第20卷 第5期
2003年03月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.20 No.5
Mar. 2003

文章编号:1005-3085(2003)05-0107-10

“彩票中的数学”问题的优化模型与评述

韩中庚
(解放军信息工程大学信息工程学院,郑州 450002)

摘 要:本文介绍了2002年全国大学生数学建模竞赛B题的背景和产生的过程、建模思想和基本方法、以及存在的问题和进一步要研究的问题,最后给出了一个具体的优化模型及求解结果。

关键词:彩票方案;中奖概率;心里曲线;吸引力
分类号:AMS(2000) 90C05　　**中图分类号**:O221.1　　**文献标识码**:A

2002年由本人提供的“彩票中的数学”一题有幸被全国组委会所采用(B题),赛后应邀参加了北京赛区和全国的评卷工作,根据评卷的情况和自己的感受,将这个问题的背景和产生过程、通常的建模方法和存在的问题,以及自己的一点感想介绍给大家。最后将我建立的一个模型写在后面,供大家参考。

一、关于“彩票中的数学”问题的综合评述

1 问题的背景

目前在全国内地31个省(市、自治区)都有彩票发行,可以说是彩票遍布中华大地,涉及全国的千家万户,相关的信息也是全国各地方媒体如电视、电台、报纸和网站所关注的热点新闻之一,从国家到地方都有专门的管理机构和专职人员,各地方也都有了专门的网站和报纸。在国际上许多国家和地区也都有相应的彩票发行。对有些人来说,博彩已成为生活的一部分,影响之大不言而喻。另据中国彩票网消息:“某些国家的彩票发行已占国家的GDP的1%左右,而在我国,目前这一比例仅为0.08%左右”,如此看来中国的彩票发行规模还有一定的发展空间。

从目前全国各省(市、自治区)的彩票发行情况来看,其规则、奖项设置和设奖比例都不尽相同,而且有的差异很大,运行模式不统一,管理还不够规范,这些问题已经引起了许多人大代表和政协委员以及有关专家学者关注,也引起了政府有关部门的重视。政府为要加强管理和规范彩票的发行工作,出台了新的“彩票发行与销售管理办法”,对于彩票发行环节中的销售、开奖、游戏过程等相关内容,做出了原则性的规定(中国彩票网)。为此,我们认为对中国目前的彩票市场的运作情况进行研究和评价是必要的,尤其是对目前已有的彩票方案的合理性评估,以及现行规则是否符合本地区的实际情况,能否通过彩票发行规则的制定提

高对广大彩民的吸引力，促使更多的人加入到彩民的行列中来，使得国家和彩民的利益得到双赢，进一步促进我国的彩票事业的健康发展。我们就是在这样背景下，从数学的角度来研究这个“彩票问题”，是有现实意义的。作者认为通过对这个问题的研究，可能会产生一定的社会影响，或许能对某些地方的彩票发行工作有所帮助或促进，这是作者的一点想法。

2 问题的产生过程

在评卷时，有好几位老师问我是怎么想到出这么一道题的。谈到这个问题的形成过程，早在 2000 年正是中国的彩票飓风刚刚形成的时候，作为一个数学工作者，特别是对于一个从事数学建模的数学工作者，更具有一种特别的敏感性和好奇心，意识到“彩票的游戏规则”本身就是一个“数学游戏”，其中包含着许多数学问题。从河南省发行第一期福彩开始，到 2001 年共收集了一百多期的开奖数据资料，做了大量的统计计算和分析研究，就此结果提出了一个“百万元之梦能圆吗”？的问题，该问题主要侧重于选号的规律和方法上，后来发现这个问题是不可研究的，也是在姜启源教授的启发指导下，借助于网上的相关数据资料，将问题转到了彩票方案的评价和设计上来，从而提出了“彩票中的数学”这一问题。在该问题的进一步研究和求解过程中，也得到了北京大学孙山泽教授的指导和帮助。最后，该问题的描述和润色是由全国组委会的叶其孝教授、姜启源教授和唐云教授等专家集体创作而成。在此，对他们的指导和帮助表示诚挚的感谢。

3 建模方法综述

“彩票中的数学”这一问题与以往的赛题有所不同，它是一个完全开放的题目，给参赛学生留有很大的发挥创造的空间。该问题没有固定的解决方法和确定的数据答案。按照全国组委会和评审组讨论的意见，该题的评判原则主要有以下几点：

1)各方案的中奖概率是唯一确定的，要基本正确；

2)问题(一)要综合考虑方案的奖项、奖金、中奖率、中奖面等因素对彩民的吸引力，建立明确的、有可靠依据的评价指标，对已有方案做出评价；

3)问题(二)是在问题(一)的基础上建立优化模型(一般为非线性的)，通过求解寻求更好的方案，不能用定性的描述确定；

4)问题(三)是建模的一部分，不能缺少。

符合以上几点要求的答卷就是一份成功的论文答卷。

从评卷的情况来看，大多数的参赛队都能正确把握住了题目的主题，较好地完成了答卷。主要典型的方法可以归纳为三大类：

i)风险决策的效用函数法：有些参赛队都是利用风险决策的理论和方法对问题进行了研究，但在效用函数的取法和合理性指标函数的确定上有差异，这里介绍几种。

a) 取偏大型正态分布函数 $A(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}(x>0)$ 为效用函数，并将彩票方案对彩民的吸引力分为奖金的吸引力和中奖率的吸引力两个部分，分别构造出了两个满意度函数 $A(S)$ 和 $A(P)$，并依据国家权威部门的调查报告中的数据将彩民分为冒险者、中立者和避险者三类，比例分别为 $a_1=37\%$，$a_2=32\%$，$a_3=31\%$，按照各自的最大满意度分别确定了相应的满意参数 $\sigma_i(i=1,2,3)$，于是得到了满意度函数 $\varphi_i(s)=1-e^{-\left(\frac{s}{\sigma_i}\right)^2}$，$\psi_i(P)=1-$

$e^{-\left(\frac{P}{\sigma_i}\right)^2}(i=1,2,3)$，由此构造出吸引度函数

$$f=a_1[\varphi_1(s_1)+\psi_1(P_1)]+a_2[\varphi_2(\bar{s}_{23})+\psi_2(P_{(13)})]+a_3[\varphi_3(\bar{s}_{47}+\psi_3(P_{(17)}]$$

其中 $\bar{s}_{ij}$ 表示第 i 等奖到第 j 等奖的奖金的平均值，$P_{(ij)}$ 第 i 等奖到第 j 等奖的概率之和。

以 f 为合理性指标函数对已有方案进行评价，解决了问题(一)。并对各奖项的设置、奖金比例、奖金数额和相应的概率给出约束，建立了非线性优化模型，解决了问题(二)，模型的求解采用 MATLAB 实现。

b) 取博彩的心理函数为 $w(t)=1-e^{-u t}$，其中 $t=E\left(\frac{\xi}{n}\right)$，即表示单注彩票的平均收益，$n$ 为销售注数。于是构造吸引力函数为：$f=w(t)\cdot\mu$，这里 $\mu=7\sqrt[7]{d_1 d_2}$ 表示总公平因子，$d_1=\prod_{i=1}^{3}P_i x_i$，$d_2=\prod_{i=4}^{7}P_i x_i$，即高项奖和低项奖的公平因子。并以 f 为指标函数建立了相应的优化模型。

c) 取效用函数为 $g(x)=\frac{x}{x+a}$，参数 a 利用“高通滤波系统中下限截止频率”的方法可以确定为 $a=0.2$。

d) 取模糊数学中隶属度函数

$$u(x)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}, x>0\\ e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}-1, x<0\end{cases}$$

来反映彩票方案对彩民影响的心理变化规律，这里 $x<0$ 说明当彩民购买彩票没有获奖而对彩民的负面影响的程度。并分别考虑客观概率 P_i 和主观概率 $v(P_i)(i=1,2,\cdots,7)$，相应地构造出合理性指标函数 $U_1=\sum_{i=1}^{7}P_i u(s_i-2)$ 和 $U_2=\sum_{i=1}^{7}v(P_i)u(s_i-2)$。所谓的主观概率，主要是从心理学的角度“人们通常倾向于高估低概率事件的出现，低估高概率事件的出现”，这就是主观概率与客观概率的差异。由此进一步构造出了合理性指标函数和优化模型。

ii) 层次分析法：答卷中有很多的都是以层次分析为主要方法对问题进行研究评价的，但所考虑的因素不尽相同，在比较矩阵和权重的确定上五花八门，多数都是以个人的主观意志确定的，一般认为这种方法缺少可靠的依据。使用较好是：综合考虑一等奖金额、低项奖金额、中奖率和中奖面等因素，并经社会调查得到了彩民对各因素重视的程度，确定了相应的权重。评委们普遍地认为用层次分析法研究这个问题，不是十分有效的方法，使用得当也只能对问题(一)进行讨论，解决问题(二)却无能为力。

iii) 分类加权法：将彩民分为风险喜好型、风险厌恶型和中性型三类，不同类型的彩民对各因素的看法不同。有的队是根据社会调查或网上资料数据给出相应的权重。一般认为这种方法也有一定的主观性。

另外，问题(三)要求“给报纸写一篇短文，供彩民参考”。它是建模的一部分，这也是今年 B 题的特点之一，主要是为考核学生对社会、生活中的热点问题的认识和理解能力，我们的大学生是社会大家庭中的一员，应该将自己熔入社会之中去。这个问题也是为了考核学生的文字表达能力，这也是我们数学建模重点要求的一个方面。赛后有老师问我：“提出这个问题的初衷是什么”?按我的想法是：“从正面向老百姓介绍购彩的意义，引导彩民科学、理智地

积极购买彩票,而不是教彩民如何下注、如何选号能中大奖"!事实上,从问题的提法上就已体现出来了:"通过报纸给彩民的建议",我想正规的报纸刊载相关文章一定也是这样的内容。最让我高兴的是,很多队都写出了非常精彩的短文。这里把其中两篇短文的主要观点介绍给大家:

《把握机会,理智博彩》:购买彩票,奉献爱心;把握尺度,合理购彩;讲究投注的科学性,树立彩民良好形象。

《谨慎"挂彩"》:不要把彩票看成赌博;不要把买彩票看成是投资;不要把买彩票单纯是为了中奖;不要超过自己的经济实力购买彩票。

他们在文章中不仅提出了自己的观点,而且也给出了有理有据的论述,得到了评委们的一致好评,我想这对他们能够获得好的奖励不无关系。

4　存在的问题

从送全国评奖的三佰多份答案卷(B 题)来看,三位同学三天内完成这样一篇研究论文应该是成功之作了,但还是存在这样那样的问题,根据我的感觉,在这里把我认为较普遍的问题提出来,供大家参考。

1) 有些队对题目的把握不准,审题不清,偏了题,所以没有正确地解决好问题。例如:题目中彩票的设奖率为 50%,单注彩票为 2 元等指标是给定的,现行的彩票方案也都有是如此,而用大量篇幅对此进行讨论是不合适的。

2) 多数用层次分析法的队都是主观定权的,有的偏向于一等奖金额,有的偏向于中奖率,一般认为都是不合适的。凡是这样的答卷所得的"最好"方案必定是 23 号(7/35,无特别号),该方案显然不是最好的。

3) 有些队,对问题(二)没有给出明确的优化模型,只是在评价已有方案的基础上,通过定性的分析、或综合几种认为较好的方案、或主观修改了某种方案的奖项和设奖比例等而得到一种方案,就认为是"最好"的了。

4) 有很多队的概率计算有错误,较普遍的是"传统型"(6 + 1/10)中四、五、六等奖的概率和 23 号方案的概率的计算,错的最多的是 6 +.1/10 中六等奖的概率。主要是忽略了"若已中高级别的奖就不再兼中低级别的奖"这一事实,计算了重复中奖的概率。譬如:六等奖的概率为

$$P_6 = \frac{2C_9^1C_{10}^1C_{10}^1C_{10}^1 + 3C_9^1C_9^1C_{10}^1C_{10}^1 - (3C_9^1C_9^1 + 2C_9^1)}{10^6} = 4.2309 \times 10^{-2}$$

事实上,六等奖可能的组合和相应的组合数如下:

$$a\ b\ \bar{c} * * * :\ C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1\ ;\ \bar{a}\ b\ c\ \bar{d} * * :\ C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1$$
$$* \ \bar{b}\ c\ d\ \bar{e} * :\ C_{10}^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_{10}^1\ ;\ * * \bar{c}\ d\ e\ \bar{f} :\ C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1$$
$$* * * \bar{d}\ e\ f :\ C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_9^1$$

其中 $*$ 表示可以任意取的号码数;$\bar{a}$,$\bar{b}$,$\bar{c}$,$\bar{d}$,$\bar{e}$,$\bar{f}$ 表示不能取相应的号码数。

注意到,这里可能含有重复的组合,即 $ab\bar{c}***$ 中可能含 $ab\bar{c}de\bar{f}$、$ab\bar{c}\bar{d}ef$ 和 $ab\bar{c}def$,组合数分别为 $C_9^1 \cdot C_9^1$、$C_9^1 \cdot C_9^1$ 和 C_9^1;$***\bar{d}ef$ 中可能含有 $abc\bar{d}ef$,组合数为 C_9^1;$\bar{a}bc\bar{d}**$ 中可能含有 $\bar{a}bc\bar{d}ef$,组合数为 $C_9^1C_9^1$。综上所述,六等奖的组合数为

$$2C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 + 3C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 - (3C_9^1 \cdot C_9^1 + 2C_9^1)。$$

5　进一步要研究的问题

我国的彩票事业还处于发展的阶段，还有一些复杂的问题需要进一步的研究。就本题而言，也有一些值得进一步研究的问题：

1) 关于彩票方案对彩民的吸引力问题，即彩民对待某种彩票方案的心理状态如何？用什么样的心理曲线能够准确地反映出不同类型彩民的心理变化情况？

2) 合理性指标函数的构造问题。

3) 彩票公司发行彩票的收益和风险问题，以及彩民购买彩票的中奖与风险的关系问题。

4) 奖池有奖金的滚动积累，对彩票的发行和对彩民的心理影响问题。

注：对于后面的两个问题有很多不确定的因素，研究起来可能要复杂一些，故此我在命题时有意回避了这两个问题，但有的参赛队想到了，并做了一些相关讨论。

6　几点感想

彩票目前仍是社会上的热点问题之一，这个问题作为赛题提出，也产生了一定的社会效应，《北京日报》于 2002 年 9 月 21 日在报道“2002 年高教社杯大学生建模竞赛”消息的同时，基本上全文刊载了这个题目，在社会上产生了一定的影响。从各赛区和全国组委会统计的情况来看，在本科组的参赛队中选 *B* 题的占了五分之三以上，也充分反应出广大学生对这一问题的兴趣和偏爱，更值得一提的是，在竞赛完以后，有些从来没有买过彩票的老师和同学都去亲身体验了下博彩的感觉，轻轻松松当了一次彩民，也是为福利事业尽了微薄之力。就这样一道题目能产生这样的社会效应，这也是使作者最感到欣慰的。

通过这个问题，也使我进一步地认识到人们常说的一名话“数学无处不在”的内含，现在我觉得可以说：“数学模型无处不在”了。随着科学技术的发展，实际中有大量的实际问题需要用数学建模的方法转化为数学问题，即建立数学模型，然后用计算机来求解，这正是我们数学建模的过程。数学建模将会在工程与数学、工程师与数学家之间架起一座金桥，沟通二者之间的关系，消除二者因处理问题的方法和思维方式的差异而产生的障碍与隔阂。在此，我衷心地希望有更多的老师和同学们加入到数学建模的队伍中来，特别是基础课的老师们，在数学建模中提高自己、找到自己的价值和用武之地，也可以从中得到快乐，也是为我们的数学建模事业健康发展做出应有的贡献。

今年，作为 *B* 题的命题人有幸参加了北京赛区和全国的评卷工作，使我感受最深的就是全国组委的专家教授们为保证评卷工作的准确性和公正性，做了大量深入细致的工作，组织工作迥然有条，他们认真对待每一份答卷、每一个问题。特别是由于参加全国评卷的评委来自于不同赛区和学校，经过组委会的科学分组，对答卷随机编号、密封，使任何一位评委都不会评判到所在赛区的任何一份答卷，并由多年参加评卷工作、又与参赛院校无关的专家负责协调工作，真正做到了公平、公正。这才是竞赛靠实力，拿奖靠水平。

在几天的评卷工作中，同全国组委会和评委会的专家教授们一起工作、一起讨论问题，使自己受益匪浅。同时，有很多老师对 *B* 题也提出了很好的意见和建议，在此一并表示谢

意。

二、"彩票中的数学"问题的优化模型

评价一个方案的优劣,或合理性如何,主要取决于彩票公司和广大彩民两方面的利益。事实上,公司和彩民各得销售总额的50% 是确定的,双方的利益主要就取决于销售总额的大小,即双方的利益都与销售额成正比。因此,问题是怎样才能有利于销售额的增加?即公司采用什么样的方案才能吸引广大的彩民积极踊跃购买彩票?具体地讲,问题涉及到一个方案的设置使彩民获奖的可能性有多大、奖金额有多少、中奖面怎样、各奖项的设置是否合理等因素,这些都对彩民的购买彩票的吸引力产生一定的影响,在这里可用彩民的心理曲线来描述一个方案对彩民的吸引力。另外,一个方案对彩民的影响程度可能与区域有关,即与彩民所在地区的经济状况,以及收入和消费水平有关。为此,我们要考查一个方案的合理性问题,需要综合考虑以上这些因素的影响,这是我们建立模型的关键所在。

1 模型假设与符号说明

1) 假设:

彩票摇奖是公平公正的,各号码的出现是随机的,彩民购买彩票是随机的独立事件;

对同一方案中高级别奖项的奖金比例或奖金额不应低于相对低级别的奖金比例或奖金额;

根据我国的现行制度,假设我国居民的平均工作年限为 $T = 35$ 年。

2) 符号:

r_j —— 第 j 等(高项)奖占高项奖总额的比例,$j = 1,2,3$;

x_j —— 第 i 等奖奖金额均值,$1 \leq i \leq 7$;

P_i —— 彩民中第 i 等奖 x_i 的概率,$1 \leq i \leq 7$;

$\mu(x_i)$ —— 彩民对某个方案第 i 等奖的满意度,即第 i 等奖对彩民的吸引力,$1 \leq i \leq 7$;

λ —— 某地区的平均收入和消费水平的相关因子,称为"实力因子",一般为常数。

2 建模的准备

1) 彩民获各项奖的概率

从已给的29种方案可知,可将其分为四类,K_1:10选6+1(6+1/10)型、K_2:n选$m(m/n)$型、K_3:n选$m+1(m+1/n)$型和K_4:n选$m(m/n)$无特别号型,分别给出各种类型方案的彩民获各奖项的概率公式

$$K_1: P_1 = \frac{1}{5\times 10^6} = 2\times 10^{-7}, P_2 = \frac{4}{5\times 10^6} = 8\times 10^{-7}, P_3 = \frac{2C_9^1}{10^6} = 1.8\times 10^{-5}$$

$$P_4 = \frac{2C_9^1 C_{10}^1 + C_9^1 C_9^1}{10^6} = 2.61\times 10^{-4}, P_5 = \frac{2C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 + 2C_9^1 C_9^1 C_{10}^1}{10^6} = 3.42\times 10^{-3}$$

$$P_6 = \frac{2C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 C_{10}^1 + 3C_9^1 C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 - (3C_9^1 C_9^1 + 2C_9^1)}{10^6} = 4.2309\times 10^{-2}$$

$$K_2: P_i = \frac{C_m^{m-\left[\frac{i}{2}\right]} C_{n-(m+1)}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}}{C_n^m}, i = 1,2,\cdots,7$$

$$K_3:P_i=\frac{C_m^{m-\left[\frac{i-1}{2}\right]}C_{n-(m+1)}^{\left[\frac{i}{2}\right]}}{C_n^m},i=1,2,\cdots,7$$

$$K_4:P_i=\frac{C_m^{m-i+1}C_{n-m}^{i-1}}{C_n^m},i=1,2,3,4,5)$$

各种方案的各个奖项获奖概率及获奖总概率 $P=\sum_i P_i$ 计算如表 1。

表 1

	方案	P_1 (10^{-7})	P_2 (10^{-6})	P_3 (10^{-5})	P_4 (10^{-4})	P_5 (10^{-3})	P_6 (10^{-2})	P_7	$P=\sum_i P_i$
1 - 4	6 + 1/10	2	0.8	1.8	2.61	3.42	4.2309	⋯ ⋯	0.045695
5	7/29	6.40705	4.48494	9.4184	2.8255	2.8255	0.47092	0.029825	0.037742
6	6 + 1/29	6.40705	1.4096	8.4573	8.8802	2.2200	1.4800	0.019734	0.037742
7 - 9	7/30	4.91207	3.43845	7.5646	2.2694	2.3828	0.39714	0.026476	0.033137
10 - 11	7/31	3.80290	2.66203	6.1227	1.8368	2.0205	0.33675	0.023572	0.029208
12 - 14	7/32	2.97101	2.07971	4.9913	1.4974	1.722	0.28700	0.021047	0.025832
15 - 16	7/33	2.34080	1.63856	4.0964	1.2289	1.4747	0.24578	0.018843	0.022941
17 - 18	7/34	1.85887	1.30121	3.3831	1.0149	1.2687	0.21145	0.016916	0.020436
19 - 22	7/35	1.48709	1.04097	2.8106	0.84318	1.0961	0.18269	0.015224	0.018261
23	7/35	1.48709	29.147	118.05	170.51	106.57	⋯ ⋯	⋯ ⋯	0.12483
4 - 25	6 + 1/36	1.19794	3.47402	2.0844	2.9182	0.72954	0.65659	0.008755	0.016367
26	7/36	1.19794	0.838556	2.3480	0.70439	0.95092	0.15849	0.013736	0.016367
27	7/37	0.97130	0.679911	1.9717	0.59152	0.82813	0.13802	0.012422	0.014710
28	6/40	2.6053	1.5632	5.1584	1.2896	2.0634	0.27512	0.028428	0.033425
29	5/60	1.831	0.91557	4.9437	0.98874	2.6202	0.26202	0.045416	0.050806

2) 确定彩民的心理曲线

一般说来，人们的心理变化是一个模糊的概念。在此，彩民对一个方案的各个奖项及奖金额的看法（即对彩民的吸引力）的变化就是一个典型的模糊概念。由模糊数学隶属度的概念和心理学的相关知识，根据人们通常对一件事物的心理变化一般遵循的规律，不妨定义彩民的心理曲线为

$$\mu(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2},\qquad(\lambda>0)$$

其中 λ 表示彩民平均收入的相关因子，称为实力因子，一般为常数。

3) 计算实力因子

实力因子是反应一个地区彩民的平均收入和消费水平的指标，确定一个地区彩票方案应该考虑所在地区的实力因子，在我国不同地区收入和消费水平是不同的，因此，不同地区实力因子应有一定的差异，目前各地区现行的方案不尽相同，要统一来评估这些方案的合理性，就应该对同一个实力因子进行研究。为此，我们以中等地区收入水平（或全国平均水平）为例进行研究。根据相关网站的统计数据，不妨取人均年收入 1.5 万元，按我国的现行制度，平均工作年限 $T=35$ 年，则人均总收入为52.5万元，于是，当 $x_0=52.5$ 万元时，取 $\mu(x_0)=1-e^{-\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^2}=0.5$ （即吸引力的中位数），则有 $\lambda=\frac{5.25\times10^5}{\sqrt{-\ln0.5}}\approx6.30589\times10^5$。

同理,可以算出年收入1万元、2万元、2.5万元、3万元、4万元、5万元、10万元的实力因子如表2。

表2

指标 \ 年收入	1 万元	1.5 万元	2 万元	2.5 万元	3 万元	4 万元	5 万元	10 万元
λ	420393	630589	840786	1050982	1261179	1681571	2101964	4203928

3 模型的建立与求解

问题(一)

要综合评价这些方案的合理性,应该建立一个能够充分反应各种因素的合理性指标函数。因为彩民购买彩票可以认为是一种冒险行为,为此,我们根据决策分析中风险决策的理论,考虑到彩民的心理因素的影响,可取 $\mu(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}$ $(\lambda > 0)$ 为风险决策的益损函数,于是作出如下的指标函数

$$F = \sum_{i=1}^{7} P_i \mu(x_i) \tag{1}$$

即表示在考虑彩民的心理因素的条件下,一个方案的中奖率、中奖面、奖项和奖金设置等因素对彩民的吸引力。另一方面,由题意知,单注所有可能的低项奖金总额为 $L = \sum_{i=4}^{7} P_i x_i$,根据高项奖的计算公式得单注可能的第 j 项(高项奖)奖金额为

$$P_j x_j = (1 - L) r_j = \left(1 - \sum_{i=4}^{7} P_i x_i\right) r_j, \quad j = 1,2,3$$

故平均值为

$$x_j = \frac{\left(1 - \sum_{i=4}^{7} P_i x_i\right) r_j}{P_j}, \quad j = 1,2,3 \tag{2}$$

于是由(1),(2)式得

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{7} P_i \mu(x_i) \\ x_j = \dfrac{\left(1 - \sum_{i=4}^{7} P_i x_i\right) r_j}{P_j}, \quad j = 1,2,3 \\ \mu(x_i) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}, i = 1,2,\cdots,7 \\ \lambda = 6.30589 \times 10^5 \end{cases} \tag{3}$$

利用 Matlab 可算出29种方案的合理性指标值 F 及高项奖的期望值,排在前三位的如表3。

表3

方案	指标	F	x_1	x_2	x_3	排序
9	7/30	4.009×10^{-7}	1.086×10^6	20679	1410	1
11	7/31	3.784×10^{-7}	1.704×10^6	32448	2116	2
5	7/29	3.637×10^{-7}	7.557×10^5	35984	1714	3

问题(二)

根据问题(一)的讨论,现在的问题是取什么样的方案 m/n(n 和 m 取何值)、设置哪些奖项、高项奖的比例 $r_j(j=1,2,3)$ 为多少和低项奖的奖金额 $x_i(i=4,5,6,7)$ 为多少时,使目标函数 $F=\sum_{i=1}^{7}P_i\mu(x_i)$ 有最大值。

设以 $m,n,r_j(j=1,2,3),x_i(i=4,5,6,7)$ 为决策变量,以它们之间所满足的关系为约束条件,则可得到非线性规划模型:

$$\max F=\sum_{i=1}^{7}P_i\mu(x_i)$$

$$s.t.\begin{cases} x_j=\dfrac{\left(1-\sum\limits_{i=4}^{7}P_ix_i\right)r_j}{P_j},\quad j=1,2,3 & (1)\\ \mu(x_i)=1-e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^2}(i=1,2,\cdots,7),\lambda=6.30589\times10^5 & (2)\\ r_1+r_2+r_3=1 & (3)\\ 0.5\le r_1\le0.8 & (4)\\ 6\times10^5\le x_1\le5\times10^6 & (5)\\ a_i\le\dfrac{x_j}{x_{i+1}}\le b_i,i=1,2,\cdots,6 & (6)\\ P_i<P_{i+1},i=1,2,\cdots,6 & (7)\\ 5\le m\le7 & (8)\\ 29\le n\le60 & (9)\\ r_j>0,x_i\ge0,m,n\text{ 为正整数} \end{cases}$$

关于约束条件的说明:

1) 条件(1)(2) 同问题(一);

2) 条件(3)(4) 是对高项奖的比例约束, 的值不能太大或太小,(4) 是根据已知的方案确定的;

3) 条件(5) 是根据题意中一等奖的保底额和封顶额确定的;

4) 条件(6) 中的 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,6)$ 分别为 i 等奖的奖金额 x_i 比 $i+1$ 等奖的奖金额 x_{i+1} 高的倍数,可由问题(一) 的计算结果和已知各方案的奖金数额统计得:

$a_1=10,b_1=233$; $a_2=4,b_2=54$; $a_3=3,b_3=17$; $a_4=4,b_4=20$;

$a_5=2,b_5=10$; $a_6=2,b_6=10$。

5) 条件(7) 是根据实际问题确定的,实际中高等奖的概率 P_i 应小于低等奖的概率 P_{i+1},它的值主要有 m,n 确定。

6) 条件(8)(9) 是对方案中 m,n 取值范围的约束,是由已知的方案确定的;

这是一个较复杂的非线性(整数) 规划,其中概率 P_i 的取值分为四种不同的情况 K_1,K_2,K_3,K_4,都有整数变量 m,n 确定,一般的求解是困难的。为此,利用 Matlab 可求解得最优解为$\{K_2,6,32,0.8,0.09,0.11,200,10,1,0\}$,最优值为 $F=6.8399\times10^{-7}$。故对应的最优方案为:32 选 6(6/32),一、二、三等奖的比例分别为 80%、9%、11%,四、五、六、七等奖的金额分

别为 200、10、1、0 元。

前面是针对中等收入水平的彩民情况考虑的，对于经济发达地区和欠发达地区应有所不同。这里分别对年收入 1 万元、2 万元、2.5 万元、3 万元、4 万元、5 万元、10 万元，工作年限均 35 年的情况进行了讨论，给出适用于相应各种情况的最优方案，如下面的表 4。

表 4

年收入 / 指标	1 万元	2 万元	2.5 万元	3 万元	4 万元	5 万元	10 万元
λ	420393	840786	1050982	1261179	1681571	2101964	4203928
最优方案	5 + 1/33	6/32	7/30	6/37	6 + 1/32	7/33	7/35
F	8.255×10^{-7}	4.623×10^{-7}	4.103×10^{-7}	3.223×10^{-7}	2.475×10^{-7}	2.075×10^{-7}	1.828×10^{-7}
r_1	0.80	0.80	0.73	0.70	0.73	0.73	0.80
r_2	0.10	0.9	0.17	0.15	0.19	0.18	0.13
r_3	0.10	0.11	0.10	0.15	0.07	0.09	0.07
x_1	6.5×10^5	6.18×10^5	1.38×10^6	1.46×10^6	2.23×10^6	2.99×10^6	3.91×10^6
x_2	3037	120004	47506	52172	22721	1.07×10^5	94252
x_3	607	600	1235	1739	1507	1974	1746
x_4	138	200	100	200	100	200	103
x_5	7	10	10	20	20	10	20
x_6	1	1	5	2	2	2	5
x_7	0	0	0	0	0	0	3

问题(三)略

参考文献：

[1] 中国彩票网：http://www.cpiao.com

[2] 中国经济景气监测中心：http://www.cemac.org.cn

[3] 杨纶标.模糊数学原理及应用[M].武汉：华南理工大学出版社，1998

[4] 朱智贤，林崇德.思维发展心理学[M].北京：北京师范大学出版社，1986

[5] 钱颂迪等.运筹学[M].北京：清华大学出版社，1999

The Optimal Model of the Problem of Mathematics in Lottery Ticket and Its Comments

HAN Zhong-geng

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, PLA, Zhengzhou 450002)

Abstract: In this paper, the background and origin of problem B of 2002 Chinese Undergraduate Mathematics Contest in Modeling are introduced. The appropriate modeling idea and basic method are also presented. Besides this, the author put forward the existing problem and those to be further studied. Finally, a concrete optimal model and its solution is given.

Keywords: lottery ticket scheme; the probability of winning prize; psychological curve; attraction