Uma regra de inferência representa-se na forma

$$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\varphi}\,\textit{nome}$$

em que as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as premissas da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a conclusão da regra de inferência.

As notações do tipo

$$\begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \cancel{\rho} \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

representam árvores finitas de fórmulas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação ou anotada com um corte, respetivamente.

Definição das regras de inferência

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\,\rightarrow I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg\varphi}\,\neg I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge_2 E$$

$$\frac{\psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}\,\rightarrow E$$

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\neg E$$

(continua)

Definição das regras de inferência (continuação)

Regras de **I***ntrodução* | *Regras de* **E***liminação*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee_2 I$$

$$\frac{\psi \vee \sigma \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\sigma}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\leftrightarrow I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\leftrightarrow_1 E$$

$$\frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\bot}{\varphi}(\bot)$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}(RAA)$$

Exemplos

De seguida são apresentadas duas árvores finitas de fórmulas construídas a partir das regras de inferência de DNP.
Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \quad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\varphi}(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\to I^{(1)}$$

2. $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \quad \cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \quad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores finitas de fórmulas gerado pelo conjunto de regras indutivas que contém uma única regra base que é

$$\varphi \in \mathcal{D}^{DNP},$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\to I$ e $\to E$ são, respetivamente,

- Se $\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}$, então $\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}{\scriptstyle \to I} \in \mathcal{D}^{DNP}$
- Se $\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}$ e $\begin{array}{c}D_2\\ \varphi \to \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}$, então $\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}{\scriptstyle \to E} \in \mathcal{D}^{DNP}$

Nota: As notações das formas

$$\begin{array}{c}D'\\ \theta\end{array}, \quad \begin{array}{c}\sigma\\ D'\\ \theta\end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c}\cancel{\sigma}\\ D'\\ \theta\end{array}$$

representam derivações D' de raiz θ, sendo, nos dois últimos casos, também assumido que σ ocorre como folha de D', zero ou mais vezes, não anotada ou anotada com um corte, respetivamente.

Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado.

A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Os sub-objetos de uma derivação D são chamados subderivações de D.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintática de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Exemplo

Considere-se a derivação D:

$$
\dfrac{
\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\,{\scriptstyle \wedge_1 E}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\,{\scriptstyle \wedge_2 E}
\qquad
\psi \to (\varphi \to \sigma)
}{\varphi \to \sigma}\,{\scriptstyle \to E}
}{
\dfrac{\sigma}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\,{\scriptstyle \to I^{(1)}}
}\,{\scriptstyle \to E}
\quad .
$$

Então, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

No exemplo acima:

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$,
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$,
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$,
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

1. $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
2. $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
3. $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Proposição

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ e Δ subconjuntos de $\mathcal{F}^{CP}$. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

(a) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintácica, $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

(continua)

Proposição

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ e Δ subconjuntos de $\mathcal{F}^{CP}$. Então:

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

Demonstração (continuação)

d) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ.

Então, $$\dfrac{\varphi \qquad \begin{matrix} D \\ \varphi \to \psi \end{matrix}}{\psi}{\to}E \quad \in \mathcal{D}^{DNP}$$ é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Reciprocamente, se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi}{\to}I \quad \in \mathcal{D}^{DNP}$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ.

Definição

Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que:

- Γ é sintaticamente inconsistente se $\Gamma \vdash \bot$;
- Γ é sintaticamente consistente se $\Gamma \nvdash \bot$.

Exemplos

- $\Gamma = \{p_1 \vee p_2,\ p_1 \vee \neg p_2, \neg p_1 \wedge p_2\}$ é sintaticamente inconsistente, porque

$$\dfrac{p_1 \vee \neg p_2 \qquad \dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \qquad \dfrac{\neg p_1 \wedge p_2}{\neg p_1}\wedge_1 E}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p_1 \wedge p_2}{p_2}\wedge_1 E \qquad \cancel{\neg p_1}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\bot}\vee E^{(1)}$$

- $\Gamma = \{p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_1\}$ é sintaticamente consistente;
- $\Gamma = \{p_1 \wedge p_2,\ p_2 \vee \neg p_1,\ \neg p_1 \to \neg p_2\}$ é sintaticamente consistente.

Proposição

Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Γ é sintaticamente inconsistente;
2. para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;
3. para qualquer fórmula ψ, $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

Vamos demonstrar que (1) implica (2), que (2) implica (3) e que (3) implica (1).

Admitindo que $\Gamma \vdash \bot$, existe uma derivação $\begin{matrix} D \\ \bot \end{matrix}$ cujas hipóteses não canceladas pertencem a Γ. Então para qualquer fórmula φ

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \bot \end{matrix}}{\varphi}\bot E \ \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \text{e} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D \\ \bot \end{matrix}}{\neg\varphi}\bot E \ \in \mathcal{D}^{DNP}$$

Logo $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.
(continua)

Proposição

Demonstração (continuação)

Admitindo que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, existem derivações $\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix}$ e $\begin{matrix} D_2 \\ \neg\varphi \end{matrix}$ cujas hipóteses não canceladas pertencem a Γ. Então para qualquer fórmula ψ

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2 \\ \neg\varphi \end{matrix}}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot E \quad \in \mathcal{D}^{DNP}$$

Logo $\Gamma \vdash \psi$.

Admitindo que $\Gamma \vdash \psi$ para toda a fórmula ψ, então, em particular fazendo $\psi = \bot$, existe uma derivação $\begin{matrix} D \\ \bot \end{matrix}$. Logo $\Gamma \vdash \bot$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural no conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo φ. Então, o nodo é a conclusão φ, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\sigma} \\ D_1 \\ \psi \end{matrix}}{\sigma \to \psi}\,\to I \quad \in \mathcal{D}^{DNP}$$

Então: $\varphi = \sigma \to \psi$ e D_1 é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\sigma\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \sigma \models \psi$. Donde, $\Gamma \models \sigma \to \psi$.

(continua)

Lema

Demonstração (continuação)

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \varphi \end{matrix}}{\varphi} \to E \quad \in \mathcal{D}^{DNP}$$

então: D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \varphi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \varphi$, respetivamente. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

d)

$\vdots$

Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de derivações em $\mathcal{D}^{DNP}$, são deixados como exercício.

Teorema da Correcção

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Demonstração

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, *i.e.*, existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Assim, aplicando o lema anterior, conclui-se de imediato que $\Gamma \models \varphi$.

O Teorema da Correção constitui uma ferramenta que permite provar que determinada fórmula φ não é derivável a partir de um conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \not\models \varphi$, ou seja,

$$\Gamma \not\models \varphi \quad \text{implica} \quad \Gamma \nvdash \varphi$$

Proposição

Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se Γ é semanticamente consistente, então Γ é sintaticamente consistente,

Demonstração

Pelo Teorema da Correção, se $\Gamma \vdash \perp$, então $\Gamma \models \perp$, ou seja, por contraposição, se $\Gamma \not\models \perp$, então $\Gamma \nvdash \perp$. Mas $\Gamma \models \perp$ é equivalente a dizer que Γ é inconsistente, *i.e.*, não existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, pois caso contrário teria de ser $v(\perp) = 1$ o que é impossível. Logo se Γ é semanticamente consistente, então Γ é sintaticamente consistente.

Exemplos

- $\Gamma = \{p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_1\}$ é sintaticamente consistente, porque
$$v(p_1 \to p_2) = v(p_2 \to p_1) = 1,$$
sendo v uma valoração tal que $v(p_1) = v(p_2) = 1$.
- $\Gamma = \{p_1 \wedge p_2,\ p_2 \vee \neg p_1,\ \neg p_1 \to \neg p_2\}$ é sintaticamente consistente, porque
$$v(p_1 \wedge p_2) = v(p_2 \vee \neg p_1) = v(\neg p_1 \to \neg p_2) = 1,$$
sendo v uma valoração tal que $v(p_1) = v(p_2) = 1$. .

Teorema da Completude

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,
$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Demonstração (ver Logic and Structure de Dirk Van Dalen)

- todo o conjunto consistente sintaticamente está contido num conjunto que é consistente e maximal para esta propriedade;
- se $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, Γ é sintaticamente consistente e maximal para esta propriedade e $\Gamma \vdash \psi$ então $\psi \in \Gamma$;
- se Γ é sintaticamente consistente e maximal para esta propriedade, então
  - para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi \in \Gamma$ ou $\neg\psi \in \Gamma$,
  - para todos $\sigma, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\sigma, \psi, \sigma \to \psi \in \Gamma$ é equivalente a $\sigma \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$;
- se $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ é sintaticamente consistente e maximal para esta propriedade, então $\psi \in \Gamma$ sse $\neg\psi \notin \Gamma$;
- Se Γ é sintaticamente consistente então existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$;
- $\Gamma \nvdash \varphi$ sse existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$, *i.e.* , sse $\Gamma \not\models \varphi$, o que completa a prova por contraposição.

Teorema da Adequação

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,
$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se e só se } \Gamma \models \varphi.$$

Demonstração

Consequência imediata dos teoremas da Correção e da Completude.

Corolário

$$\varphi \text{ é um teorema se e só se } \varphi \text{ é uma tautologia,}$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Demonstração

Caso particular do Teoremas da Adequação com $\Gamma = \emptyset$.