

tópicos de matemática discreta | LEI

cláudia m. Araújo

conceitos básicos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as ciências da computação.

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

definição 3.1

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

conceitos básicos

exemplo 3.2

São exemplos de conjuntos as coleções de:

i | unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos de LEI;

ii | pessoas presentes numa festa;

iii | estações do ano;

iv | todos os números naturais.

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, \dots, X, Y, Z , eventualmente com índices.

Os elementos de um conjunto são habitualmente representados por letras minúsculas a, b, c, \dots, x, y, z , também eventualmente com índices.

conceitos básicos

definição 3.3

Sejam A um conjunto e x um objeto.

Dizemos que x **pertence a** A , e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A .

Caso x não seja um dos objetos de A , dizemos que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

exemplo 3.4

Sejam A o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Temos, por exemplo, que $3 \in A$ e $1 \in B$.

Por outro lado, $1 \notin A$ e $3 \notin B$.

conceitos básicos

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas.

definição de um conjunto por extensão

Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

exemplo 3.5

Se A é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, então A e B podem ser descritos por extensão do seguinte modo:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\};$$

$$B = \{-4, 1\}.$$

conceitos básicos

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma **notação sugestiva** e não ambígua que **permita intuir os elementos não expressos**.

exemplo 3.6

O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

conceitos básicos

definição de um conjunto por compreensão

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado $p(x)$, com domínio de variação U para a variável x , tal que os valores possíveis a em U para os quais $p(a)$ é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

exemplo 3.7

O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por $\{1, 2, 3, 4\}$.

Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue:

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}.$$

conceitos básicos

exercício 3.8

Seja $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Indique os elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

i | $\{x \in X : x \in \mathbb{N}\};$

ii | $\{x \in X : |x| < 2\};$

iii | $\{x \in X : \sqrt{x} \in X\};$

iv | $\{x \in X : x^2 \in X\};$

v | $\{x^2 : x \in X\}.$

conceitos básicos

definição 3.9

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por \emptyset ou por $\{\}$.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que **não possa ser satisfeito**. Por exemplo,

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\}$$

ou

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

subconjuntos

definição 3.10

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escreve-se $A = B$, se têm os mesmos elementos, ou seja, se

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então A e B dizem-se **diferentes**.

exemplo 3.11

1 | O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ e também é igual ao conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.

2 | Os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$ e $D = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ são diferentes, pois $3 \in C$ e $3 \notin D$.

subconjuntos

definição 3.12

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A está contido em B ou que A é um subconjunto de B , e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B , ou seja, se

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Se existir um elemento de A que não é elemento de B , ou seja, se $\exists x \in A \ x \notin B$, diz-se que A não está contido em B ou que A não é um subconjunto de B , e escreve-se $A \not\subseteq B$.

exemplo 3.13

1 | $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que tanto -1 como 1 são soluções da equação.

2 | $\{0, -1, 1\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que 0 não é solução da equação.

subconjuntos

definição 3.14

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A está propriamente contido em B ou que A é um subconjunto próprio de B , e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, se

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B} x \notin A.$$

exemplo 3.15

$\{-1, 1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação.

subconjuntos

proposição 3.16

Sejam A , B e C conjuntos. Então,

$$1 \mid \emptyset \subseteq A;$$

$$2 \mid A \subseteq A;$$

$$3 \mid \text{Se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq C \text{ então } A \subseteq C;$$

$$4 \mid A = B \text{ se e só se } (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A).$$

demonstração

1 | Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, assumamos que $\emptyset \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de \emptyset que não pertence a A . Ora, \emptyset não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo, $\emptyset \subseteq A$.

2 | Dado um elemento arbitrário a de A , é claro que $a \in A$. Logo,
 $\forall x (x \in A \rightarrow x \in A)$, ou seja, $A \subseteq A$.

subconjuntos

3 | Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, ou seja,

$$(*) \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad (**) \forall x (x \in B \rightarrow x \in C).$$

Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, isto é, $\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$. Seja $x \in A$. Por (*), podemos concluir que $x \in B$. Logo, de (**), vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C , ou seja, $A \subseteq C$.

4 | Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$). Iremos fazê-lo provando as duas implicações.

subconjuntos

(\Rightarrow) Suponhamos que $A = B$. Então,

$$\forall_x (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall_x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)).$$

Logo,

$$\forall_x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

e

$$\forall_x (x \in B \rightarrow x \in A).$$

Portanto, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então, todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A . Por outras palavras, A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$. \square

operações com conjuntos

definição 3.17

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o **universo**). O conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B chama-se **união** ou **reunião de A com B** , e representa-se por $A \cup B$, ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}. \rightarrow \text{reunião : "junção de tudo"}$$

exemplo 3.18

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$.

operações com conjuntos

definição 3.19

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X . O conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B chama-se **interseção de A com B** , e representa-se por $A \cap B$, ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}. \quad \rightarrow \text{Interseção: o que tem em comum.}$$

exemplo 3.20

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \cap B = \{3\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

operações com conjuntos

definição 3.21

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X . O conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B chama-se **complementar de B em A** , e representa-se por $A \setminus B$, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}. \text{ "A exceto B"}$$

O complementar de B em A também se designa por **diferença de A com B** e pode, também, representar-se por $A - B$.

Quando A é o universo X , o conjunto $A \setminus B = X \setminus B$ diz-se o **complementar de B** e representa-se por \overline{B} ou B' .

operações com conjuntos

exemplo 3.22

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \setminus B = \{1, 2\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par} \wedge n > 10\}$ e $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$.

3 | Dados os subconjuntos $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ e $F =] - \infty, 3]$ de \mathbb{R} , temos:

i | $E \cup F =] - \infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$;

ii | $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$;

iii | $E \setminus F = \{\pi, 7\}$;

iv | $\overline{E \cup F} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

operações com conjuntos

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à **união de conjuntos**.

proposição 3.23

Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto X . Então,

1 | $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;

2 | $A \cup \emptyset = A$;

3 | $A \cup A = A$;

4 | $A \cup X = X$;

5 | $A \cup B = B \cup A$;

6 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

7 | se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$.

operações com conjuntos

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \subseteq A \cup B$, ou seja, que

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in A \cup B).$$

Seja $x \in A$. Então, é verdadeira a proposição $x \in A \vee x \in B$, pelo que $x \in A \cup B$. Logo, $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ e, portanto, $A \subseteq A \cup B$.

A prova de $B \subseteq A \cup B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade 1, vem que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Resta, pois, provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$.

operações com conjuntos

Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então, $x \in A \vee x \in \emptyset$.

Ora, a proposição $x \in \emptyset$ é falsa, pois \emptyset não tem elementos. Logo, podemos concluir que $x \in A$ e, portanto,

$$x \in A \cup \emptyset \rightarrow x \in A.$$

Por outras palavras, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Assim, $A \cup \emptyset = A$.

4 | Provemos agora que $A \cup X = X$. Da propriedade 1, vem que $X \subseteq A \cup X$. Basta mostrar que $A \cup X \subseteq X$.

Seja $x \in A \cup X$. Então, $x \in A \vee x \in X$. Pretendemos mostrar que $x \in X$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in X$.

No caso (I), como A é um subconjunto de X , temos que todo o elemento de A é também elemento de X . Portanto, $x \in X$. No caso (II), é imediato que $x \in X$.

Logo, $x \in A \cup X \rightarrow x \in X$, donde $A \cup X \subseteq X$ e, assim, $A \cup X = X$.

operações com conjuntos

6 | Mostremos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Por definição de união de conjuntos,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C & \text{ se e só se } x \in A \cup B \vee x \in C \\ & \text{ se e só se } (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C. \end{aligned}$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção (ver proposição 1.32), temos que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \text{ se e só se } x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos

$$\begin{aligned} x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) & \text{ se e só se } x \in A \vee x \in B \cup C \\ & \text{ se e só se } x \in A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Logo, $x \in (A \cup B) \cup C$ se e só se $x \in A \cup (B \cup C)$, pelo que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

operações com conjuntos

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Da propriedade 1, vem que $B \subseteq A \cup B$. Falta, pois, provar que $A \cup B \subseteq B$.

Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A \vee x \in B$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in B$.

No caso (I), como A é um subconjunto de B , sabemos que todo o elemento de A é também elemento de B . Portanto, $x \in B$. No caso (II), é imediato que $x \in B$.

Assim, $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$.

Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$.

□

operações com conjuntos

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

proposição 3.24

Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto X . Então,

$$1 \mid A \cap B \subseteq A \text{ e } A \cap B \subseteq B;$$

$$2 \mid A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$3 \mid A \cap A = A;$$

$$4 \mid A \cap X = A;$$

$$5 \mid A \cap B = B \cap A;$$

$$6 \mid (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$7 \mid \text{se } A \subseteq B \text{ então } A \cap B = A.$$

operações com conjuntos

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \cap B \subseteq A$, ou seja, que

$$\forall_x (x \in A \cap B \rightarrow x \in A).$$

Seja $x \in A \cap B$. Então, por definição de interseção de conjuntos, $x \in A \wedge x \in B$.

Logo, são verdadeiras ambas as proposições $x \in A$ e $x \in B$.

Em particular, $x \in A$ é uma proposição verdadeira.

Logo, $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ e, portanto, $A \cap B \subseteq A$.

A prova de $A \cap B \subseteq B$ é análoga.

operações com conjuntos

2 | Mostremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$. Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Então, existe um objeto x tal que $x \in A \cap \emptyset$.

Logo, $x \in A \wedge x \in \emptyset$. Em particular, $x \in \emptyset$. Mas \emptyset não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cap B = A$. Da propriedade 1, vem que $A \cap B \subseteq A$. Falta, pois, provar que $A \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A$. Então, como $A \subseteq B$, podemos concluir que $x \in B$.

Logo, temos $x \in A \wedge x \in B$. Vimos, portanto, que $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, ou seja, $x \in A \rightarrow x \in A \cap B$.

Assim, $A \subseteq A \cap B$.

□

operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

proposição 3.25

Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto X . Então,

$$1 \mid A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ e } A \cup \bar{A} = X;$$

$$2 \mid A \setminus \emptyset = A \text{ e } A \setminus X = \emptyset;$$

$$3 \mid \text{se } A \subseteq B, \text{ então } A \setminus B = \emptyset;$$

$$4 \mid A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$5 \mid A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$6 \mid \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$7 \mid \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$8 \mid \overline{(\bar{A})} = A.$$

operações com conjuntos

demonstração Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1 | Começemos por mostrar que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe $x \in A \cap \bar{A}$.

Então,

$$x \in A \wedge x \in \bar{A}.$$

Logo, por definição de complementar de um conjunto,

$$x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A).$$

Chegamos, desta forma, a uma contradição, $x \in A \wedge x \notin A$, que resultou de supormos que $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Portanto, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

operações com conjuntos

Verifiquemos, agora, que $A \cup \bar{A} = X$.

Dado $x \in A \cup \bar{A}$, temos $x \in A \vee x \in \bar{A}$. Temos, deste modo, dois casos a considerar: (I) $x \in A$; (II) $x \in \bar{A}$. Como A e \bar{A} são subconjuntos de X , os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de X . Assim, em ambos os casos podemos afirmar que $x \in X$.

Portanto, $A \cup \bar{A} \subseteq X$.

Resta mostrar que $X \subseteq A \cup \bar{A}$. Nesse sentido, tomemos $x \in X$.

É claro que a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Ora, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \bar{A}$.

Logo,

$$x \in X \rightarrow (x \in A \vee x \in \bar{A}),$$

ou seja,

$$x \in X \rightarrow x \in A \cup \bar{A}.$$

Portanto, $X \subseteq A \cup \bar{A}$ e a igualdade pretendida segue.

operações com conjuntos

2 | Começemos por mostrar que $A \setminus \emptyset = A$.

Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a \emptyset . Ora, nenhum elemento pertence a \emptyset .

Logo, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A , ou seja, $A \setminus \emptyset = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \emptyset$, tomemos $x \in A \setminus X$.

Então, x é tal que $x \in A \wedge x \notin X$.

Como A é um subconjunto de X ,

$$x \in A \rightarrow x \in X.$$

Portanto, x é tal que $x \in X \wedge x \notin X$, uma contradição. Assim, $A \setminus X = \emptyset$.

operações com conjuntos

5 | Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Precisamos, pois, de mostrar que $x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica \wedge em relação à operação \vee , temos que

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cap C) & \text{ se e só se } x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
 & \text{ se e só se } x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
 & \text{ se e só se } x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
 & \text{ se e só se } x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
 & \text{ se e só se } x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
 & \text{ se e só se } (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
 & \text{ se e só se } (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
 & \text{ se e só se } x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

□

operações com conjuntos

observação Sejam A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de um conjunto X . Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n é usualmente notada por $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e a interseção por $\bigcap_{i=1}^n A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}.$$

operações com conjuntos

Vejamos, agora, outros processos para **construir conjuntos a partir de conjuntos dados**.

definição 3.26

Seja A um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de A** ou **conjunto potência de A** , que representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A , ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

exemplo 3.27

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, \{2\}\}$ e $D = \emptyset$. Então,

- 1 | $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 2 | $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- 3 | $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$
- 4 | $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

A distribuir o b por os outros elementos : $\{b, c\}$, $\{a, b\}$. Mas como já existia $\{a, b\}$ (de a a distribuir por os elementos) fica apenas $\{b, c\}$.

operações com conjuntos

proposição 3.28

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

- 1 | $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;
- 2 | se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;
- 3 | se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

demonstração

- 1 | Para qualquer conjunto A , temos que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$, pelo que \emptyset e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

operações com conjuntos

2 | Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja,

$$\forall X (X \in \mathcal{P}(A) \rightarrow X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$.

Pela proposição 3.16.3, como $X \subseteq A$ e $A \subseteq B$, podemos concluir que $X \subseteq B$.

Logo, $X \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3 | consultar bibliografia adequada.

operações com conjuntos

Dados dois objetos a e b , os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não interessa.

Em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorreremos ao conceito de **par ordenado**.

Dados dois objetos a e b , o **par ordenado de a e de b** será denotado por (a, b) . Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se **iguais**, escrevendo-se $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Note-se que, dados dois objetos a e b , se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

operações com conjuntos

Num par ordenado (a, b) , o objeto a é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto b é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

definição 3.29

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto cartesiano de A por B** e representa-se por $A \times B$.

Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

operações com conjuntos

exemplo 3.30

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

A primeira coordenada de $A \times B$ é o do conjunto de A.

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

A primeira coordenada de $B \times A$ é o do conjunto B.

É claro que $A \times B \neq B \times A$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

3 | Sejam $E = F = \mathbb{R}$. Os elementos de $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

operações com conjuntos

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

definição 3.31

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos ($n \geq 2$). O *produto cartesiano* de A_1, A_2, \dots, A_n , notado por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, é o conjunto dos n -úplos ordenados (a_1, a_2, \dots, a_n) em que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A \times A \times \dots \times A$.

operações com conjuntos

observação

Dois n -úplos ordenados (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e \dots e $a_n = b_n$.

exemplo 3.32

Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{7\}$. Temos que

$$A \times B \times C = \{(4, 1, 7), (4, 2, 7), (4, 3, 7), (5, 1, 7), (5, 2, 7), (5, 3, 7)\}$$

e

$$A^2 = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.$$

operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

proposição 3.33

Sejam A , B , C e D conjuntos. Então,

$$1 \mid A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A;$$

$$2 \mid \text{sendo os conjuntos não vazios, } (A \times B) \subseteq (C \times D) \text{ se e só se } A \subseteq C \text{ e } B \subseteq D;$$

$$3a \mid C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

$$3b \mid (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$4a \mid C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B);$$

$$4b \mid (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$5a \mid C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B);$$

$$5b \mid (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

operações com conjuntos

demonstração

2 | Admitamos que todos os conjuntos são não vazios. Pretendemos mostrar que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

(\Rightarrow) Suponhamos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ e procuremos provar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$.

Portanto, $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$.

Provámos, assim, que

$$\forall_a (a \in A \rightarrow a \in C) \quad \text{e} \quad \forall_b (b \in B \rightarrow b \in D),$$

ou seja, $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

operações com conjuntos

(\Leftarrow) Reciprocamente, admitamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

Por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento de B é elemento de D .

Logo, $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim,

$$\forall_{a,b} ((a, b) \in A \times B \rightarrow (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

operações com conjuntos

5a | Pretendemos mostrar que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Dado um par ordenado (x, y) ,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) & \text{ se e só se } (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \notin C \times B \\
 & \text{ se e só se } (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
 & \text{ se e só se } ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
 & \vee ((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
 & \text{ se e só se } (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
 & \text{ se e só se } x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
 & \text{ se e só se } x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
 & \text{ se e só se } (x, y) \in C \times (A \setminus B).
 \end{aligned}$$

A demonstração das restantes propriedades fica ao cuidado dos alunos. □

observação Se os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n têm p_1, p_2, \dots, p_n elementos, respetivamente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ tem $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ elementos.

famílias de conjuntos

definição 3.34

Um conjunto cujos elementos são conjuntos é chamado uma **família de conjuntos**.

exemplo 3.35

São famílias de conjuntos:

- 1 | $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de um conjunto A ;
- 2 | $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{X : X \text{ é um subconjunto finito de } \mathbb{N}\}$;
- 3 | $\{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4, 7\}, \emptyset\}$;
- 4 | $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$.

A definição seguinte generaliza as noções de união e interseção de conjuntos, já estudadas.

famílias de conjuntos

definição 3.36

Seja \mathcal{F} uma família não vazia de conjuntos.

A **união da família** \mathcal{F} é o conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists F \in \mathcal{F} \ x \in F\}$$

formado pelos objetos que pertencem a pelo menos um dos membros de \mathcal{F} .

A **interseção da família** \mathcal{F} é o conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall F \in \mathcal{F} \ x \in F\}$$

formado pelos objetos que pertencem a todos os membros de \mathcal{F} .

famílias de conjuntos

exemplo 3.37

$$1 \mid \underline{\bigcup \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \bigcap \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \emptyset.}$$

2 | Para $\mathcal{F} = \{\{1, x, y, z\}, \{1, 2, 3, z\}, \{a, 1\}\}$, tem-se
conjunto que os elementos são conjuntos.

$$\bigcup \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cup \{1, 2, 3, z\} \cup \{a, 1\} = \{x, y, z, 1, 2, 3, a\},$$

$$\bigcap \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cap \{1, 2, 3, z\} \cap \{a, 1\} = \{1\}.$$

famílias de conjuntos

exemplo 3.38

Consideremos as seguintes famílias de conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\};$$

$$\mathcal{B} = \{\{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\}, \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\}, \{\emptyset, 2, 4\}\};$$

$$\mathcal{C} = \{I_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \text{ onde, para cada } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\} = [-n, n].$$

Temos que:

$$\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}, \quad \bigcap \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cap \{0\} \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset;$$

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{B} &= \{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cup \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\} \cup \{\emptyset, 2, 4\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, 0, 1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

$$\bigcap \mathcal{B} = \{\emptyset, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cap \{\emptyset, 1, 2, 3, \{4\}\} \cap \{\emptyset, 2, 4\} = \{\emptyset, 2\};$$

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} I_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [-n, n] = \mathbb{R},$$

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-n, n] = \{0\}.$$

famílias de conjuntos

definição 3.39

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. Diz-se que \mathcal{F} é constituída por **conjuntos disjuntos dois a dois** se a interseção de dois quaisquer elementos distintos de \mathcal{F} é o conjunto vazio, ou seja,

$$\forall X, Y \in \mathcal{F} \ (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset).$$

exemplo 3.40

- 1 | A família $\{\{0, 2, 4, 6\}, \{8\}, \{1, 3, 5\}, \{7, 9, 11, 13\}, \{10, 12\}\}$ é constituída por conjuntos disjuntos dois a dois.
- 2 | Os conjuntos da família $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ não são disjuntos dois a dois.

famílias de conjuntos

definição 3.41

Seja A um conjunto. Uma **partição de A** é um conjunto Π de subconjuntos não vazios de A , disjuntos dois a dois e cuja união é A . Ou seja, uma família de conjuntos Π é uma partição de A quando:

- i | $\forall X \in \Pi (X \subseteq A \wedge X \neq \emptyset);$
- ii | $\forall X, Y \in \Pi (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset);$
- iii | $\bigcup \Pi = A.$ uniao da partição de A tem de ser A .

para ser partição tem de acontecer:

- (1) $A_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \dots, n;$
- (2) $A_i \subset A$, para $i = 1, 2, \dots, n;$
- (3) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n;$
- (4) A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n.$

Os elementos de Π são chamados **blocos da partição Π** .

famílias de conjuntos

exemplo 3.42

1 | O conjunto $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$ é uma partição de \mathbb{Z} .

2 | Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Então

$$\Pi_1 = \{\{1, 5\}, \{3, 9\}, \{7\}\}$$

$$\Pi_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{7, 9\}\}$$

$$\Pi_3 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}\}$$

são partições de A ;

união de partição tem de ser A . União da partição é $1, 3, 5, 9$

$$\Pi_4 = \{\{1, 3, 5\}, \{9\}\}$$

$$\Pi_5 = \{\{1, 5, 7, 9\}, \{3, 5\}\}$$

$$\Pi_6 = \{\{1, 3\}, \{5, 7\}, \emptyset, \{9\}\}$$

não são partições de A .

famílias de conjuntos

exercícios

1. Indique uma partição de cada um dos seguintes conjuntos:
(a) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
(b) $B = \{1\}$.
2. Indique todas as partições do conjunto $C = \{1, 2\}$.
3. Diga se as seguintes famílias de conjuntos são partições do conjunto \mathbb{Z} :
(a) $\Pi_1 = \{\{-n, n\} : n \in \mathbb{N}_0\}$;
(b) $\Pi_2 = \{\{3n : n \in \mathbb{Z}\}, \{2n : n \in \mathbb{Z}\}\}$;
(c) $\Pi_3 = \{\{3n : n \in \mathbb{Z}\}, \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}, \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}\}$.

soluções:

1. (a) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\}$; (b) $\{\{1\}\}$.
2. $\{\{1\}, \{2\}\}$ e $\{\{1, 2\}\}$.
3. (a) Sim; (b) Não; (c) Sim.