

賽局理論- 紐約州的防疫策略

A108260015 陳政霆, A108260019 廖思勳
A108260065 莊又臻, A108260073 陳明偉

研究動機

近期各國深受疫情影響非常嚴重，然而隨著疫苗問鼎上市會伴隨著各國各地也將會針對疫情的輕重緩急做出相對應的政策。這些政策是否可以達到大家的期望呢或是根本無法有效抑制新冠病毒的散播

我們這組結合最新的時事與上課時所學對於防疫的議題進行賽局理論的分析。討論其擴展式賽局、策略型賽局，優勢解等...幫助自己理解當做出那些決策時如何對應出最符合的行為方案。

什麼是賽局理論？

賽局理論 (Game Theory) 又譯為對策論或博弈論，被認為是20世紀經濟學最偉大的成果之一。

目前在生物學、經濟學、國際關係、計算機科學、政治學、軍事戰略和其他很多學科都有廣泛的應用。

主要研究將賽局公式化，並探討之間的相互作用(遊戲或者賽局)，是專門用來研究具有競爭現象的數學理論與方法。

現代的賽局理論的源頭是約翰馮·諾伊曼對於雙人零和賽局的混合策略均衡點的發想和證明。

賽局理論入門

賽局基本入門的要素：

1. **玩家(player)**：玩家必須多於一人，兩人成局的概念。
2. **策略(strategy)**：指的是在所有可能發生情況下的一套完整行動計畫；這完全決定了玩家的行為。
3. **得失 / 支付(Payoffs)**：「得失」指的是賽局裡玩家在每個可能的行動的「得」與「失」。簡單些，可以想成玩遊戲裡的「得分」。而由於這個「得失」取決於對手玩家的策略，學術上一般以支付(payoffs)的函數來計算。
4. **最佳反應 (Best Respond, 下簡稱 BR)**：針對「對手玩家」的某一策略，能帶給此玩家最優「得失」(payoff) 的策略為最佳反應。換個角度想，最佳反應 (BR) 是在問：當對手出某一招，你出哪一招分數才會高分。
5. **均衡(Equilibrium)**：均衡就是平衡，也是最終的賽局結果。在賽局裡一般簡單的均衡指的是**納許平衡** (Nash Equilibrium)。

實際案例

美國各州的病例數示意圖雖然顏色深淺有別，也唯獨紐約州一馬當先情勢急轉直下，尤其紐約市幾乎是一夕間顏色就全面翻成疫情最慘烈的暗紅，官方之前每一項針對疫情的悲觀預告，沒有一項是在嚇民眾。

隨著近期疫苗上市分派至各州，較嚴重的重災地區(紐約州)疫情也曾一度得到舒緩，然而疫苗能達到的效果有限，在施打後可以降低得到新冠肺炎的風險和機率，並不是完全能抑止肺炎及完全康復。因此紐約市長在疫苗被派發到紐約州前(沒有疫苗)後(有疫苗)在的情況下分別決定是否需要效仿武漢市一樣進行封城。

這次在疫苗的有無情況下分別討論是否需要再次封城來降低受到疫情肆虐的狀態，紐約市曾在第一波疫情發生後決定封城並建立安全社交距離，但因病毒爆發時不斷被人民輕忽而失控，迫使紐約市長下令居家防疫和封城，使得當時經濟和金融各方面都嚴重受創，因此在第二波爆發前需要謹慎考慮對策。

賽局有4個基本要素(PAPI):

(1)參賽者(Player)-決策制定者。

(2)行動(Action) -參賽者可以選擇的所有決策。

(3)報酬(Payoffs)-賽局結束時,依照每個人選擇的策略組合 ,參賽者所得到的報酬。

(4)資訊(Information) -每一位參賽者在做決策時所知道的訊息。

PAPI 分析

P(Players):政府;紐約州

A(Action):是否提供疫苗 ;選擇封城或防疫

P(Payoffs):能減緩疫肆虐的情狀 ;降低經濟上的損失

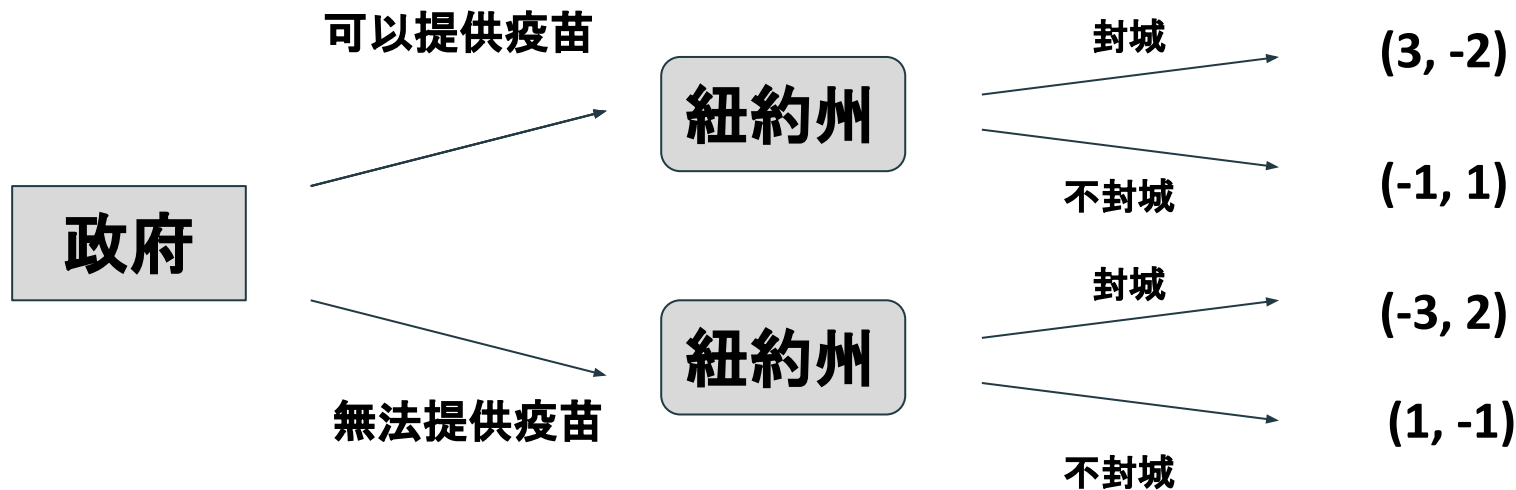
I(Information):疫苗對疫情有幫助

擴展式賽局(Extensive Form Game)-樹枝狀

出招順序：出招順序會影響參賽者的資訊情況

此賽局為動態賽局,也就是先後出招(不同時點),所謂先後出招為若參賽者的行

動有先後順序,後出招者可以觀察到先出招者的行動獲得對手如何出招的資訊。



假設:

- (1) 政府能提供疫苗,美紐約州封城,則政府得 3 分,紐約州得 -2 分。
- (2) 政府能提供疫苗,紐約州不封城,則政府得 -1 分,紐約州得 1 分。
- (3) 政府不提供疫苗,紐約州不封城,則政府得 -3 分,紐約州得 2 分。
- (4) 政府不提供疫苗,紐約州封城,則政府得 1 分,紐約州得 -1 分。

策略型賽局 (Normal Form)

策略式賽局:另外一種表示報酬函數的方法

由於此賽局為兩人賽局,參賽者有兩個,可用矩陣表示賽局PAPI 的關係。

策略(組合)對應報酬(向量)此法是由台灣策略組合對上美國之策略組合下

表將表示之。

		紐約州			
		(有疫苗封城, 沒有疫苗封城)	(有疫苗封城, 沒有疫苗不封城)	(有疫苗沒封城, 沒有疫苗封城)	(有疫苗沒封城, 沒有疫苗不封城)
政府	能提供疫苗	(3, -2)	(3, -2)	(-1, 1)	(-1, 1)
	沒能提供疫苗	(-3, 2)	(1, -1)	(-3, 2)	(1, -1)

用代號簡化:

		紐約州			
		(c , e)	(c , f)	(d , e)	(d , f)
政府	a	(3 , -2)	(3 , -2)	(-1 , 1)	(-1 , 1)
	b	(-3 , 2)	(1 , -1)	(-3 , 2)	(1 , -1)

期望報酬(Expected payoffs):

期望報酬是指當參賽者面臨隨機結果時其獲得的報酬是把各種可能狀態下的報酬值依其機率加權計算出平均值,也就是在報酬函數中加上包含信念與混合策略的概念。

混合策略是指以特定比例隨機選取某個純粹策略而在賽局中我們會考慮對手如何出招再決定自己如何出招再加上自己決定出招的機率,而進一步可以算出政府之期望報酬決定出其混合策略。

		紐約州			
		(有疫苗封城，沒有疫苗封城)	(有疫苗封城，沒有疫苗不封城)	(有疫苗沒封城，沒有疫苗封城)	(有疫苗沒封城，沒有疫苗不封城)
政府	能提供疫苗	(3, -2)	(3, -2)	(-1, 1)	(-1, 1)
	沒能提供疫苗	(-3, 2)	(1, -1)	(-3, 2)	(1, -1)

例如政府認為紐約州出(封城,封城)策略機率為 1/4,出(封城,不封城)策略機率為 1/4,出(不封城,封城)策略為 1/4,出(不封城,不封城)策略為 1/4,

政府若能提供疫苗,則期望報酬為 $1/4 * 3 + 1/4 * 3 + 1/4 * -1 + 1/4 * -1 = 1$

政府若不能提供疫苗,則期望報酬為 $1/4 * -3 + 1/4 * (1) + 1/4 * -3 + 1/4 * (1) = -1$ 。

對政府而言,能提供疫苗 策略報酬較高,是最佳反應,因此採取能提供疫苗策略。

優勢可解

優勢可解:逐次刪掉劣勢直到剩下單一策略組合此時稱賽局優勢可解。

對紐約州而言,不論政府出何種策略紐約州出de的報酬不會低於其他ce, cf, df, 因此刪除之。

		紐約州
		(d,e)
政府	a	(-1, 1)
	b	(-3, 2)

對政府而言,紐約州出 de 策略,台灣出 a 策略比 b 策略之報酬高,因此刪除 b 策略,並簡化賽局為:

		紐約州
		(d, e)
政府	a	(-1, 1)

此賽局優勢策略均衡為(-1,1), 也就是說選擇政府提供疫苗給紐約州, 紐約州選擇不封城。

最佳反應 (Best Reply)

在其他參賽者的策略給定下,參賽者能選擇使其報酬最大的反應策略稱之。

一般在決定自己的策略之前會先想想對手的行為(信念),我們會在最大化期望報酬前提下,選擇自己的策略。

也就是說台灣會考慮美國選定何種策略的信念而美國也會考慮台灣選定何種策略的信念進而計算出期望報酬。

假設政府(U1)對紐約州(U2)的出招信念為(1/6 , 3/6 , 1/6 , 1/6),則紐約州分別出招的結果為

$$U1(a, U2)=1/6 *3+3/6 *3+1/6 *(-1)+1/6*(-1)= 5/3$$

$$U1(b, U2)=1/6 *(-3)+3/6 *(1)+1/6 *(-3)+ 1/6 *(1)=-1/3$$

對紐約州而言,a策略報酬較高,是最佳反應,因此採取提供疫苗策略。

假設我們認為紐約州出df策略機率很大,因此若加重其信念(1/10 , 1/10 ,1/10 , 7/10),則政府分別出招的結果為:

$$U1(a,U2)=1/10 *3 + 1/10 *3+ 1/10 *(-1) + 7/10 *(-1)= -1/5$$

$$U2(b,U2)= 1/10 *(-3) + 1/10 *(1) + 1/10 *(-3) + 7/10 *(1)= 1/5$$

則情況就會相反,b 策略報酬較高,是最佳反應,因此採取不提供疫苗。

納許均衡 (Nash Equilibrium)

約翰納許(John Nash),這個 20 世紀的傳奇人物,電影『美麗境界』的男主角,年輕時曾是光彩奪目的天才,歷經精神分裂,過了 20 餘年鬼魅式的生活,到晚年竟然奇蹟般地康復到 1994 年才以 20 幾歲時發表的賽局理論論文得了諾貝爾經濟學獎。John Nash 是博弈理論(Game Theory)的受薰陶者,他於某天和一群同學在酒吧中,看到一位身材火辣的金髮美女重新思考而發現了突破性的理論,推翻了「經濟學之父」亞當史密斯的經濟定理在競爭中,一個人盡全力追求其主要目標時將會為他帶來最好的結果。因為Nash 重新認為卯足全力追求主要目標不一定最有效。

「納許均衡」是根據雙方的信念求得參賽者的最佳反應若此策略組合為彼此的最佳反應,則為納許均衡。

(1) 納許均衡是一策略組合,沒有任何參賽者有誘因去背離(deviate)此策略組合時,即達成納許均衡。

(2) 進行決策時的一個賽局中的雙方都各有不利與有利的抉擇一共有四種狀況,而其中可能有一個以上的策略組合是對兩方都有利。

(3) 不同的信念,可能得到不同的納許均衡。

(4) 每一個納許均衡都是理性化的策略。

		紐約州			
		(c , e)	(c , f)	(d , e)	(d , f)
政府	a	(3 , -2)	(3 , -2)	(-1 , 1)	(-1 , 1)
	b	(-3 , 2)	(1 , -1)	(-3 , 2)	(1 , -1)

紐約州:

政府選 a 策略,紐約州會選 de與 df 策略,報酬為 1

政府選 b 策略,紐約州會選 ce 與 de 策略,報酬為 2

政府:

紐約州選 ce 策略,台灣選 a 策略,報酬為 3

紐約州選 cf 策略,台灣選 a 策略,報酬為 3

紐約州選 de 策略,台灣選 a 策略,報酬為 -1

紐約州選 df 策略,台灣選 b 策略,報酬為 1

因此納許均衡為(-1,1)

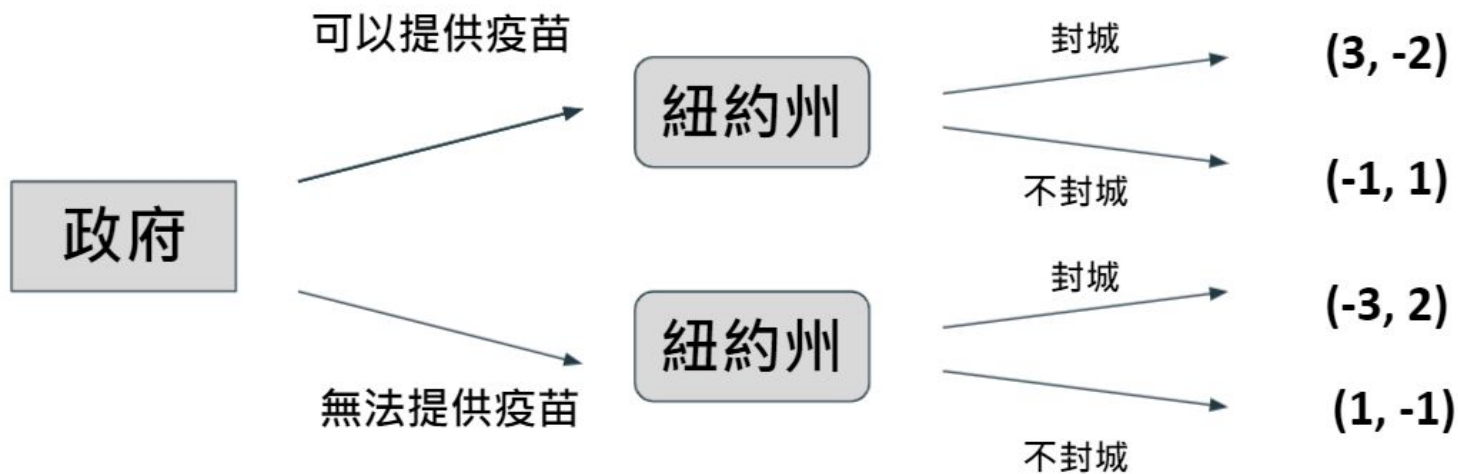
子賽局完美均衡 (Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE)

子賽局 (Subgame) 為擴展式賽局的一支枝幹,起點只有一個要素的資訊集合稱之。

- a. 子賽局本身就是一個擴展式。
- b. 完整資訊賽局的每一個節點均為一個子賽局。

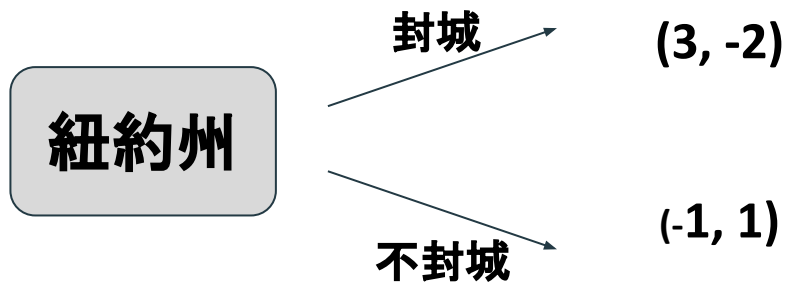
動態賽局的出招選擇逆向歸納法(Backward Induction)

由最後的子賽局往前倒推求解既然最後的答案需要在每一個資訊集合上選擇最佳行動那麼最簡單的方法就是從最簡單的資訊集合開始,找出該資訊集合上的最佳行動。最簡單的資訊集合是賽局結尾的那一個。所以找答案由最後的子賽局往前倒推求解。



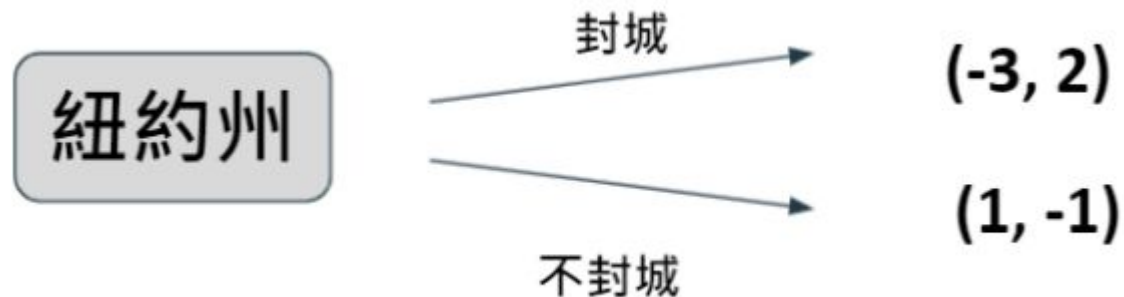
使用逆向歸納法

(1) 第一個子賽局為:



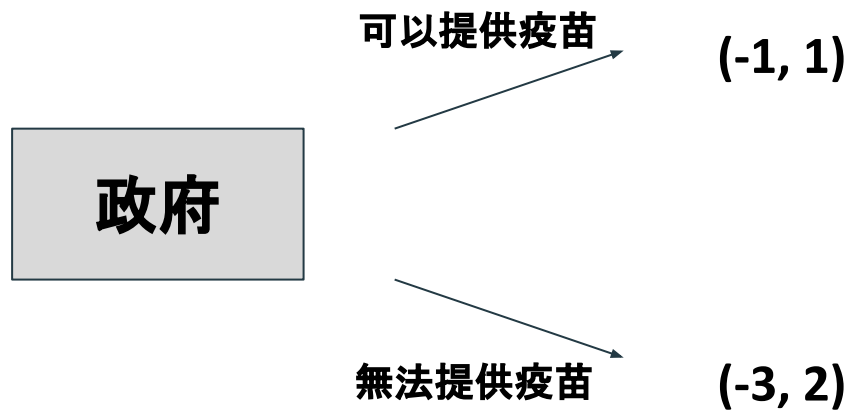
紐約州將選擇不封城因其報酬 1 大於不封城的報酬 -2, 刪除(3,-2)

(2) 第二個子賽局為:



美國將選擇封城, 因其報酬 2 大於不封城的報酬 -1, 刪除(1,-1)

(3) 因此最後子賽局變為:



政府將選擇提供疫苗,因其報酬為-1,大於不提供疫苗的報酬3

因此 SPNE 解為 $(-1, 1)$,此解為此議題動態賽局的最佳解。

感想與結論

在社會科學的研究領域中，賽局理論的應用已有一段相當長的時間，但應用在課程與教學領域上還不算多見。賽局理論相當有趣，它可以拿來預測他人的行為，以及協助自己決定策略，因此它可以廣泛運用在生活上，舉凡我們許多生活周遭的一些小事像是決定是否跟隨競爭業者降價、攤販設點設哪最好，甚至是否現在要在網路上購買商品都可以用賽局理論來解釋並找出最好的結果！

這次的報告主題擷取了符合時事的防疫策略和疫苗相關問題進行賽局理論的分析，我們這組認為在疫苗開發上市前(疫苗的有無)會影響當地美國政府和各州所採取的動作。以紐約州為例，在面臨第二波新冠病毒侵襲而來且人民對待病毒不再輕忽，市長是否能做出封城或不封城的決定。建立在疫苗是否問世的前提下做出最符合的決定，並降低各方面所帶來的傷害。

著名的囚犯理論是我們這組最一開始接觸的理論，也是最引起我們興趣的故事。然而賽局的應用比我們這組所想的應用更加地廣泛及常態，或許當我們做出決定時我們已經在無形中討論賽局了，每一種賽局都能簡單的詮釋生活遭遇的情況，這也我們認為賽局厲害且迷人的地方。

參考資料

<https://www.inside.com.tw/article/19257-game-theory-and-anti-virus-strategies>

<https://www.cmoney.tw/notes/note-detail.aspx?nid=35684>

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA>

<https://www.managertoday.com.tw/articles/view/55818>

<https://www.i-media.tw/Article/Detail/8533>