# LÓGICA

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática
Univ. Minho

2º semestre de 2022/2023











## Definições

- Chamaremos alfabeto a um conjunto de símbolos e letras aos seus elementos.
- Dado um alfabeto $A$, chamaremos palavra sobre $A$ a uma sequência finita de letras: $\varepsilon$ representa a palavra vazia e $e_1 e_2 \cdots e_n$ uma palavra de comprimento $n \in \mathbb{N}$, para $e_1, \ldots, e_n \in A$. O conjunto de todas as palavras sobre $A$ representa-se por $A^*$.
- Um subconjunto de $A^*$ diz-se uma linguagem.
- Se $u$ e $v$ são palavras então $uv$ é a sequência resultante da concatenação das sequências $u$ e $v$.





## Definição

Seja $X$ um conjunto. Uma operação $n$-ária $f$ sobre $X$ é uma aplicação cujo domínio é o produto cartesiano $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ fatores}}$, também representado por $X^n$, e cujo contradomínio está contido em $X$. Em tal caso, $n$ é dita a aridade de $f$ e a notação usual é

$$f : X^n \to X.$$

## Exemplos

- $$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$
- $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & 2x + y\sqrt{|z|} \end{array}$$
- $$\begin{array}{rccc} - : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Por definição indutiva de um conjunto $I$ entende-se uma coleção de regras que permite descrever $I$, indicando um processo de construir os seus elementos. As regras podem ser de vários tipos:

- regras básicas, que indicam que certos objetos pertencem ao conjunto;
- regras indutivas, que permitem construir elementos de $I$ a partir de outros elementos de $I$ já conhecidos;
- regra de fecho, regra única em cada definição, que estabelece que os elementos de $I$ são os construídos a partir da utilização das regras básicas e das indutivas um número finito de vezes.

regra básica $\longmapsto$ $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\qquad \dfrac{}{s \in I}\,b_s$

regra indutiva $\longmapsto$ se $\underbrace{s_1, \ldots, s_n \in I}_{\text{premissas}}$, então $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\qquad \dfrac{s_1 \in I \ldots s_n \in I}{s \in I}\,i$





Sejam $A = \{a, b\}$ e $L$ o subconjunto das palavras sobre $A$ definido por:

1. a sequência vazia $\varepsilon$ é um elemento de $L$;
2. se $w \in L$, então $awb \in L$;
3. se $w \in L$, então $bwa \in L$;
4. se $u, w \in L$, então $uw \in L$.

A esta definição corresponde o seguinte conjunto de regras:

1. $\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$
2. $\dfrac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \quad \rightsquigarrow \quad f_1 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & awb \end{array}$
3. $\dfrac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \quad \rightsquigarrow \quad f_2 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & bwa \end{array}$
4. $\dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3 \quad \rightsquigarrow \quad f_3 : \begin{array}{ccc} L \times L & \to & L \\ (u, w) & \mapsto & uw \end{array}$





**Definição**

Sejam $X$ um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e $\mathcal{O}$ um conjunto de operações em $X$. Um subconjunto $I$ de $X$ diz-se indutivo sobre $X$ de base $B$ e conjunto de operações $\mathcal{O}$ se

1. $B \subseteq I$,
2. $I$ é fechado para as operações do conjunto $\mathcal{O}$.

**Definição**

Sejam $X$ um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e $\mathcal{O}$ um conjunto de operações em $X$. O menor conjunto indutivo sobre $X$ de base $B$ e conjunto de operações $\mathcal{O}$ diz-se um conjunto definido indutivamente por $\mathcal{O}$, de base $B$.

O par $(B, \mathcal{O})$ designa-se uma definição indutiva sobre o conjunto suporte $X$.





Recorde-se o exemplo anterior. O conjunto $L$ é definido indutivamente:

1. $\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$
2. $\dfrac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \quad \rightsquigarrow \quad f_1 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & awb \end{array}$
3. $\dfrac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \quad \rightsquigarrow \quad f_2 : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ w & \mapsto & bwa \end{array}$
4. $\dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3 \quad \rightsquigarrow \quad f_3 : \begin{array}{ccc} L \times L & \to & L \\ (u, w) & \mapsto & uw \end{array}$

$$B = \{\varepsilon\}$$
$$\mathcal{O} = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$$

Genericamente, a uma definição indutiva $(B, \mathcal{O})$ de um conjunto $I$ sobre o conjunto suporte $X$ associa-se um conjunto de regras:

1. $\dfrac{}{x \in I}\, b_x$, para cada $x \in B$,
2. $\dfrac{w_1 \in I \ldots w_n \in I}{f(w_1, \ldots, w_n) \in I}\, i$ para cada $f \in \mathcal{O}$ de aridade $n$.





Voltando ao exemplo anterior:

$$\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon \qquad \dfrac{w \in L}{awb \in L}\, i_1 \qquad \dfrac{w \in L}{bwa \in L}\, i_2 \qquad \dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in S}\, i_3$$

| | | |
|---|---|---|
| $i.$ | $\varepsilon \in L$ | (por $b_\varepsilon$) |
| $ii.$ | $ab \in L$ | (por $i_1$, ou seja, $f_1(\varepsilon)$) |
| $iii.$ | $baba \in L$ | (por $i_2$, ou seja, $f_2(ab)$) |
| $iv.$ | $b^2aba^2 \in L$ | (por $i_2$, ou seja, $f_2(baba)$) |

A conclusão é que $b^2aba^2 \in L$. A sequência $(\varepsilon,\ ab,\ baba,\ b^2aba^2)$ diz-se uma sequência de formação de $b^2aba^2$.

Alternativamente, podemos elaborar a seguinte árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\, i_1}{baba \in L}\, i_2}{bbabaa \in L}\, i_2$$





$$\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon \qquad \dfrac{w \in L}{awb \in L}\, i_1 \qquad \dfrac{w \in L}{bwa \in L}\, i_2 \qquad \dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\, i_3$$

| | | |
|---|---|---|
| $i.$ | $\varepsilon \in L$ | (por $b_\varepsilon$) |
| $ii.$ | $ba \in L$ | (por $i_2$, ou seja, $f_2(\varepsilon)$) |
| $iii.$ | $baba \in L$ | (por $i_3$, ou seja, $f_3(ba, ba)$) |
| $iv.$ | $b^2aba^2 \in L$ | (por $i_2$, ou seja, $f_2(baba)$) |

A conclusão é novamente que $b^2aba^2 \in L$ e $(\varepsilon,\ ba,\ baba,\ b^2aba^2)$ é (outra) sequência e formação de $b^2aba^2$.

A árvore correspondente é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon}{ba \in L}\, i_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon}{ba \in L}\, i_2}{baba \in L}\, i_3}{bbabaa \in L}\, i_2$$





### Definições

Seja $(B, \mathcal{O})$ uma definição indutiva de um conjunto $I$ e $x \in I$.

1. Sequência de formação de $x$ é uma sequência de elementos de $I$ em que o último elemento é $x$ e cada elemento
   - pertence a $B$,
   - ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma função de $\mathcal{O}$.
2. Árvore de formação de $x$ é uma árvore construída a partir da aplicação das regras e em que:
   - cada nodo é uma afirmação do tipo $s \in I$;
   - as folhas resultam da aplicação de regras básicas;
   - os restantes nodos resultam da aplicação de regras dedutivas;
   - cada aresta representa a relação entre uma premissa e a conclusão de uma regra;
   - a raiz é $x \in I$.

### Proposição

Sejam $I$ um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto $X$ e $x \in X$. Então, $x \in I$ se e só se $x$ admite uma árvore (alternativamente, uma sequência) de formação.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Será que $b^2ab \in L$?

### Definição

Sejam $I$ um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto $X$ e $x \in I$. Os elementos de $I$ que ocorrem nos nodos de uma árvore de formação de $x$ designam-se sub-objetos de $x$ e, em particular, os que ocorrem num nodo ligado por uma aresta à raiz dizem-se sub-objetos diretos de $x$.





Na linguagem $L$, a palavra $b^2aba^2$ admite duas árvores de formação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\,i_1}{baba \in L}\,i_2}{bbabaa \in L}\,i_2$$

### Definição

Chama-se definição indutiva determinista de um conjunto $I$ a uma definição indutiva de $I$ tal que se existirem duas instâncias de regras com igual conclusão então a regra usada é a mesma e, caso seja uma regra indutiva, as premissas da regra também são as mesmas.

### Proposição

Uma definição indutiva de um conjunto $I$ é determinista se e só se cada elemento de $I$ admite uma única árvore de formação.





$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Seja $P$ a propriedade relativa a palavras sobre $A$: ´o número de ocorrências da letra $a$ é igual ao número de ocorrências da letra $b$'.

É verdadeira ou falsa a afirmação $P(bbabaa)$?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Se $u$ e $v$ forem palavras tal que $P(u)$ e $P(v)$ são verdadeiras, o que pode dizer sobre $P(f_1(u))$? Sobre $P(f_2(u))$?
E sobre $P(f_3(u,v))$?

Será que pode tirar conclusões sobre todas as palavras de $L$?





### Princípio de Indução Estrutural

Considere-se uma definição indutiva $(B, \mathcal{O})$ de um conjunto $I$ sobre $X$ e $P$ uma propriedade relativa aos elementos de $X$.

Se

1. para cada regra básica $\dfrac{}{s \in I}\,b_s$, $P(s)$ é verdadeira;
2. para cada regra indutiva $\dfrac{s_1 \in I \ldots s_n \in I}{f(s_1, \ldots, s_n) \in I}\,i$ , se $P(s_1), \ldots P(s_n)$ são verdadeiras, então $P(f(s_1, \ldots, s_n))$ é verdadeira;

então $P(s)$ é verdadeira, para todo o $s \in I$.

**Justificação**: Seja $X_P = \{s \in X \mid P(s) \text{ é verdadeira}\}$.
Então $X_P$ é um conjunto indutivo pois contém $B$ e é fechado para as operações de $\mathcal{O}$. Logo $I \subseteq X_P$.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\, i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\, i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\, i_3$$

Princípio de Indução Estrutural para $L$

Considere-se $P$ uma propriedade relativa aos elementos de $A^*$.

Se

1. $P(\varepsilon)$ é verdadeira;
2. se $P(w)$ é verdadeira, então $P(awb)$ é verdadeira;
3. se $P(w)$ é verdadeira, então $P(bwa)$ é verdadeira;
4. se $P(u)$ e $P(w)$ são verdadeiras, então $P(uw)$ é verdadeira;

então $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in L$.

Considere $P$ a propriedade ´o número de ocorrências da letra $a$ é igual ao número de ocorrências da letra $b$'. Prove que $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in L$.





$fat : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$
$fat(0) = 1$
$fat(n) = n \times fat(n-1),\;$ para $n \in \mathbb{N}$

$fib : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$fib(1) = 1$
$fib(2) = 1$
$fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1),\;$ para $n \in \mathbb{N}$

$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$s(1) = 2$
$s(n+1) = \frac{2}{s(n)},\;$ para $n \in \mathbb{N}$





**Teorema da Recursão Estrutural**

Considere-se $(B, \mathcal{O})$ uma definição indutiva determinista de um conjunto $I$ sobre um conjunto $X$. Sejam $Y$ um conjunto, para cada regra básica $\frac{}{s \in I}\, b_s$ , seja $y_s \in Y$ e, para cada $f \in \mathcal{O}$ de aridade $n$, $\overline{f}$ uma função de $Y^n$ em $Y$. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : I \to Y$ tal que:

1. para cada regra básica $\frac{}{s \in I}\, b_s$, $\mathfrak{g}(s) = y_s$;
2. para cada regra indutiva $\frac{s_1 \in I \ldots s_n \in I}{f(s_1, \ldots, s_n) \in I}\, i$ , tem-se que $\mathfrak{g}(f(s_1, \ldots, s_n)) = \overline{f}(\mathfrak{g}(s_1), \ldots, \mathfrak{g}(s_n))$.

**Definição**

A definição de uma função $\mathfrak{g}$ por aplicação do teorema anterior diz-se uma definição recursiva da função $\mathfrak{g}$.