tópicos de matemática discreta | LEI

cláudia m. araújo

introdução

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

Desempenha, pois, um papel fundamental em qualquer área do saber, em particular na Matemática e na Informática.

Na Informática, a lógica é usada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação, na verificação da correção de programas e nos circuitos digitais.

introdução

Linguagem

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples e clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não tem estes requisitos.

sistema lógico

Um sistema lógico apresenta as seguintes componentes:

sintaxe: é o conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou parte dela);

semântica: é o conjunto de regras que associam um *significado* às fórmulas;

sistema dedutivo: é o conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Ao longo dos anos, foram definidos diversos sistemas lógicos. Nesta unidade curricular, estudaremos algumas noções básicas associadas ao **Cálculo Proposicional Clássico** e ao **Cálculo de Predicados Clássico**.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Na linguagem natural, podemos encontrar diversos tipos de frase – declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Na construção de um argumento, recorremos apenas a frases declarativas.

As frases podem ser simples ou compostas.

exemplo 1.1 [frases simples]:

Braga possui 193 333 habitantes no seu concelho.
O António gosta de Lógica.
Todo o número inteiro é par.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Representaremos as frases simples por $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$).

A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais**. O conjunto das variáveis proposicionais é denotado por $\mathcal{V}^{CP}$.

A partir de frases simples e recorrendo a expressões como "não", "e", "ou", "se... então", "... se e só se...", obtêm-se frases mais complexas, designadas por **frases compostas**.

exemplo 1.2 [frases compostas]:

[1]*Braga possui 193 333 habitantes no seu concelho e conta com mais de 2000 anos de história como cidade.*
[2] *Se o António gosta de Lógica, então é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta e a Lógica Computacional.*
[3] *Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

No Cálculo Proposicional, as frases compostas são representadas usando:

- as variáveis proposicionais;
- os símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais**, e designados, respetivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;
- os símbolos auxiliares "(" e ")".

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Representemos por p_n e p_m duas frases declarativas $(n, m \in \mathbb{N}_0)$.

$\neg p_n$

A frase "não p_n" designa-se por **negação de p_n** e é representada por $\neg p_n$.
A $\neg p_n$ também podemos associar as leituras "é falso p_n" e "não é verdade p_n".

$p_n \wedge p_m$

A frase "p_n e p_m" designa-se por **conjunção de p_n e p_m** e é representada por $p_n \wedge p_m$.

$p_n \vee p_m$

A frase "p_n ou p_m" designa-se por **disjunção de p_n e p_m** e é representada por $p_n \vee p_m$.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

$p_n \to p_m$

A frase "Se p_n, então p_m" designa-se por **implicação de p_n, p_m** e é representada por $p_n \to p_m$.

A $p_n \to p_m$ também podemos associar as leituras

"p_n implica p_m"
"p_n é suficiente para p_m"
"p_n só se p_m"
"p_n somente se p_m"
"p_m é necessária para p_n"
"p_m se p_n"
"p_m sempre que p_n".

A p_n chamamos **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a p_m chamamos **consequente** ou **conclusão**.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

$p_n \leftrightarrow p_m$

A frase "p_n se e só se p_m", que resulta da conjunção das implicações "Se p_n, então p_m" e "Se p_m, então p_n", designa-se por **equivalência de p_n e p_m** e é representada por $p_n \leftrightarrow p_m$.

A $p_n \leftrightarrow p_m$ também se associam as leituras "p_n é equivalente a p_m" e "p_n é necessário e suficiente para p_m".

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Ao representarmos frases compostas, recorremos aos símbolos auxiliares "(" e ")", de modo a evitar ambiguidades.

exemplo 1.3

Consideremos as seguintes frases e as variáveis proposicionais que as representam:

p_0 : *Braga possui 193 333 habitantes no seu concelho.*
p_1 : *Braga conta com mais de 2000 anos de história como cidade.*
p_2 : *O António gosta de Lógica.*
p_3 : *O António é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta.*
p_4 : *O António é bom aluno a Lógica Computacional.*
p_5 : *Todo o número inteiro é par.*
p_6 : *7 é divisível por 2.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

As frases compostas referidas no exemplo 1.2 podem ser representadas, respetivamente, por:

[1] $p_0 \wedge p_1$ *ou* $(p_0 \wedge p_1)$
[2] $p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4)$ *ou* $(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4))$
[3] $p_5 \rightarrow p_6$ *ou* $(p_5 \rightarrow p_6)$

Estipulados os símbolos que definem o **alfabeto** *da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos, agora, definir as* **palavras** *destas linguagem.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Uma definição indutiva de um conjunto X é uma coleção de regras que descrevem X e que são de dois tipos:

- regra básica é toda aquela que indica, incondicionalmente, que um determinado elemento pertence ao conjunto X;
- regra indutiva é toda aquela que indica que um certo elemento pertence a X, desde que outros determinados elementos pertençam a X.

O conjunto X é formado por todos os elementos que se podem obter por aplicação das regras básicas e das regras indutivas um número finito de vezes.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

definição 1.4

O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das **fórmulas do Cálculo Proposicional** é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula;

(F_3) se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Exemplo para exercícios!!!

exemplo 1.5

[1] *A palavra* $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:*

i. *Pela regra* (F_2)*, as variáveis proposicionais* p_0, p_1 *e* p_2 *são fórmulas;*

ii. *Por i. e pela regra* (F_3), $(\neg p_0)$ *é uma fórmula;*

iii. *Por i. e pela regra* (F_4), $(p_1 \wedge p_2)$ *é uma fórmula;*

iv. *Por ii., iii. e pela regra* (F_6), $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula;*

[2] *As palavras* $\neg p_0 \wedge$, $\rightarrow p_0$, $(p_0 \vee p_1$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Para que uma palavra seja considerada uma fórmula do Cálculo Proposicional, é necessário que os parêntesis ocorram de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas.

No entanto, é habitual omitirmos os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação.

exemplo 1.6:

A fórmula $(((\neg p_0) \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge (\neg p_0)))$ *pode ser representada pela palavra* $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0)$*.*

A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ *é uma representação da fórmula* $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$*, ao passo que* $\neg p_0 \vee \neg p_1$ *não o é.*

A fórmula $(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$ *pode ser representada por* $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ *mas não pode ser representada por* $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$*.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. De facto, uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado – este depende da interpretação associada aos símbolos.

exemplo 1.7:

Se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 15$", *então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação* "*Se* $2 \times 7 = 14$, *então* $1 + 2 \times 7 = 15$", *que é verdadeira.*

Por outro lado, se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 16$", *então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação* "*Se* $2 \times 7 = 14$, *então* $1 + 2 \times 7 = 16$", *que é falsa.*

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de **valores de verdade** às suas fórmulas.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Em lógica clássica, são considerados dois valores de verdade.

definição 1.8

Os valores lógicos (ou valores de verdade) do Cálculo Proposicional são **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

Interessa-nos considerar frases declarativas sobre as quais se pode decidir acerca do seu valor lógico.

definição 1.9

Uma **proposição** é uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que possamos não ser capazes de, no momento atual, determinar o seu valor lógico).

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.10

Consideremos as seguintes frases:

[1] *Lisboa é a capital de Portugal.*

[2] $2 + 3 = 6$.

[3] *Quando é que vamos almoçar?*

[4] *Toma um café.*

[5] *2+x=6.*

[6] *Todo o número inteiro maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

[7] *2 é um número par.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

As frases 1, 2, 6 e 7 são proposições:

as afirmações 1 e 7 são verdadeiras, enquanto que a afirmação 2 é falsa;

a afirmação 6 é conhecida como a *Conjetura de Goldbach* – até ao momento, não existe uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, mas será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As restantes frases não são proposições:

as frases 3 e 4 não são do tipo declarativo e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos;

a frase 5, sem haver um contexto prévio de atribuição de um valor concreto a x, não é nem verdadeira nem falsa.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se tratar de uma frase declarativa simples. Diz-se uma **proposição composta** se for uma frase declarativa composta.

A veracidade de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada.

Por exemplo, a afirmação "Este livro tem uma capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

Também a decisão sobre o valor lógico de uma frase composta pode depender do contexto em que se insere. No entanto, para saber se uma frase composta é verdadeira ou falsa, basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem.

A afirmação "Este livro tem uma capa vermelha e está escrito em português." é verdadeira para alguns livros e falsa para outros. Porém, é verdadeira sempre que ambas as frases simples que a compõem forem verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.11

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *2 é um número par.*

[2] *Todo o número primo é ímpar.*

[3] *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

A proposição 1 é uma proposição simples que assume o valor lógico verdadeiro, enquanto que a proposição 2 é uma proposição simples que assume o valor lógico falso.

A proposição 3 é composta: obtém-se a partir da conjunção de duas proposições simples. Como uma das proposições simples que a compõem é falsa, assume também o valor lógico falso.

cálculo proposicional clássico [semântica]

No Cálculo Proposicional, não se pretende determinar se uma frase simples é ou não verdadeira. O objetivo é estudar a veracidade das proposições compostas a partir da verdade ou falsidade das frases que as compõem e do significado dos conetivos.

O valor lógico de uma proposição obtida por aplicação de um **conectivo** é determinado pelo conectivo e pelo valor lógico das proposições às quais o conectivo é aplicado.

Por exemplo, quando se aplica a uma proposição φ o conectivo **negação** obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto, isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

cálculo proposicional clássico [semântica]

A cada **conectivo** pode ser associada uma **função de verdade**, a qual pode ser apresentada sob a forma de uma tabela, chamada a **tabela de verdade** do conectivo.

O conectivo $\neg$ tem associada uma função de verdade unária e a sua tabela de verdade é a seguinte, onde φ representa uma proposição arbitrária:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

exemplo 1.12

A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira: basta considerar o número primo 2.

A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que $24 = 8 \times 3$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. Assim, $\wedge$ está associado a uma função de verdade binária que pode ser descrita pela tabela de verdade seguinte:

$1 \wedge 1 = 1$

$1 \wedge 0 = 0$

$0 \wedge 1 = 0$

$0 \wedge 0 = 0$

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

só dá verdadeiro(1) se os 2 são verdadeiros(1)

exemplo 1.13

As proposições "24 é divisível por 8." e "56 é divisível por 8." são verdadeiras. Por outro lado, a proposição "28 é divisível por 8." é falsa.

A proposição "24 e 56 são divisíveis por 8.", que resulta da conjunção das duas primeiras proposições atrás referidas, é verdadeira. A proposição "28 e 56 são divisíveis por 8." é falsa.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é falsa somente se ambas as proposições que a compõem são falsas. O conectivo $\vee$ tem associada uma função de verdade binária e a sua tabela de verdade é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

exemplo 1.14

A proposição "24 não é divisível por 8 ou 5 não é um número primo." é falsa pois é a disjunção de duas proposições falsas. A proposição "24 não é divisível por 8 ou 100 é divisível por 4." é verdadeira, pois uma das proposições que a compõem é verdadeira.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \to \psi$ é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. Equivalentemente, a proposição $\varphi \to \psi$ é falsa se e só se φ é verdadeira e ψ é falsa. Assim, o conectivo $\to$ está associado a uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

exemplo 1.15

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *Se* $3 > 1$, *então* $2 > 1$.

[2] *Se* $3 > 1$, *então* $1 > 2$.

[3] *Se* $1 > 3$, *então* $2 > 1$.

[4] *Se* $1 > 3$, *então* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ψ e φ são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. Ao conectivo $\leftrightarrow$ está, portanto, associada uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade seguinte:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

exemplo 1.16

Consideremos as seguintes proposições:

[1] $3 > 1$ *se e só se* $2 > 1$.

[2] $3 > 1$ *é equivalente a* $1 > 2$.

[3] $1 > 3$ *é necessário e suficiente para* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Recorde-se que o conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das fórmulas do CP é o conjunto definido indutivamente pelas regras (F_1) a (F_7).

Assim, para atribuir um valor lógico às fórmulas começamos por atribuir um valor lógico ao conetivo $\perp$. O conectivo $\perp$ é uma fórmula que tem sempre o valor lógico 0. Assim, $\perp$ está associado a uma função de verdade que é uma constante (função $0-$ ária).

$\perp$
0

As variáveis proposicionais podem tomar o valor lógico 1 ou 0.

O valor lógico de uma fórmula φ é determinado pelos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem em φ e pelas funções de verdade associadas aos conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

As tabelas de verdade dos conectivos podem ser sintetizadas da seguinte forma, onde φ e ψ são fórmulas,

$\perp$
0

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Temos que a fórmula

- $\neg\varphi$ é **verdadeira** se e só se φ é uma fórmula **falsa**.
- $\varphi \wedge \psi$ é **verdadeira** se e só se φ e ψ são ambas **verdadeiras** e, portanto, $\varphi \wedge \psi$ é **falsa** se e só se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é **falsa**.
- $\varphi \vee \psi$ é **falsa** se e só se φ e ψ são ambas **falsas**, donde $\varphi \vee \psi$ é **verdadeira** se e somente se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é **verdadeira**.
- $\varphi \rightarrow \psi$ é **falsa** se e só se φ é **verdadeira** e ψ é **falsa**.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ é **verdadeira** se e só se φ e ψ têm o **mesmo valor lógico**.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só **valor lógico**. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionado-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

exemplo 1.17

Queremos estudar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

Esta fórmula tem duas variáveis, p_0 *e* p_1*, pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de* p_0 *e* p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 *combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade terá 4 linhas.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

cálculo proposicional clássico [semântica]

Para cada caso, determinamos primeiro o valor lógico de $\neg p_0$ *e de* $p_1 \vee p_0$*, para podermos, depois, determinar o valor lógico de* $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$*.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

Da análise da seguinte tabela de verdade,

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

podemos concluir que a fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$ *é verdadeira apenas quando* p_0 *é falsa e* p_1 *é verdadeira.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.18

Estudemos, agora, o valor lógico da fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$.

Esta fórmula tem três variáveis, p_0, p_1 *e* p_2, *pelo que existem* 2^3 *combinações dos valores lógicos de* p_0, p_1 *e* p_2.

Logo, a tabela de verdade terá 8 linhas:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Analisando a tabela, podemos concluir que a fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$ *é falsa apenas quando as três variáveis proposicionais,* p_0, p_1 *e* p_2, *são falsas.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

observação 1.19

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ.
Assim, uma tabela de verdade de φ terá 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

cálculo proposicional clássico [semântica]

definição 1.20

Uma **tautologia** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo 1.21

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$*, as fórmulas* $p_n \vee \neg p_n$ *e* $p_n \to p_n$ *são tautologias.*

p_n	$\neg p_n$	$p_n \vee \neg p_n$
1	0	1
0	1	1

p_n	$p_n \to p_n$
1	1
0	1

cálculo proposicional clássico [semântica]

No resultado que se segue, listam-se tautologias que são utilizadas com frequência.

proposição 1.22

Dadas as fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, as seguintes fórmulas são tautologias:

[Modus Ponens]
$(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

[Modus Tollens]
$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$

[transitividade]
$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$

cálculo proposicional clássico [semântica]

demonstração Verifiquemos se a fórmula que expressa a transitividade é uma tautologia.

Construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$, podemos concluir que esta fórmula é uma tautologia se o seu valor lógico for sempre verdadeiro.

φ	ψ	σ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \sigma$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)$	$\varphi \to \sigma$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

De modo análogo, verifica-se que as outras duas fórmulas que expressam o Modus Tollens e o Modus Ponens são tautologias (exercício).

cálculo proposicional clássico [semântica]

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

definição 1.23

Uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo 1.24

As fórmulas $p_n \wedge \neg p_n$ *e* $p_n \leftrightarrow \neg p_n$ *são contradições para todo o* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

p_n	$\neg p_n$	$p_n \wedge \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

p_n	$\neg p_n$	$p_n \leftrightarrow \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

cálculo proposicional clássico [semântica]

Existem fórmulas que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Se φ e ψ foram duas fórmulas nessas condições, facilmente concluímos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

definição 1.25

Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Dizemos que φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.26

As fórmulas $\varphi : (p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1$ *e* $\psi : \neg(p_0 \wedge p_1)$ *são logicamente equivalentes, pois*

$$\varphi \leftrightarrow \psi : ((p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1) \leftrightarrow (\neg(p_0 \wedge p_1))$$

é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$	$\neg p_1$	φ	$p_0 \wedge p_1$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Em seguida, listamos algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

cálculo proposicional clássico [semântica]

proposição 1.27

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

- $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$
  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$ .... (associatividade)
- $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ .... (comutatividade)
- $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$ .... (idempotência)
- $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$. .... (elemento neutro)
- $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$
  $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$ . ... (distributividade)
- $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
  $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ .... (leis de De Morgan)
- $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ .... (dupla negação)
- $(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ .... (lei do contrarrecíproco)

cálculo proposicional clássico [semântica]

demonstração Comecemos por mostrar a equivalência lógica da dupla negação.

Construindo a tabela de verdade de $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
1	0	1	1
0	1	0	1

Logo, as fórmulas $\neg\neg\varphi$ e φ são logicamente equivalentes.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Verifiquemos, agora, a equivalência lógica

$$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma).$$

(as restantes provas ficam como exercício)

À semelhança do que foi feito no caso da dupla negação, construindo a tabela de verdade de $\tau : \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	ψ	σ	$\psi \vee \sigma$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \sigma$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.28

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos mostrar que a fórmula

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)),$$

é logicamente equivalente à fórmula p_0.

De facto,

$$\begin{aligned} (p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)) &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_1) && [\textit{distributividade}] \\ &\Leftrightarrow p_0 && [\textit{elemento neutro}] \end{aligned}$$

Poderíamos, também, mostrar que a fórmula $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))$ *é logicamente equivalente a* p_0 *provando que a fórmula* $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))) \leftrightarrow p_0$ *é uma tautologia.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.29

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos provar que as fórmulas $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ *e* $\neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0$ *são logicamente equivalentes.*

Pela lei do contrarrecíproco,

$$(p_1 \rightarrow p_2) \Leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1),$$

pelo que

$$(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \Leftrightarrow (p_0 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)).$$

De novo pela lei do contrarrecíproco, temos

$$(p_0 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0).$$

Assim,

$$(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0).$$

cálculo proposicional clássico [semântica]

O resultado seguinte mostra que, usando equivalência lógicas, é possível "traduzir" conectivos à custa de outros. Desta forma é possível "retirar" alguns dos conectivos do alfabeto, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

proposição 1.30

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

- $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$;
- $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$;
- $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
- $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

exercício 1.31

Usando as equivalências lógicas acima, determine uma fórmula logicamente equivalente à fórmula $p_0 \to p_1$ e que envolve apenas os conetivos $\neg$ e $\wedge$.

cálculo de predicados

Na secção anterior, referimos que frases como x é um inteiro par ou $x + y = 2$ não são proposições, visto que os seus valores lógicos dependem dos valores de x e de y.

No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objetos genéricos representados por letras, designadas por **variáveis**.

Frases como esta são objeto de estudo de um ramo da lógica denominado Cálculo de Predicados.

Nesta Unidade Curricular, não pretendemos aprofundar o estudo do Cálculo de Predicados, mas iremos estudar algumas noções elementares que permitem a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

cálculo de predicados

Em frases que envolvam variáveis, está implícito um domínio de discurso, designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

exemplo 1.32

Na frase x é um inteiro par, a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase x é um inteiro par não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, 2 é um inteiro par e 3 é um inteiro par são proposições que assumem o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

definição 1.33

Um **predicado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma frase declarativa que faz referência às variáveis $x_1, \ldots, x_n$ cujo valor lógico depende da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação, tornando-se numa proposição sempre que as variáveis são substituídas por valores do seu universo.

cálculo de predicados

Representamos um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ por uma letra minúscula p, q, r,... (eventualmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem nesse predicado colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

exemplo 1.34

Os predicados x é um inteiro par e *x é maior do que y podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.*

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, se, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i é um valor do domínio de variação de x_i, então representamos por $p(a_1, \ldots, a_n)$ a substituição das variáveis de p por esses valores concretos.

exemplo 1.35

Considerando os predicados do exemplo anterior, $p(8)$ representa a proposição 8 é um inteiro par e *$q(\sqrt{2}, 3)$ representa a proposição $\sqrt{2}$ é maior do que 3.*

cálculo de predicados

Os conetivos lógicos que definimos na sintaxe do Cálculo Proposicional Clássico estendem-se ao Cálculo de Predicados de um modo natural.

Assim, se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$\neg p(x_1, \ldots, x_n), \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n),$$

$$p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n), \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{e} \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n)$$

são também predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

cálculo de predicados

exemplo 1.36

Sejam $p(x)$ o predicado x é um inteiro par e $q(x)$ o predicado x é um número primo. Então, $p(x) \wedge q(x)$ representa o predicado x é um inteiro par e é um número primo.

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos dos seus domínios de variação não é a única forma de obter uma proposição a partir de um predicado. Também o podemos fazer recorrendo aos chamados **quantificadores**.

definição 1.37

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, a frases tais como "Para todo o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Qualquer que seja o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Para cada x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", dá-se a designação de **quantificação universal**.

cálculo de predicados

Estas frases podem ser representadas por $\forall_{x_i}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Se o domínio de variação de x_i é U, então U será designado o **universo de quantificação** de x_i e podemos também escrever $\forall_{x_i \in U}\, p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **todo** o elemento a do universo de quantificação de x.

exemplo 1.38

Se $p(x)$ representar o predicado $x^2 \geq 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira, uma vez que a afirmação em causa é verdadeira para qualquer real.

cálculo de predicados

Se existir (pelo menos) um elemento b do domínio de variação de x para o qual $p(b)$ é uma proposição falsa, a proposição $\forall_x \; p(x)$ é falsa.

exemplo 1.39

Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 > 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x \; q(x)$ é falsa, pois 0 é um número real e $q(0)$ é falsa.

definição 1.40

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, frases tais como "Existe um x_i tal que $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Para algum x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$." são designadas de **quantificação existencial**.

cálculo de predicados

Estas frases podem ser representadas por $\exists_{x_i}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Se o domínio de variação de x_i é U, podemos também escrever $\exists_{x_i \in U}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Ao símbolo $\exists$ chamamos **quantificador existencial** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\exists_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\exists_x p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

Por outro lado, se não existir qualquer elemento b do universo de quantificação de x para o qual $p(b)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa.

cálculo de predicados

exemplo 1.41

Se $p(x)$ representar o predicado $x + 3 = 2$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números inteiros, a proposição $\exists_x \ p(x)$ é verdadeira, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ e $p(-1)$ é verdadeira.

Por outro lado, se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\exists_x \ p(x)$ é falsa, uma vez que a equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

cálculo de predicados

exemplo 1.42

A frase Existe um natural x tal que $x+3=2$ pode ser representada por $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ x+3=2$.

Relativamente ao predicado $x+3=2$, prova-se que o número inteiro -1 é, de facto, o único inteiro a tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira.

definição 1.43

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a existência de um único objeto que satisfaça o predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists_x^1\ p(x)$, à qual é usual associar uma das leituras "Existe um e um só x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

exemplo 1.44

A proposição $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x+3=2$ é verdadeira, ao passo que $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x^2-1=0$ é falsa (tanto 1 como -1 satisfazem o predicado $x^2-1=0$, contradizendo a unicidade de um objeto que o satisfaça).

cálculo de predicados

Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição.

exemplo 1.45

Sejam $p(x,y)$ *o predicado* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ *e* $q(x,y)$ *o predicado* $x+y=0$.

Dados dois números reais quaisquer a *e* b*, sabemos que* $p(a,b)$ *é verdadeira. Logo, a proposição* $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\forall_{y\in\mathbb{R}}\ p(x,y)$ *é verdadeira.*

Todo o número inteiro admite um simétrico em $\mathbb{Z}$*, pelo que a proposição* $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\,\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ q(x,y)$ *é verdadeira.*

No entanto, a proposição $\forall_{x\in\mathbb{N}_0}\,\exists_{y\in\mathbb{N}_0}\ q(x,y)$ *é falsa.*

cálculo de predicados

exemplo 1.46

Exprimamos cada uma das seguintes proposições como quantificações:

[a] A equação $x^3 = 27$ *tem solução no conjunto dos números naturais.*

[b] Todo o número real admite um inverso para a multiplicação.

[c] Todo o inteiro maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

[d] No conjunto dos números reais, existe um elemento absorvente para a multiplicação e este elemento é único.

cálculo de predicados

[a]: $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ x^3 = 27$

[b]: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ xy = 1$

[c]: $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (n \geq 4 \rightarrow (\exists_{m,p\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\ (n = m + p \land \forall_{k\in\mathbb{N}}\ ((k|m \rightarrow (k = 1 \lor k = m)) \land (k|p \rightarrow (k = 1 \lor k = p))))))$

[d]: $\exists^1_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xy = yx = 0$

cálculo de predicados

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, a valoração da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

exemplo 1.47

Consideremos o predicado $x + y = 5$.

A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ *é verdadeira.*

A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\, \forall_{x\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ *é falsa.*

De notar que, quando as quantificações de todas as variáveis é feita com o mesmo quantificador, a ordem das quantificações não afeta a valoração da proposição e, como tal, é possível simplificar a escrita, usando apenas um quantificador.

cálculo de predicados

exemplo 1.48

A proposição (verdadeira) $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\,\exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x+y=5$ *pode ser escrita como* $\exists_{x,y\in\mathbb{Z}}\; x+y=5$. *A proposição (falsa)* $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\,\forall_{y\in\mathbb{Z}}\; x+y=5$ *pode ser escrita como* $\forall_{x,y\in\mathbb{Z}}\; x+y=5$.

Observemos agora que a proposição $\exists_x\; p(x)$ é falsa se não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira. Por outras palavras, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x.

Equivalentemente, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\; (\neg p(x))$ é verdadeira.

Logo, $\neg(\exists_x\; p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\; (\neg p(x))$.

cálculo de predicados

De modo análogo, concluímos que $\neg(\forall_x \; p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x \; (\neg p(x))$ e que também são válidas as seguintes equivalências lógicas:

- $\neg(\forall_x \forall_y \; q(x,y)) \Leftrightarrow \exists_x \exists_y \; (\neg q(x,y)).$
- $\neg(\forall_x \exists_y \; q(x,y)) \Leftrightarrow \exists_x \forall_y \; (\neg q(x,y)).$
- $\neg(\exists_x \forall_y \; q(x,y)) \Leftrightarrow \forall_x \exists_y \; (\neg q(x,y)).$
- $\neg(\exists_x \exists_y \; q(x,y)) \Leftrightarrow \forall_x \forall_y \; (\neg q(x,y)).$

NEGAÇÕES DAS PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

PROPOSIÇÃO	NEGAÇÃO	PARA NÃO ESQUECER
$(p \wedge q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	Nega as duas trocando o e pelo ou.
$(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	Nega as duas trocando o ou pelo e.
$(p \veebar q)$	$p \leftrightarrow q$	Só trocar o $\veebar$ pelo $\leftrightarrow$
$(p \rightarrow q)$	$p \wedge (\sim q)$	MANÉ = MAntém p, " $\wedge$ " NEga q.
$p \leftrightarrow q$	1. $(p \veebar q)$ ou 2. $[p \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim p)]$	1. Troca $\leftrightarrow$ pelo $\veebar$. 2. Nega sua equivalência lógica

$\boxed{A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$

cálculo de predicados

exemplo 1.49

Consideremos a proposição Para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$.

Usando linguagem simbólica, podemos reescrever a afirmação anterior como $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{k\in\mathbb{N}}\ n = 2k$.

A negação da proposição pode ser escrita como $\exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}}\ n \neq 2k$. Esta última proposição significa que existe pelo menos um natural que não é divisível por 2.