Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) símbolos designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto numerável $\mathcal{V}^{CP}$;
- os símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ e $\perp$, designados conetivos (proposicionais);
- os símbolos auxiliares (e).

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o subconjunto de $(\mathcal{A}^{CP})^*$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

- $p_j \in \mathcal{F}^{CP}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}_0$;
- $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;
- se $\varphi,\ \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- se $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ designam-se fórmulas proposicionais ou fórmulas do Cálculo Proposicional.

As regras que definem $\mathcal{F}^{CP}$ poderiam ser representadas pelas seguintes árvores:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\vee$; $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\wedge$; ;
  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\rightarrow$; $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\leftrightarrow$
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\neg$.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$ e $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((p_2(\neg\wedge)\perp) \rightarrow (\neg p_4)) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem apenas para clarificar a leitura, mas para simplificar a escrita retiram-se os parêntesis exteriores e, interpretando os conetivos como operações em $\mathcal{F}^{CP}$, convenciona-se que a prioridade de aplicação dos conetivos a fórmulas é a seguinte:

1. $\neg$,
2. $\vee$ e $\wedge$,
3. $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Então $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4))$.
E o que representa $\neg p_2 \wedge \perp \rightarrow \neg p_4$?

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja P uma propriedade relativa aos elementos de $\mathcal{F}^{CP}$.
Se

1. para qualquer $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p)$,
2. $P(\perp)$,
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$,
   e) $P(\neg\varphi)$,

então $P(\varphi)$, para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ apresentada anteriormente é determinista.

Demonstração:
A demonstração efetua-se mostrando que cada fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação, o que requer a utilização do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$.

Definição

Uma subfórmula de uma fórmula φ é um sub-objeto de φ.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência numerável de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ operações de aridade 2 e $\overline{f_\neg}$ uma operação de aridade 1 em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para $i \geq 0$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi))$ e
   e) $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi))$.

Exemplo

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula proposicional ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que a função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é tal que :

1. para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p) = \{p\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$ e
   e) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$.

Tal definição é uma definição da função *var* por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Definição

Sejam $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$. A função

$$\begin{array}{rccc} \_[\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \rightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ é a fórmula obtida de φ pela substituição de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por:

1. Para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se} \quad n = i \\ p_n & \text{se} \quad n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad (\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$(\varphi_1 \,\square\, \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \,\square\, \varphi_2\,[\psi/p_i]).$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \rightarrow p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = \neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp)$ é a fórmula

$$\begin{aligned} \varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp))[\psi/p_1] \\ &= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \perp)[\psi/p_1] \\ &= \neg p_2[\psi/p_1] \wedge (p_1[\psi/p_1] \vee \perp[\psi/p_1]) \\ &= \neg p_2 \wedge (\psi \vee \perp) \\ &= \neg p_2 \wedge ((p_0 \rightarrow p_2) \vee \perp). \end{aligned}$$

Exercício: Defina por recursão estrutural a função que a cada fórmula proposicional associa o conjunto das suas subfórmulas.

Exemplo

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p) = \;\bullet p$;
2. $T(\perp) = \;\bullet\perp$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$T(\varphi\square\psi) = \begin{array}{ccc} & \bullet\square & \\ \swarrow & & \searrow \\ T(\varphi) & & T(\psi) \end{array} \quad ;$$
4. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad T(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\neg \\ | \\ T(\varphi) \end{array} \quad .$

Valores lógicos

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conetivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conetivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Valorações

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\bot) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Observação:
Na definição anterior de valoração v, a condição b), relativa ao conetivo $\neg$, pode ser representada pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

As condições c)-f), relativas aos conetivos $\vee, \wedge, \to$ e $\leftrightarrow$, poderiam ser representadas pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi\to\psi)$	$v(\varphi\leftrightarrow\psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0,1\}$ uma função. Então, existe uma única valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração:
Pelo Teorema de Recursão Estrutural, $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ é a única função tal que:

1. para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $v(p_i) = g(p_i)$;
2. $v(\bot) = 0$ por definição de valoração;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$;
   - $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - $v(\varphi \to \psi) = 0$ sse $v(\varphi)=1$ e $v(\psi)=0$;
   - $v(\varphi \leftrightarrow \psi)=1$ sse $v(\varphi)=v(\psi)$.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula proposicional. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para quaisquer $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração: Por indução estrutural em fórmulas proposicionais.

Exemplo

Seja v a única valoração tal que $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Consideremos a fórmula $\psi = \neg p_4 \leftrightarrow (p_4 \vee p_1)$. Calculemos $v(\psi)$.

Tem-se

$$v(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\neg p_4) = v(p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Ora, $v(\neg p_4) = 1 - v(p_4) = 1 - 1 = 0$, enquanto que

$$v(p_4 \vee p_1) = max\{v(p_4), v(p_1)\} = max\{1,0\} = 1.$$

Assim, conclui-se que $v(\psi) = 0$.

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$. Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ para a valoração v_1.
Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{senão.} \end{cases}$$

Assim, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$.
Logo $v_1(\varphi) = 1$.

Considere uma valoração v_2 tal que $v_2(p_i) = 1$ se $i < 6$ e $v_2(p_i) = 0$ caso contrário.
Calcule $v_2(\varphi)$.

Tautologias

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma

- tautologia se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v (em tal caso escreve-se $\models \varphi$);
- contradição se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ (do exemplo anterior) é uma tautologia. De facto, para qualquer valoração v, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $v(\varphi) = 1$.

Exercício: Mostre que $\neg(p_0 \wedge p_2) \to (p_0 \vee p_2)$ não é uma tautologia.

Tabela de verdade de uma fórmula

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa tabela de verdade. Esta tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Equivalência lógica

Definição

Uma fórmula φ diz-se logicamente equivalente a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

Tem-se $p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$ pois, como vimos

$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$

é uma tautologia. Mais geralmente,

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$

para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica permite as "demonstrações por contra-recíproco". Ou seja, provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ" é o mesmo que provar que "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Exemplo

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\bot$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia.

Lema

Em $\mathcal{F}^{CP}$, a relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência.

Teorema

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respetivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conetivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conetivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conetivos não são usados.

Teorema

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$,

vii) $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

Substituição de variáveis por fórmulas

Teorema (Generalização)

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $p_i \in \mathcal{F}^{CP}$. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração:

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida por:

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Prova-se que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.

Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, e $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.

Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia.