

文章编号: 1005-3085(2003)05-0041-07

车灯光源优化问题的探讨

严 祥, 张歆华, 黄 亮

指导老师: 宋宝瑞

(上海交通大学计算机科学系, 上海 200030)

编者按: 本文将车灯线光源的优化设计问题归结为一个优化模型, 用数值模拟的方法进行求解。在数值模拟时, 要将线光源、反射面和测试屏进行离散化, 如何控制离散化带来的误差是决定数值模拟效果的一个关键问题。本文作者提出了根据反射面曲率来决定剖分疏密的方法以及连通集算法, 有效地降低了离散化的误差, 提高了数值模拟的精度, 有一定的创造性。

摘 要: 本文讨论了在一定的光源设计前提下, 光照强度及其分布所满足的规律, 并在此基础上, 分析了车灯线光源的优化设计的途径。在分析的方法上, 我们侧重于计算机数值模拟辅以理论推导, 提出了一系列创新的技术, 用以克服离散途径解决连续问题时所遇到的困难。在基本的方法上, 我们将线光源用离散的点光源逼近, 将抛物面离散为网格。这里我们从法向量变化率出发, 提出按曲率划分而非单纯尺寸长度划分, 大大提高了模拟精度。在处理离散条件下点线相交时, 我们引入了连通集这一重要概念, 以克服(屏上点, 光源) $1 \rightarrow \infty$ (抛物面上点) 映射时的多值性, 解决了因细分抛物面而产生的多重光路的问题。在实现过程中, 我们应用了广度优先的线性复杂度算法, 使计算效率一跃提升了近 5000 倍。在解决多点采样问题时, 我们又开发了并行连通集算法, 减少了串行算法的重复计算, 使计算速度加快了近 2000 倍。在验证模型合理性和进行数据分析时, 在第一题中我们着重于收敛的程度问题, 并证明我们的模型是稳定的, 能克服误差的影响; 第二小题中, 我们着重分析光强分布的合理性问题, 并结合第三小题的要求, 对图象进行分析, 最终得出题目中的设计规范是符合实际应用需要的, 并且光源消耗很优化, 光强分布合理。

关键词: 光强分布; 数学模型; 连通集; 广度优先搜索; 最优化

分类号: AMS(2000) 49K35

中图分类号: O224

文献标识码: A

1 模型假设

- 1) 光源是理想的线光源没有宽度, 只须分割足够细, 光源可用一系列点光源进行模拟。
- 2) 抛面镜镜面反射率足够高, 没有能量损失, 不必根据菲涅耳定律按入射方向进行衰减。
- 3) 抛物面足够分割, 可以逼近真实曲面。
- 4) 只考虑一次反射, 二次反射的影响可忽略, 并不考虑有直射光线到达屏幕的情况。
- 5) 接收点的光强与光源功率成正比。
- 6) 问题的本质结构良好, 不会出现混沌的情况。

2 问题分析

题中要求光源在达到一定要求的前提下功率最小。将线光源用点光源逼近, 抛物面用网

格逼近,遍历各点光源,与网格各点求出反射光线,得到其与测试屏的交点,判断是否经过 $B(C)$,考虑到采用的是计算机数值模拟的方法,故在 $B(C)$ 周围取一定半径的区域,落在其间的射线即认为经过 $B(C)$,由于射入角(从光源发出的光线射到抛物面的角)的不同可能造成同一光线对 $B(C)$ 的光强贡献不同,故采用抛物面上取连通集滤除多余光线的算法。由于光强与光源功率成正比,我们采用固定点光源功率,求出 B 和 C 点的光强 $I(B)$ 、 $I(C)$,根据题意,将 $I(B)/2$ 与 $I(C)$ 作比较得到瓶颈光强(即题中单位光强的最大值),将之除以光源功率(与点光源个数成正比),比较求得最优解,再求出此情况下的光强分布。

3 模型的建立

为便于计算机数值模拟,首先将线光源离散为多个长度相同的微元,视作点光源,每段长度设为一定值 d ,则光源长度仅与段数成正比(见算法一)。接着将抛物面进行剖分,采用了根据反射面曲率进行剖分的方法(见算法二)。然后是镜面反射的问题,在这个问题中,涉及到三个空间:线光源 S_1 (一维)、抛物面 S_2 (二维)(其实其只有两个自由度)以及测试屏 S_3 (二维)。给定任意两个空间光线经过的坐标,就能够确定出光线,并求得相应第三个空间中的对应点坐标,即存在如下映射

$$\Phi_1: S_2, S_3 \mapsto S_1$$

$$\Phi_2: S_1, S_3 \mapsto S_2 \text{ 的幂集(是多值映射)}$$

$$\Phi_3: S_1, S_2 \mapsto S_3$$

考虑到 Φ_2 会出现多解的现象,而 Φ_1 要求求出直线与理想线光源的交点,由我们的基本假设,线光源没有宽度,故 Φ_1 也很难取得较理想的结果,斟酌之后我们选择了 $\Phi_3: S_1, S_2 \mapsto S_3$,这样就可以计算各个点光源对屏上光强的贡献,并累计求得屏上的光强分布了,但其中由于采用了多次数值模拟的方法,精度问题需要格外的思量。简单的说,即从光源发出的一束光,经抛面镜反射后,打到屏上精确的一个点。但是否就认为除此以外各点均未得到丝毫的照亮呢?由于精度有限,可能本身恰恰是应击中附近的一个点。此外,反射后击中屏上的那点可能不是格点(这一点不论精度有多高都可能出现),则显然不能因此而不将其记入对屏上光强分布的贡献。在考虑了多种方法之后,我们采取了连通集算法,并结合广度优先搜索方法圆满又高效的解决了这一问题,在精度上得到了大幅的提高。

4 模型的求解

第一题中要求最优线光源长度,根据前面所述算法,利用计算机的数值计算,我们得到了大量的数据,通过对模型建立过程的分析,可以很方便地得出以下两点结论:1. 当 Step 变小即将线光源进一步细分,所得数据应更接近理论值;2. 当 N 增大,即将抛物面的网格进一步细分,所得的数据应该更接近理论值。由此两点我们画出在 Step 固定的条件下的 $L-N$ 曲线族和在 N 一定条件下的 $L-Step$ 曲线(见图 1,2, L 为线光源最优长度,Step 为点光源长度, N 为剖分抛物面份数)。

由图可以很明显的看出两条曲线都趋向收敛,经过进一步的计算,我们推得收敛值在 3.56mm 附近(图上所标为 $N/2$ 的值),对于曲线上某些 Step 或 N 处距离较大的情况我们分

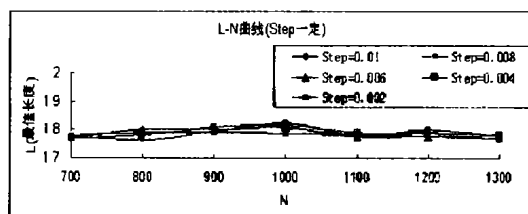


图1 L-N 曲线

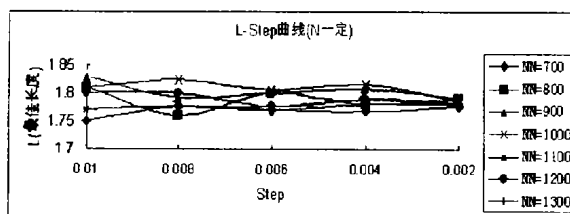


图2 L-Step 曲线

析认为主要是因为用计算机拟合抛物面时的精度不够造成的,主要考虑到抛物面开口半径为 36mm,而距离有 25m,即使是很小的误差也可能成倍的放大,而导致的结果,但从图上我们已经可以完全看出各曲线收敛的趋势,因此我们可以得出结论当线光源长度为 $L = 3.56\text{mm}$ 时为最佳。图 3,4 显示了在 L 不同的情况下 B、C 两点的要求分别成为瓶颈的交替情况。另外,在求光强分布时我们基本采用了和解决前一问题一样的算法,将所得数据做出曲线如下图:图 5 是光强关于水平方向与竖直方向的二维分布图,其中横坐标是距光源的水平距离,纵坐标是垂直距离。图 6 是光强关于水平方向与竖直方向的二维分布的俯视图,为了更清楚地表现光强的分布情况,我们作出了光强的等高线图。其中横坐标是距光源的水平距离,纵坐标是垂直距离。

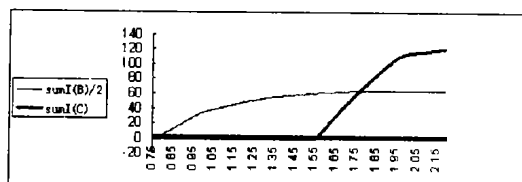


图3 特殊 L-N 曲线

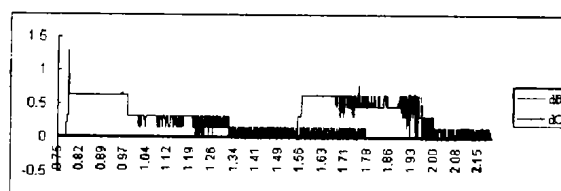


图4 特殊 L-Step 曲线

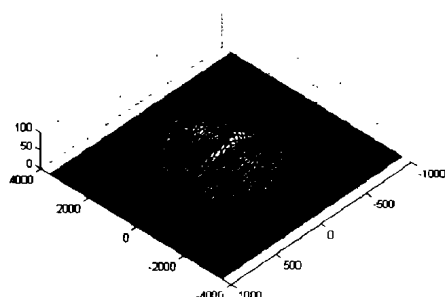


图5 光强二维分布图

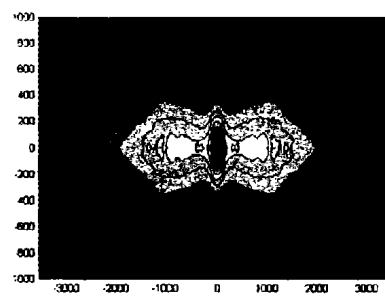


图6 光强俯视图

5 主要算法介绍

算法一 线光源分割算法。将线光源分割为多段长度相同的微元,视作点光源,每段等长,设为 d ,故光源总长度仅与点光源数成正比不妨假设分为 $2n + 1$ 段,每段的光强均为单位 1。又因为功率与光强成正比,所以光源功率与 $I_0 \cdot (2n + 1)$ 成正比,其中 I_0 为实际使用中每个微元的光强。可得:当线光源分为 $2i + 1$ 段微元时,记 $I_i(B)$ 、 $I_i(C)$ 分别为所有微元在 B

点以及 C 点叠加所得的光强值。又记 $M_i = \min\left(\frac{I_i(B)}{2}, I_i(C)\right)$ 。则取 n 满足 $I_i(B), I_i(C)$ 符合光强要求且 $\frac{M}{2i+1}$ 最小, n 即为题目所求之最优解,

$$n = \arg \max_{i \geq 0} \left(\frac{M_i}{2i+1} \right) \quad (*)$$

证明 (反证法) 假如符合题目要求的段数为 $2n' + 1 (n' \neq n)$, 则

$$\begin{cases} P' \cdot I_{n'}(B) > 2A \\ P' \cdot I_{n'}(C) > A \end{cases} \quad (1)$$

其中, A 为题中的额定值, p' 为此时每段微元产生的单位光强的实际值。又考虑 p' 的实际意义, 应使其在满足条件(1)的前提下取得的最小值。故

$$p' = \frac{A}{\min\left(\frac{I_{n'}(B)}{2}, I_{n'}(C)\right)} = \frac{A}{M_{n'}}. \text{同理, 对于由 } (*) \text{ 式求得的 } n, \text{ 也应满足}$$

$$\begin{cases} P' \cdot I_n(B) > 2A \\ P' \cdot I_n(C) > A \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{且 } p = \frac{A}{\min\left(\frac{I_n(B)}{2}, I_n(C)\right)} = \frac{A}{M_n}. \text{由假设易得, } n' \text{ 与 } n \text{ 的光源总功率消耗之比为: } \frac{P'}{P}$$

$$= \frac{p'(2n'+1)}{P(2n+1)} = \frac{\frac{A(2n'+1)}{M_{n'}}}{\frac{A(2n+1)}{M_n}} = \frac{\frac{M_n}{2n+1}}{\frac{M_{n'}}{2n'+1}}, \text{由 } (*) \text{ 式可得, } \frac{P'}{P} > 1, P' > P, \text{与假设分成 } 2n$$

+ 1 段时光源总功率最小矛盾, 原命题得证。

算法二 抛物面剖分算法。注意到, 对于解析式 $z = a(x^2 + y^2)$, x 与 y 是对称的, 这就意味着有可能在分割时保持一定的均匀性。但 z 的特殊性, 决定了一定的非均匀性。我们的目标是, 在一个面元内, 各点的法向量变化较平缓, 这样反射光线的方向不会变化过于剧烈。换言之, 如在某些点附近的法向量变化较快, 则包含该点的面积微元应取得较小。

因此采取以下方法将 $z = a(x^2 + y^2)$ 在 $x = 0$ 平面上投影, 得到一条抛物线: $z = ay^2$ 。取 F 为抛物面的焦点, 将角 OFA 与角 OFB 所组成的角 AFB (大小记为 2α) 等分成 $2n + 1$ 份, 记每一份的大小为 θ , 则 $\theta = \frac{2\alpha}{2n+1}$, 第 i 份的中点所在极角坐标为 (考虑两端削去半份)

$$\varphi_i = \left(\frac{1}{2} + i\right)\theta + \pi - \alpha = \frac{4i - 2n}{2n+1}\alpha + \pi \quad i \in [0, 2n]$$

在 YZ 平面中, 过 F 作一斜率为 $\tan\left(\frac{2n-4i}{2n+1}\alpha\right)$ 的直线 (斜率不存在的特别处理即可), 与抛物线有一个或两个交点。当 $\varphi_i > \pi$ 时取 y 大于 0 的交点, 否则取非正的交点。同时解出 z_i 。得此交点 Q 后, 把抛物面视作由上述抛物线绕 Z 轴旋转 360° 所构成, 在此过程中, Q 点的轨迹形成一个圆, 记其半径为 R_i 。考虑到 X 与 Y 在原问题中的对称性, 可以将该圆平均分成 m 份。于是立得: $x_{i,j} = R_i \times \cos\left(\frac{j}{m}2\pi\right)$, $y_{i,j} = R_i \times \sin\left(\frac{j}{m}2\pi\right)$, 而对所有 j , $z_{i,j} = z_i$ 。这样等价

于在抛物面上过焦点角均分线法求出其经线,再由均匀划分求得纬线,顺利地在该表面建立起一个 $(2n+1) \times m$ 格点坐标系。此方法优点在于非完全长度均分,对所在邻域内法向量变化较快的点,包含它面积微元取得较小,反之亦然。另外,角度均分有对称性,可用一半的代价求出各格点的坐标。

算法三 连通集算法。

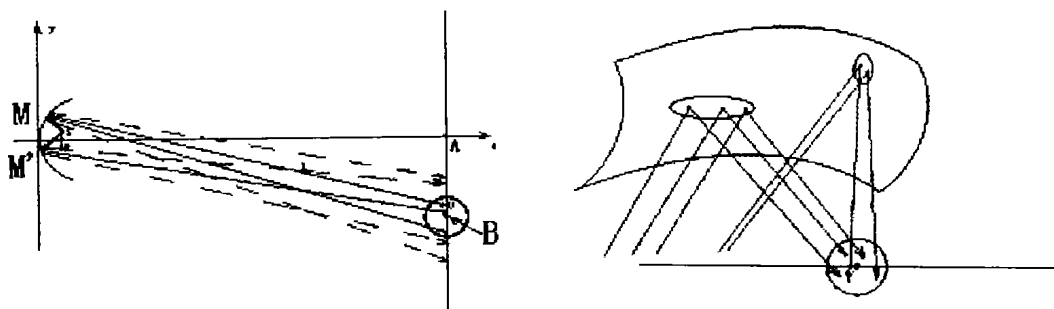


图7 光反射情形 (a)

(b)

由于是数值计算,用离散值模拟连续值,不免产生误差。如(图7(a,b)),当邻域大小给定后,点光源 S 出发,经过抛物面上 M 附近反射,有两根落入邻域;而经 M' 附近反射,只有一根落入。而事实上, M 附近有且仅有一点 M^* , S 经 M^* 反射恰好击中 B ;同样 M' 附近有且仅有一点 M'^* , S 经 M'^* 反射恰好也击中 B 。也就是说,连续情况下, M 和 M' 附近都各只有一根光线击中 B 。所以 M 附近计算两次显然是很不妥的。应该对 M 附近的光线,不论相邻的有几条,都算作1条,选取打在屏幕上的点最靠近 B 点的作为代表; M' 附近的也类似处理。这样就能还原成连续的情形,而不至于因为邻域大小的选择而影响精度。这就是所谓的连通集思想。以下先严格定义连通集相关的概念,然后描述其算法。

定义1 候选点、候选光线 点光源 S 发出的光线 L ,经抛物面上的格点 M 反射后,击中屏上 D 点,若 D 点到 B 点的距离 d 小于某一阈值 R (即落入其 R -邻域),则认为光线 L 是一条候选光线,认为 M 是一个候选点。

定义2 候选点组成的连通集 抛物面上格点阵上相邻的候选点组成的区域称为一个连通集。所谓两个格点 $M(x, y)$ 和 $M'(x', y')$ 相邻是指: $|x - x'| \leq e \wedge |y - y'| \leq e$ 考虑到用离散的办法逼近所造成的误差,这里取 $e = 3$ 。注意循环相邻(参见图7c)。

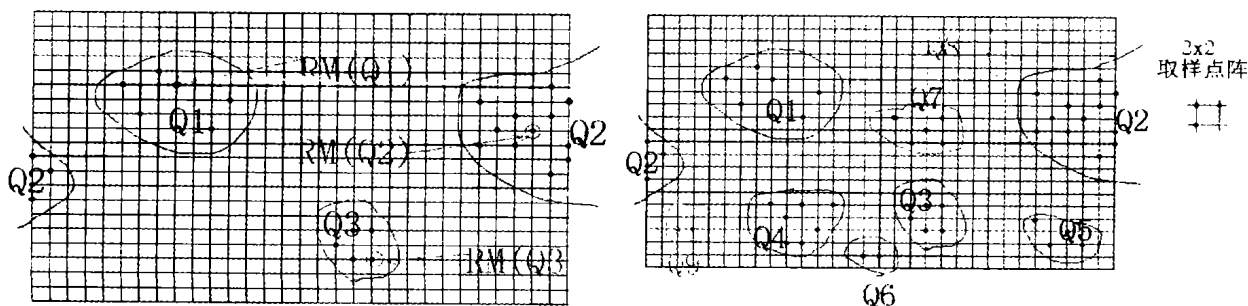


图7 光反射情形(c)

(d)

定义 3 代表点、代表光线 对于每一个连通集 Q , 选取其中距离 B 点最近 (即 d 最小) 的候选点作为这个连通集的代表点 $RM(Q)$, 其对应的候选光线作为这个连通集的代表光线 $RL(Q)$ 。对于一个连通集, 就以其代表光线来计算射到 B 点的光强。

a) 连通集的 (广度优先) 搜索算法

如果直观地求连通集, 效率太低。这里我们采用广度优先搜索。这个算法首先求出所有的候选点, 把候选点所在的格点染成黑色, 其他点染成白色。然后扫描抛物面上所有点, 遇到黑色的点 (未访问的候选点), 就从这个点出发, 做一次广度优先搜索, 求出这个点所在的连通集 (即其内所有的点)。在这个过程中从黑色变成红色的点就是出发点所在的连通集。然后再继续扫描, 查找其他的连通集。这个算法时间复杂度为点的线性, 使得我们在模拟逼近时速度加快了大约 5000 倍左右。

b) 多点并行连通集算法

直观做法: 把线光源分为点光源小段。每个点光源向抛物面上的各个格点发射光线, 反射后打在屏幕上点最靠近哪个采样点, 就认为对这个采样点贡献了光强。这个做法存在多重光线问题。然而, 直接套用上述连通集算法, 效率极低: 我们很容易发现, 对于不同的采样点, 抛物面上的每个格点的反射光线、交点都是一样的, 重复计算的次数等与采样点数目 (设为 ZY)。如果我们设法并行地处理所有采样点, 只计算一次反射光线和交点, 而把每个交点与屏上的最接近的采样点比较的话, 就可以加快 ZY 倍。

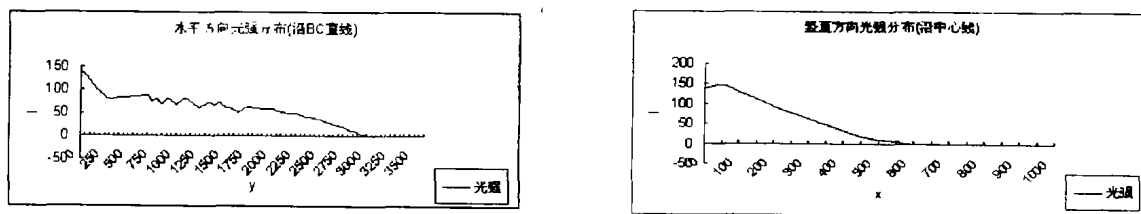
改进的算法基本如下: 对于每个点光源, 对于抛物面上每个格点, 其反射光线与屏交于 P 点, 则考察 P 与四周的 4 个采样点中哪个最近, 记最近的采样点为 W , 则如果 P 与 W 距离小于阈值 R , 则认为 P 是 W 的一个候选点。由于采样点比较稀疏, 所以阈值 R 相对于采样间隔几乎可以忽略不计。所以一个交点 P 至多落入一个采样点的 R -邻域, 于是抛物面上的每一个格点至多作为一个采样点的候选点。这就是为什么可以并行处理所有采样点的原因 (参见图 7(b))。

只不过染色问题要做一个小小的改动, 本来只要把候选点染成黑色, 非候选点不染色 (或认为染成白色)。现在因为并行处理所有采样点, 所以必须区分, 若采样点有 ZY 个, 则需要 $ZY + 2$ 种颜色 (包括一种白色和一种红色), 若抛物面上某一点 M 是第 (I, J) 个采样点 (即 I 行 J 列), 则把 M 染成第 $I * Y + J$ 种颜色。同样的, 扫描所有染色点 (非白色的点), 每发现一个非红色的点 (未访问), 就调用广度优先搜索求出一个这种颜色的连通集这样就可加快 ZY 倍。

6 模型的改进及评价 (设计规范的合理性)

最后让我们来看一下模型中整个的光强分布情况, 如 (图 8(a, b)), 在水平方向上, 光强的分布并不是在中间区域非常集中, 并没有一个突变的现象, 而是两边逐渐递减, 后在某个范围以外急剧减小, 我们认为此分布情况的优点是明显的。其一, 光强在中间不是非常集中, 不会给前面的行人造成非常刺眼的感觉, 有利于交通安全; 其二, 外围的区域光强的变化率比较小, 光强分布相对较分散, 可以在照亮大片区域的同时又比较节约光能; 其三, 光强在某个范围以外急剧减小也有利于节约光能。在竖直方向上, 光强的集中范围明显比水平方向上小很多, 由于是水平的线光源, 这个结果是很接近实际的。整个测试屏平面内光强分布

如图6,形成一类似椭圆的光斑,应该说从直观上讲这个结论是非常不错的,光斑的大小即为车灯满足一定光强要求的情况下在测试屏上可照亮的区域,从图上我们可以看出区域面积比较大,而且光强分布也比较均匀,这在能耗和照亮面积中取得了一个平衡,由此分析此设计的车灯能照亮一个相当长的距离,这个结果应该还是比较令人满意的。



(a)水平方向

(b)垂直方向

图8 光强分布

参考文献:

- [1] Jonas Gomes and Luiz Velho. Image Processing for Computer Graphics [M]. New York: Springer - Verlag, 1997
- [2] 雷功炎. 数学模型讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1999

Computational Analysis and Optimization of the Integrity Distribution

YAN Xiang, ZHANG Xin-hua, HUANG Liang

Advisor: SONG Bao-rui

(Dept. of Computer Science, Shanghai Jiao Tong University 1954 Huashan Rd., Shanghai 200030)

Abstract: In this paper, we presented our algorithms and techniques to derive the intensity distribution of the light source. Our basic method is numeric simulation, with the help of theoretical derivation. We devised several innovations to approach the originally continuous problem by discrete computation. We first divide the linear light source into minute segments, which are modeled as independent point light sources. We then set up a Cartesian coordination on the paraboloid. Different from the traditional uniform-sized grid, we use a grid according to the solid angle, getting a more accurate modeling of the paraboloid. Our major innovation lies in the motivation and implementation of the "connected-set" idea. There may exist multiple points in the paraboloid that acts as the reflection point. Which is worse, one such point may be several (nominated) coordinates in our approximation. So we have to group these consecutive coordinates back into one "reflection point". Put another way, we should divide nominated coordinates into several connected-sets, where each connected-set represents on "reflection point". To implement this idea, we use the Bread-First Search, which is linear to the number of nominated coordinates. To scale up to problem 2, we further developed a parallel algorithm to compute the connected-sets for each sampling point in the screen simultaneously. This is substantially faster than the obvious serial algorithm that runs sequentially for each sampling point. We have also proved the correctness of this parallel algorithm. Our experimental results showed that our model is reasonable, accurate and efficient.

Keywords: integrity distribution; mathematical modeling; connected set; breadth-first search; optimization