Álgebra

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

- adição e multiplicação de um escalar (vetor) por outro:

$u = (x_1, \ldots x_n)$ e $v = (y_1, \ldots y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$.

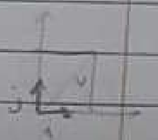
$$u + v = (x_1, \ldots x_n) + (y_1, \ldots y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$
escalar

$$\alpha u = \alpha (x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

ex: $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ • $u = (x_1, y_1, z_1)$

$v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ • $v = (x_2, y_2, z_2)$



$v = xi + yj \; (x, y)$

$$u + v = (x_1 + x_2) i + (\ldots)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \ldots)$$

- Os elementos de $\mathbb{R}^n$ designam-se vetores e os números reais escalares.
- Num vetor $u = (x_1, \ldots, x_n)$ o número x_i diz-se a i-ésima coordenada de u.

Um vetor w é combinação linear de u e v se existirem escalares α e β tais que:

$$w = \alpha u + \beta v$$

- Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são escalares e $v_1, \ldots, v_k$ são vetores, então o vetor

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k$$

diz-se uma C.L de $v_1, \ldots v_k$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in E$ e $\in$ escalares

→ Se V é um conj. onde estão definidas as aplicações:

- a adição em V, $+ : V \times V \to V$
  - $\forall u, v \in V$: • $u + v = v + u$
    • $(u + v) + w = u + (v + w)$
  - $\underbrace{0_V}_{\text{vetor nulo}} \in V$ e $v \in V$, $u + 0_V = u$

$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ $\qquad$ • $u = (x_1, y_1, z_1)$

$v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ $\qquad$ • $v = (x_2, y_2, z_2)$

$u + v = (x_1 + x_2) i + (\ldots)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \ldots)$

...mentos de $\mathbb{R}^n$ designam-se vetores e os números reais escalares.

...tor $u = (x_1, \ldots, x_n)$ o número x_i diz-se a i-ésima coordenada

... w é combinação linear de u e v se existirem escalares ... tais que:

$w = \alpha u + \beta v$

..., α_k são escalares e $v_1, \ldots, v_k$ são vetores, então

$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k$

...ma C.L de $v_1, \ldots, v_k$

$u_1, \ldots, u_k \in E$ e $\exists$ escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$v = \alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_k u_k$

... um conj. onde estão defin...

... em V, $(+): V \times V \to V$

... $v \in V$, • $u + v = v + u$

• $(u + v) + w = u + ($...

... $\in V$ e $v \in V$, $u + 0_V = u$

• $V = (3,1,1)$ é C.L dos vetores $u_1 (1,1,0)$ e $u_2 (2,1,2) \in \mathbb{R}^3$?
$u_3 (1,2,1)$

$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

$(3,1,1) = \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (2,1,2) + \alpha_3 (1,2,1)$

$(3,1,1) = (\alpha_1, \alpha_1, 0) + (2\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 2\alpha_3, \alpha_3)$

$(3,1,1) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ 0\alpha_1 \; 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

• $f($... • $v \in$ ... • $f($...

$f(v)$ ... $f(v)$

$f((x, y, z) + (a, \ldots$

$= f(x + a, y + \ldots$

$= (2(x + a), \ldots$

$= (2x + 2a, y \ldots$

$= (2x, y + \ldots$

simétrico de u

- $u + (-u) = 0$

• a multiplicação por um escalar (.) : $\mathbb{R} \times V \to V$

- $\lambda.(u+v) = (\lambda.u) + (\lambda.v)$
- $(\lambda + r)u = (\lambda.u) + (r.u)$
- $(\lambda r).u = \lambda.(r.u)$
- $1.u = u$

$(V, +, \mathbb{R}, .)$ ⇒ é um espaço vetorial real.

↳ $\lambda . 0v = 0v$

→ $0.v = 0v$

→ $\lambda.v = 0v$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0v$

→ $(-\lambda).v = \lambda.(-v) = -(\lambda.v)$

⇒ V é um espaço vetorial e $S \subseteq V$. Diz-se que S é um subespaço vetorial de V, e escreve-se $S \leq V$, se:

• $S \neq \emptyset$
• $u, v \in S$ então $u+v \in S$ (é fechado para a +)
• $\forall \lambda . v \in S$ (" " para a multip. por 1 escalar)

espaço vetorial em que o conj. dos vetores está contido no conj. dos vetores de outro espaço vetorial V e em que as operações são a restrição a S das operações de V.

→ Dado um espaço vetorial V qualquer, são subespaços vetoriais de V o próprio V e $\{0v\}$.

Mais ainda, qualquer subespaço S de V é tal que $\{0v\} \subseteq S \subseteq V$.

→ Sejam V um espaço vetorial e $\underbrace{S_1, S_2}_{\text{subesp.}} \leq V$. Então $\underbrace{S_1 \cap S_2}_{\text{subesp.}} \leq V$.

→ " " " ... Então, $S_1 \cup S_2 \leq V$ se e só se $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_1$

→ O conj. das soluções de um sistema homogéneo $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \right)$ de m equações em n incógnitas é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. ⚠

↳ todo o subespaço de $\mathbb{R}^n$ é o conj. das soluções de um sistema homog. de eq. lin. em n incógnitas

→ O conj. das soluções de um sistema de eq. lineares não homogéneo não é um subespaço vetorial.

Num espaço vetorial V, dado $C \subseteq V$, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de C,

$\hookrightarrow w = \alpha v + \beta u$

$\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$

é um subespaço vetorial de V e é o menor subespaço que contém C.

O subespaço das C.Ls de vetores de C representa-se por $\langle C \rangle$

Seja V um espaço vetorial e $C \subseteq V$

→ Se $V = \langle C \rangle$, então diz-se que C gera V ou que C é um conjunto gerador de V.

O espaço vetorial $\langle C \rangle$ diz-se o espaço gerado por C.

exemplos:

será $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$? $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a,b,c) = \alpha_1(1,-1,2) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(0,0,2) ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$ é possível determinado

Subespaço definido por sistema de eqs.

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{x + y = z}\}$

$F = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3\}$

Vetores geradores

$F = \langle (1,1,2), (1,0,1), (2,1,3) \rangle$

$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(2,1,3)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 = y \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = z \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{array}\right]$$

desconsiderar

Vetores geradores

$(x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$

$F = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

$= \langle (1,1,2), (1,0,1), (1,1,1) \rangle$

$= \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

desconsiderar

Subespaço definido por sistema de eqs

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - x \\ 0 & -1 & -1 & z - 2x \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z - x - y \end{array}\right]$$

A B

é possível se

$r[A] = r[A \mid B]$

$2 = \ ?$ para $r[A|B] = 2$ então $z - x - y = 0$

se fosse $\neq 0$ $r[A \mid B] = 3$.

Por isto,

$\boxed{z = x + y}$ $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

→ O conj. das soluções de um sistema de eq. lineares não homogéneo não é um subespaço vetorial.

Num espaço vetorial V, dado $C \subseteq V$, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de C,

$w = \alpha v + \beta u$

$$\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$$

é um subespaço vetorial de V e é o menor subespaço que contém C.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $u_1, \dots, u_k$

$\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ O conj. de todas as C.L.s destes vetores é subespaço de E

O subespaço das C.L.s de vetores de C representa-se por $\langle C \rangle$

Seja V um espaço vetorial e $C \subseteq V$

→ Se $V = \langle C \rangle$, então diz-se que C gera V ou que C é um conjunto gerador de V.

O espaço vetorial $\langle C \rangle$ diz-se o espaço gerado por C.

↳ diz-se que $u_1, \dots, u_k$ são geradores do subespaço // o subespaço é gerado pelos vetores $u_1, \dots, u_k$

exemplos:

será $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$? $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a,b,c) = \alpha_1 (1,-1,2) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(0,0,2) ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$ é possível determinado

Logo $\mathbb{R}^3 = \langle C_2 \rangle$.

Solução: $\left(-b, -a-b, \frac{a+3b+c}{2}\right)$

pelo que

$$(a,b,c) = -b(1,-1,2) + (-a-b)\cdot(-1,0,1) + \dots (\dots)$$

Como calcular um conjunto gerador de um espaço vetorial?

$$S = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a+b \}$$

$$= \{ (a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (a,0,a) + (0,b,b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a\cdot(1,0,1) + b\cdot(0,1,1) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle,$$ vetores geradores

Ou seja, $S = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$.

~~com isto~~, Pode se verificar também que:

$$S = \langle (2,1,3), (0,1,-1) \rangle$$

o que permite concluir que um subespaço vetorial admite vários conjuntos geradores. (1)

Sejam V, $n \in \mathbb{N}$ e $u, v_1, \dots v_n \in V$.

- Qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera um subespaço de $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u, v_1, \dots, v_n \rangle$ se u é C.L. de $v_1, \dots, v_n$.

Sejam V, $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \dots v_n \in V$ e $\lambda \neq 0$ um escalar.

Então:
- $\langle v_1, \dots v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$;
- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$

Se um vetor v_1 se escreve como C.L dos vetores de um conjunto $C = \{v_2, \dots, v_n\}$ dizemos que v_1 é $\boxed{\text{linearmente dependente}}$ dos vetores de C. Notar que se $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, então

$$v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots \alpha_n - v_n = 0_V$$

nenhum dos vetores pode ser escrito como C.L dos demais.

Sejam V um espaço vetorial, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots v_n \in V$. Diz-se que $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes se sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares tais que

característica → matriz tem de estar em escada!!

$$0_V = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

solução!!

todos os $\alpha_i = 0$ para ser L.I.

então $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

se um dos coeficientes for $\neq$ zero então não é L.I.

Se $v_1, \dots, v_n$ não são linearmente independentes então dizem-se linearmente dependentes.

escada!!

$+ \ldots + \alpha_n \cdot v_n$

solução!!

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ para ser L.I.

~~ero então não é L.I.~~

independentes então dizem-se

Considera $\langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_k \rangle$

se existir u_i, que seja C.L dos restantes, temos que

2

$\langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_k \rangle =$

$\langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_k \rangle$.

u_i pode ser retirado pois não altera o subespaço uma vez que é uma C.L dos outros (pode ser obtido por outros vetores, logo pode ser retirado).

- todos os de...

$x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$

$0u_1 + 0u_2 = 0$ → se esta for a única solução então são lin. Ind.

→ se houver + que 1 solução então são li. d.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Os vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ são n vetores linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos.

$u_1, \ldots, u_k \in A$ → se existir um vetor destes que se possa escrever como C.L dos restantes, eles são L.D. Se não for possível então são lin. Ind.

!! v é lin. dep. dos outros se for a C.L dos outros !!

→ o 0_V (vetor nulo) é sempre lin. dependente.

Sejam V, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n, u \in V$

- se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente dependentes, então $u, v_1, \ldots, v_n$ são $n+1$ vetores lin. dependentes.

- se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores line. indep., então qualquer subconjunto de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é constituído por vetores lin. independentes.

- se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores lin. ind. e $u, v_1, \ldots, v_n$ são $n+1$ vetores linearmente dependentes, então u é C.L de $v_1, \ldots, v_n$.

Sejam V, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então, as seguintes condições são equivalentes:

→ $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;

→ $v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda . v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;

→ $v_1, \ldots, v_{i-1}, + v_j + v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são n vetores lin. indep.

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ diz-se base de V se:

Será $((0, 1/2, 1, 1), (-1, 0, 1, 2))$ uma base do subespaço

$S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - 2b + c = 0, -d + c = a\}$?

$S = \{(c - d, c - 1/2 d, c, d) \mid d, \in \mathbb{R}\}$, pelo que a resposta é afirmativa se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - d \\ c - 1/2 d \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

for possível e determinado, para quaisquer $c, d \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & c-d \\ 1/2 & 0 & c - d/2 \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d \\ 0 & 1 & -c+d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

é poss. e det. pelo que qualq. vetor de S escreve-se de forma única como C.L. dos vetores $(0, 1/2, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1, 2)$.

$x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$ solução então

$0u_1 + 0u_2 = 0$ → se esta for a única são lin. ind.

→ se houver + que 1 solução então são li. d.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ são n vetores linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ tem coeficientes únicos.

$u_1, \dots, u_k \in A$ → se existir um vetor destes que se possa escrever como C.L dos restantes, eles são L.D. Se não for possível então são lin. ind.

!! v é lin. dep. dos outros se for a C.L dos outros !!

↳ o $\vec{0}$ (vetor nulo) é sempre lin. dependente.

Sejam V, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n, u \in V$

- se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente dependentes, então $u, v_1, \dots, v_n$ são $n+1$ vetores lin. dependentes.

- se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores lin. indep., então qualquer subconjunto de $\{v_1, \dots, v_n\}$ é constituído por vetores lin. independentes.

- se $v_1, \dots, v_n$ são n vetores lin. ind. e $u, v_1, \dots, v_n$ são $n+1$ vetores linearmente dependentes, então u é C.L de $v_1, \dots, v_n$.

Sejam V, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$, $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então, as seguintes condições são equivalentes:

→ $v_1, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;

→ $v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda . v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes;

→ $v_1, \dots, v_{i-1}, v_j + v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ são n vetores lin. indep.

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_n \in V$. A sequência $(v_1, \dots, v_n)$ diz-se base de V se:

- $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$;
- $v_1, \dots, v_n$ são n vetores lin. ind.

Um subespaço vetorial que admite uma base finita diz-se finitamente baseado.

↳ é um conj. de vetores lin. ind. que geram esse espaço

Base ⇄ conjunto maximal de vetores lin. ind.

As seguintes condições são equivalentes:

→ $(v_1, \dots v_n)$ é uma base de V;

→ qualq. vetor de V escreve-se de forma única como C.L de $v_1, \dots, v_n$.

Se $(v_1, \dots, v_n)$ é uma base de V, e $v \in V$, os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ da C.L de $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ dizem-se coordenadas de v na base $(v_1, \dots, v_n)$

nº de incógnitas > nº linhas de [ ] simples, o sistema não é possível e determinado.

→ se o sistema for impossível, então os vetores dados não geram $\mathbb{R}^3$.

→ " " for possível, então não é determinado, pelo que os vetores não são lin. ind.

$\boxed{\text{Para qualquer } n \in \mathbb{N} \text{, uma base de } \mathbb{R}^n \text{ tem exatamente } n \text{ vetores.}}$

conj. fin. = C com m elementos que gera V (esp. vet. finitamente gerado). Se I é um subconj. de V com p vetores lin. Ind., então $p \leq m$.

Seja V um espaço vetorial finitamente baseado: → as bases de V têm todas o mesmo número de elementos.

se $V = \{0_V\}$, então a dimensão de V é 0.

→ chama-se dimensão de V ao número de vetores de uma base de V.

$\dim V$.

Um subespaço de $\mathbb{R}^n$: $\dim V = 1 \Rightarrow$ reta

$\dim V = 2 \Rightarrow$ plano

$\dim V = n-1 \Rightarrow$ hiperplano

Repara que em $\mathbb{R}^m$, com $m \in \mathbb{N}$, um vetor $(x_1, \dots, x_m)$ pode-se escrever na forma

coordenadas de $(x_1, \dots, x_m)$ na base canónica

$$(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{x_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + x_m (0, \dots, 0, 1)}_{\text{coeficientes únicos}}$$

$((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)) \Rightarrow$ é uma base de $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ base canónica

$\dim \mathbb{R}^m = m$

• Transformações lineares nas linhas/colunas de uma matriz não alteram o número de colunas nem o número de linhas lin. indep.

~~(Transformações elementares nas colunas de uma matriz não alteram o nº de colunas nem o número de linhas lin. ind.)~~

nº linhas lin. ind. de uma matriz A	= nº colunas lin. ind. de A	= nº pivôs da matriz em forma de escada que resulta de A por condensação de Gauss.

• m>n então as colunas de A são L.D.

• m<n → escalonamento → se todas as colunas de A tiverem pivô então as colunas são L.I

↳ se alguma coluna não possuir pivô logo as colunas de A são L.D

Seja A uma matriz. A dim. do espaço gerado pelas linhas de A diz-se a característica de A ~~espaço~~ $= r(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ sem pivô → colunas de A são L.D

$A_{m\times n}$ → m vetores de $\mathbb{R}^n$.
↳ n vetores do espaço $\mathbb{R}^m$

• $AX = B$ é possível se e só se B é C.L das colunas de A, isto é, se

$$r(A) = r([A|B])$$

• $AX = 0$ é determinado se as colunas de A são lin. ind., isto é, se:

$$r(A) = n.$$
↳ n incógnitas.

Transformações lineares:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
• $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$
• $v \in \mathbb{R}^n$; $f(-v) = -f(v)$
• $f(\alpha v + \dots + \alpha_k v_k)$
$= \alpha f(v) + \dots + \alpha_k f(v_k)$

→ $u, v \in \mathbb{R}^n$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$
→ $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda . v) = \lambda . f(v)$

(1) quando é T.L

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
$(x, y, z) \to (2x, y+z, 0, z)$

a conta em transformação linear

prova que

$f((x,y,z) + (a,b,c))$
$= f(x+a, y+b, c+z)$
$= (2(x+a), (y+b) + (c+z), 0, (z+c))$
$= (2x+2a, y+b+z+c, 0, z+c)$

$f(x,y,z) + f(a,b,c) = (2x, y+z, 0, z) + (2a, b+c, 0, c)$

Baseia-se em Bem

(...)

$$
\begin{aligned}
f(\lambda(x,y,z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda \times 0, \lambda z) \\
&= 2(\lambda x), \lambda y + \lambda z, 0, \lambda z) \\
&= \lambda(2x), \lambda(y+z), 0, z) \\
&= \lambda(2x, y+z, 0, z) \\
&= \lambda f(x,y,z)
\end{aligned}
$$

(2). Quando não é T.L.

"objeto" "imagem"

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y,z) \rightarrow (2x, y+z, 1, z)$

ex:

$\underrightarrow{f(0,0,0) = (0,0,0,0)}$ para f ser T.L

mas como $f(0,0,0) = (0,0,1,0)$

então f não é T.L

outro ex.:

$x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow f(x+y) \neq f(x) + f(y)$

$f((1,0,0)+(0,1,0)) = f(1,1,0) = (2,1,1,0)$

$f(1,0,0) + f(0,1,0) = (2,0,1,0) + (0,1,1,0) = (2,1,2,0)$

$(2,1,1,0) \neq (2,1,2,0) \Rightarrow$ Logo f não é T.L.

(3) Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \rightarrow (x', y')$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x' \\ 0 & -1 & 3 & y' \end{array}\right] = \begin{cases} 2x + y = x' \\ -y + 3z = y' \end{cases}$$

$\psi(x,y,z) = (2x+y, -y+3z)$

$\hookrightarrow \psi$ é ~~uma~~ a aplicação linear aplicada acima.

com isto,

$f_A \;\; \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f_A(x, \ldots, x_n) = (x', \ldots, x_m')$

em que,

$$A.\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}$$

f_A é uma aplicação linear, porque, para $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

verifica-se que,

$$A(X+Y) = AX + AY \quad e \quad A(\lambda X) = \lambda(AX)$$

Mais exemplos:

ex.: $\overset{\text{base}}{}$

$B \in \mathbb{R}^3$, $B = ((1,0,2), (1,0,1), (-1,1,0))$

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ onde:

ϕ é T.L e : $\phi(1,0,2) = (1,2,0,1)$

$\cdot\ \phi(1,0,1) = (0,1,1,1)$

$\cdot\ \phi(-1,1,0) = (1,0,0,1)$, $\phi(1,2,1)$?

1) usando os vetores que conhecemos:

$$(1,2,1) = -2(1,0,2) + 5(1,0,1) + 2(-1,1,0)$$

$$\begin{aligned} \phi(1,2,1) &= \phi(-2(1,0,2) + 5(1,0,1) + 2(-1,1,0)) \\ &= -2\phi(1,0,2) + 5\phi(1,0,1) + 2\phi(-1,1,0) \\ &= -2(1,2,0,1) + 5(0,1,1,1) + 2(1,0,0,1) = \underline{(0,1,5,5)} \end{aligned}$$

2) descobrindo a imagem de qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$:

$$(a,b,c) = (-a-b+c)(1,0,2) + (2a+2b-c)(1,0,1) + b(-1,1,0)$$

$$\phi(a,b,c) = \phi\,(-a-b+c)(1,0,2) + (2a+2b-c)(1,0,1) + b(-1,0,1)$$

$$\phi(a,b,c) = (a-b+c)(1,2,0,1) + (2a+2b-c)(0,1,1,1) + b(1,0,0,1)$$

$$= (a+c,\ c,\ 2a+2b-c,\ a+2b)$$

$$\phi(1,2,1) = (-1+1,\ 1,\ 2\times1+2\times2-1,\ 1+2\times2)$$

$$= \underline{(0,1,5,5)}$$

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$(a,b,c) \to (-a+c,\ c,\ 2a+2b-c,\ a+2b)$$

• Sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma T.L, chama-se matriz de f, relativamente às bases $B_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ e $B_{\mathbb{R}^m}$ de $\mathbb{R}^m$, à matriz

$$M(f;\ B_{\mathbb{R}^n},\ B_{\mathbb{R}^m}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

coordenadas das imagens dos vetores da base $B_{\mathbb{R}^n}$ em $B_{\mathbb{R}^m}$

• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma T.L, $v \in \mathbb{R}^n$, $B_{\mathbb{R}^n}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $B_{\mathbb{R}^m}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Se as coordenadas de v na base $\mathbb{R}^n$ são $(x, \dots, x_n)$, então a imagem $f(v)$ tem coordenadas $(y, \dots, y_m)$ na base $B_{\mathbb{R}^m}$ e que

$$\begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = M(f; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m}) \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

→ $S \subset \mathbb{R}^n \to f(S) \leq \mathbb{R}^m$

→ $\boxed{\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \}}$ Imagem de f. (subespaço $f(\mathbb{R}^n)$).

→ o subesp. $f^{-1}\{(0, \dots, 0)\}$ chama-se núcleo de f e representa-se por $\operatorname{Nuc} f \Rightarrow \operatorname{Nuc} f = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = (0, \dots,$

⚠ $\underbrace{f+g}_{\text{apli. lineares}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x, \dots, x_n) \to f(x, \dots, x_n) + g(x, \dots x_n)$

é uma aplicação linear e

$$M(f+g; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m}) = M(f; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m}) + M(g; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m})$$

⚠ $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ $\quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\underbrace{g \circ f}_{\text{apli. lineares}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$(x, \dots x_n) \to g(f(x, \dots x_n))$

$$M(g \circ f; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^p}) = M(g; B_{\mathbb{R}^m}, B_{\mathbb{R}^p}) \cdot M(f; B_{\mathbb{R}^n}, B_{\mathbb{R}^m})$$

---

ex: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$(x, y, z) \to T(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$

núcleo e Imagem de T?

No núcleo da Transf. estão todos os elementos do $\mathbb{R}^3$ que são transformados no elemento neutro do $\mathbb{R}^4$ pela transf. T, ou seja,:

$$T(x,y,z) = (x-y-z,\ x+y+z,\ 2x-y+z,\ -y) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ -y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+z=0 \\ 2x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, $N(T) = \{(0,0,0)\}$

→ Um elemento do C.D. $\mathbb{R}^4$ $\in$ imagem de T se for da forma:

$$(x-y-z,\ x+y+z,\ 2x-y+z,\ -y)$$

$$= x(1,1,2,0) + y(-1,1,-1,-1) + z(-1,1,1,0)$$

Assim, $Im(T) = [(1,1,2,0), (-1,1,-1,-1), (-1,1,1,0)]$.

↳ $\langle (1,1,2,0), (-1,1,-1,-1), (-1,1,1,0) \rangle = Im\,T$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\{(1,1,2,0), (0,2,1,-1), (0,0,2,1)$ é uma base para Im T.

---

ex:

$$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7x \\ z = 5x \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = (2x-y+z,\ 3x+y-2z)$$

$$N(T) = \{(x, 7x, 5x),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,7,5)}_{\text{vetor nulo}} \rangle$$

$$T(1,7,5) = (2\times 1 - 7 + 5,\ 3\times 1 + 7 - 2\times 5)$$

$$= (0,0) \rightarrow \text{então } (1,7,5) \in \text{ao núcleo}$$

A é uma matriz quadrada de ordem n (n linhas e n colunas).
Matriz coluna do tipo n×1, X, é Vetor próprio / vetor característico de A se: ↳ n linhas, 1 coluna

- $X \neq 0_{n\times 1}$;
- se existir λ : $\boxed{AX = \lambda X}$

↳ · valor próprio / valor característico de A;
· Vetor próprio X está associado ao valor próprio λ.

se $|A - \lambda I_n| = 0$ ↳ matriz identidade $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ → exemplo

→ $A_{n\times n}$ / $\alpha \neq 0$ / λ é um valor próprio de A / u e v são vetores próprios associados a λ, então: • u + v (se $u \neq -v$) e $\alpha \times v$ também são vetores próprios de A associados a λ.

→ $|A - \lambda I_n|$ ⇒ é um polinómio de grau n em λ que se chama polinómio característico de A. ($A_{n\times n}$)

Raciocínio para determinar os valores e os vetores próprios de A:

- Calcular o poli. $|A - \lambda I|$.
- (a) determinar as raízes do polin. ⇒ Obtenção dos valores próprios (são as soluções λ da eq. $\det(A - \lambda I) = 0$)
- Resolver $(A - \lambda I) X = 0$ ⚠ ⇒ Obtenção dos vetores próprios associados a λ. (são as soluções não nulas!)
  ↳ para cada valor próprio em (a) resolver!

ex:
multiplicidade → algébrica = nº de vezes que λ aparece como raiz do polin.
→ geométrica = dimensão do subespaço vetorial.

$$G = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left| G - \lambda \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$a_{31} \cdot G_{31} + 0 + a_{33} \cdot G_{33}$$

$$= 1 \times (-1)^{3+1} \times (0 - 2(-1-\lambda)) + (-\lambda) \times ((1-\lambda) \times (-1-\lambda))$$

$$= 1 \times (2 + 2\lambda) + (-\lambda) \times (-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2)$$

$$\det(G - \lambda I) = 2 + 2\lambda + \lambda - \lambda^3 = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)^{1}(\lambda + 1)^{2}$$

Então os valores próprios de A são 2 com mult. alg. 1 e -1 com mult. alg. 2.

· Vetores próprios:

$$\rightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1\alpha \end{cases}$$

O conj. das soluções do sistema é $\{\alpha(2,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ (dim = 1) o que é subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.

Diz-se que 2 é um valor próprio de multiplicidade geométrica 1; e os vetores próprios associados a 2 são elementos do conj.

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow (A - (-1)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ é um valor próprio de mult. geom. 2.

conj. solu. é $\{\alpha(-1,0,1) + \beta(0,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e os vetores

subesp. de $\mathbb{R}^3$ e dim = 2

próprios associados a -1 são elementos do conj.:

$$V_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Seja $A_{n \times n}$, isto é equivalente (umas às outras):

- A é invertível;
- $|A| \neq 0$
- $r(A) = n$
- $AX = 0$ tem apenas a solução trivial (0)
- as linhas (colunas) de A são L.I.
- $AX = B$ é poss. e det., para qualquer matriz coluna B de tipo $n \times 1$
- as linhas (colunas) de A identificam uma base de $\mathbb{R}^n$
- 0 não é valor próprio de A.