

Week 3 作業: A101-4 楊知航.

(1) Cobb Douglas 生產函數的相關計算.

$$Q = f(L, K) = L^{\alpha} K^{\beta}, \alpha, \beta > 0$$

產出彈性

勞動平均產量與勞動邊際產量為:

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^{\alpha} K^{\beta}}{L} = L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

同理, 資本平均產量與資本邊際產量為:

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{L^{\alpha} K^{\beta}}{K} = L^{\alpha} K^{\beta-1}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta L^{\alpha} K^{\beta-1}$$

勞動產出彈性為:

$$\varepsilon^L = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}}{L^{\alpha-1} K^{\beta}} = \alpha$$

資本產出彈性為:

$$\varepsilon^K = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{\beta L^{\alpha} K^{\beta-1}}{L^{\alpha} K^{\beta-1}} = \beta$$

生產力彈性

勞動與資本要素同時增加 ϕ 倍對生產函數的影響:

$$Q = f(\phi L, \phi K) = \phi^{\alpha+\beta} L^{\alpha} K^{\beta}$$

生產力彈性為:

$$\varepsilon^{\phi} = \frac{\frac{dQ}{d\phi}}{\frac{Q}{\phi}} = \frac{\frac{dQ}{d\phi}}{\frac{Q}{\phi}} = \frac{(\alpha+\beta)\phi^{\alpha+\beta-1} L^{\alpha} K^{\beta}}{\phi^{\alpha+\beta} L^{\alpha} K^{\beta}} = \alpha + \beta$$

或經由勞動產出彈性與資本產出彈性的關係求解:

$$\varepsilon^{\phi} = \varepsilon^L + \varepsilon^K = \alpha + \beta$$

(2) 題庫隨堂練習:

假設生產函數的型為 $Q = 3K + 2L$ 。其中, K 為資本, L 為勞動, 而 Q 為產出。考慮生產函數三個敘述:

- (1) 函數呈現固定規模報酬
- × (2) 函數呈現資本與勞動的邊際產力遞減
- (3) 函數呈現固定的技術替代率

若 K 和 L 同時增加 λ 倍, 成為 λK 和 λL , 則生產函數 $Q = 3K + 2L$

可寫成 $F(\lambda K, \lambda L) = 3(\lambda K) + 2(\lambda L) = \lambda(3K + 2L) = \lambda Q$

從上述得知, 產出也增加 λ 倍, 故生產函數為固定規模報酬。 (1) 正確

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = 2, MP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K} = 3$$

所以 MP_L 和 MP_K 皆為固定, 並沒有邊際產量遞減現象。 (2) 不正確

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{2}{3}$$

邊際技術替代率為一固定值。 (3) 正確