

第五节 离散系统的模拟

离散系统(discrete system)是指系统状态只在有限的时间点或可数的时间点上随机事件驱动的系统。例如排队系统(queue system),显然状态量的变化只是在离散的随机时间点上发生。假设离散系统状态的变化是在一个时间点上瞬间完成的。

为了模拟离散系统,必须设置一个模拟时钟(simulate clock),它能将时间从一个时刻向另一个时刻进行推进,并且能随时反映系统时间的当前值。其中,模拟时间推进方式有两种,下次事件推进法和均匀间隔时间推进法。常用的是下次事件推进法。其过程是:置模拟时钟的初值为0,跳到第一个事件发生的时刻,计算系统的状态,产生未来事件并加入到队列中去,跳到下一事件,计算系统状态,……,重复这一过程直到满足某个终止条件为止。为了学习离散系统的模拟方法,举一个最简单的例子,以便帮助理解。

单服务排队系统

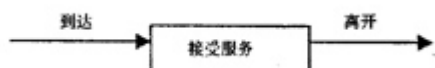
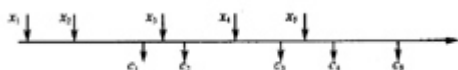


图 8.3 单服务排队系统

通常顾客到达时刻、顾客服务完毕并离去时刻等均视为随机事件(瞬间完成)。系统关心的指标通常是:顾客的平均等候时间、服务效率等。定义程序事件为模拟运行到150个时间单位(分钟)结束。该系统的模型一般用流程框图来描述,然后编制程序,模拟在一定时间范围内系统运行的活动过程。

请看下列简图所表示的时间推进方式:



引入以下符号:

x_i —第 i 个顾客到达的时刻;

t_i —相邻两个顾客到达的时间间隔 ($t_i = x_{i+1} - x_i$)

s_i —第 i 个顾客接受服务的时间;

D_i —第 i 个顾客的排队等待时间;

c_i —第 i 个顾客接受服务后离开的时刻 ($c_i = x_i + s_i + D_i$);

在任意时刻 t , 系统的状态可以用排队等候的顾客数目和服务员是否在工作来描述。排队等候的顾客数目称为队长, 记作 $L(t)$, 为非负整数。服务员的状态用 $S(t)$ 表示, 当服务员工作时, 令 $S(t)=1$; 服务员空闲时, 令 $S(t)=0$

系统的性能指标通常用排队长度、等待时间和服务利用率等来衡量。由于它们随时间改变, 一般用一段时间内的平均值作为数量指标。有以下三个指标:

1) 平均队长 指队长 $L(t)$ 在 $[0, T]$ 内的平均值, 计算公式为

$$\bar{L} = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt$$

2) 顾客的平均等待时间 指每个顾客平均等待的时间长度, 记作 \bar{W} 。

3) 服务利用率 指服务员工作时间在 T 中的比例, $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$

为了简化问题, 假设在上述模型下, 系统的性能指标只有一个, 即顾客的平均等待时间。考虑用模拟方法来求 \bar{W} , 若系统能模拟出每位顾客的等待时间序列 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, 则

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

具体模拟步骤如下：

第1步 调查并收集和处理数据，记录顾客到达时刻、等待时间和服务时间。假定顾客到达的间隔时间服从指数分布（均值为 10 分钟）；每个顾客的服务时间服从均匀分布 $U[10,15]$

第2步 构造模拟模型。输入因素：顾客的到达间隔时间和服务时间；排队规则：先到先服务；一个服务机构。

第3步 模拟实验。设置模拟时钟及总的运行时间 T ，如 8 小时等。推进原则按下次事件推进或均匀间隔推进。

用MATLAB编制的程序

```
x=0;D=zeros(1,n);
t=exprnd(10,1,n); %产生指数分布(0,1)的随机数，数组大小 1×n
s=unifrnd (10,15,1,n); %产生均匀分布U[10, 15]的数，数组大小 1×n
x=x+t(1) %第一位顾客的到达时刻
for i=2: n
    y=x+t(i) %第 2—n 位顾客的到达时刻
    j=i-1;
    c=x+s(j) +D (j) %计算顾客离开时刻
    if c<y %比较相邻两顾客的离开、到达时刻的大小
        h=0;
    else
        h=c-y;
    end
    D(i)=h; %输出第 i 个顾客的等待时间
    x=y;
end
E(D)=mean(D) %计算数值的平均值
计算的一组结果如下表 8. 1
```

表 8.1

序号	到达时刻 Y	离开时刻 C	等待时间 D
1	10.43	25.21	0
2	32.36	44.52	0
3	53.6	66.71	0
4	56.95	77.25	9.76
5	59.8	87.73	17.45
6	81.84		5.89
***	***	***	***

近似的平均等待时间： $E(D) = 5.5167$ （分钟）

另一段更简洁的程序

```
function meantime=serve(n)
arrive=zeros(1,0)
for i=2:n
    arrive(i)=arrive(i-1)+exprnd(0.1);
end
wait=zeros(1,n)
for i=1:n
    if (i==1)
```

```
        wait(i)=0;
    else
servetime=unifrnd(10,15);
    if(arrive(i-1)+servetime+wait(i-1)>arrive(i))
        wait(i)=arrive(i-1)+servetime+wait(i-1)-arrive(i);
    else
        wait(i)=0;
    end
end
end
end
meantime=mean(wait);
```