Cálculo para Engenharia - Folha 2

① a) D b) F c) B d) C e) A f) E

② i) pode ser uma representação gráfica de uma

ii) não " ______________________ função, não é injetiva

iii) pode " ______________________ "

" , é bijetiva (injetiva + sobrejetiva)

③ a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $Df = IR \setminus \{-1, 1\}$ b) $g(t) = |t^3|$ $Dg = IR$

④ a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ $g(x) = \sqrt{x+5}$

$Df =]-5, +\infty[$ $Dg =]-5, +\infty[$

$\underbrace{f+g : Df \cap Dg \to IR}_{\text{regra}}$

$Df \cap Dg =]-5, +\infty[= Df+g$

$f-g : Df \cap Dg \to IR$

$Df \cap Dg =]-5, +\infty[= Df-g$

$f \times g : Df \cap Dg \to IR$

$Df \cap Dg =]-5, +\infty[= Dg \times f$

$f/g : Df \cap \{x \in Dg : g(x) \neq 0\}$

$D\frac{f}{g} =]-5, 0[\cup]0, +\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ $g(x) = \sqrt{x+4}$

$Df =]-\infty, \frac{3}{2}]$ $Dg =]-4, +\infty[$

$f+g$ $Df \cap Dg =]-4, \frac{3}{2}[$

$f-g$ $Df \cap Dg =]-4, \frac{3}{2}[$

$f \times g$ $Df \cap Dg =]-4, \frac{3}{2}[$

f/g $D\frac{f}{g} =]-4, 0[\cup]0, \frac{3}{2}[$

⑤ a) $f(x) = x^2 - 3x$ $g(x) = \sqrt{x+2}$

$f \circ f = f(f(x)) = (x^2-3x)^2 - 3(x^2-3x)$

$= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x$ $Df \circ f = IR$

$f \circ g = f(g(x)) = (\sqrt{x+2})^2 - 3(\sqrt{x+2})$

$= x + 2 - 3\sqrt{x+2}$ $Df \circ g = [-2, +\infty[$

$g \circ f = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $Dg \circ f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

$g \circ g = \sqrt{\sqrt{x+2} + 2}$ $Dg \circ g =]-2, +\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{x+15}$ $g(x) = x^2 + 2x$

$f \circ f = \sqrt{\sqrt{x+15} + 15}$ $Df \circ f =]-15, +\infty[$

$f \circ g = \sqrt{x^2 + 2x + 15}$ $Df \circ g = IR$

$g \circ f = (\sqrt{x+15})^2 + 2\sqrt{x+15}$

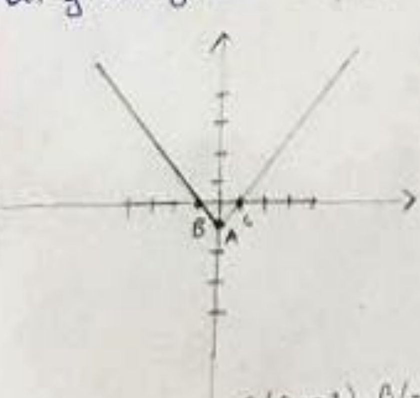
$= x + 15 + 2\sqrt{x+15}$ $Dg \circ f =]-15, +\infty[$

$g \circ g = (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)$

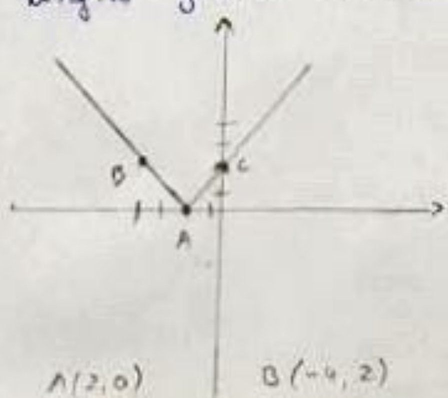
$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$ $Dg \circ g = IR$

⑥ $f : IR \to IR$ $f(x) = |x|$

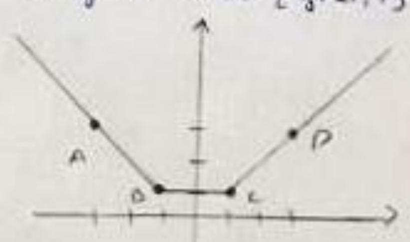
a) $g(x) = f(x) - 1 = |x| - 1$ b) $g(x) = f(x+2) = |x+2|$ c) $g(x) = \max\{f(x), 1\}$



A(0,-1) B(-1,0) C(1,0)



A(2,0) C(0,2) B(-4,2)



A(-3,3) C(1,1)
B(-1,1) D(3,3)

c) $\lfloor x \rfloor$ ...

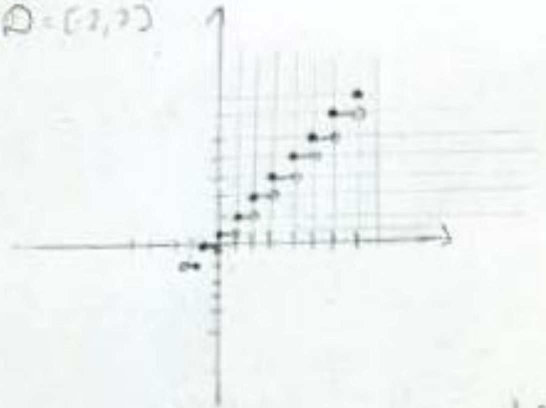
$\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} : x \le m\}$

7) a)

x	1,2	2	2,3	4,5	6,7
$f(x)$	2	2	3	5	7

b) $D = [?, ?]$



funsão par: $\forall x \in D, (-x) \in D$ e $f(-x) = f(x)$
funsão impar: $\forall x \in D, (-x) \in D$ e $f(-x) = -f(x)$

8) a) $f(x) = \frac{x}{2}$ $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$

paridade:

$f(-x) = -\frac{x}{2}$ $-f(x) = -\frac{x}{2}$ Logo, de acordo com a teórica, como $\forall x \in Df, (-x) \in D$ e $f(-x) = -f(x)$, então a função é impar

$g(-x) = 1 - \frac{4}{x}$ $-g(x) = -1 - \frac{4}{x}$ Como $\forall x \in Df$ $(-x) \in D$ e $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$, a função não é par, nem impar.

funsão crescente: $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
funsão decrescente: $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

monotonia:

f: $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in Df,$

Logo a função é estritamente crescente

g: $1 + \frac{4}{x+1} - 1 - \frac{4}{x} = -\frac{4}{x^2+x}$ Assim esta função será estritamente crescente de $]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ e estritamente decrescente de $]-?, 0[$. (?)

limitação das funsões:

Limitações verticais: é necessário $\rightarrow a \in Df$, f não é contínua em a / $\rightarrow a \notin Df$ e a é ponto aderente a Df, sendo $x = a$ uma reta de equação assintota ao gráfico da funsão f

Tendo em conta a esta informasão:

- $f(x)$ não possui limitações verticais
- $g(x)$: $\lim_{x \to 0^{\pm}} g(x) = \pm\infty$, logo a reta de equação $x = 0$ é uma assintota vertical (bilateral) ao gráfico de g.

Limitações não verticais: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

- $f(x)$: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ $b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0$

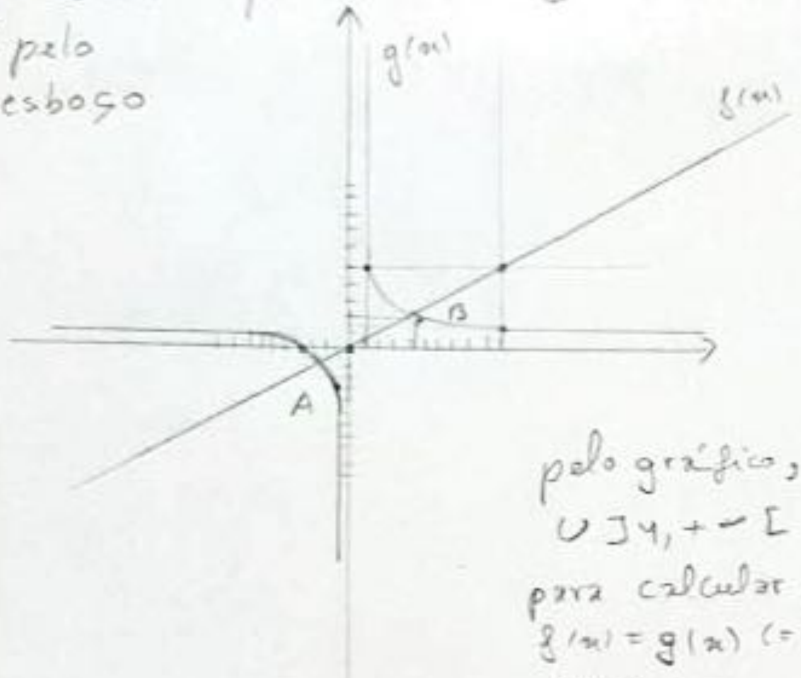
Logo, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, não sendo esta função limitada não verticalmente.

- $g(x)$: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ $b = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) - mx = 0$

Pela mesma conclusão, ou seja, pela existência de assintotas não verticais aos gráficos das funsões, nenhuma será limitada não verticalmente

8 b) e c) $\rightarrow$ pelos cálculos (*)

↳ pelo esboço



$f(x) = \frac{x}{2}$

$f(0) = 0 \quad f(10) = 5$

$g(x) = 1 + \frac{4}{x}$

$g(10) = 1{,}4 \quad g(1) = 5 \quad g(4) = 2$

$g(-4) = 0 \quad g(-1) = -3$

$g(-8) = \frac{1}{2}$

pelo gráfico, $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in \,]-2, 0[\, \cup \,]4, +\infty[$

para calcular A e B:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$

$f(-2) = -1 \quad f(4) = 2 \quad A(-2, -1) \quad B(4, 2)$

(*) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 1 - \frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{2x} > 0$

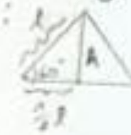
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \wedge 2x > 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \wedge 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]4, +\infty[\wedge x > 0 \\ x \in \,]-2, 4[\wedge x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \,]4, +\infty[\\ x \in \,]-2, 0[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \,]-2, 0[\, \cup \,]4, +\infty[\, , \, x \neq 0$

Cálculo para Engenharia – Folha 2

(9) $A_\Delta = \frac{b\times h}{2}$, sendo x o lado do triângulo, $A_\Delta = \frac{l^2 \sin 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}\, l}{4}$

$P_\Delta = 3l$

C.A.:  $\sin 60° = \frac{h}{l}$

$\Leftrightarrow h = \sin 60° \times l$

(10) $P(x,y)$ curva: $2x+4y=5$ Origem $(0,0)$

$\hookrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

sendo L a distância entre a origem e P, definindo L como função de x_P:

$$L = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_P-0)^2+(y_P-0)^2} = \sqrt{(x_P)^2+\left(-\frac{1}{2}x_P+\frac{5}{4}\right)^2}$$

(11) Na alínea b) e f) não estamos perante funções bijetivas, não fazendo sentido a procura das suas inversas

Para determinar a expressão analítica de f^{-1}?

1° Resolve-se a equação $f(x)=y$ em ordem a x, obtendo-se $x=f^{-1}(y)$

2° Em $x=f^{-1}(y)$ substitui-se x por $f^{-1}(x)$ e y por x, obtendo-se a expressão analítica $f^{-1}(x)$.

— Para caracterizar a função inversa deve-se ter em consideração que o domínio de f^{-1} é o contradomínio de f e o contradomínio de f^{-1} é o domínio de f.

a) $f(x)=x$. Seja $y\in\mathbb{R}$. $f(x)=y \Leftrightarrow x=y$.
Como a equação $f(x)=y$ tem uma solução única, f é bijetiva e $\forall y\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=y$. Substituindo y por x, temos $f^{-1}(x)=x$. Logo,

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x$$

c) $f(x)=x-3$ Seja $y\in\mathbb{R}$. $f(x)=y \Leftrightarrow x-3=y \Leftrightarrow x=y+3$.
(mesmo texto que a a)). $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x+3$

d) $f(x)=\sqrt{x+2}$ Seja $y\in\mathbb{R}$ $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=y \Leftrightarrow$
$y^2-2=x$.
(mesmo texto padrão) $f^{-1} = \mathbb{R} \to [-2,+\infty[,\quad x \mapsto x^2-2$

e) $f(x)=\frac{1}{x^2+5}$ Seja $y\in\mathbb{R}$ $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+5}=y \Leftrightarrow \frac{1}{y}=x^2+5$
$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{y}-5}$. (texto padrão) $f^{-1} = \left]0,\frac{1}{5}\right] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}-5}$

g) $f(x)=\frac{1}{x^3+2}$ Seja $y\in\mathbb{R}$ $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+2}=y \Leftrightarrow \frac{1}{y}=x^3+2$
$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{y}-2}$ (texto padrão) $f^{-1} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[3]{2}\},\quad x \mapsto \sqrt[3]{\frac{1}{x}-2}$