$x = \varphi(t)$ tem-se
$t = \varphi^{-1}(x)$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$ teorema

Primitivação por substituição

trocamos o que dificulta / impossibilita a resolução

Trigonométrica

Dicas:

→ passo 0: identificar

→ passo 1: realizar a substituição

→ passo 2: resolver em ordem à nova variável

→ passo 3: voltar à variável inicial

exercício exemplo:

1 passo 0

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \times$$

(não consigo resolver com a variável dada (ignoramos o facto de ser imediato neste exemplo)

passo 1

substituição: $x = \mathrm{sen}(t)$

$$dx = x'\,dt = \mathrm{sen}(t)'\,dt = \cos(t)\,dt$$

Passo 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(t)}}\cdot\cos(t)\,dt =$$

$$= \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt =$$

$$= \int 1\,dt = t + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Passo 3 $x = \mathrm{sen}(t) \Leftrightarrow$ inversa da trigonométrica

$\Leftrightarrow t = \mathrm{arcsen}(x)$

Logo $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Nota:

$\sqrt{a - b x^2}$ → substituição:

$x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,\mathrm{sen}(t)$ $\quad dx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cos(t)\,dt$

(⟶)

Empírica

(são os mesmos passos que a trigonométrica)

exercícios exemplos:

1 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ substituição: $x = t^2$, $dx = 2t$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{t^2}}\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t+1}{t+1}\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= 2\int 1\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2t - 2\ln|t+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

passo 3 $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx =$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

2 $\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(x)}}\,dx$ → era possível de outra forma

substituição: $\mathrm{sen}(x) = t$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{arcsen}(t)$

$dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{t}{(\sqrt{1-t^2})^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-t^2| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

passo 3 $\mathrm{sen}(x) = t$; Logo $\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(x)}}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-\mathrm{sen}^2(x)| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(⟶)

Trigonometrica, exemplos de exercícios

2) $\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$ substituição: $x=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\,tg(t)$

$dx=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\cdot sec^2(t)\,dt$

passo 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+9\times\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\,tg(t)\right)^2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot sec^2(t)\,dt=$$

$$=\int \frac{\frac{2}{3}\,sec^2(t)}{\sqrt{4+9\times\frac{4}{9}\cdot tg^2(t)}}\,dt=\frac{2}{3}\int\frac{sec^2(t)}{\sqrt{4(1+tg^2(t))}}\,dt=\frac{2}{3\sqrt{4}}\int\frac{sec^2(t)}{\sqrt{1+tg^2(t)}}\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{sec^2(t)}{\sqrt{sec^2(t)}}\,dt=\frac{1}{3}\int sec(t)\,dt=\frac{1}{3}\ln|sec(t)+tg(t)|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

passo 3

$x=\frac{2}{3}\,tg(t) \Leftrightarrow \boxed{tg(t)=\frac{3}{2}x}$

$\sqrt{sec^2(t)}=\sqrt{1+tg^2(t)}$

$\Leftrightarrow sec(t)=\sqrt{1+tg^2(t)}$

$\Leftrightarrow sec(t)=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}$

Logo $\int\frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}+\frac{3}{2}x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

Nota: $\sqrt{a+bx^2}\rightarrow$ substituição: $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot tg(t)$ $\quad dx=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,sec^2(t)\,dt$

3) $\int\frac{2}{\sqrt{4x^2-16}}\,dx$ substituição: $x=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}\,sec(t)$

$dx=\frac{4}{2}\,sec(t)\,tg(t)\,dt$

passo 2

$$\int\frac{2}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}\,sec(t)\right)^2-16}}\cdot 2\,sec(t)\,tg(t)\,dt=$$

$$=4\int\frac{sec(t)\,tg(t)}{\sqrt{4\cdot\frac{16}{4}\,sec^2(t)-16}}\,dt=4\int\frac{sec(t)\,tg(t)}{\sqrt{16(sec^2(t)-1)}}\,dt=\frac{4}{\sqrt{16}}\int\frac{sec(t)\,tg(t)}{\sqrt{tg^2(t)}}\,dt$$

$$=\int sec(t)\,dt=\ln|sec(t)+tg(t)|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

passo 3 $\quad x=\frac{4}{2}\,sec(t)\Leftrightarrow\boxed{sec(t)=\frac{x}{2}}$ $\quad\sqrt{tg^2(t)}=\sqrt{sec^2(t)-1}$

$\Leftrightarrow tg(t)=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}$.

Logo $\int\frac{2}{\sqrt{4x^2-16}}\,dx=\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}\right|+C,$

$C\in\mathbb{R}$

Empírica, exemplos de exercícios

3

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

o que dificulta a resolução?

substituição: $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln|t|$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt$$

constante

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{(1+t)t}\, dt = \int \frac{A}{1+t}\, dt + \int \frac{B}{t}\, dt$$

$$= A \int \ln|1+t|\, dt + B \int \ln|t| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

determinar constantes:

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} \Leftrightarrow 1 = At + B(1+t)$$

se $t = -1 \Rightarrow 1 = -A + 0 \Leftrightarrow A = -1$

se $t = 0 \Rightarrow 1 = 0 + B \Leftrightarrow B = 1$

Logo: $\Rightarrow -\ln|1+t| + \ln|t| + C, \; C \in \mathbb{R}$

passo 3

$$e^x = t \Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}\, dx = -\ln|1+e^x| + \ln|e^x| + C, \; C \in \mathbb{R}$$