Capítulo I: Probabilidades

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Licenciatura em Engenharia Informática
e
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Ano Letivo 2022/202

Conteúdo

Neste capítulo pretende-se apresentar:

- a noção de experiência aleatória e de acontecimento;
- a definição axiomática de probabilidade;
- as noções de probabilidade condicional e de independência de acontecimentos;
- árvores de probabilidade.

Na última secção deste capítulo (Secção 5) são revisitados alguns conceitos de análise combinatória (arranjos, permutações, combinações). Um aluno que não esteja familiarizado com estes conceitos deve, de forma mais autónoma, fazer um estudo aprofundado desta secção.

A definição de probabilidade está intimamente ligada à noção de experiência aleatória. Na prática, atribuem-se "probabilidades" a acontecimentos decorrentes de uma experiência aleatória.

Exemplo clássico de uma experiência aleatória: lançar um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, e observar a face que fica voltada para cima. Não é possível dizer qual vai ser o resultado obtido no lançamento do dado. Sabemos, no entanto, que o resultado será sempre um número natural entre 1 e 6, pelo que conhecemos o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.

1. Experiência Aleatória e Acontecimento

Mais precisamente, uma *experiência aleatória* é aquela que satisfaz as seguintes condições:

i) pode ser repetida um qualquer número de vezes, sempre nas mesmas condições,

ii) conhecemos à partida todos os resultados possíveis,

iii) antes de a realizar, não sabemos qual dos resultados possíveis irá ocorrer.

Nota: Numa experiência **determinista**, quando efetuada nas mesmas condições, **obtém-se sempre o mesmo resultado**. Já numa experiência aleatória podem obter-se diferentes resultados em diferentes repetições da experiência (mesmo quando efetuadas nas mesmas condições).

1. Experiência Aleatória e Acontecimento

$\rightsquigarrow$ Ao conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória chamamos *espaço amostral* (ou *espaço de resultados*). Tal conjunto é habitualmente denotado por Ω. No exemplo do lançamento do dado, tem-se

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Nota: Entende-se sempre que estes resultados não são decomponíveis e, por isso, também é usual definir-se este conjunto como sendo formado por todos os resultados elementares da experiência.

$\rightsquigarrow$ *Acontecimentos* são subconjuntos de Ω.

Algumas designações especiais:

$\rightsquigarrow$ Ω é designado de *acontecimento universal* ou *acontecimento certo*;

$\rightsquigarrow$ $\varnothing$ (também denotado por $\{\}$) é designado de *acontecimento impossível*;

$\rightsquigarrow$ Um acontecimento diz-se *elementar* se corresponder a um subconjunto singular de Ω (isto é, a um subconjunto de Ω que tem apenas um elemento).

$\rightsquigarrow$ Um acontecimento diz-se *composto* se corresponder a um subconjunto de Ω com mais do que um elemento.

1. Experiência Aleatória e Acontecimento

Voltemos ao exemplo do lançamento do dado. O acontecimento:

i) “saiu a face 4” corresponde ao subconjunto $\{4\}$;
ii) “saiu face ímpar” corresponde ao subconjunto $\{1, 3, 5\}$;
iii) “saiu uma face com um número superior ou igual a 5” corresponde ao subconjunto $\{5, 6\}$;
iv) “saiu uma face par ou uma face ímpar” corresponde ao subconjunto Ω (acontece sempre);
v) “saiu uma face ímpar superior a 5” corresponde ao subconjunto $\varnothing$ (nunca acontece).

Este último acontecimento é o impossível e o penúltimo é o universal. O acontecimento i) é elementar. Os acontecimentos ii), iii) e iv) são compostos.

1. Experiência Aleatória e Acontecimento

Outros exemplos de experiências aleatórias: Escolher um indivíduo ao acaso numa população e registar

1. o grupo sanguíneo,
2. o diâmetro da reacção cutânea a uma certa vacina,
3. a altura,
4. a idade (em anos),
5. o tempo que demora a exibir sintomas de uma certa doença (contado a partir de um certo instante fixado no tempo),
6. número de actos médicos (análises clínicas, consultas, cirurgias, etc.) ao longo da vida.

O espaço amostral de uma experiência aleatória pode ser finito (e.g., lançamento de um dado, grupo sanguíneo), infinito numerável (e.g., idade, número de actos médicos) ou infinito não numerável (e.g., diâmetro, altura, tempo).

2. Definição de Probabilidade

Depois de identificado o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, pretende-se atribuir a cada acontecimento A, decorrente da experiência, uma "probabilidade", i.e., um grau de certeza que será medido numa escala de 0 a 1 e que representaremos por $P(A)$.

Evidentemente, vamos querer que $P(\varnothing) = 0$ e que $P(\Omega) = 1$.

Também vamos querer que aos acontecimentos muito frequentes seja atribuída grande probabilidade e que os pouco frequentes tenham probabilidade pequena. Temos assim uma associação entre as noções de probabilidade e de frequência de um acontecimento.

2. Definição de Probabilidade

O que sabemos sobre uma frequência relativa :
A frequência relativa de um acontecimento A em n repetições de uma experiência aleatória é dada pelo seguinte quociente:

$$f_A = \frac{\text{número de vezes que } A \text{ ocorreu nas } n \text{ repetições}}{n}.$$

Temos que, qualquer que seja o acontecimento A,

$$f_A \geq 0 \tag{1}$$

e que, em particular,

$$f_\Omega = 1. \tag{2}$$

Por outro lado, se A e B são dois acontecimentos disjuntos (i.e., $A \cap B = \emptyset$), temos

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B. \tag{3}$$

Estas três propriedades da frequência relativa inspiraram a definição axiomática de probabilidade, apresentada de seguida.

2. Definição de Probabilidade

Definição

Uma probabilidade sobre um espaço amostral Ω é uma função que a cada acontecimento A associa um número real, $P(A)$, designado de *probabilidade de* A, e que satisfaz os seguintes três axiomas:

i) $P(A) \geq 0$, para qualquer acontecimento A (não negatividade);

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, para quaisquer acontecimentos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuntos 2 a 2 (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$).

Observação: Quando Ω é um conjunto finito, o axioma iii) equivale a

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

para quaisquer dois acontecimentos A_1 e A_2 disjuntos.

2. Definição de Probabilidade

Uma definição particular de probabilidade, que se utiliza quando Ω é finito e os acontecimentos elementares são equiprováveis, é

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos do subconjunto } A}{\text{número de elementos do conjunto } \Omega} = \frac{\sharp(A)}{\sharp(\Omega)}, \tag{4}$$

conhecida como a *probabilidade de Laplace*.

Na experiência do lançamento de um dado equilibrado, é precisamente esta a probabilidade que utilizamos. Por exemplo, a probabilidade do acontecimento "saiu uma face ímpar" é $\frac{1}{2}$ $\left(= \frac{3}{6}\right)$ porque o acontecimento em causa corresponde ao subconjunto $\{1, 3, 5\}$, que tem 3 elementos, e Ω tem cardinal igual a 6.

Apesar de muito popular, a definição (4) tem limitações óbvias:

- Ω tem que ser finito (o que nem sempre acontece - ver exemplos de experiências aleatórias atrás referidas);
- nem sempre temos acontecimentos elementares equiprováveis (por exemplo, experiências envolvendo lançamentos de dados ou moedas viciados).

2. Definição de Probabilidade

Algumas propriedades de uma probabilidade:

Da definição axiomática de probabilidade, deduzem-se muito facilmente várias propriedades, nomeadamente:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, onde $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$.

ii) Se $A \subseteq B$ tem-se que
$$P(A) \leq P(B)$$
e
$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$$
onde $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

iii) $P(\varnothing) = 0$ e, para qualquer acontecimento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

iv) Para quaisquer dois acontecimentos A e B, tem-se
$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A).$$

v) Para quaisquer dois acontecimentos A e B, tem-se
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(TPC) Demonstrar estas propriedades fazendo uso das propriedades de operações entre conjuntos e da definição axiomática de probabilidade.

2. Definição de Probabilidade

Da última propriedade deduz-se ainda que, para quaisquer três acontecimentos A, B e C, tem-se

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Mais, deduz-se também a conhecida *Fórmula de Poincaré*: para quaisquer n acontecimentos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tem-se

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) \\
&+ \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}$$

3. Probabilidade condicionada e independência

Suponhamos que, após a realização de uma experiência aleatória, é sabido que ocorreu um certo acontecimento B, com $P(B) > 0$. Como será que se alteram as probabilidades dos acontecimentos quando sabemos que B ocorreu?

Exemplo: No lançamento de um dado equilibrado tem-se

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } P(A_i) = \frac{1}{6},$$

onde A_i: "saiu a face com o número i", $i = 1, \ldots, 6$.

Se soubermos que no lançamento do dado saiu uma face par, como será que se alteram as probabilidades dos acontecimentos A_i?

Se soubermos que ocorreu o acontecimento B, sendo

B:"saiu uma face par",

os acontecimentos A_1, A_3 e A_5 passam a ter probabilidade nula e os acontecimentos A_2, A_4 e A_6 passam agora a ter probabilidade igual a $\frac{1}{3}$.

3. Probabilidade condicionada e independência

É natural pensar que, sabendo que B ocorreu, a nova probabilidade de um acontecimento A vai depender do que existir em comum entre A e B, i.e., vai depender de $A \cap B$. Mais, a nova probabilidade de B deverá ser agora igual a 1. Surge assim a seguinte definição.

Definição

Seja Ω o espaço amostral de uma experiência aleatória e $B \subseteq \Omega$ um acontecimento tal que $P(B) > 0$. Para um acontecimento $A \subseteq \Omega$, a *probabilidade de A condicionada por B* (ou *probabilidade de A dado B* ou ainda *probabilidade de A sabendo que B ocorreu*) é denotada por $P(A \mid B)$ e é dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

<u>Nota</u>: Desde que $P(B) > 0$, podemos agora calcular $P(A \cap B)$ do seguinte modo:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B).$$

Mais, desde que $P(A) > 0$, também temos

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\, P(A).$$

Exemplo/Exercício:
Uma certa doença está presente numa população com incidência de 20%. Sabe-se, no entanto, que a doença é mais prevalente entre as mulheres, grupo que tem uma incidência de 30%. Sabe-se também que, nesta população, homens e mulheres existem em igual proporção.

a) Escolheu-se uma pessoa ao acaso nesta população. Calcule:
   i. a probabilidade de ser uma mulher e ter a doença;
   ii. a probabilidade de ser um homem e ter a doença;

b) Determine a incidência da doença entre os homens.

Resolução (esboço): Do enunciado tem-se:

$$P(D) = 0.2;\ P(D \mid M) = 0.3;\ P(M) = 0.5 = P(H);\ \overline{M} = H.$$

Em a)i. e a)ii., pede-se $P(D \cap M)$ e $P(D \cap H)$, respetivamente. Fazendo uso da definição de probabilidade condicionada, tem-se:

$$P(D \cap M) = P(D \mid M)P(M) = 0.3 \times 0.5 = 0.15.$$

E, usando propriedades de uma probabilidade e o facto de $\overline{M} = H$,tem-se

$$P(D \cap H) = P(D \cap \overline{M}) = P(D) - P(D \cap M) = 0.2 - 0.15 = 0.05.$$

Em b), pede-se $P(D \mid H)$. Tem-se: $P(D \mid H) = P(D \cap H)/P(H) = 0.1.$

3. Probabilidade condicionada e independência

Propriedades de uma probabilidade condicionada: Uma probabilidade condicionada é uma probabilidade, pelo que tem todas as propriedades de uma probabilidade. Em particular, dados quaisquer acontecimentos A, B e C, com $P(C) > 0$, tem-se

i) $P(\overline{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C)$;

ii) $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.

Voltando ao exemplo/exercício anterior: Determine:

c) a percentagem de mulheres entre os doentes;

d) a percentagem de homens entre os doentes.

Resolução (esboço): Em c), pede-se $P(M \mid D)$. Tem-se que

$$P(M \mid D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0.15}{0.2} = \frac{3}{4}.$$

Em d), pretende-se calcular $P(H \mid D)$. Tem-se:

$$P(H \mid D) = 1 - P(\overline{H} \mid D) = 1 - P(M \mid D) = \frac{1}{4}.$$

3. Probabilidade condicionada e independência

Teorema da Probabilidade Total e Fórmula de Bayes:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ acontecimentos disjuntos 2 a 2 decorrentes de uma certa experiência aleatória, com espaço amostral Ω, e tais que

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

(ou seja, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ formam uma *partição de* Ω). Se $P(A_i) > 0$, então:

- Para um qualquer acontecimento B, tem-se

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n) + \ldots; \quad (5)$$

- Se B é um acontecimento tal que $P(B) > 0$, tem-se

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\, P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n) + \ldots}. \quad (6)$$

Os resultados (5) e (6) são conhecidos por **Teorema da Probabilidade Total** e **Fórmula de Bayes**, respetivamente. A sua dedução (TPC) é um exercício simples, que faz uso de propriedades de operações entre conjuntos e de propriedades de uma probabilidade.

Exemplo/Exercício:

Uma empresa de distribuição tem apenas três equipas, E_1, E_2 e E_3, a entregar as suas encomendas. A equipa E_1 entrega 50% das encomendas e a equipa E_2 entrega o dobro das encomendas de E_3. Sabe-se que a equipa E_1 se atrasa em 40% das encomendas que entrega, que a equipa E_2 se atrasa em 10% das entregas e que a equipa E_3 também se atrasa em 10% das entregas. Escolheu-se, ao acaso, uma encomenda que foi distribuída por esta empresa.

a) Mostre que $P(E_2) = \frac{1}{3}$ e que $P(E_3) = \frac{1}{6}$.
b) Determine a probabilidade de a encomenda chegar atrasada.
c) Sabendo que a encomenda chegou atrasada, qual a probabilidade de ela ter sido entregue pela equipa E_2?
d) Sabendo que a encomenda chegou atrasada, qual a probabilidade de ela ter sido entregue por uma das equipas E_2 ou E_3?

3. Probabilidade condicionada e independência

Resolução (esboço): Do enunciado sabemos que: $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = 2P(E_3)$, $P(A \mid E_1) = 0.4$, $P(A \mid E_2) = 0.1$ e $P(A \mid E_3) = 0.1$. Sabemos ainda que os acontecimentos E_1, E_2 e E_3 formam uma partição do espaço amostral.
Para alínea a), usa-se então o facto de $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(\Omega)$, e portanto,

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1.$$

Como $P(E_1) = \frac{1}{2}$ e $P(E_2) = 2P(E_3)$, tem-se então que $P(E_3) = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$.
Para a alínea b), deve usar-se o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A) = P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + P(A \mid E_3)P(E_3) = \ldots = \frac{1}{4}.$$

Para a alínea c), recorre-se à Fórmula de Bayes:

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(A \mid E_2)P(E_2)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + P(A \mid E_3)P(E_3)} = \ldots = \frac{2}{15}.$$

Na alínea d), pede-se $P(E_2 \cup E_3 \mid A)$. Note-se que $E_2 \cap E_3 = \varnothing$, pelo que:

$$P(E_2 \cup E_3 \mid A) = P(E_2 \mid A) + P(E_3 \mid A) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15},$$

sendo que $P(E_3 \mid A)$ é determinada de forma análoga a $P(E_2 \mid A)$.

3. Probabilidade condicionada e independência

Independência de acontecimentos:

Intuitivamente, dois acontecimentos, A e B, serão independentes se a ocorrência de um deles não alterar a probabilidade de ocorrência do outro (i.e., $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$, quando $P(A)P(B) > 0$).
A definição de independência é, no entanto, a seguinte:

Definição

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Observações:

1. Não confundir acontecimentos independentes com disjuntos.
2. Se A e B são acontecimentos independentes e tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, tem-se que

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ e } P(B \mid A) = P(B),$$

o que condiz com a ideia intuitiva de independência acima indicada.

3. Probabilidade condicionada e independência

De uma forma geral, dizemos que n acontecimentos são independentes se, para quaisquer r desses acontecimentos, com $2 \leq r \leq n$, a probabilidade da intersecção dos r acontecimentos é igual ao produto das respectivas probabilidades.

Por exemplo, três acontecimentos A, B e C, dizem-se independentes se satisfazem as seguintes condições:

i) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

ii) $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$

iii) $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

iv) $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

Exemplo/Exercício: Na experiência que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, os seguintes acontecimentos A, B e C são independentes?

A: "saiu cara primeiro lançamento",

B: "saiu coroa no segundo lançamento",

C: "sairam duas faces distintas".

Solução: Não! (mas são independentes 2 a 2...)

4. Árvores de probabilidade

Como já foi referido atrás, se B for um acontecimento tal que $P(B) > 0$, a partir da probabilidade condicionada $P(A|B)$ chega-se à fórmula que permite obter a probabilidade da interseção:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Esta fórmula é facilmente generalizada à intersecção de n acontecimentos sendo, nesse caso, conhecida como regra da multiplicação.

Regra da Multiplicação

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ acontecimentos. Se $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ então

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

(TPC) Demonstre o resultado, tendo o cuidado que verificar que todas as probabilidades condicionadas estão bem definidas.

4. Árvores de probabilidade

Exemplo/Exercício$^{(*)}$: No concurso do totoloto (7 extracções, sucessivas e sem reposição, de uma urna com 49 bolas, numeradas de 1 a 49) qual é a probabilidade de não sair a bola numerada com 1?

Resolução: [recorrendo à regra da multiplicação]
Se considerarmos os acontecimentos

A_i: "na i-ésima extracção não saiu a bola numerada com 1", $\quad i = 1, \ldots, 7,$

a probabilidade pretendida é

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{7} A_i\right).$$

Pela regra de multiplicação, tem-se:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{7} A_i\right) &= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&\times P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \times P(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&\times P(A_7|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\
&= \frac{48}{49} \times \frac{47}{48} \times \frac{46}{47} \times \frac{45}{46} \times \frac{44}{45} \times \frac{43}{44} \times \frac{42}{43} = \frac{42}{49}
\end{aligned}$$

4. Árvores de probabilidade

Na prática, é frequente recorrer a um diagrama que permite facilmente aplicar a regra da multiplicação. Tal diagrama é conhecido por *árvore de probabilidade* (ver página seguinte com o esboço de uma tal árvore) e veja-se agora como se procede à sua construção.

4. Árvores de probabilidade

Na prática, é frequente recorrer a um diagrama que permite facilmente aplicar a regra da multiplicação. Tal diagrama é conhecido por *árvore de probabilidade* (ver página seguinte com o esboço de uma tal árvore) e veja-se agora como se procede à sua construção.

Considere uma experiência aleatória que possa ser vista como uma sequência de experiências aleatórias, tipicamente interligadas (*no exemplo anterior* - *sequência de* 7 *experiências*). De um modo geral, começamos com uma primeira ramificação, correspondente à 1.ª experiência aleatória (*extrair uma bola da urna com* 49 *bolas*), em acontecimentos $A_1, B_1, C_1, \ldots$ que formem uma partição do respetivo espaço amostral e que vão constituir os nós da árvore ao nível da 1.ª experiência (*a partição de interesse tem apenas* 2 *acontecimentos,* A_1*: "não sair a bola* 1 *na 1.ª extração" e* B_1*: "sair bola* 1 *na 1.ª extração" =* $\overline{A_1}$). A partir de cada um destes nós, constróiem-se novas ramificações correspondentes à 2.ª experiência, à 3.ª experiência, e assim sucessivamente.

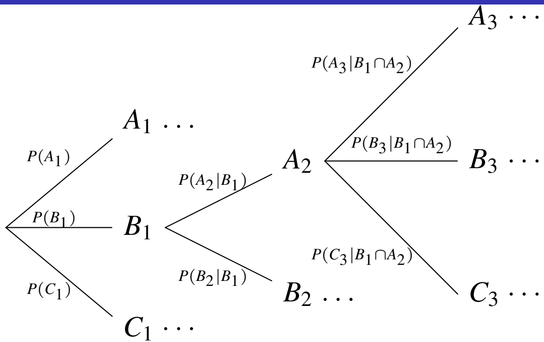
4. Árvores de probabilidade

Na prática, é frequente recorrer a um diagrama que permite facilmente aplicar a regra da multiplicação. Tal diagrama é conhecido por *árvore de probabilidade* (ver página seguinte com o esboço de uma tal árvore) e veja-se agora como se procede à sua construção.

Considere uma experiência aleatória que possa ser vista como uma sequência de experiências aleatórias, tipicamente interligadas (*no exemplo anterior - sequência de* 7 *experiências*). De um modo geral, começamos com uma primeira ramificação, correspondente à 1.ª experiência aleatória (*extrair uma bola da urna com* 49 *bolas*), em acontecimentos $A_1, B_1, C_1, \ldots$ que formem uma partição do respetivo espaço amostral e que vão constituir os nós da árvore ao nível da 1.ª experiência (*a partição de interesse tem apenas* 2 *acontecimentos,* A_1*: "não sair a bola* 1 *na 1.ª extração" e* B_1*: "sair bola* 1 *na 1.ª extração" =* $\overline{A_1}$). A partir de cada um destes nós, constróiem-se novas ramificações correspondentes à 2.ª experiência, à 3.ª experiência, e assim sucessivamente.

Este processo conduz a um diagrama com o seguinte aspeto:

4. Árvores de probabilidade



Em cada ramo da árvore tem-se a probabilidade do acontecimento indicado no nó à direita desse ramo, condicional à intersecção de todos os acontecimentos que surgem no caminho da raíz até esse nó (para os ramos com origem na raíz, convenciona-se que esta intersecção é o espaço amostral Ω_1). Observe que, em cada ramificação, a soma das probabilidades é naturalmente igual a 1.

Exemplo/Exercício: Desenhe a árvore de probabilidade adequada ao problema do totoloto $(*)$ e identifique o caminho nela percorrido que lhe permite calcular a probabilidade pedida.

5. Combinatória

A definição de Laplace, que vimos atrás e que é muito utilizada (sob certas condições) para o cálculo de probabilidades de acontecimentos decorrentes de experiências aleatórias, exige frequentemente o uso de técnicas de contagem de elementos de certos tipos de conjuntos. Essas técnicas são conhecidas na literatura como técnicas de "análise combinatória" ou, apenas, "combinatória".

Um princípio básico da análise combinatória, e que vai ser de grande utilidade na dedução dos resultados apresentados nesta secção, diz respeito precisamente à relação entre a cardinalidade do produto cartesiano de r conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_r$, e as suas respetivas cardinalidades $n_1, n_2, \ldots, n_r$, com $n_i = \#(A_i)$, $i = 1, \ldots, r$.

5. Combinatória

Princípio básico de Análise Combinatória

Considere r conjuntos finitos, $A_1, A_2, \ldots, A_r$, tais que $\#A_i = n_i$, $i \in \{1, ..., r\}$, e denote por A o conjunto correspondente ao produto cartesiano destes r conjuntos, isto é,

$$A \equiv A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r = \{(a_1, a_2, \ldots, a_r) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, r\}.$$

O conjunto A tem $n_1 \times n_2 \ldots \times n_r$ elementos, i.e.,

$$\#(A) \equiv \#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r) = \#(A_1) \times \#(A_2) \times \ldots \times \#(A_r).$$

Nota: O conjunto A é formado por todas as **sequências ordenadas**, com r elementos, em que o i-ésimo elemento é retirado do conjunto A_i, $i = 1, \ldots, n$. Atente-se no uso dos **parêntesis** em **(**$a_1, a_2, \ldots, a_r$**)**. Na literatura, estas sequências ordenadas são conhecidas por r-uplos.
Repare-se que o número de tais sequências ordenadas se obtém multiplicando o número de escolhas possíveis para o 1^{o} elemento da sequência, pelo número de escolhas possíveis para o 2^{o} elemento da sequência, e assim sucessivamente.

Exemplos: Considere as seguintes experiências aleatórias:

a) Lançamento de uma moeda equilibrada duas vezes consecutivas;
b) Lançamento de uma moeda seguido do lançamento de um dado, ambos equilibrados.

Observe que os espaços amostrais destas experiências são, na verdade, produtos cartesianos de conjuntos muito simples:

a) $\Omega_a = M \times M$, em que $M = \{Ca, Co\}$. De facto:

$$M \times M = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}.$$

E facilmente concluímos que $\#(\Omega_a) = \#(M) \times \#(M) = 2 \times 2 = 4$.

b) $\Omega_b = M \times D$, em que $M = \{Ca, Co\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De facto:

$$\begin{aligned} M \times D \quad = \quad & \{(Ca, 1), (Ca, 2), (Ca, 3), (Ca, 4), (Ca, 5), (Ca, 6), \\ & (Co, 1), (Co, 2), (Co, 3), (Co, 4), (Co, 5), (Co, 6)\}. \end{aligned}$$

E facilmente concluímos que $\#(\Omega_b) = \#(M) \times \#(D) = 2 \times 6 = 12$.

Exemplo/Exercício:

Quantas matrículas automóveis (distintas) se podem formar com o atual sistema português: 2 letras, 2 algarismos e novamente 2 letras (as letras são de a a z e incluem k, w e y)? E qual é a probabilidade de uma matrícula ser formada apenas por algarismos pares? E qual a probabilidade de uma matrícula ter pelo menos um algarismo ímpar?

Solução: Observe que o número de matrículas corresponde ao cardinal do seguinte produto cartesiano de conjuntos:

$$L \times L \times A \times A \times L \times L, \tag{7}$$

em que $L = \{a, b, \ldots, k, \ldots, w, x, y, z\}$ e $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Supondo que todas as configurações de letras e de algarismos podem ser utilizadas, uma matrícula é simplesmente uma sequência formada por 6 elementos, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, em que a_1, a_2, a_5 e a_6 podem ser quaisquer elementos do conjunto L e a_3 e a_4 podem ser quaisquer elementos do conjunto A. Temos assim que o número total de matrículas é de

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 45697600$$

.

Exemplo/Exercício(cont.):
Usando a definição de Laplace, a probabilidade de uma matrícula ser formada apenas por algarismos pares é:

$$\frac{\#(L \times L \times P \times P \times L \times L)}{\#(\Omega)},$$

em que P é o conjunto formado pelos algarismos pares, i.e., $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, e Ω é o conjunto (7) atrás indicado. A probabilidade pedida é assim de

$$\frac{26 \times 26 \times 5 \times 5 \times 26 \times 26}{26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

E a probabilidade de uma matrícula ter pelo menos um algarismo ímpar é então igual a $\frac{3}{4}$ (note-se que os acontecimentos "matrícula é formada apenas por algarismos pares" e "matrícula tem pelo menos um algarismo ímpar" são complementares).

[TPC] E a probabilidade de uma matrícula ter as letras todas iguais?

Quando efetuamos o produto cartesiano de r conjuntos todos iguais, isto é, $A_1 = A_2 = \ldots = A_r = S$, com S um conjunto que tem n elementos (S diz-se uma população), obtemos n^r sequências ordenadas com r elementos. Tais sequências também são designadas por **amostras ordenadas com reposição** (ou *com repetição*) **de dimensão** r.

Se pretendermos o número de **amostras ordenadas sem reposição de dimensão** r, com $r \leq n$, podemos aplicar novamente o princípio básico da análise combinatória, em que A_1 é o conjunto S (que tem n elementos), A_2 é o conjunto formado por todos os elementos de S excepto o que foi escolhido para o 1^{o} elemento da amostra (e este conjunto tem $n-1$ elementos), ..., e finalmente A_r é o conjunto formado por todos os elementos de S excepto os $r-1$ anteriormente escolhidos para a amostra (e este conjunto tem $n-(r-1)$ elementos). Concluímos assim que o número total de amostras agora pretendidas é dado por

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{8}$$

em que $n!$ (lê-se “n factorial”) é igual a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

Definição

Dado $m \in \mathbb{N}_0$, o factorial de m, denota-se por $m!$, é dado por

$$m! = \begin{cases} m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times 2 \times 1 & se \quad m \geq 1 \\ 1 & se \quad m = 0 \end{cases}.$$

Na prática, $m!$ é o número de maneiras diferentes de dispor (ou ordenar) os elementos de um conjunto S que tenha m elementos distintos. Ao conjunto de todas as possíveis ordenações dos elementos de um conjunto que tenha cardinal igual a m chamamos ***permutações de*** m.

Observação: Se em (8) fizermos $r = n$ obtém-se $n!$, precisamente porque estaremos a contar o número de maneiras diferentes de ordenar os n elementos do conjunto S.

5. Combinatória

Resumindo/Recordando

Seja S um conjunto (ou população) com n elementos.

1) O número de amostras ordenadas, formadas por r elementos retirados do conjunto S, com reposição, é igual a n^r. Tais amostras são conhecidas na literatura por *arranjos com repetição de* n, r *a* r.
2) O número de amostras ordenadas, formadas por r elementos retirados de S do conjunto S, sem reposição, é igual a

$$\frac{n!}{(n-r)!}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Tais amostras são conhecidas na literatura por *arranjos sem repetição de* n, r *a* r. No caso particular em que $r = n$, temos as chamadas *permutações de* n, que são em número iguais a $n!$.

Exemplo/Exercício: Usando letras da palavra $ALUNO$, quantas palavras (com ou sem sentido), de tamanho

i. 5, podemos formar se usarmos todas as 5 letras?
ii. 3, podemos formar se usarmos apenas letras distintas (e, portanto,não há repetição de letras na palavra formada)?
iii. 3, podemos formar se permitirmos a reposição de letras (e, portanto, pode haver letras repetidas na palavra formada)?

Solução:

i. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (permutações de 5)
ii. $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ (arranjos sem repetição de 5, 3 a 3)
iii. $5^3 = 125$ (arranjos com repetição de 5, 3 a 3)

Exemplo/Exercício: Um indivíduo pode deslocar-se ao trabalho de 4 formas diferentes: pé, metro, bus e carro. De quantas maneiras é que ele pode organizar as suas viagens ao longo dos 5 dias da semana?

Solução: O nosso conjunto S tem 4 elementos $(n = 4)$ uma vez que $S = \{$pé, metro, bus, carro$\}$. A sequência (amostra ordenada) que se pretende construir será formada por 5 $(r = 5)$ elementos de S. Note-se que a ordem aqui interessa: podemos estabelecer como 1^{o} elemento da sequência o meio utilizado na 2^{a} feira, como 2^{o} elemento o utilizado na 3^{a} feira, etc. Uma vez que $r > n$, tem que haver necessariamente repetição dos elementos escolhidos em S. A solução é então 4^5.

Nota: *Este exemplo serve para chamar a atenção que, quando há repetição de elementos, a amostra pode ter dimensão superior à dimensão da população, isto é, pode ter-se $r > n$. Por outro lado, quando não há repetição, tem-se necessariamente $r \leq n$.*

[TPC] Qual é a probabilidade de o indivíduo usar o carro no 1^{o} e no último dia da semana? E qual a probabilidade de ele utilizar a mesma forma de deslocação nos 5 dias da semana?

Para terminar, vamos agora considerar o caso conhecido na literatura como ***amostras não ordenadas sem reposição*** formadas por r elementos escolhidos num conjunto S.

Na verdade, estas amostras correspondem a subconjuntos de S, formados por r elementos distintos e, portanto, usaremos as chavetas ($\{\ldots\}$) para as representar (e não os parêntesis curvos como acontece com as amostras ordenadas). Tais amostras não ordenadas surgem em situações em que a ordem que os elementos nela ocupam não é relevante.

Vejamos um exemplo: Uma urna tem 4 bolas, numeradas de 1 a 4. Suponhamos que se escolhem, sem reposição, 3 bolas e que a ordem pela qual a extracção é feita não é relevante. Na verdade, "o que conta" são os elementos que foram efetivamente escolhidos e o que estamos agora a formar são subconjuntos com 3 elementos escolhidos no conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$. A questão que se coloca é: quantos subconjuntos destes podemos então formar?

Se a ordem fosse relevante, estaríamos a formar arranjos sem repetição de 4, 3 a 3, e teríamos

$$\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 = 24 \quad (9)$$

amostras ordenadas, que estão listadas nas primeiras 6 linhas da tabela seguinte. Na última linha constam os subconjuntos de S formados pelos elementos distintos das amostras ordenadas da respetiva coluna.

$(1,2,3)$	$(1,2,4)$	$(1,3,4)$	$(2,3,4)$
$(1,3,2)$	$(1,4,2)$	$(1,4,3)$	$(2,4,3)$
$(2,1,3)$	$(2,1,4)$	$(3,1,4)$	$(3,2,4)$
$(2,3,1)$	$(2,4,1)$	$(3,4,1)$	$(3,4,2)$
$(3,1,2)$	$(4,1,2)$	$(4,1,3)$	$(4,2,3)$
$(3,2,1)$	$(4,2,1)$	$(4,3,1)$	$(4,3,2)$
$\{$**1,2,3**$\}$	$\{$**1,2,4**$\}$	$\{$**1,3,4**$\}$	$\{$**2,3,4**$\}$

Observa-se que cada **subconjunto formado por 3 elementos** distintos de S dá origem a $6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$ amostras ordenadas.
[TPC] O valor obtido em (9) coincide com permutações de 4. Porquê?

Concluímos assim que o **número de subconjuntos** pretendido (em que a ordem que os elementos ocupam não é relevante) é igual ao **número de arranjos sem repetição de** 4**,** 3 **a** 3, **dividido por** $3!$, isto é,

$$\frac{4!/(4-3)!}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!(3 \times 2 \times 1)} = 4.$$

De uma forma geral, temos que a partir de **um único subconjunto formado por** r **elementos** (distintos), retirados do conjunto S, **é possível obter** $r!$ **amostras ordenadas** formadas pelos elementos desse mesmo subconjunto (e portanto, nessas amostras ordenadas não há elementos repetidos). Concluímos assim que o número de tais subconjuntos é igual ao **número de arranjos sem repepetição de** n**,** r **a** r, **dividido por** $r!$, ou seja, igual a

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Este número é usualmente designado de *combinações de* n*,* r *a* r*,* e é denotado por $\binom{n}{r}$.

Resumindo/Recordando

Seja S um conjunto (ou população) com n elementos. O número de subconjuntos formados por r elementos (distintos) escolhidos em S, com $0 \leq r \leq n$, é igual a

$$\binom{n}{r} \equiv \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

e é conhecido na literatura como *combinações de* n, r *a* r.
Tais subconjuntos também são conhecidos na literatura como *amostras não ordenadas sem reposição de* n, r *a* r.

Notas:

1. Estas combinações surgem no desenvolvimento do Binómio de Newton: para quaisquer a e b números reais e para qualquer $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$
2. É fácil ver que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. [TPC - Interpretar o resultado.]

Bibliografia

Pestana, D.D., Velosa, S. D. (2010) *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I (4.ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian

Gonçalves, E., MendesLopes, N. (2013) *Probabilidades - Princípios Teóricos*, (4.ª ed.) Escolar Editora