

## 1993 年全国大学生数学模型竞赛

姜 启 源

(清华大学应用数学系, 北京 100084)

1993 年全国大学生数学模型竞赛 10 月 15 日至 17 日在北京、上海、西安、武汉、广州、重庆、南京、大连、长沙、太原等二十多个城市举行。来自全国 101 所高校的机械、电机、化工、土木、自动化、计算机等工科专业, 数学、物理等理科专业(含师范院校)及经管类专业的近 1300 名学生组成 420 多个队参加了竞赛。竞赛中涌现出许多优秀答卷, 全国 11 个赛区共评出特等奖 11 名(队), 一等奖 48 名, 二等奖 104 名。12 月 3 日在北京举行了颁奖仪式。

国家教委的负责同志十分关心这项竞赛, 亲临现场视察并出席颁奖仪式, 充分肯定数学模型竞赛在开拓学生的创造性、培养协作精神等方面的积极意义, 决定与中国工业与应用数学学会一起, 在更多的高校推广这项活动, 办成面向全国大学生的一项大奖赛。

1993 年的竞赛有两道题, 一道题是从卫星通讯的频率设计中的一个科研课题简化加工而成, 另一道题是根据若干支球队历史上的战绩, 设计一个反映诸队实力的排名次的算法。下面除刊登赛题及获北京赛区特等奖的两篇优秀论文外, 还特请两位命题、评阅人撰文发表, 希望起到与众多的参赛者交流的作用, 并使关心这项竞赛的同志们对它有更多的了解。

### 1993 年全国大学生数学模型竞赛试题

#### A 题 非线性交调的频率设计

如果一非线性器件的输入  $u(t)$  与输出  $y(t)$  的关系是  $y(t) = u(t) + u^2(t)$  (其中  $t$  是时间), 那么当输入是包含频率  $f_1, f_2$  的信号  $u(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$  时, 输出  $y(t)$  中不仅包含输入信号  $f_1, f_2$ , 而且还会出现  $2f_1, f_2 \pm f_2$  等新的频率成分, 这些新的频率称为交调, 如果交调出现在原有频率  $f_1, f_2$  的附近, 就会形成噪声干扰, 因此工程设计中对交调的出现有一定的要求。

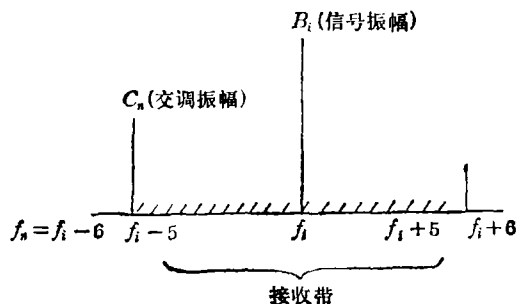
现有一 SCS (非线性) 系统, 其输入输出关系由如下一组数据给出:

输入 $u$	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 $y$	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号为  $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$ , 其中  $A_1 = 25, A_2 = 10, A_3 = 45$  是输入信号振幅, 对输入信号的频率  $f_1, f_2, f_3$  的设计要求为:

1)  $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 53$ .

2) 输出中的交调均不得出现在  $f_i \pm 5$  的范围内 ( $i = 1, 2, 3$ ), 此范围称为  $f_i$  的接收带(参见下图).



3) 定义输出中的信噪比  $SNR = 10 \log_{10} \frac{B_i^2}{C_n^2}$  (单位: 分贝), 其中  $B_i$  是输出中对应于频率为  $f_i$  的信号的振幅,  $C_n$  是某一频率为  $f_n$  的交调的振幅, 若  $f_n$  出现在  $f_n = f_i \pm 6$  处 ( $i = 1, 2, 3$ ), 则对应的 SNR 应大于 10 分贝(参见上图).

4)  $f_i$  不得出现在  $f_i$  的接收带内 ( $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ).

5) 为简单起见,  $f_i$  只取整数值, 且交调只考虑 2 阶类型(即  $\{f_i \pm f_j\}, i, j = 1, 2, 3$ ) 和 3 阶类型(即  $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}, i, j, k = 1, 2, 3$ ).

试按上述要求设计输入信号频率  $f_1, f_2, f_3$ .

## B 题 足球队排名次

下表给出了我国 12 支足球队在 1988—1989 年全国足球甲级联赛中的成绩, 要求

1) 设计一个依据这些成绩排出诸队名次的算法, 并给出用该算法排名次的结果。

2) 把算法推广到任意  $N$  个队的情况。

3) 讨论: 数据应具备什么样的条件, 用你的方法才能够排出诸队的名次。

对下表的说明:

1) 12 支球队依次记作  $T_1, T_2, \dots, T_{12}$ .

2) 符号 X 表示两队未曾比赛。

3) 数字表示两队比赛结果, 如  $T_i$  行与  $T_j$  列交叉处的数字表示:  $T_i$  与  $T_j$  比赛了 2 场;  $T_i$  与  $T_j$  的进球数之比为 0:1 和 3:1。

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$
$T_1$		0:1 X 0:0	2:2 1:0 0:2	2:0 3:1 1:0	3:1 1:0	1:0	0:1 1:3	0:2 2:1	1:0 4:0	1:1 1:1	X	X
$T_2$		X	2:0 0:1 1:3	0:0 2:0 0:0	1:1	2:1	1:1 1:1	0:0 0:0	2:0 1:1	0:2 0:0	X	X
$T_3$			X	4:2 1:1 0:0	2:1	3:0	1:0 1:4	0:1 3:1	1:0 2:3	0:1 2:0	X	X
$T_4$				X	2:3	0:1	0:5 2:3	2:1 1:3	0:1 0:0	0:1 1:1	X	X
$T_5$					X	0:1	X	X	X	X	1:0 1:2	0:1 1:1
$T_6$						X	X	X	X	X	X	
$T_7$							X	1:0 2:0 0:0	2:1 3:0 1:0	3:1 3:0 2:2	3:1	2:0
$T_8$							X	0:1 1:2 2:0	1:1 1:0 0:1	3:1 1:0	0:0	
$T_9$									X	3:0 1:0 0:0	1:0	1:0
$T_{10}$										1:0 X	2:0	
$T_{11}$											1:1 X	1:2
$T_{12}$											1:1 X	