

tópicos de matemática discreta | LEI

cláudia m. Araújo

relações binárias

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b .

definição 4.1

Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos **relação binária de A em B** (ou **correspondência de A para B**) a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Os conjuntos A e B dizem-se, respetivamente, **o conjunto de partida** e o **conjunto de chegada** de R . Quando $A = B$, dizemos simplesmente que R é uma relação binária em A . R é um subconjunto de $A \times B$. Logo R é uma relação binária de A em B .

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a **está relacionado com b por R** e escrevemos $a R b$.

Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R b$ e dizemos que a **não está relacionado com b por R** .

relações binárias

exemplo 4.2

1 | Sejam $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Então

$$R_1 = \{(0, 1)\},$$

R_1, R_2, R_3 são subconjuntos de $A \times B$,

ou seja são relações binárias de A em B .

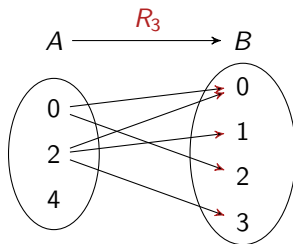
$$R_2 = \{(0, 1), (0, 2), (2, 2), (4, 1)\},$$

$$R_3 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$$

são relações binárias de A em B , enquanto que

$$S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

não o é pois $S \not\subseteq A \times B$. A correspondência R_3 , por exemplo, pode ser descrita pelo seguinte diagrama



relações binárias

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, e seja R a relação de A em B definida por

$$a R b \text{ se e só se } a|b \text{ (ou seja, } a \text{ divide } b\text{)}.$$

Então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}.$$

Note-se que

$$2 \nmid 9 \text{ pois } 2 \nmid 9, \text{ embora } (2, 9) \in A \times B;$$

$$5 \nmid 10 \text{ pois } (5, 10) \notin A \times B, \text{ embora } 5|10.$$

3 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$. Então, $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a R b \text{ se e só se } b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

relações binárias

4 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então

$$\emptyset, \quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}, \quad \{(1, 2), (3, 3)\}, \quad A^2$$

são relações em A .

$$A = \mathbb{Z} \text{ e } B = \mathbb{Z}$$

5 | $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y = 2x\}$ é uma relação em \mathbb{Z} . Por exemplo,

$$\begin{array}{lll} (0, 0) \in R, & (1, 2) \in R, & (4, 8) \in R, \\ (-2, -4) \in R, & (2, 3) \notin R, & (8, 4) \notin R. \end{array}$$

relações binárias

Dados dois conjuntos A e B , o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n \times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{n \times m}$ elementos. Assim, **existem $2^{n \times m}$ relações binárias de A em B .**

Os conjuntos \emptyset e $A \times B$ são relações binárias de A em B , designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

definição 4.3

Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\} \text{ e } \omega_A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$$

são relações binárias em A . A id_A chamamos **relação identidade em A** e a ω_A chamamos **relação universal em A .**

relações binárias

definição 4.4

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B . Chamamos **domínio de R** ao conjunto

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b \in B} (a, b) \in R\};$$

Chamamos **imagem ou contradomínio de R** ao conjunto

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a \in A} (a, b) \in R\}.$$

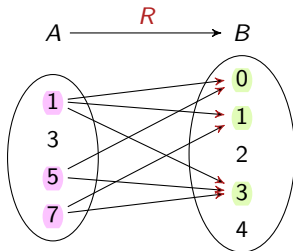
exemplo 4.5

1 | Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Então,

- i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\};$
- ii. $\text{Dom}(R) = \{2, 4\};$
- iii. $\text{Im}(R) = \{3, 4, 5\}.$

relações binárias

2 | Seja $R = \{(1, 0), (1, 1), (1, 3), (5, 0), (5, 3), (7, 1), (7, 3)\}$ a relação do conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ no conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ilustrada pelo seguinte diagrama



Então,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 5, 7\},$$

$$\text{Im}(R) = \{0, 1, 3\}.$$

3 | Seja R a relação binária em \mathbb{Z} definida por

$$a R b \quad \text{se e só se} \quad |a| = 2b.$$

Temos $\text{Dom}(R) = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\}$ e $\text{Im}(R) = \mathbb{N}_0$.

relações binárias

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$ e $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$ e $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$.

exemplo 4.6

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Seja R a relação de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$ e seja $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

- i. $\text{Dom}(R) = \{2, 4\} = \text{Dom}(S)$;
- ii. $\text{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \text{Im}(S)$;
- iii. $(2, 5) \in R$ mas $(2, 5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

relações binárias

Considere dois conjuntos: o conjunto X com elementos x e o conjunto Y com elementos y . Isto é:

$$f : X \rightarrow Y$$

diz-se que a função f de X em Y que relaciona cada elemento x em X , um **único** elemento $y = f(x)$ em Y .^[3]

Outra maneira de dizer isto é afirmar que f é uma [relação binária](#) entre os dois conjuntos tal que:

1. f é **unívoca**: se $y = f(x)$ e $z = f(x)$, então $y = z$;
2. f é **total**: para todos x em X , existe um y em Y tal que $y = f(x)$.

definição 4.7

Dados conjuntos A e B , uma relação binária R de A em B diz-se:

total quando $\text{Dom}(R) = A$;

unívoca quando $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B ((a R b_1 \wedge a R b_2) \rightarrow b_1 = b_2)$;

uma **função** ou **aplicação** quando R é uma relação total e unívoca.

observação 4.8

Escreve-se $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B .

Se f é uma função de A em B então, para cada $a \in A$, escreve-se $f(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in f$, e diz-se que b é a **imagem de a por f** ou que b é o **valor que a função f assume em a** .

relações binárias

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B , o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

exemplo 4.9

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e as relações $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ e $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

- i. $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B ;
- ii. $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B ;
- iii. $R \setminus S = \{(2, 5)\}$ é uma relação binária de A em B .

relações binárias

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

definição 4.10

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B . Chama-se **relação inversa de R** , e representa-se por R^{-1} , a relação de B em A definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

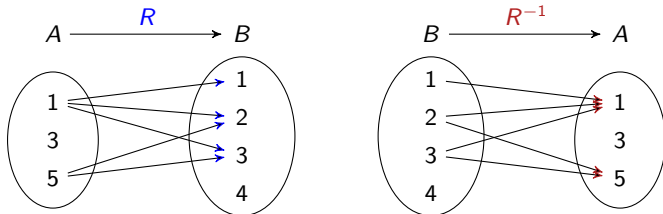
exemplo 4.11

1 | Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Uma vez que $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$, tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

relações binárias

2 | Consideremos os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ de **A em B** tem como inversa a relação $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 5), (3, 5)\}$ de **B em A**.



3 | A relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$ em \mathbb{N} tem como inversa a relação em \mathbb{N}

$$\begin{aligned}
 S^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \\
 &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : y \geq x\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\}.
 \end{aligned}$$

relações binárias

proposição 4.12

Sejam A, B conjuntos e R e S relações binárias de A em B . Então,

$$1 \mid \text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R) \text{ e } \text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R).$$

$$2 \mid (R^{-1})^{-1} = R.$$

$$3 \mid \text{Se } R \subseteq S, \text{ então } R^{-1} \subseteq S^{-1}.$$

definição 4.13

Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D . Chama-se **relação composta de S com R** , e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de A em D definida por

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists z \in B \cap C ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, então $S \circ R = \emptyset$.

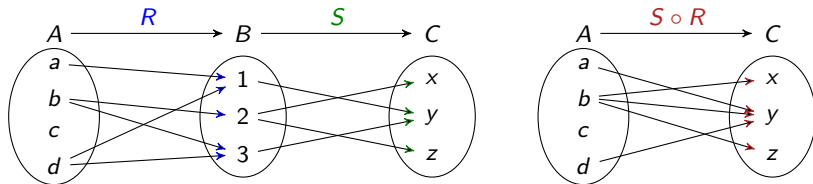
relações binárias

exemplo 4.14

1 | Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{x, y, z\}$. Dadas as relações $R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1), (d, 3)\}$, de A em B , e $S = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}$, de B em C , temos que

$$S \circ R = \{(a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (d, y)\}$$

é uma relação binária de A em C .



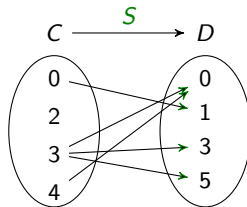
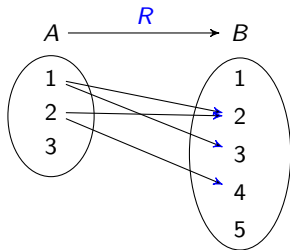
relações binárias

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, 2, 3, 4\}$ e $D = \{0, 1, 3, 5\}$.
Consideremos as relações binárias

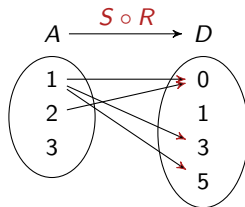
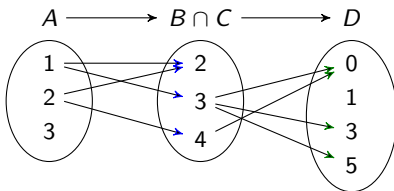
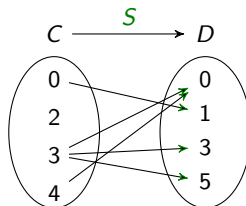
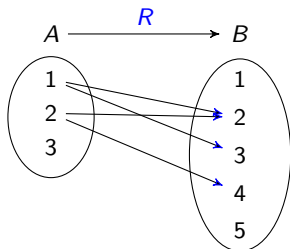
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(0, 1), (3, 0), (3, 3), (3, 5), (4, 0)\} \subseteq C \times D.$$

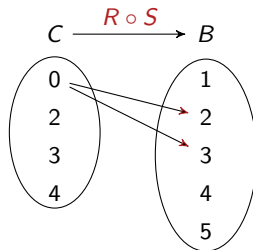
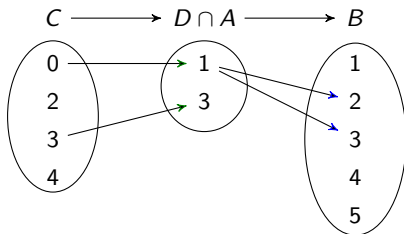
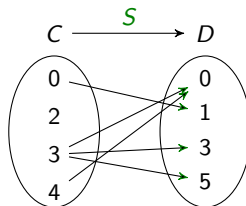
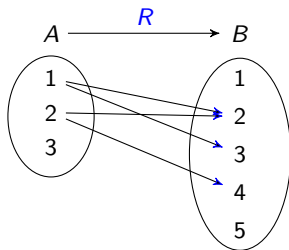


relações binárias



Tem-se $S \circ R = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0)\}$.

relações binárias



Além disso, $R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}$.

relações binárias

Atendendo ao exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

proposição 4.15

Sejam R , S e T relações binárias onde $R \subseteq A \times B$. Então,

$$1 \mid \text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R) \text{ e } \text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S).$$

$$2 \mid (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

$$3 \mid R \circ \text{id}_A = R = \text{id}_B \circ R.$$

$$4 \mid (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

demonstração

$$1 \mid \text{Comecemos por mostrar que } \text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R).$$

Dado $x \in \text{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z .

Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \text{Dom}(R)$.

De forma semelhante prova-se que $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$.

relações binárias

2 | Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$ para algum z .

De $(z, y) \in T \circ S$ segue que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$ para algum w .

Ora, como $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, temos que $(x, w) \in S \circ R$.

Assim, $(x, w) \in S \circ R$ e $(w, y) \in T$, pelo que $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

De modo análogo prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3 | exercício

4 | Para todo o objeto (x, y) ,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (S \circ R)^{-1} & \text{ se e só se } (y, x) \in S \circ R \\
 & \text{ se e só se } \exists_z ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S) \\
 & \text{ se e só se } \exists_z ((z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}) \\
 & \text{ se e só se } \exists_z ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \\
 & \text{ se e só se } (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

propriedades das relações binárias

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caraterizar algumas classes especiais de relações binárias.

definição 4.16

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A . Dizemos que

- 1 | R é **reflexiva** quando $\forall_{a \in A} (a, a) \in R$;
- 2 | R é **simétrica** quando $\forall_{a, b \in A} ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$;
- 3 | R é **antissimétrica** quando $\forall_{a, b \in A} (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b)$;
- 4 | R é **transitiva** quando $\forall_{a, b, c \in A} (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a, b \in A} (((a, b) \in R \wedge a \neq b) \rightarrow (b, a) \notin R).$$

propriedades das relações binárias

exemplo 4.17

Seja A um conjunto.

- 1 | A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A .
- 2 | A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A . Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.
- 3 | A relação \emptyset é simétrica, transitiva e antissimétrica em A . Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.
- 4 | Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$, então:
 - i. uma vez que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$, a relação R é reflexiva;

propriedades das relações binárias

- ii. o par $(1, 2)$ é elemento de R , mas $(2, 1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;
- iii. como não existem elementos distintos $a, b \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;
- iv. R é transitiva, visto que

$$((1, 1) \in R \wedge (1, 1) \in R) \rightarrow (1, 1) \in R$$

$$((1, 1) \in R \wedge (1, 2) \in R) \rightarrow (1, 2) \in R$$

$$((1, 1) \in R \wedge (1, 3) \in R) \rightarrow (1, 3) \in R$$

$$((1, 2) \in R \wedge (2, 2) \in R) \rightarrow (1, 2) \in R$$

$$((1, 2) \in R \wedge (2, 3) \in R) \rightarrow (1, 3) \in R$$

$$((1, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) \rightarrow (1, 3) \in R$$

$$((2, 2) \in R \wedge (2, 2) \in R) \rightarrow (2, 2) \in R$$

$$((2, 2) \in R \wedge (2, 3) \in R) \rightarrow (2, 3) \in R$$

$$((2, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) \rightarrow (2, 3) \in R$$

$$((3, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R) \rightarrow (3, 3) \in R$$

$$((4, 4) \in R \wedge (4, 4) \in R) \rightarrow (4, 4) \in R$$

e o antecedente da implicação $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c .

propriedades das relações binárias

proposição 4.18

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A . Então

- 1 | R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;
- 2 | R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;
- 3 | R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;
- 4 | R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

demonstração | exercício.

relações de equivalência

definição 4.19

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em A** quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

exemplo 4.20

1 | Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A .

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,

i. R é reflexiva uma vez que

$$id_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii. R é simétrica pois

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii. R é transitiva porque

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii., R é uma relação de equivalência em A .

relações de equivalência

3 | Sejam A e B conjuntos e $f : A \rightarrow B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x R_f y \text{ se e só se } f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A . De facto,

- i. R_f é reflexiva: $\forall_{x \in A} f(x) = f(x)$;
- ii. R_f é simétrica: $\forall_{x, y \in A} (f(x) = f(y) \rightarrow f(y) = f(x))$;
- iii. R_f é transitiva: $\forall_{x, y, z \in A} ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \rightarrow f(x) = f(z))$.

relações de equivalência

4 | Seja R a relação binária em \mathbb{Z} definida por

$$a R b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível por } 3.$$

Facilmente verificamos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

- i. para todo o $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, pelo que $a R a$. Portanto, R é reflexiva;
- ii. para todos os $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a R b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b R a$ e, assim, R é simétrica;
- iii. para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a R b$ e $b R c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a R c$. Logo, R é transitiva.

relações de equivalência

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 1 R a & \text{ se e só se } 1 - a = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \text{ se e só se } a = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \text{ se e só se } a \text{ tem resto } 1 \text{ na divisão inteira por } 3. \end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $2 R a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0 R a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de \mathbb{Z} podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

relações de equivalência

definição 4.21

Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de x módulo R** ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de x** , ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de A módulo R** e representamo-lo por A/R , ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

exemplo 4.22

1 | Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{aligned} [0]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k\} \\ [1]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 1\} \\ [2]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2 R a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

$$\text{e } \mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}.$$

relações de equivalência

2 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência id_A . Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{id_A} = \{y \in A \mid y id_A x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência ω_A . Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y \omega_A x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

relações de equivalência

exemplo 4.23

Consideremos de novo as relações referidas no exemplo 4.22 e os respectivos conjuntos quociente.

1 | O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a R b$ se e só se $a - b$ é divisível por 3, é uma partição de \mathbb{Z} .

2 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\text{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A .

3 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A .

4 | Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$, então $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

relações de equivalência

Tal como se estabelece no resultado seguinte, a cada relação de equivalência definida num conjunto A está associada uma partição de A .

proposição 4.24

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A . Então, A/R é uma partição de A .

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

proposição 4.25

Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e \mathcal{R}_Π a relação binária em A definida por

$$x \mathcal{R}_\Pi y \text{ se e só se existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então, \mathcal{R}_Π é uma relação de equivalência em A .

relações de equivalência

exemplo 4.26

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A . Então,

$$\mathcal{R}_{\Pi} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4), (5, 5)\}.$$

2 | Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \mathcal{R}_{\Pi} y \text{ se e só se } x - y \text{ é divisível por } 3.$$

relações de equivalência

observação 4.27

Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A . Então,

1 | A/R é uma partição de A e

$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 | \mathcal{R}_Π é uma relação de equivalência em A e

$$A/(\mathcal{R}_\Pi) = \Pi.$$

relações de ordem parcial

definição 4.28

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em A** quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

exemplo 4.29

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

- 1 | (A, id_A) , onde A é um conjunto e $\text{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.
- 2 | (\mathbb{N}, \leq) , onde \leq é a relação “menor ou igual” usual em \mathbb{N} (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo \leq é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, \leq é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que \leq é transitiva).
- 3 | $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação “divide” em \mathbb{N} .
- 4 | $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e \subseteq é a relação de inclusão usual.

relações de ordem parcial

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por \leq e o respetivo c.p.o. por (A, \leq) .

notação

Dado um c.p.o. (A, \leq) e dados $a, b \in A$, escrevemos

$a \leq b$ e lemos “ a é menor ou igual a b ” ou “ a precede b ” para representar $(a, b) \in \leq$;

$a \not\leq b$ e lemos “ a não é menor ou igual a b ” se $(a, b) \notin \leq$;

$a < b$ e lemos “ a é menor do que b ” ou “ a precede propriamente b ” se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a << b$ e lemos “ b é sucessor de a ” ou “ a é sucedido por b ” ou “ b cobre a ” ou “ a é coberto por b ” se $a < b$ e $\neg(\exists c \in A (a < c \wedge c < b))$.

relações de ordem parcial & diagrama de Hasse

definição 4.30

Dado um c.p.o. (A, \leq) e dados $a, b \in A$, dizemos que a, b são **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$. Por outro lado, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, dizemos que a e b são **incomparáveis** e escrevemos $a \parallel b$.

Um c.p.o. (A, \leq) , em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

1 | cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

• a

2 | se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a ; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

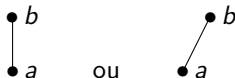


diagrama de Hasse

exemplo 4.31

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial definida por

$$x|y \leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} y = kx.$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

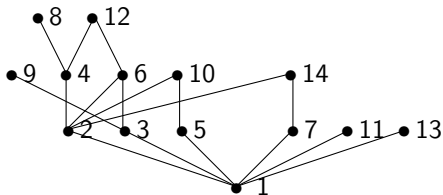
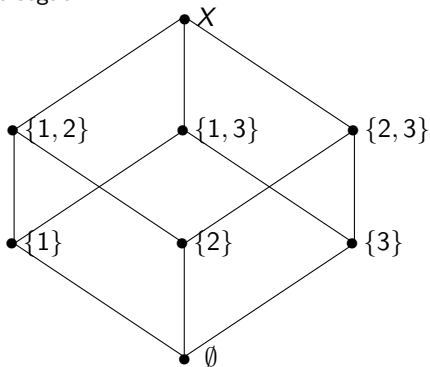


diagrama de Hasse

2 | Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



elementos especiais de um c.p.o.

Dados um c.p.o. (A, \leq) e X um subconjunto de A , podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X .

definição 4.32

Sejam (A, \leq) um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

- 1 | um **elemento maximal de X** quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X} m < x)$;
- 2 | um **elemento minimal de X** quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X} x < m)$;
- 3 | **majorante de X** quando $\forall_{x \in X} x \leq m$;
- 4 | **minorante de X** quando $\forall_{x \in X} m \leq x$;
- 5 | **supremo de X** quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X ;
- 6 | **ínfimo de X** quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X ;
- 7 | **máximo de X** quando m é majorante de X e $m \in X$;
- 8 | **mínimo de X** quando m é minorante de X e $m \in X$.

elementos especiais de um c.p.o.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\text{Maj}(X)$ e $\text{Min}(X)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

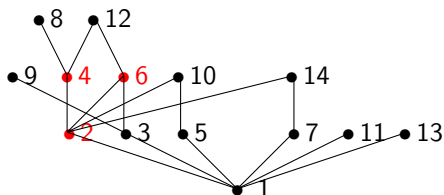
exemplo 4.33

Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$ do exemplo 4.31.

Os elementos maximais de A são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de A . Além disso,

$$\begin{array}{lll} \text{Min}(A) = \{1\}, & \text{Maj}(A) = \emptyset, & \inf(A) = 1, \\ \min(A) = 1, & \sup(A) \text{ não existe}, & \max(A) \text{ não existe}. \end{array}$$

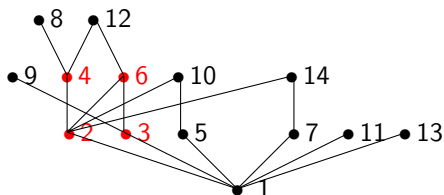
elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = \{2, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X . Além disso,

$$\begin{array}{lll} \text{Min}(X) = \{1, 2\}, & \text{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 2, \\ \min(X) = 2, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$

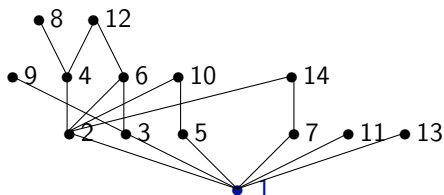
elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de X . Além disso,

$$\begin{array}{lll} \text{Min}(X) = \{1\}, & \text{Maj}(X) = \{12\}, & \text{inf}(X) = 1, \\ \text{min}(X) \text{ não existe}, & \text{sup}(X) = 12, & \text{max}(X) \text{ não existe}. \end{array}$$

elementos especiais de um c.p.o.



Se $X = A \setminus \{1\}$, então os elementos maximais de X são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de X são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \text{Min}(X) = \{1\}, & \text{Maj}(X) = \emptyset, & \inf(X) = 1, \\ \min(X) \text{ não existe}, & \sup(X) \text{ não existe}, & \max(X) \text{ não existe}. \end{array}$$

elementos especiais de um c.p.o.

proposição 4.34

Num c.p.o. (A, \leq) , são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1 | $a \leq b$;

2 | $\sup\{a, b\} = b$;

3 | $\inf\{a, b\} = a$.

reticulados

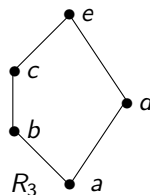
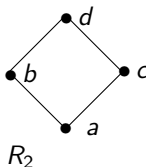
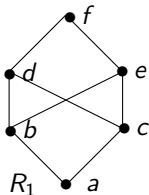
Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

definição 4.35

Um c.p.o. (A, \leq) diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

exemplo 4.36

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados.

R_1 não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de $\{b, c\}$.

cadeias

definição 4.37

Uma ordem parcial \leq num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, (A, \leq) diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** (A, \leq) ou um **subconjunto totalmente ordenado de** (A, \leq) quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

exemplo 4.38

1 | $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 | (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) são cadeias.

observação 4.39

Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica.