois autovalores:  $\lambda = 5$  e  $\lambda = -1$ .

Para obter os autovetores tomamos um autovalor de cada vez.

1.  $\lambda = 5$

Substituindo  $\lambda = 5$  na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ , temos:

$$\begin{pmatrix} 1 - 5 & 4 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde  $-4x_1 + 4x_2 = 0$  e  $2x_1 - 2x_2 = 0$ . Obtemos que  $x_1 = x_2$  e o sistema possui infinitas soluções como já esperávamos (ver Teorema 7.12, Aula 7, Tomo I). Um autovetor será  $(1, 1)$ .

2.  $\lambda = -1$

Substituindo  $\lambda = -1$  na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ , obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 & 4 \\ 2 & 3 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e portanto  $2x_1 + 4x_2 = 0$  e  $2x_1 + 4x_2 = 0$ . Obtemos que  $x_1 = -2x_2$ , e o sistema também possui infinitas soluções. Um autovetor será  $(-2, 1)$ , um outro  $(2, -1)$ .

◇

**Observação 6.10** Note que para obter os autovetores associados a um dado autovalor, estamos procurando soluções não nulas de um sistema homogêneo cuja matriz de coeficientes possui determinante zero. Sabemos da Aula 7 (Tomo I) que este sistema possui infinitas soluções, todas sobre uma mesma reta. Assim, no exemplo acima, qualquer vetor da forma  $(a, a)$ , ou seja, sobre a reta  $y = x$  é um autovetor para o autovalor 5. Chamamos esta reta de autoespaço já que qualquer ponto não nulo da reta é um autovetor.

**Exercício 6.11** Verifique, no exemplo anterior, que todo vetor da forma  $x = (a, a)$  satisfaz  $Ax = 5x$ , e que todo ponto sobre a reta  $u = -2v$  (escrevemos a reta nas coordenadas  $u, v$  para não haver confusão com o ponto  $x \in \mathbb{R}$ ) satisfaz  $Ax = -1x$ .

**Exemplo 6.12** Encontre todos os autovalores e os correspondentes autovetores da matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores, resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ , obtemos a equação cúbica:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Para encontrar as raízes desta equação, vamos procurar inicialmente raízes inteiras. Para isso vamos utilizar o fato de que as raízes de um polinômio, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1, são sempre divisores do termo constante, no caso -4. Os divisores de -4 são  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ . Substituindo na equação, obtemos que 4 é raiz. Dividindo a equação por  $\lambda - 4$  obtemos  $\lambda^2 - 4\lambda + 1$ , cujas raízes são  $2 \pm \sqrt{3}$ . Portanto, os autovalores de  $A$  são:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

□

**Exercício 6.13** Obtenha os autovetores de  $A$  tomando um autovalor de cada vez.

1.  $\lambda_1 = 4$

Substituindo  $\lambda_1 = 4$  na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ , temos:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule as equações e resolva o sistema para obter a reta que é o autoespaço correspondente a este autovalor. Encontre um autovetor de norma 1.

2. Repita o cálculo para os outros dois autovalores.  $\triangleleft$

### 6.3 - DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

O próximo passo no nosso estudo de transformações lineares do plano e do espaço é estudar quando é possível obter uma base do plano  $\mathbb{R}^2$  ou do espaço  $\mathbb{R}^3$  constituída de autovetores de uma transformação  $T$  dada por uma matriz  $A$ . Estas bases são úteis para estudar propriedades geométricas da matriz  $A$  e, quando elas existem, podemos “diagonalizar” a matriz  $A$ , o que significa encontrar uma matriz diagonal  $A'$  que em um sentido que explicaremos é equivalente a  $A$ .

**Definição 6.14** Uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , é *diagonalizável* se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal, onde  $P^{-1}$  denota a inversa de  $P$ . Dizemos que  $P$  diagonaliza  $A$ .

#### 6.3.1 - Matrizes $2 \times 2$

Temos o seguinte resultado sobre a diagonalização de matrizes  $2 \times 2$  cuja demonstração omitiremos.

**Teorema 6.15** Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , então as duas condições abaixo são equivalentes:

1.  $A$  é diagonalizável;
2.  $A$  possui dois autovetores linearmente independentes.

O teorema acima garante que uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ , que possui dois autovetores linearmente independentes é diagonalizável. Vamos descrever qual o procedimento que podemos utilizar para levar a cabo a diagonalização de uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ . O processo consiste de três passos:

1. Encontre dois autovetores linearmente independentes de  $A$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .

2. Forme a matriz  $P$ ,  $2 \times 2$ , tendo  $x_1, x_2$  como seus vetores coluna.
3. A matriz  $P^{-1}AP$  será diagonal e suas entradas na diagonal serão  $\lambda_1, \lambda_2$ , onde  $\lambda_i$  é o autovalor correspondente a  $x_i$ .

**Exemplo 6.16** Considere novamente o Exemplo 6.9 da Seção 6.2 visto acima.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Já encontramos os dois autovalores de  $A$ :  $\lambda = 5$  e  $\lambda = -1$  e os autovetores correspondentes:  $(1, 1)$  e  $(2, -1)$ . Formamos a matriz  $P$  cujas colunas são os autovetores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontramos a inversa de  $P$ .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A matriz  $P^{-1}AP$  será dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

uma matriz diagonal, como queríamos.  $\diamond$

Nem sempre é possível diagonalizar uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ . Considere o exemplo abaixo:

**Exemplo 6.17**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos tentar encontrar todos os autovalores de  $A$  e os autovetores correspondentes. Para encontrar os autovalores resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$  obtemos a equação  $(1 - \lambda)^2 = 0$ , donde  $\lambda = 1$ , uma raiz dupla. Substituindo na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ ,  $\lambda = 1$  temos:

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos a equação  $x_2 = 0$ . Logo, obtemos que os autovetores correspondentes ao autovalor 1 são da forma  $(x_1, 0)$  sobre a reta  $y = 0$ . Não obtemos assim uma base do plano já que todos os autovalores correspondentes ao único autovalor são l.d. A matriz  $A$  neste caso não é diagonalizável.  $\diamond$

### 6.3.2 - Matrizes simétricas

De maneira mais geral, podemos considerar uma matriz quadrada  $n \times n$  e nos perguntar quais são seus autovetores e autovalores e se ela é diagonalizável. Vamos tratar aqui de um caso particular importante, o das matrizes simétricas.

**Definição 6.18** Uma matriz  $A$ ,  $n \times n$  é *simétrica* se  $A^t = A$ .

Na próxima aula, vamos aplicar os resultados desta seção.

**Definição 6.19** Uma matriz  $P$ ,  $n \times n$  é *ortogonal* se  $A^t A = I_n$ . Observe que se  $P$  é ortogonal  $P^{-1} = P^t$ .

**Definição 6.20** Uma base do espaço  $\mathbb{R}^3$  é dita *ortonormal* se seus elementos são dois a dois ortogonais e possuem norma um.

Nesta seção vamos considerar dois problemas:

1. Dada uma matriz  $A$ ,  $3 \times 3$ , existe uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^n$  consistindo de autovetores de  $A$ ?
2. Dada uma matriz  $A$ ,  $3 \times 3$ , existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP = P^tAP$  é uma matriz diagonal? Nesse caso dizemos que  $A$  é ortogonalmente diagonalizável.

Temos o seguinte resultado, cuja demonstração omitiremos:

**Teorema 6.21** Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:

1. A matriz  $A$  é ortogonalmente diagonalizável.
2. A matriz  $A$  possui um conjunto de 3 autovetores ortonormais.
3. A matriz  $A$  é simétrica.

Vamos diagonalizar matrizes simétricas  $A$ ,  $3 \times 3$  utilizando o teorema acima e mais alguns fatos que vamos utilizar sem demonstração, para produzir uma base ortonormal do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Procedemos da seguinte forma:

1. Encontramos os autovalores de  $A$  que são todos reais.
2. Temos duas possibilidades:

- (a) Se  $A$  possui três autovalores distintos, então basta tomar um autovetor de norma um para cada autovalor para obter a base procurada. Isso decorre do fato de que autovetores correspondentes a autovalores distintos são sempre ortogonais.
- (b) Se  $A$  possui apenas dois autovalores distintos, ainda assim podemos obter a base ortonormal procurada. Observe o exemplo abaixo.
3. Uma vez obtida a base ortonormal formada por autovetores  $u_1, v_1, w_1$ , a matriz ortogonal  $P$  que diagonaliza  $A$  é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 6.22** Vamos encontrar uma matriz ortogonal  $P$  que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primeiramente encontramos os autovalores de  $A$ . Para isso resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ , obtemos a equação  $(\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$ . Temos portanto dois autovalores  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$ .

Vamos agora calcular uma base do  $\mathbb{R}^3$  constituída de autovetores de  $A$ . Tome o  $2^{\text{o}}$  autovetor  $\lambda_2 = 8$ , por exemplo, e considere a equação:

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Donde obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Escalonando obtemos as soluções  $y = z$  e  $x = z$ , que dão os autovetores, todos na mesma reta do  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem dada parametricamente por  $(t, t, t)$ , por exemplo  $u = (1, 1, 1)$ . Como queremos um autovetor de norma um, tomamos  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

Tome agora o  $1^{\text{o}}$  autovetor  $\lambda_1 = 2$ , e considere a equação:

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Donde obtemos o sistema constituído pela única equação:  $2x + 2y + 2z = 0$ , que é como sabemos a equação de um plano que passa pela origem, que denominaremos por  $\alpha$ . Qualquer vetor contido no plano é autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda_1 = 2$ . Como queremos uma base escolhemos dois linearmente independentes, por exemplo  $v = (-1, 1, 0)$  e  $w = (-1, 0, 1)$ . Observe que  $v$  e  $w$  são ortogonais a  $u$ , mas não são ortogonais entre si. (Aliás, qualquer vetor do plano  $\alpha$  é ortogonal a  $u$ !)

Para terminar precisamos substituir  $v$  e  $w$  por vetores  $v_1$  e  $w_1$  que estão no plano  $\alpha$  e são ortogonais entre si e de norma 1. Lembre-se que já fizemos um procedimento parecido na Aula 2, Tomo I. Tomamos  $v$  e projetamos  $w$  sobre  $v$ . Para isto seja  $c_1 = \frac{1}{v \cdot v} v \cdot w = \frac{1}{2}$  (veja Tomo I, seção 2.5) e considere  $P = c_1 v = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ . O vetor  $w - P = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)$  é um vetor ortogonal a  $v$ . Para terminar, consideramos os vetores  $v_1$  na direção de  $v$ , mas de norma 1 e  $w_1$  na direção de  $w$  também de norma 1. Obtemos a base ortonormal procurada:

$$v_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad w_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \quad u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Segundo o procedimento acima a matriz  $P$  que diagonaliza ortogonalmente  $A$  é então dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

como pode ser verificado diretamente.

**Observação 6.23** Não consideramos o caso em que a matriz  $A$  possui um único autovalor. Neste caso a matriz  $A$  só será diagonalizável se for um múltiplo da identidade, mas ela poderá também não ser diagonalizável. Isso será tratado em disciplinas mais avançadas.

## 6.4 - APLICAÇÕES À IDENTIFICAÇÃO DE CÔNICAS PLANAS

### 6.4.1 - Formas quadráticas

**Definição 6.24** Um polinômio em duas variáveis é dito *homogêneo* se ele é soma de monômios todos do mesmo grau.

**Exemplo 6.25** Os polinômios

$$x^2 + y^2, \quad ax^2 + bxy + y^2, \quad x^3 + y^3 \quad \text{e} \quad x + y$$

são polinômios homogêneos nas variáveis  $x$  e  $y$ , os dois primeiros de grau 2, o terceiro de grau 3 e o quarto um polinômio homogêneo linear. Já os polinômios

$$x^2 + x, \quad x^3 + xy + y^3 \quad \text{e} \quad x + y + y^2$$

não são homogêneos.

**Definição 6.26** Uma *forma quadrática* em duas variáveis é um polinômio homogêneo de grau 2 em duas variáveis.

Uma forma quadrática em duas variáveis pode ser escrita na forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

para constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  apropriadas ou ainda na forma:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Definição 6.27** Um polinômio *homogêneo* nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma soma de monômios nestas variáveis todos de mesmo grau. Uma *forma quadrática* em  $n$  variáveis é um polinômio homogêneo de grau 2 em  $n$  variáveis.

Podemos escrever uma forma quadrática em  $n$  variáveis da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

onde  $A$  é uma matriz simétrica  $n \times n$ .

Ou ainda escrevendo  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , uma forma quadrática em  $n$  variáveis pode ser escrita:

$$x^t Ax.$$

Temos o seguinte teorema para formas quadráticas, cuja demonstração omitiremos:

**Teorema 6.28** Seja  $x^t Ax$  uma forma quadrática em  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  onde  $A$  é uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz

$P$  que diagonaliza  $A$ , isto é,  $x = Py$ , onde  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  e  $x^t Ax = y^t Dy = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$  e

$$D = P^t AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 6.29** Encontre uma mudança de variáveis que reduza a forma quadrática  $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$  a uma soma de quadrados e expresse a forma quadrática nas novas variáveis. Podemos escrever a forma quadrática acima da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular os autovalores da matriz acima calculamos o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3).$$

Portanto, os autovalores da matriz são  $\lambda = 0, \lambda = -3, \lambda = 3$ .

Em seguida, determinamos um autovetor correspondente a cada autovalor. Observe:

$$\lambda = 0 : \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \lambda = -3 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \lambda = 3 : \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

Portanto, a substituição  $x = Py$  que elimina os produtos cruzados é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\x_3 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3\end{aligned}$$

A nova forma quadrática será:

$$\left( \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right),$$

ou seja,  $-3y_2^2 + 3y_3^2$ .

#### 6.4.2 - Retomando o estudo das cônicas

Consideremos o plano  $xy$ .

**Definição 6.30** Uma cônica no plano  $xy$  é uma equação da forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (6.1)$$

Vamos mostrar que toda equação como a 6.1 é quase sempre uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Esses três casos são as chamadas cônicas não degeneradas. Existem ainda alguns tipos de cônicas degeneradas: o par de retas, a reta dupla, um par de pontos ou, no limite, o conjunto vazio. Já vimos na Aula 3, Tomo I as equações das cônicas padrão:

$$\text{Elipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Hipérbole: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Parábola: } y^2 = 4cx$$

Vimos ainda algumas variantes dessas equações como a parábola  $x^2 = 4cy$  ou ainda as parábolas, elipses e hipérboles que podem ser obtidas da padrão por translação. Observe que todos esses exemplos se encaixam na definição de cônica acima. O único caso de cônicas não degeneradas que falta entender é quando a equação da cônica apresenta um produto cruzado não nulo, ou seja, quando o coeficiente  $b$  é diferente de zero. Antes de entender esse caso vamos considerar alguns casos degenerados.

**Exemplo 6.31** A equação  $x^2 - y^2 = 0$  é do tipo 6.1. Ela pode ser fatorada como  $(x - y)(x + y) = 0$ . Para a expressão acima se anular podemos ter  $x - y = 0$  ou  $x + y = 0$ . Portanto, a equação representa o par de retas  $x = y$  e  $x = -y$ .

**Exemplo 6.32** A equação  $x^2$  também é um caso particular de 6.1. Ela pode ser pensada como a reta dada por  $x = 0$ , contada duas vezes. Dizemos que ela representa uma reta dupla.

**Exemplo 6.33** A equação  $x^2 + y^2 = 0$  também é um caso particular de 6.1. Ela pode ser pensada como o ponto dado por  $(0, 0)$ .

Para estudar as cônicas de maneira sistemática fazemos a seguinte definição:

**Definição 6.34** Dada a cônica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

chamamos a parte homogênea de grau 2 de forma quadrática associada à cônica.

Para estudar a cônica geral vamos considerar a forma quadrática associada e efetuar uma mudança de variáveis para eliminar o produto cruzado não nulo, utilizando o Teorema 6.28. O efeito geométrico é efetuar uma rotação de eixos de tal forma que a cônica passe a ser uma das padrão (pode ser necessária uma translação adicional). Com isso, identificamos a cônica e determinamos a rotação necessária para transformá-la em uma cônica padrão, como acima, sempre que isso for possível.

Consideremos um exemplo:

**Exemplo 6.35** Considere a cônica  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ . Vamos identificar a cônica encontrando uma rotação que a torne uma cônica padrão. A forma quadrática associada à cônica acima é:  $5x^2 - 4xy + 8y^2$ , que também pode ser escrita assim:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encontrando os autovalores da matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ , obtemos  $\lambda = 4$  e  $\lambda = 9$ .

Os autovetores correspondentes são:

$$\lambda = 4 : \quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}; \quad \lambda = 9 : \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a mudança de variável que diagonaliza  $A$  é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Nas novas coordenadas  $x'$  e  $y'$  a equação da cônica é  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ , portanto uma elipse. Veja a Figura 6.1.

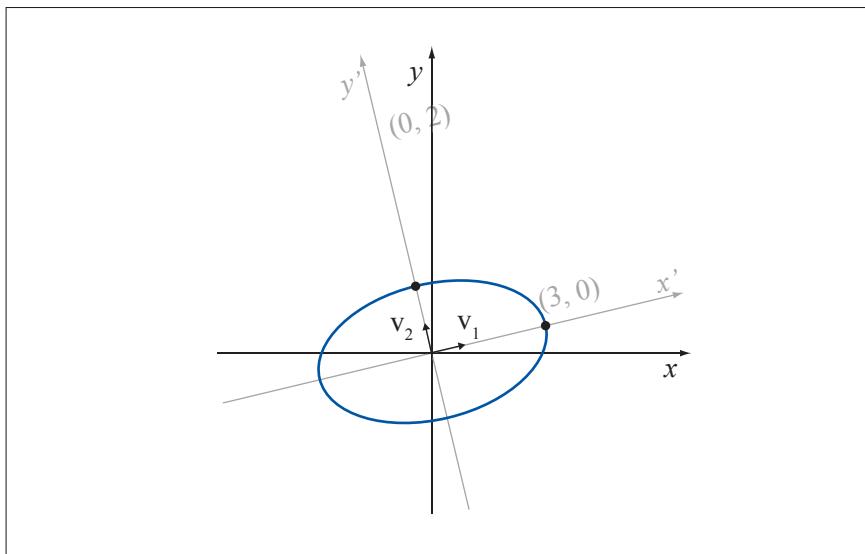


Figura 6.1: Encontrando uma cônica padrão por rotação de eixos

Podem ocorrer casos mais complicados. Considere este outro exemplo.

**Exemplo 6.36** Identifique a cônica

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

Observe que a forma quadrática associada a essa cônica é a mesma do exemplo anterior  $5x^2 - 4xy + 8y^2$ . Podemos escrever a equação acima em forma matricial onde fica mais clara a dependência do vetor do plano  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ :

$$X^t AX + KX + 4 = 0,$$

onde  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ , e  $K = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ . Do exemplo anterior, já sabemos como eliminar o produto cruzado  $-4xy$ , fazemos a mudança de variável

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

que diagonaliza  $A$ . Obtemos:

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0$$

Já eliminamos o termo cruzado, mas ainda não temos a cônica em uma forma padrão. Para isso completamos quadrados.

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) + 4 - 4 - 36 = 0$$

Encontramos:

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36, \text{ ou ainda, fazendo } x'' = x' - 1 \text{ e } y'' = y' - 2$$

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1,$$

a equação de uma elipse.

Temos assim o seguinte resultado:

**Teorema 6.37** *Seja*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dy^2 + ey + f = 0$$

*a equação de uma cônica. Podemos sempre identificar a cônica fazendo mudanças de variáveis para reduzi-la à forma padrão ou identificá-la como uma cônica degenerada da seguinte maneira:*

1. *Considere inicialmente a forma quadrática associada A e faça uma mudança de variável de forma a diagonalizá-la, obtendo a equação:*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f' = 0$$

2. *Em seguida, complete o quadrado e faça uma nova mudança de variável de forma a obter uma cônica padrão, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Se isso não for possível, então a cônica é degenerada de um dos seguintes tipos:*

- (a) *Um par de retas. Isso acontece sempre que a equação original se fatora como um produto de dois fatores lineares distintos, como no exemplo 6.31.*
- (b) *Uma reta dupla. Isso acontece sempre que a equação original for uma forma linear ao quadrado. Veja exemplo 7.20.*
- (c) *Um único ponto. Isso acontece se a equação original possui uma única raiz real, como no caso do exemplo 6.33.*
- (d) *O conjunto vazio, quando a equação não possui soluções reais, por exemplo  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .*

## 6.5 - EXERCÍCIOS

1. Para cada matriz  $A$  abaixo encontre todos os autovalores e os autovetores linearmente independentes. Encontre a matriz  $P$ , se existir, tal que  $P^{-1}AP$  seja diagonal.

(a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Para cada matriz  $A$  abaixo encontre todos os autovalores e uma base para cada autoespaço. A matriz é diagonalizável?

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

3. Reduza as formas quadráticas abaixo a uma soma ou diferença de quadrados.

(a)  $2x^2 + 2y^2 - 2xy$

(b)  $2xy$

(c)  $-3x^2 + 5y^2 + 2xy$

4. Identifique as cônicas abaixo, dizendo se elas são degeneradas ou não e em cada caso descrevendo-as completamente.

(a)  $2x^2 + 5y^2 = 20$

(b)  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$

(c)  $x^2 + y^2 + 5 = 0$

(d)  $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

(e)  $x^2 + 2xy$

(f)  $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

(g)  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$



# AULA 7

## Estudos das superfícies

### OBJETIVOS

Ao terminar esta aula, você deverá ser capaz de:

1. Fazer o esboço de superfícies simples considerando as curvas de interseção delas com os planos coordenados.
2. Conhecer as superfícies cilíndricas obtidas a partir de uma curva diretriz plana.
3. Reconhecer as quádricas padrão.
4. Identificar uma quádriga dada a sua equação.

### 7.1 - COMO ESBOÇAR SUPERFÍCIES

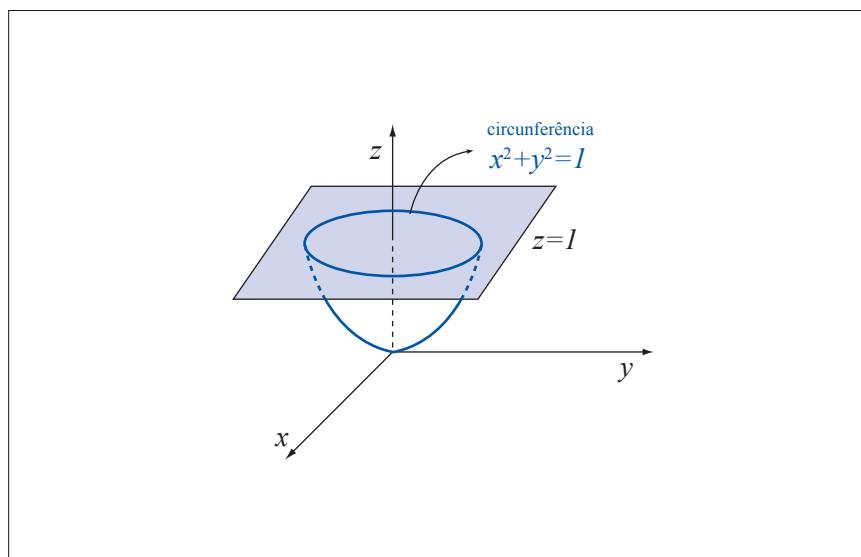
Já estudamos o plano e a esfera no espaço. Esses são exemplos de superfícies. Inicialmente vamos estudar algumas técnicas para fazer o esboço de algumas superfícies simples.

**Exemplo 7.1** Considere a seguinte equação no espaço:

$$z = x^2 + y^2$$

Vamos fazer o esboço dessa superfície. Para isso obtemos primeiramente a interseção da superfície, que não conhecemos, com os planos coordenados. Estas interseções são chamadas traços.

1. Quando  $x = 0$  obtemos  $z = y^2$ , uma parábola no plano  $zy$ .
2. Quando  $y = 0$  obtemos  $z = x^2$ , uma parábola no plano  $zx$ .
3. Quando  $z = 0$  obtemos  $x^2 + y^2 = 0$  e temos o único ponto  $x = y = z = 0$ .

Figura 7.1: O paraboloide dado por  $z = x^2 + y^2$ 

Além disso observe que quando cortamos a superfície por planos  $z = c$ , uma constante, que vamos supor positiva, obtemos circunferências  $x^2 + y^2 = (\sqrt{c})^2$ . É fácil concluir que superfície é esta. Veja a Figura 7.1. Essa superfície é conhecida como o paraboloide de revolução, pois pode ser obtida girando a parábola  $z = x^2$  no plano  $y = 0$  em torno do eixo dos  $z's$ .

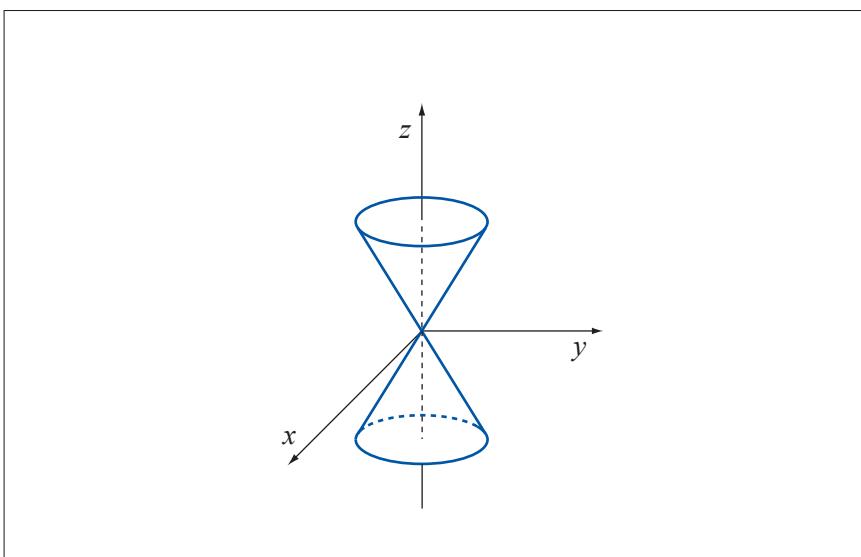
**Exemplo 7.2** Situação diversa acontece quando consideramos a equação

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Vamos agora fazer o esboço dessa outra superfície. Para isso obtemos como anteriormente a interseção da superfície com os planos coordenados.

1. Quando  $x = 0$  obtemos  $z^2 = y^2$ , duas retas  $z = \pm y$  no plano  $zy$ .
2. Quando  $y = 0$  obtemos  $z^2 = x^2$ , duas outras retas, dessa vez no plano  $zx$ .
3. Quando  $z = 0$  obtemos como anteriormente  $x^2 + y^2 = 0$  e temos o único ponto  $x = y = z = 0$ .

Além disso observe que quando cortamos a superfície por planos  $z = c$ , uma constante positiva ou negativa, obtemos as circunferências  $x^2 + y^2 = c^2$ . É fácil concluir que superfície é esta. Veja a Figura 7.2. Esta superfície é conhecida como o cone de duas folhas e também é de revolução, pois pode ser obtida girando uma reta, por exemplo, a reta  $z = x$  do plano  $y = 0$ , em torno do eixo dos  $z's$ .

Figura 7.2: O cone dado por  $z^2 = x^2 + y^2$ 

## 7.2 - SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Nesta seção iremos estudar as superfícies cilíndricas e na próxima as quádricas.

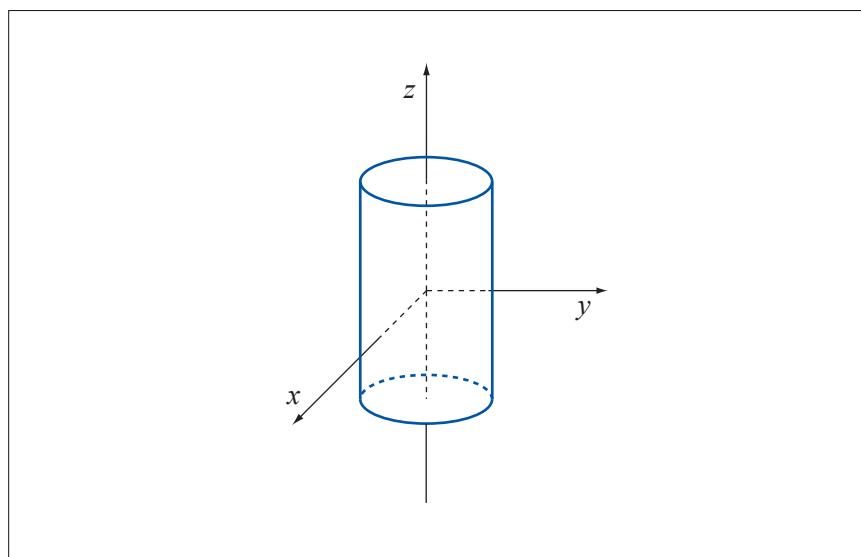
**Definição 7.3** Um *cilindro* é a superfície formada pela união de retas (chamadas diretrizes) que se apoiam em uma determinada curva (chamada diretriz) e que são paralelas a uma reta dada.

Neste livro consideraremos apenas os casos em que a curva diretriz é uma curva plana e as geratrizes são ortogonais ao plano da curva diretriz.

**Exemplo 7.4** Considere a equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

vista no espaço tridimensional. Você já sabe que essa equação no plano  $xy$  é a equação da circunferência de centro na origem e raio 1, mas vista no espaço tridimensional temos uma superfície. Para ver isso e identificar a superfície observe que a equação não depende da variável  $z$ . Assim, se  $z = 0$  temos uma circunferência de centro na origem e raio 1. Mas se  $z = 1$ , por exemplo, temos a mesma circunferência agora no plano  $z = 1$ . Como isso é verdade para todos os valores de  $z$ , não é difícil concluir que superfície é esta: um cilindro cuja diretriz é a circunferência  $C$  de centro na origem e raio 1 e cujas geratrizes são todas as retas apoiadas em  $C$  e perpendiculares ao plano  $xy$ . Veja a Figura 7.3.

Figura 7.3: O cilindro dado por  $x^2 + y^2 = 1$ 

### 7.3 - AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS PADRÃO

Consideremos o espaço tridimensional  $xyz$ . Vamos fazer o estudo das quádricas no espaço que é bastante semelhante ao das cônicas no plano. Quando estudamos as cônicas no plano consideramos inicialmente as cônicas padrão: a elipse, a parábola e a hipérbole. Aqui também vamos iniciar nosso estudo pelas seis quádricas padrão.

#### 7.3.1 - O paraboloide elíptico

O paraboloide elíptico é a superfície no espaço dada pela equação:

$$z = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}$$

Observe que o paraboloide elíptico possui equação semelhante ao paraboloide de revolução estudado no Exemplo 7.1. Vamos considerar as semelhanças e diferenças no seguinte exemplo.

**Exemplo 7.5** Considere a superfície dada por:

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

Para fazer o esboço da superfície, vamos considerar o seu traço com os planos coordenados.

1. Quando  $z = 0$ , temos o traço com o plano  $xy$ :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$$

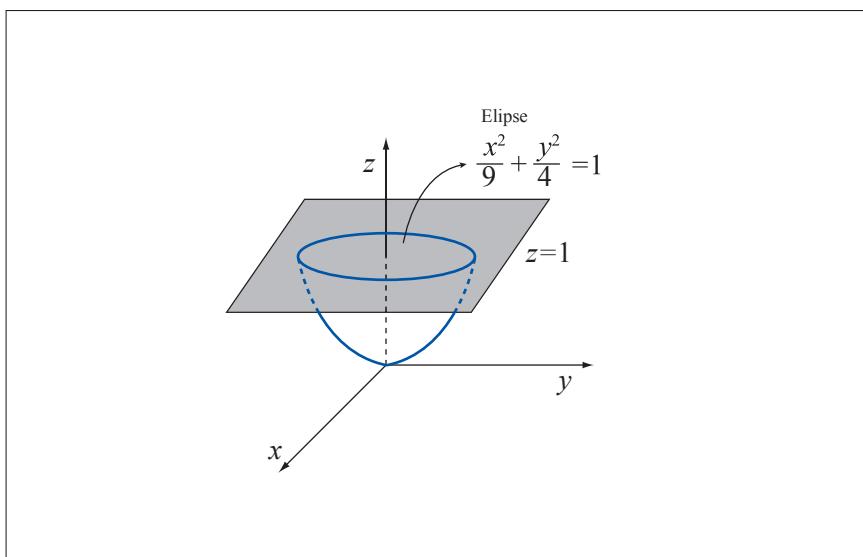


Figura 7.4: O paraboloide dado por  $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

e apenas a origem satisfaz. Por outro lado, observe que o traço com os planos paralelos ao plano  $xy$  e altura positiva são elipses. Por exemplo fazendo  $z = 1$ , obtemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

que como sabemos é uma elipse de semieixos 3 e 2.

2. Analogamente, fazendo  $y = 0$ , temos o traço com o plano  $xz$ ; desta feita, a parábola  $z = \frac{x^2}{9}$ .
3. Finalmente, fazendo  $x = 0$ , temos o traço com o plano  $yz$ ; a parábola  $z = \frac{y^2}{4}$ .

Observe ainda que, se cortarmos a superfície procurada por planos paralelos ao plano  $xy$  e de altura menor que zero, o traço correspondente é vazio.

Obtemos a superfície da Figura 7.4, que não é uma superfície de revolução.

**Exercício 7.6** Faça o esboço do paraboloide elíptico  $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

### 7.3.2 - O elipsoide

O elipsoide é a superfície no espaço dada pela equação:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Vamos fazer o esboço de um exemplo de elipsoide:

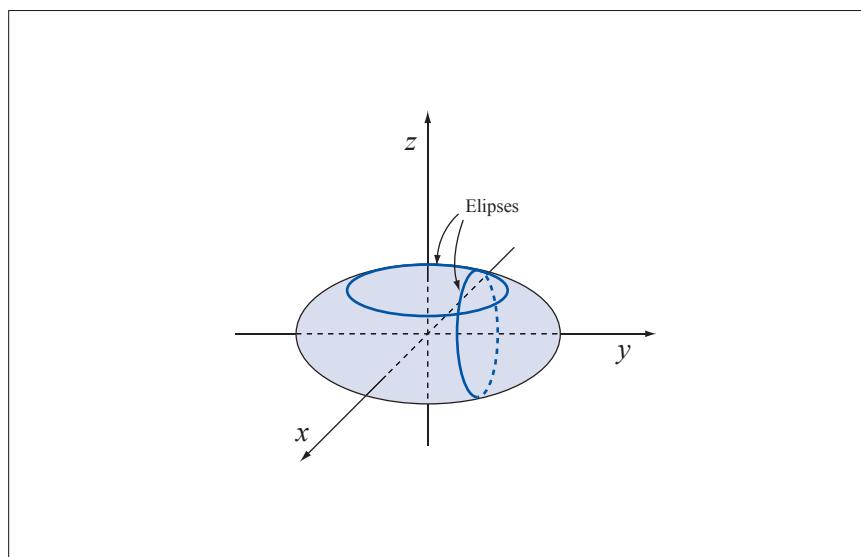


Figura 7.5: O elipsoide dado por  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$

**Exemplo 7.7** Considere a superfície dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

Para fazer o esboço da superfície, vamos considerar o seu traço com os planos coordenados.

1. Quando  $z = 0$ , temos o traço com o plano  $xy$ :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que como sabemos é uma elipse de semieixos 3 e 2.

2. Analogamente, fazendo  $y = 0$ , temos o traço com o plano  $xz$ ; desta feita, uma elipse de semieixos 3 e 1.
3. Finalmente, fazendo  $x = 0$ , temos o traço com o plano  $yz$ , uma elipse de semieixos 2 e 1.

Observe ainda que, se cortarmos a superfície procurada por planos paralelos ao plano  $xy$  e de altura maior que um, o traço correspondente é vazio. O mesmo acontece se cortarmos a superfície por planos paralelos ao plano  $xz$  (respectivamente  $zy$ ) para  $y > 2$  (respectivamente  $x > 3$ ).

Obtemos a superfície da Figura 7.5.

**Exercício 7.8** Faça o esboço do elipsoide  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ .

### 7.3.3 - O cone elíptico

O cone elíptico é a superfície no espaço dada pela equação:

$$z^2 = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}.$$

Observe que o cone elíptico possui equação semelhante ao cone de revolução estudado no Exemplo 7.2. Vamos considerar as semelhanças e diferenças no seguinte exemplo.

**Exemplo 7.9** Considere a superfície dada por

$$z^2 = 4x^2 + 9y^2$$

Para isto obtemos, como anteriormente, a interseção da superfície com os planos coordenados.

1. Quando  $x = 0$ , obtemos  $z^2 = 9y^2$ , duas retas  $z = \pm 3y$  no plano  $zy$ .
2. Quando  $y = 0$ , obtemos  $z^2 = 4x^2$ , duas outras retas, desta vez no plano  $zx$ .
3. Quando  $z = 0$ , obtemos  $4x^2 + 9y^2 = 0$  e temos o único ponto  $x = y = z = 0$ .

Além disso, observe que quando cortamos a superfície por planos  $z = c$ , uma constante positiva ou negativa, obtemos as curvas  $4x^2 + 9y^2 = c^2$ , ou ainda,

$$\frac{x^2}{(\frac{c}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{c}{3})^2} = 1,$$

elipses cujos semieixos vão crescendo a medida que  $|c|$  cresce. É fácil concluir que superfície é esta. Veja a Figura 7.6.

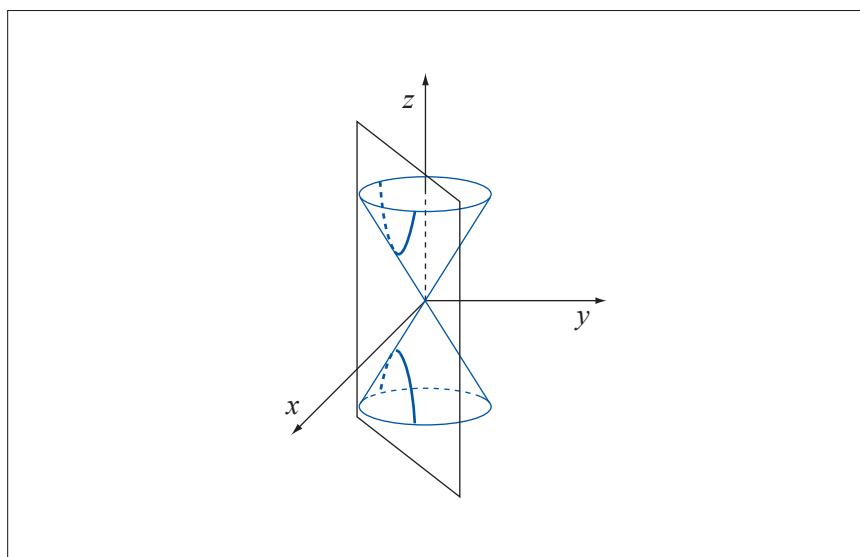
**Exercício 7.10** Faça o esboço do cone elíptico  $z^2 = 16x^2 + 25y^2$ . Esta superfície é de revolução?

### 7.3.4 - O hiperboloide de uma folha

O hiperboloide de uma folha é a superfície no espaço dada pela equação:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Vamos fazer o esboço de um exemplo de hiperboloide de uma folha:

Figura 7.6: O cone elíptico dado por  $z^2=4x^2+9y^2$ 

**Exemplo 7.11** Considere a superfície dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

Para fazer o esboço da superfície, vamos considerar o seu traço com os planos coordenados.

1. Quando  $z = 0$ , temos o traço com o plano  $xy$ :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que, como sabemos, é uma elipse de semieixos 3 e 2.

2. Analogamente, fazendo  $y = 0$ , temos o traço com o plano  $xz$  dado por

$$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1,$$

uma hipérbole de semieixos 3 e 1.

3. Finalmente, fazendo  $x = 0$ , temos o traço com o plano  $yz$  dado por

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1,$$

uma hipérbole de semieixos 2 e 1.

Observe ainda que, se cortamos a superfície procurada por planos paralelos ao plano  $xy$ ,  $z = c$ , obtemos elipses de semieixos que crescem à medida que cresce  $|c|$ .

Obtemos a superfície da Figura 7.7.

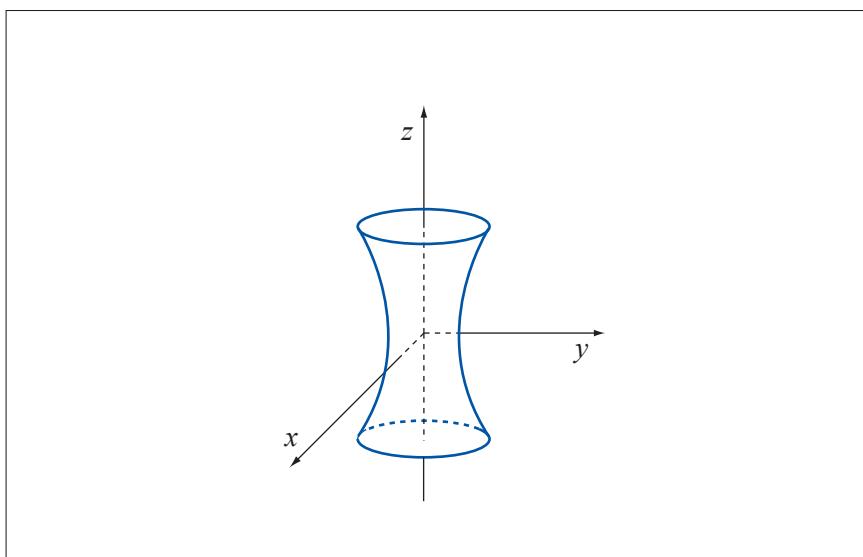


Figura 7.7: O hiperboloide de uma folha dado por  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$

**Exercício 7.12** Faça o esboço do hiperboloide dado por:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ .

### 7.3.5 - O hiperboloide de duas folhas

O hiperboloide de duas folhas é a superfície no espaço dada pela equação:

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Vamos fazer o esboço de um exemplo de hiperboloide de duas folhas.

**Exemplo 7.13** Considere a superfície dada por:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

Da mesma forma que anteriormente, vamos fazer o esboço da superfície considerando o seu traço com os planos coordenados.

1. Quando  $z = 0$ , temos o traço com o plano  $xy$ :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

que como sabemos, é uma hipérbole de semieixos 3 e 2.

2. Analogamente, fazendo  $y = 0$ , temos o traço com o plano  $xz$  dado por

$$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1,$$

uma hipérbole de semieixos 3 e 1.

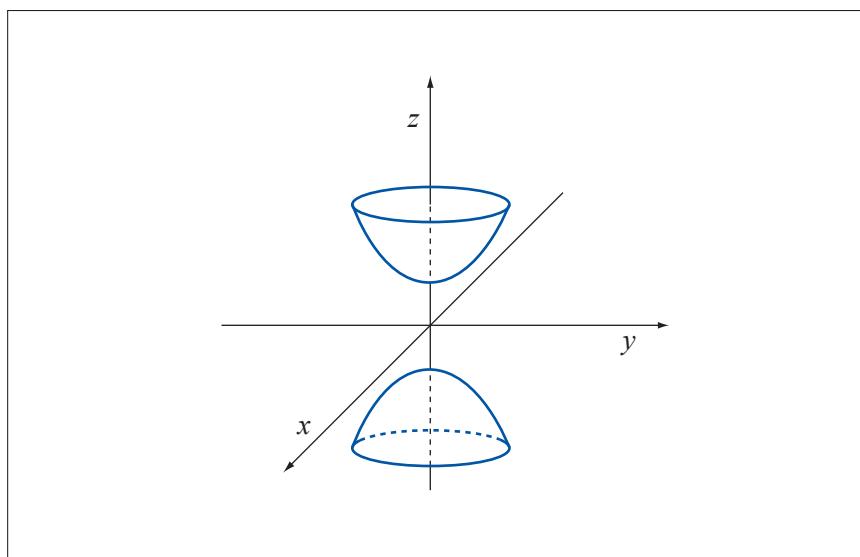


Figura 7.8: O hiperboloide de duas folha dado por  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$

3. Finalmente, fazendo  $x = 0$ , temos o traço com o plano  $yz$  dado por

$$-\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

e o traço é vazio. Mas, observe que, se cortarmos a superfície por planos  $x = c$ ,  $|c| > 3$ , obtemos:

$$\frac{c^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1,$$

ou ainda

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = -1 + \frac{c^2}{9}$$

Portanto, quando  $|c| > 3$ , o lado esquerdo da igualdade é maior que zero e a interseção dos planos  $x = c$  com a superfície são elipses, com semieixos que crescem à medida que  $|c|$  cresce.

Obtemos, a superfície da Figura 7.8.

**Exercício 7.14** Faça o esboço do hiperboloide dado por:  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ .

### 7.3.6 - O paraboloide hiperbólico

O paraboloide hiperbólico é a superfície do espaço dada pela equação:

$$z = \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2}$$

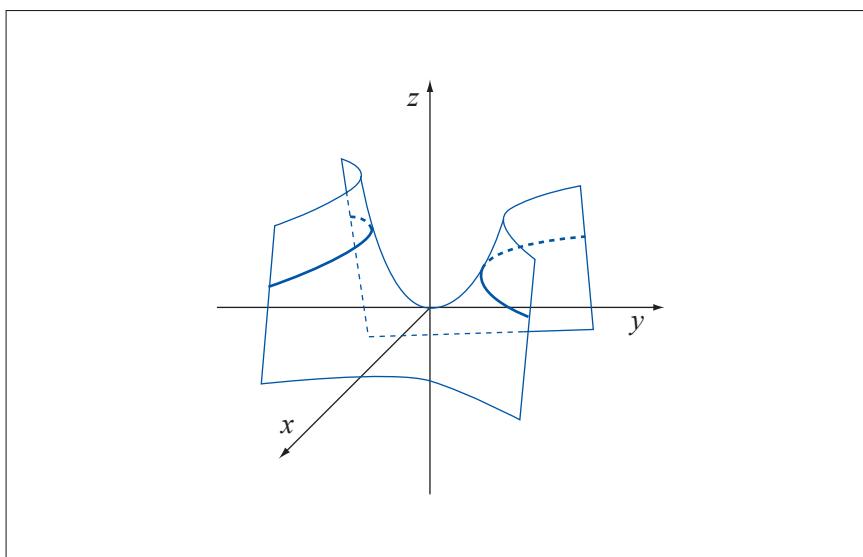


Figura 7.9: O paraboloide hiperbólico dado por  $z = y^2 - x^2$

Vamos fazer o esboço de um exemplo do paraboloide hiperbólico:

**Exemplo 7.15** Considere a superfície dada por:

$$z = x^2 - y^2$$

Para fazer o esboço da superfície vamos considerar o seu traço com os planos coordenados.

1. Quando  $z = 0$ , temos o traço com o plano  $xy$ :

$$x^2 = y^2,$$

a equação que define as duas retas  $x = \pm y$ .

2. Fazendo  $y = 0$ , temos o traço com o plano  $xz$  dado por

$$z = x^2,$$

uma parábola côncava para cima.

3. Finalmente, fazendo  $x = 0$ , temos o traço com o plano  $yz$  dado por:

$$z = -y^2,$$

uma parábola côncava para baixo.

Não é muito fácil concluir que superfície é esta apenas com estes dados. Observe que, se cortarmos a superfície procurada por planos paralelos ao plano  $xy$ ,  $z = c$ , obtemos hipérboles que se abrem na direção do eixo dos  $y$ 's para  $c$  positivo e na direção do eixo dos  $x$ 's para  $c$  negativo. Observe a Figura 7.9.

**Exercício 7.16** Faça o esboço do paraboloide hiperbólico dado por:  $z = xy$ .

## 7.4 - AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS MAIS GERAIS

**Definição 7.17** Uma quádrica no espaço  $xyz$  é uma equação da forma:

$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 + gx + hy + iz + j = 0 \quad (7.1)$$

Vamos fazer um estudo sistemático das superfícies dadas por equações do tipo 7.1 no espaço tridimensional, de maneira semelhante ao que fizemos com as equações de cônicas do tipo 6.1 no plano. Observe, inicialmente, que todas as quádricas padrão são dadas por equações deste tipo para alguma escolha de constantes. Para obter o paraboloide hiperbólico  $z = xy$ , por exemplo, fazemos  $i = 1$ ,  $b = -1$  e as demais constantes nulas. Mas podemos obter muitas outras superfícies, e dada uma equação como a anterior não fica claro se ela representa ou não uma das quádricas padrão, e em caso afirmativo, como identificá-la. É este o objetivo desta seção.

### 7.4.1 - Quádricas degeneradas

Algumas equações da forma 7.1 são chamadas quádricas degeneradas, pois representam pontos, planos ou o conjunto vazio. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 7.18** Considere a equação

$$z^2 - y^2 - x^2 - 2xy - 2z + 1 = 0$$

Esta equação também se escreve como

$$z^2 - zx + zx - zy + zy - z - z - x^2 - xy - xy - x + x - y^2 - y + y + 1 = 0,$$

ou ainda,

$$(z + x + y - 1)(z - x - y - 1) = 0$$

Observe que esta equação é satisfeita se e somente se  $z + x + y - 1 = 0$  ou  $z - x - y - 1 = 0$  e, portanto, a quádrica representa dois planos. Veja a Figura 7.10.

**Exemplo 7.19** A equação  $x^2 - y^2 = 0$  já foi vista anteriormente. Ela pode ser fatorada como  $(x - y)(x + y) = 0$ . Para a expressão acima se anular podemos ter  $x - y = 0$  ou  $x + y = 0$ . Mas observe que vista no espaço tridimensional a equação representa o par de planos  $x = y$  e  $x = -y$ . Ver Figura 7.10.

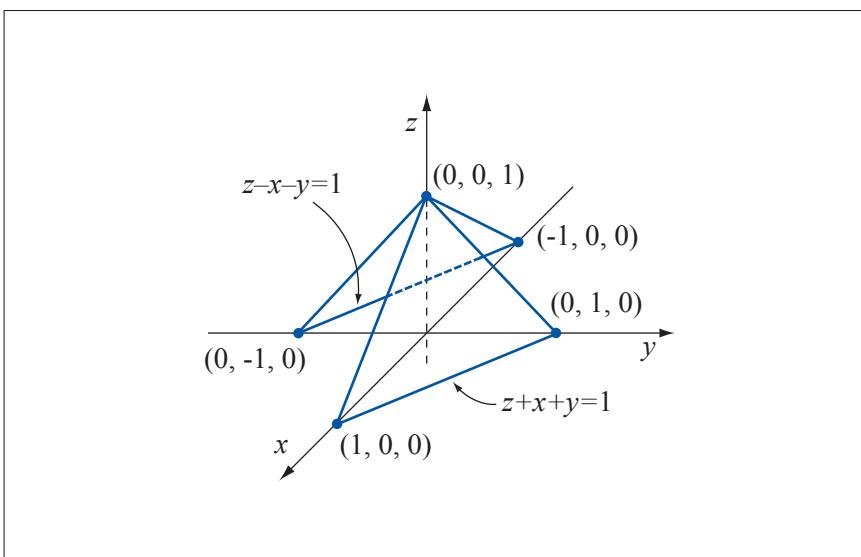


Figura 7.10: O par de planos dado por  $z^2 - y^2 - x^2 - 2xy - 2z + 1 = 0$

**Exemplo 7.20** A equação  $x^2$  também é um caso particular de 7.1. Ela pode ser pensada como o plano dado por  $x = 0$ , contado duas vezes. Dizemos que ela representa um plano duplo.

**Exemplo 7.21** A equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  também é um caso particular de 7.1. Ela representa o ponto dado por  $(0, 0, 0)$ .

**Exemplo 7.22** A equação  $x^2 + y^2 = 0$  também é um caso particular de 7.1. Ela é satisfeita quando  $x = 0$  e  $y = 0$ . Vista no espaço ela representa a reta dada por  $x = 0$  e  $y = 0$ , que é o eixo dos  $z's$ .

Como se vê, por todos os exemplos que consideramos até agora, não é tarefa tão simples, dada uma equação da forma 7.1, dizer se a equação representa uma das seis quâdricas padrão ou se é uma quâdrica degenerada e em ambos os casos identificar a superfície que temos em mãos. Vamos agora desenvolver algumas técnicas para levar esta tarefa a bom termo.

O primeiro procedimento que executamos para identificar a quâdrica é eliminar os termos cruzados, isto é, aqueles cujos coeficientes  $b, c, e$  na equação 7.1 são não nulos. Para isso, fazemos inicialmente a seguinte definição.

**Definição 7.23** Dada a quâdrica

$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 + gx + hy + iz + j = 0$$

chamamos a parte homogênea de grau 2, a saber,  $ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$  de *forma quadrática* associada à quâdrica.

Para estudar a quádrica geral vamos considerar a forma quadrática associada e efetuar uma mudança de variáveis para eliminar os produtos cruzados não nulos, utilizando o Teorema 6.28. O efeito geométrico é efetuar uma rotação de eixos de tal forma que a quádrica passe a ser uma das padrão (pode ser necessária uma translação adicional). Com isso, identificamos a quádrica e determinamos a rotação necessária para transformá-la em uma quádrica padrão, como acima, sempre que isso for possível. Considere o exemplo.

**Exemplo 7.24** Considere a quádrica dada pela equação  $4x^2 + 4xy + 4xz + 4y^2 + 4yz + 4z^2 - 8 = 0$ . Vamos identificar a quádrica encontrando uma rotação que a torne uma quádrica padrão. A forma quadrática associada à quádrica acima é:  $4x^2 + 4xy + 4xz + 4y^2 + 4yz + 4z^2$ , que também pode ser escrita assim:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Já encontramos a matriz correspondente a essa forma quadrática no

Exemplo 6.22,  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Utilizando os cálculos dos autova-

lores lá obtidos temos  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$ .

Além disto, a matriz  $P$  que diagonaliza ortogonalmente  $A$  é dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

onde as primeiras duas colunas são autovetores correspondentes ao autovetor  $\lambda_1 = 2$  e a última é o autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda_2 = 8$ .

Podemos escrever a equação da quádrica dada da seguinte maneira:

$$X^t AX - 8 = 0.$$

Utilizando a mudança de variável  $X = PX'$  e substituindo na equação acima obtemos:

$$(PX')^t A (PX) - 8 = X'^t (P^t AP) X' - 8 = X'^t DX' - 8 = 0,$$

onde  $D$  é a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nas novas coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  a equação da quádrica é  $\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{2^2} + \frac{z'^2}{1^2} = 1$ , portanto um elipsoide.

Algumas equações para serem reduzidas às quádricas padrão precisam de uma translação de eixos, como já fizemos com as cônicas, depois de eliminarmos os termos cruzados. Considere o exemplo a seguir.

**Exemplo 7.25** Descreva a superfície quádrica que possui equação:

$$4x^2 + y^2 - 9z^2 - 16x - 6y = 875$$

Podemos escrever a quádrica da seguinte maneira:

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = 16 + 9 + 875 = 900$$

ou ainda

$$\frac{(x-2)^2}{15^2} + \frac{(y-3)^2}{30^2} - \frac{z^2}{10^2} = 1.$$

Transladando os eixos por meio das equações:

$$x' = x - 2 \quad y' = y - 3 \quad z' = z \text{ temos:}$$

$$\frac{(x')^2}{15^2} + \frac{y'^2}{30^2} - \frac{z'^2}{10^2} = 1,$$

que é o hiperboloide de uma folha.

Concluiremos esta aula com o seguinte resultado que não vamos demonstrar.

**Teorema 7.26** *Seja*

$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 + gx + hy + iz + j = 0$$

*a equação de uma quádrica. Podemos sempre identificar a quádrica fazendo mudanças de variáveis para reduzi-la à forma padrão ou identificá-la como uma quádrica degenerada da seguinte maneira:*

1. *Considere inicialmente a forma quadrática associada e sua matriz A e faça uma mudança de variável de forma a diagonalizá-la, obtendo a equação:*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d'x' + e'y' + f'z + g = 0$$

2. *Em seguida, complete o quadrado e faça uma nova mudança de variável de forma a obter uma quádrica padrão de um dos seis tipos estudados. Se isso não for possível, então a quádrica é degenerada.*

### 7.5 - EXERCÍCIOS

1. Faça o esboço do elipsoide  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ .
2. Faça o esboço do cone elíptico  $z^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4}$ .
3. Faça o esboço do hiperboloide de uma folha  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$ .
4. Faça o esboço do hiperboloide de duas folhas dado por  $\frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ .
5. Identifique as quádricas abaixo, vistas como equações no espaço tridimensional  $xyz$ , dizendo se elas são degeneradas ou não e em cada caso descrevendo-as completamente. Faça um esboço.
  - (a)  $2x^2 + 5y^2 + 4z^2 = 20$
  - (b)  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + z^2 + 36 = 0$
  - (c)  $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$
  - (d)  $2x^2 + z^2 - y^2 + 8 = 0$
  - (e)  $x^2 + 2xy = 0$
  - (f)  $2x^2 - y^2 - 4x - 8y + z^2 = 0$
  - (g)  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$
6. Encontre a forma quadrática associada a cada quádrica abaixo e a correspondente matriz associada e expresse cada quádrica na forma  $x^t Ax + Kx + j = 0$ , onde  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$  e  $K$  é uma matriz  $1 \times 3$  :
  - (a)  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy + 6xz - 2yz + x - y + z = 3$
  - (b)  $4x^2 - 2y^2 + 6z^2 - 4xy - 6xz + 4yz + 2x - 3y + 2z = 6$
  - (c)  $6x^2 - y^2 + 8z^2 + 4xy + 6xz - 8yz + x + y - z = 5$
7. Encontre uma rotação do tipo  $x = Px'$  que elimine o termo cruzado da quádrica  $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$ . Identifique a quádrica e faça um esboço.
8. Encontre uma rotação e uma translação de eixos que transforme a quádrica  $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$  em uma quádrica padrão.

## Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [2] AVRITZER, Dan. *Elementos de geometria analítica: uma visão geométrica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2006.
- [3] LANG, Serge. *Linear Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1971.
- [4] LIPSCHUTZ, Seymour. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1971.
- [5] SANTOS, Reginaldo J. *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2003.



Para obter mais  
informações sobre  
outros títulos da  
EDITORAR UFMG,  
visite o site

[www.editora.ufmg.br](http://www.editora.ufmg.br)

A presente edição foi composta pela Editora UFMG,  
em caracteres Chaparral Pro e Optma Std, e impressa  
pela Didatica Editora do Brasil, em sistema offset  
90g e cartão supremo 250g, em maio 2009.