departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no seu domínio.

   (a) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 2x)$.

   (b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x) & \text{se } x \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   (c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x\,[-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x\,]0,1] \end{cases}$

   (d) $f : [-1,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2-4) & \text{se } x\,[-1,2[\\ \pi & \text{se } x = 2 \\ \cos(1 - e^{x-2}) & \text{se } x\,]2,4] \end{cases}$

2. Calcule a expressão analítica de F' sendo F a função real de variável real definida por:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_x^{0} e^{-s^2}\,ds$

   (d) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} \left(\operatorname{sen}\left(t^2\right) + e^{-t^2}\right) dt$

   (e) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_1^{x} e^{-s^2}\,ds$

   (f) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt$

   (g) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2} \cos\left(t^4\right)\,dt$

   (h) $F(x) = \displaystyle\int_{\cos(x)}^{x^3} \ln\left(t^2+1\right)\,dt$

3. Seja F uma função real de variável real definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} (x+1)^2 \operatorname{arcsen}(t)\,dt$, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

4. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, com $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)$.

5. Seja F a função real de variável real definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du\right) dt$. Calcule $F''(x)$.

6. Considere a função real de variável real G definida em $\mathbb{R}$ por $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{3t^4+4t^3} dt$.
   (a) Estude a função G quanto à monotonia.
   (b) Determine, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico de G.

7. Considere a função real de variável real F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} (1+e^{t^2}) dt$.
   (a) Calcule $F'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

8. Considere a função real de variável real H definida em $\mathbb{R}$ por
$$H(x) = \int_0^{x^2} (4 + \operatorname{sen}(t)) dt.$$
   (a) Calcule $H'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Estude a função H quanto à monotonia e existência de extremos locais.

9. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2} t\cos\left(1 - e^{1-t}\right) dt}{x^2 - 1}$$

10. Considere as funções reais de variável real F e G definidas em $\mathbb{R}$, respetivamente, por
$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt$$
Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)}$.

11. Seja F a função real de variável real definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} \frac{e^t}{t+1}\, dt$, para $x \in [1, +\infty[$.

    (a) Mostre que F é estritamente crescente no seu domínio.

    (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$.

12. Calcule os seguintes integrais de Riemann.

    (a) $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4}\, dx$

    (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+4x^2}\, dx$

    (c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x}{x+3}\, dx$

    (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

    (e) $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} \cos(3x) - 5\,\mathrm{sen}(3x)\, dx$

    (f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(3x)\, dx$

    (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx$

    (h) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$

    (i) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{x^2}\, dx$

    (j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

    (k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\, dx$

    (l) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{sen}(\ln(x))}{x}\, dx$

    (m) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$

    (n) $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+4}\, dx$

    (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx$

    (p) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$

13. Calcule:

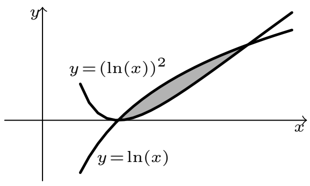
    (a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx, \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx, \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 1 \\[2ex] \dfrac{5}{10}x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

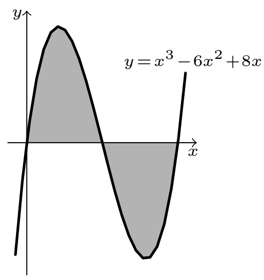
(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} x\cos(x^2-1) & \text{se } -\pi \leq x < 1 \\[2ex] 3\,\mathrm{sen}(x-1)+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,dx, \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\[2ex] x^2-3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

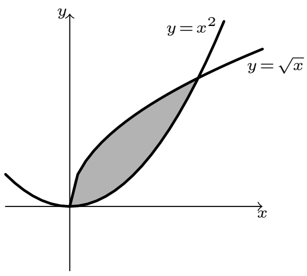
14. Recorrendo ao cálculo integral, determine a área da região sombreada nas figuras.



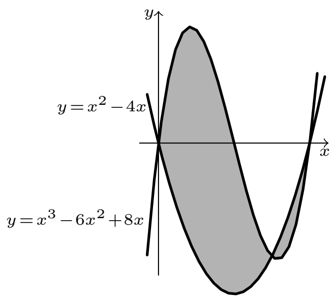
(a)



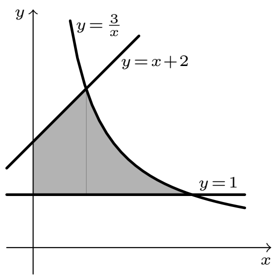
(b)



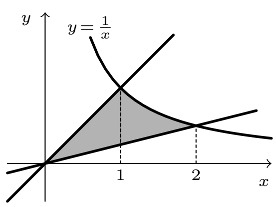
(c)



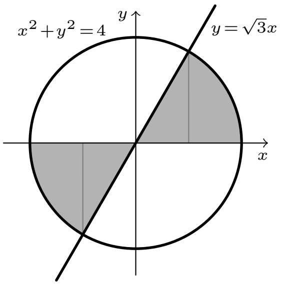
(d)

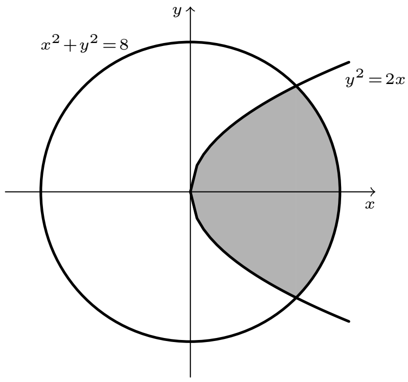


(e)



(f)

(g)


(h)


15. Em cada uma das alíneas, esboce o conjunto de pontos indicado e calcule a sua área.

    (a) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}: x^2-1\leq y\leq 0\right\}$

    (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 2\pi,\, 0\leq y\leq |\operatorname{sen}(x)|\}$

    (c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}: y\leq \dfrac{1}{4},\, y\geq (x-1)^2,\, y\leq \ln(x)\right\}$

    (d) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}: y\leq 2x,\, y\leq 0,\, y\geq (x+1)^2-4\right\}$

    (e) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}: y\geq x^2,\, y\leq 2-x,\, y\leq 2\right\}$

    (f) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}: y\geq (x-3)^2,\, y\geq x-1,\, y\leq 4\right\}$

16. Calcule a área da região limitada:

    (a) pela parábola $y=x^2-7x+6$, pelo eixo dos xx e compreendida entre retas de equação $x=2$ e $x=6$;

    (b) pela parábola $y=25-x^2$ e o eixo das abcissas;

    (c) pela parábola $y=x^2-2x-15$, pelo eixo dos xx e compreendida entre retas de equação $x=-2$ e $x=6$;

    (d) pelas parábolas $y=9-x^2$ e $y=x^2+1$ e compreendida entre retas de equação $x=0$ e $x=3$;

    (e) pelas curvas $y=\operatorname{sen}(x)$ e $y=\cos(x)$ e compreendida entre retas de equação $x=0$ e $x=\dfrac{\pi}{2}$;

    (f) pela parábola $y=x^2$ e pelas retas de equação $y=x+6$ e $y=0$;

    (g) pela curva $y=\operatorname{sen}(x)$ e pelas retas de equação $y=0$, $x=0$ e $x=\pi$;

(h) pela parábola $y = 2 - x^2$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = -2$ e $x = 2$;

(i) pela parábola $y = x^2 - 2x + 2$, pela reta que lhe é tangente no ponto de abcissa $x = 2$ e pelas retas de equação $x = 0$ e $y = 0$;

(j) pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por $h(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ e pelas retas de equação $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$;

(k) pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x\cos(x)$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$;

(l) pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas de equação $x = 2$ e $y = 0$;

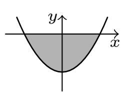
(m) pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$;

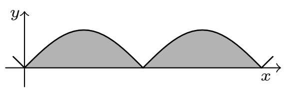
(n) pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, pelo eixo Ox e pelas retas de equação $x = 0$ e $x = 2$;

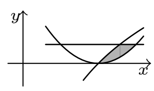
(o) pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \operatorname{sen}^2(x)}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1 + 4x^2}$$

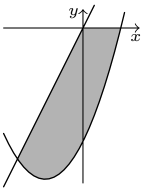
e pelas retas de equação $x = 0$ e $x = \dfrac{1}{2}$.

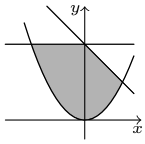
1. (a) f é integrável em $[0,4]$; (b) f não é integrável em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;
   (c) f é integrável em $[-2,1]$; (d) f é integrável em $[-1,4]$.
2. (a) $F'(x)=2xe^{x^4}$; (b) $F'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$; (c) $F'(x)=-e^{-x^2}$;
   (d) $F'(x)=\operatorname{sen}(x^2)+e^{-x^2}$; (e) $F'(x)=3x^2\displaystyle\int_1^x e^{-s^2}ds+x^3e^{-x^2}$;
   (f) $F'(x)=-2x\operatorname{sen}(x^4)+3e^{3x}\operatorname{sen}\left(1+e^{3x}\right)^2$; (g) $F'(x)=-\cos(x^4)$;
   (h) $F'(x)=3x^2\ln(x^6+1)+\operatorname{sen}(x)\ln\left(\cos^2(x)+1\right)$.
3. (a) $F'(x)=2(x+1)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{arcsen}(t)dt+x(x+1)^2\cos(x)$.
4. (a) $\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$.
5. (a) $F''(x)=e^{-x^2}$.
6. (a) G é estritamente crescente em $\mathbb{R}$; (b) $(-1,G(-1))$.
7. (a) $F'(x)=2x(1+e^{x^4})$, $\forall x\in\mathbb{R}$; (b) F é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, $F(0)$ é um mínimo local de F.
8. (a) $H'(x)=2x(4+\operatorname{sen}(x^2))$, $\forall x\in\mathbb{R}$; (b) H é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, $H(0)$ é um mínimo local.
9. (a) 1
10. (a) -1
11. (b) 1
12. (a) $\frac{1}{6}(e^{79}-e^4)$; (b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4$; (c) $4-6\ln(\frac{3}{2})$; (d) $\frac{\pi}{6}$; (e) $-\frac{4}{3}$; (f) $\frac{2\pi}{3}$;
    (g) $\frac{\pi}{8}$; (h) $4-2\ln 3$; (i) $\frac{3}{4}+\ln 4$; (j) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$; (k) $\frac{526}{15}-32\ln 3$; (l) $1-\cos 1$;
    (m) $2\sqrt{e}$; (n) $\frac{\ln(3)}{4}$; (o) $\frac{\pi}{8}$; (p) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
13. (a) $2+2\ln 2$; (b) 2; (c) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}(\pi^2))+3+\cos 1$; (d) $-\frac{1}{e^2}+\frac{41}{3}$.
14. (a) $3-e$; (b) 8; (c) $\frac{1}{3}$; (d) $\frac{71}{6}$; (e) $3\ln 3-\frac{1}{2}$; (f) $\ln 2$; (g) $\frac{4\pi}{3}$; (h) $\frac{6\pi+4}{3}$.
15. (a) 

$A=\frac{4}{3}$; (b) 

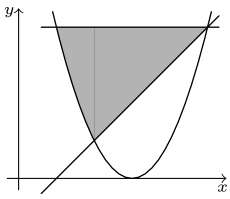
$A=4$; (c) 

$A=\frac{4}{3}-\sqrt[4]{e}$;

(d) 

$A = \frac{5}{3} - 4\sqrt{3}$; (e) 

$A = \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{6}$;

(f) 

$A = \frac{37}{6}$.

16. (a) $\frac{56}{3}$; (b) $\frac{500}{3}$; (c) 86; (d) $\frac{46}{3}$; (e) $2\sqrt{2} - 2$; (f) $\frac{32}{3}$; (g) 2; (h) $\frac{19}{3}$; (i) $\frac{5}{3}$; (j) $\frac{\pi^2}{72}$; (k) $\frac{-4\pi+8+\pi^2}{8}$; (l) $\frac{1}{3} + \ln(2)$; (m) $\frac{1}{6}$; (n) $\frac{1}{2}$; (o) $\frac{\pi}{2}$.