Próxima semana Miniteste cálculo → cálculo Integral

Cálculo I 15/11/2022

Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

Integrais
- (i) Indefinidos
- (ii) Definidos
- (iii) Impróprios

Definição .....

Propriedade

Cálculo de primitivas

Primitivas

$$f \underset{\longrightarrow}{\overset{\int}{\longleftarrow}} f'$$

> Nota: As primitivas das funções racionais exprimem-se em termos de funções 'elementares'. (*)

(*) $r : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

r é racional quando $r(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$; N e D são funções polinomiais

Teorema Fundamental da Álgebra (sobre os nºs reais):
Qualquer polinómio (de coeficientes reais) de grau ≥ 1 é fatorizável na forma de um produto de uma constante por fatores lineares de tipo $(x-a)$ e por fatores quadráticos irredutíveis do tipo (x^2+bx+c).

exercício: considere os polinómios:

$p_1(x) = x+1 \qquad p_2(x) = x^2+1 \qquad p_3(x) = x^3+1 \qquad p_4(x) = x^4+1$

- De que grau são? quantos zeros e quais zeros têm?

$p_1 \to$ 1 zero; 1º grau; $p_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$(x - (-1)) = x+1$

$p_2 \to$ 2º grau; 2 zeros; $p_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 0$
↳ está na forma irredutível

par de raízes complexas

$p_3 \to$ 3º grau; 3 zeros; $p_3(x) = 0 \Leftrightarrow x^3+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

1 real as outras são complexas

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & +1 & x+1 \\ \cline{3-3} -x^3 - x^2 & & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 & +1 & \\ x^2 + x & & \\ \hline x & +1 & \end{array}$$

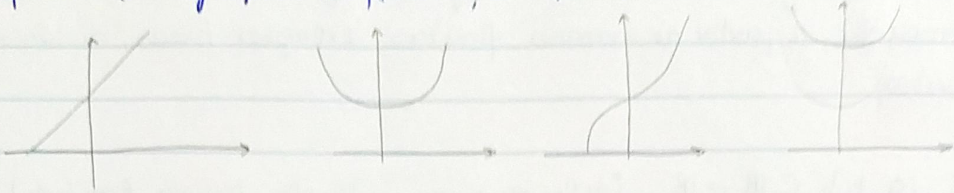
$x^3+1 = (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{?? irredutível?}}$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$ está na forma irredutível

$p_4 \to$ 4º grau; 4 zeros; $p_4(x) = 0 \Leftrightarrow x^4+1$

...

Representação gráfica de $p_i(x)$; $i = 1, \dots, 4$



- A primitivação das funções racionais

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : D_x \neq 0\}$$

onde N e D são dois polinómios, reduz-se a primitivação de polinómios reduzidos e ...

① Partir de uma fracção própria; se necessário, recorrer à divisão de polinómios para escrever $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$

o grau do polinómio do numerador é menor do que o do denominador

② Calcular os zeros de D e - usando o Teorema Fundamental da Álgebra - decompor D em fatores irredutíveis.

os zeros do denominador não pertencem ao domínio

$(x-a)$ ou (ax^2+xb+c)

③ Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples

④ Determinar as primitivas das funções?

⑤ ... (ver aos slides)

exemplo: $\int \frac{1}{x-3}\,dx$

$= \ln|x-3| + C$

Podemos primitivar porque já está na forma decomposta

Integral de Riemann → Integrais definidas

Nota: A base da formulação dos integrais definidos é a construção de aproximações, a partir de somas finitas. exemplos: Áreas, distâncias e valores médios, ...

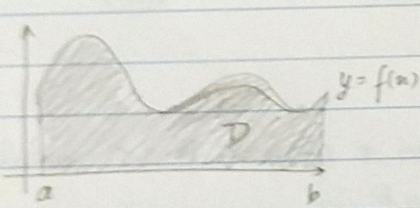
Sendo $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (definida num intervalo fechado limitado)

f é integrável (segundo Riemann em $[a,b]$?

e neste caso

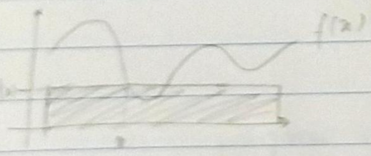
como se define o nº real definido por $\int^b$ acabar

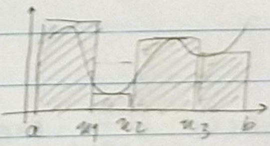
Teorema Fundamental do Cálculo



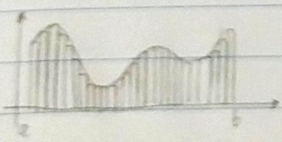
$f(x) > 0 \;, \; \forall x \in [a,b]$

D - região do plano delimitada superiormente por f, inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente por duas retas..





$f(\tilde{x}_1)(x_1 - a) + f(\tilde{x}_2)(x_2 - x_1) \dots$



Em suma: Podemos construir aproximações por defeito ou por excesso, à esquerda ou à direita, com os pontos médios, etc., sendo que, em cada uma das somas (finitas).

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $\quad f(\tilde{x}_1)\Delta x + f(\tilde{x}_2)\Delta x + \dots + f(\tilde{x}_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_n)\Delta x$?

ex:

1 Mostre que a soma dos n primeiros nº naturais é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ex:

$$S = \sum_{i=1}^{m} i = 1 + 2 + \dots + m$$

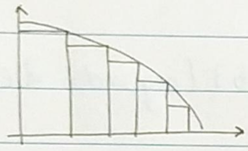
$$m + \dots + 2 + 1$$

$$\therefore 2S = (m+1) \times m$$

$$\therefore S = \frac{m(m+1)}{2}$$

Exemplo: Limites de Somas finitas

Área: Qual o valor limite das aproximações por somas inferiores, para a área da figura delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$?



$$\sum_{i=1}^{m} \left[f\left(\frac{i}{m}\right) \times \frac{1}{m} \right]$$

$$= \sum_{i+1}^{m} \left(1 - \left(\frac{i}{m}\right)^2\right) \frac{1}{m} = \dots = 1 - \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6m^3} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{2}{3}$$

(a aplitude tende para zero)

limite de, quando $m \to +\infty$

Soma de Riemann

- Consideramos uma partição, P, do intervalo $[a,b]$, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos que não se sobrepõem e que reunidos são $[a,b]$.

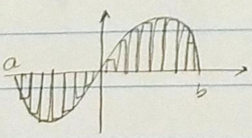
$x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m$ extremos desses subintervalos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

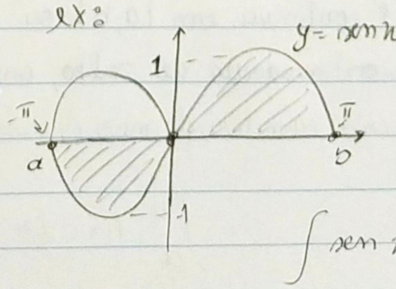
- Chamamos soma(s) de Riemann de f no intervalo $[a,b]$, para a partição P, a $\sum_{k=0}^{m-1} f(\tilde{x}_k)(x_{k+1} - x_k)$, onde $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$

ou

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_{k+1}, \text{ com } \Delta x_{k+1} = x_{k+1} - x_k$$



ex:



$$\int \text{sen}\, x \, dx = 0$$

Integral definido de f em [a,b] é o limite da(s) soma(s) de Riemann de f, quando $n \to \infty$ isto é

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_{k+1}$$

Nota:

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ (\Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i) \Delta x_i = \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

- O integral definido de f em [a,b] representa-se por

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

- A função f diz-se integrável no intervalo [a,b] (segundo Riemann)

- Observe-se que: $n \to \infty$ equivale a $\Delta x_{k+1} \to 0$

Propriedades do integral definido

- Para cada partição P de [a,b],

$$\underbrace{L_f(P)}_{\text{lower}} \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \overbrace{U_f(P)}^{\text{upper}}$$

- Aditividade

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

- Monotonidade?

acabar

- Se f é contínua em [a,b] ou aqui tem, quanto muito, um número finito de descontinuidades de salto, então $\int_a^b f(x)\,dx$ existe e f é integrável em [a,b]

↳ não seria primitivável mas é integrável

- $$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

-