

① 產出彈性

勞動平均產量與勞動邊際產量為：

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^\alpha K^\beta}{L} = L^{\alpha-1} K^\beta$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^\beta$$

資本平均產量與資本邊際產量為：

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{L^\alpha K^\beta}{K} = L^\alpha K^{\beta-1}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta L^\alpha K^{\beta-1}$$

勞動產出彈性為：

$$\varepsilon^L = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^\beta}{L^{\alpha-1} K^\beta} = \alpha$$

資本產出彈性為：

$$\varepsilon^K = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{\beta L^\alpha K^{\beta-1}}{L^\alpha K^{\beta-1}} = \beta$$

② 生產力彈性

L and K 同時增加 ϕ 倍對生產函數的影響：

$$Q = f(\phi L, \phi K) = \phi^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta$$

生產力彈性為：

$$\varepsilon^\phi = \frac{(\alpha+\beta)\phi^{\alpha+\beta-1} L^\alpha K^\beta}{\phi^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta} = \alpha + \beta$$

$$\varepsilon^\phi = \varepsilon^L + \varepsilon^K = \alpha + \beta$$

③ 替代彈性

邊際技術替代率為：

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^\beta}{\beta L^\alpha K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L}$$

替代彈性為：

$$\varepsilon^{LK} = \frac{d \ln(\frac{K}{L})}{d \ln(MRTS)} = \frac{d \ln(\frac{K}{L})}{d \ln(\frac{\alpha}{\beta}) + d \ln(\frac{K}{L})} = 1$$

① α and β 均為固定的常數，不隨資本勞動比的變動而變動。

② 生產函數替代函數恆為 1，並不因 α 與 β 的變動而有所改變。