

Funções trigonométricas inversas e funções hiperbólicas

1. Calcule :

(a)  $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

(b)  $2\arcsin(-1)$

(c)  $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$

(d)  $\tan\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(e)  $\cot\left(\arcsin(-\frac{4}{5})\right)$

(f)  $\sin(\arcsin(-\frac{5}{13}))$

(g)  $\sin(\frac{\pi}{3} - \arctan \frac{4}{5})$

(h)  $\cos\left[\arcsin(\frac{1}{2}) - \arccos(\frac{3}{5})\right]$

2. Determine o número real designado por:

(a)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) + 4\arcsin(-\frac{1}{2}) + 2\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

(b)  $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{1}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{1}{3}\right)$

(c)  $\tan^2(\arcsin \frac{3}{5}) - \cot^2\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$

3. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

(a)  $\cos(x) > \frac{1}{2}, \quad |\tan(x)| > 1, \quad \sin^2(x) < \frac{1}{4}.$

4. Mostre as relações seguintes:

(a)  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$

(b)  $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$

(c)  $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1, 1].$

5. Determine o domínio e o contradomínio das funções abaixo indicadas. Caracterize as suas funções inversas.

(a)  $f(x) = 2\arcsin(2x-1) + \pi$       (b)  $g(x) = \cos \pi + 3\arccos(1-4x)$

(c)  $h(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{x+2}\right) + \frac{\pi}{2}$       (d)  $i(x) = \frac{\pi}{3} + \arctan\left(\frac{1}{x+5}\right)$

6. Considere a função real de variável real definida por

$$p(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)$$

(a) Calcule  $p(-1) - p(-\frac{3}{2})$ .

(b) Determine o domínio e o contradomínio da função.

(c) Calcule caso existam, os zeros de  $p$ .

(d) Caracterize a função inversa de  $p$ .

(e) Resolva a inequação  $p(x) \leq -\frac{\pi}{3}$ .

7. Considere a função real de variável real definida por

$$t(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

- (a) Calcule  $t(0) + t(-2)$ .
- (b) Determine o domínio e o contradomínio de  $t$ .
- (c) Determine conjunto solução de  $A = \{x \in \mathbb{R} : t(x) > 0\}$ .
- (d) Caracterize a função inversa de  $t$ .

8. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \frac{\pi}{3} + 2 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

- (a) Calcule  $g(1) + g(-2)$ .
- (b) Determine o domínio e o contradomínio de  $g$ .
- (c) Determine o conjunto solução de  $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \frac{2\pi}{3}\}$ .
- (d) Caracterize a função inversa de  $g$ .

9. Mostre as propriedades seguintes

- (a)  $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$ ,
- (b)  $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$ ,
- (c)  $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ ,  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

10. Simplifique as relações seguintes:

- (a)  $f(x) = \log_{10}(2x^n)$ ,  $f(x) = \exp(2+x) \exp(2x-3)$ ,  $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(x^2-1)$ .
- (b)  $f(x, y) = e^{x \ln(y) - y \ln(x^2)}$ ,  $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$ ,  $f(x) = \sin(\pi \sinh(\ln(2)))$ .
- (c)  $f(x, y) = e^{3x \ln(5) + y \ln(2)}$ ,  $f(x) = 2 \ln(e^{\frac{x}{2}}) - 2e^{\ln(\frac{x}{2})}$ ,  $f(x) = \ln(2xe^{4x})$ .

11. Determine o conjunto solução das equações seguintes:

- (a)  $\ln(x-1) = 2 \ln(x+1)$ ,  $e^{x+4} = 3e^{2x-1}$ ,  $25^x + 5^{x+1} - 6 = 0$ .
- (b)  $2^x > 3^x$ ,  $\ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x+11)$ ,  $-\cosh(x) + 2 \sinh(x) = -1$ .