维普资讯 http://www.cqvip

第 20 卷 第 5 期
2003 年 03 月
工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol.20 No.5
Mar. 2003

文章编号:1005-3085(2003)05-0124-06

球赛赛程安排的模型求解

张 佳， 谢春河， 刘元贵
指导老师： 姜 永， 陈超英， 邱先言
(福建农林大学,福州 350002)

编者按：本文的主要特色是:对 n 为一般的偶数和一般的奇数的情形分别设计了求出均衡性最优的赛程安排的算法。该算法设计简单易懂,易于操作。文中利用此算法对 $n=8,9$ 的情形得出的赛程安排的均衡性也确实是最优的。

摘 要：本文针对 n 支球队之间举行单循环赛的赛程安排这个实际问题,同时考虑到整个赛程的公平性及优劣情况,对于 n 的奇偶性不同,根据现行赛程安排方法,提出了相应不同的数学模型。当 n 为偶数时,我们采用了“循环组合法”进行求解,得到上限为$\frac{n-4}{2}$,从而得到 $n=8$ 时的上限为 2; 当 n 为奇数时,我们采用了“蛇形回转法”对赛程安排方案求解,得到上限为$\frac{n-3}{2}$,从而得到 $n=9$ 时的上限为 3。在评价赛程安排公平性方面,我们采用方差检验对模型进行评价,得到相对合理的结果。

关键词：赛程安排;公平性
分类号：AMS(2000) 68M20　　**中图分类号**：O226　　**文献标识码**：A

1 问题的提出(略)

2 模型的假设(略)

3 记号约定

A_1、A_2、A_3、$A_4\cdots A_n$ 分别表示参加比赛的第 n 支队伍；

A_{ik}表示参加比赛的第 i 支队伍所参加的第 k 场比赛在整个赛程的场次数；

U 表示各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限。

4 模型的建立

1) 5 支球队比赛时的赛程安排

对于 5 支球队的比赛，我们很容易就可以给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程。结果如下

维普资讯 http://www.cqvip

	A	B	C	D	E	每两场比赛间相隔场次数		
A	×	1	9	6	3	1	2	2
B	1	×	7	4	10	2	2	2
C	9	7	×	2	5	2	1	1
D	6	4	2	×	8	1	1	1
E	3	10	5	8	×	1	2	1

2）n 支球队比赛时的赛程安排

a).$n \geqslant 5$ 且 n 为偶数时的赛程安排

命题 1　对于任意一个偶数 n，且 $n \geqslant 5$ 时，n 支球队比赛，$U = \frac{n-4}{2}$。

证明　由于整个赛程的总场次数为$\frac{n(n-1)}{2}$，而单循环赛中每一支球队的总场次数均为 $n-1$ 场，所以任意一支球队 A_i 平均每$\frac{n}{2}$场就有一场自己的比赛。若 $U \geqslant \frac{n}{2}-1$，则所有球队的每两场平均间隔数均为$\frac{n-2}{2}$，即每支球队均应保证每两场比赛间隔数为$\frac{n-2}{2}$。显然，这是不可能的。故 $U < \frac{n-2}{2}$，即 $U \leqslant \frac{n-4}{2}$。

当 n 为偶数时，整个球赛恰好可以分为 $n-1$ 轮进行，且每一轮中所有的球队均能参赛。为了保证整个赛程的公平性，我们必须使各队每两场比赛中间相隔的场次数尽可能均匀分布。在公平的情况下，所有相同的最小的间隔场次数即我们所要求的上限。在这里，我们用表一所示的"循环组合法"安排赛程，从而达到目的。

表 1　$n \geqslant 5$ 且 n 为偶数时的赛程安排表

场　次	1	2	3	4		$\frac{n}{2}$
第一轮	A_1	A_3	A_4	A_5	…	$A_{n/2+1}$
	A_2	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}	…	$A_{n/2+2}$
第二轮	A_1	A_4	A_5	A_6	…	$A_{n/2+2}$
	A_3	A_2	A_n	A_{n-1}	…	$A_{n/2+3}$
第三轮	A_1	A_5	A_6	A_7	…	$A_{n/2+3}$
	A_4	A_3	A_2	A_n	…	$A_{n/2+4}$
第四轮	A_1	A_6	A_7	A_8	…	$A_{n/2+4}$
	A_5	A_4	A_3	A_2	…	$A_{n/2+5}$
…	…	…	…	…	…	…
第 $n-2$ 轮	A_1	A_n	A_2	A_3	…	$A_{n/2-2}$
	A_{n-1}	A_{n-2}	A_{n-3}	A_{n-4}	…	$A_{n/2-1}$
第 $n-1$ 轮	A_1	A_2	A_3	A_4	…	$A_{n/2-1}$
	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}	A_{n-3}	…	$A_{n/2}$

由表中可以看到，对于任意一个队伍 A_i，它在各轮比赛中的间隔场次数一定处在区间$[\frac{n-4}{2},\frac{n}{2}]$之间，即 $U \geqslant \frac{n-4}{2}$。又 $U \leqslant \frac{b-4}{2}$。故 $U = \frac{n-4}{2}$。

b)、$n \geqslant 5$ 且 n 为奇数时的赛程安排

当 n 为奇数时，不能采用偶数的方法。在这里，我们采用了一种新的方法，并称之为

维普资讯 http://www.cqvip

“蛇形回转法”。以 9 支球队为例，示意如图 1 所示

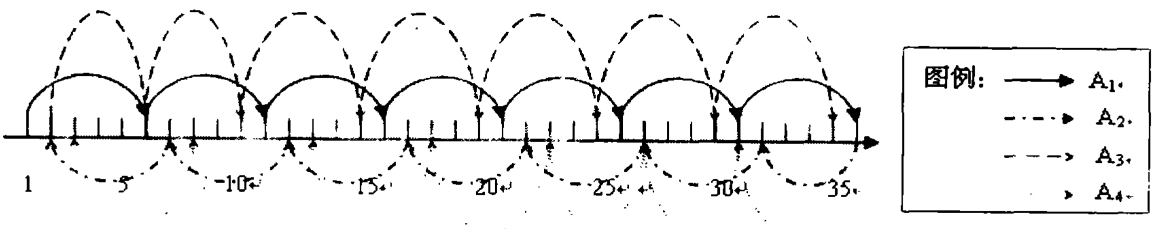

图 1

图中 A_1 箭头的两端的坐标即为 A_1 在整个赛程中所处的场次，A_i 同理可推。赛程具体安排方法为

1). 先将 A_1 置于第一场比赛，再依次每$\frac{n+1}{2}$场参加一场比赛，直到整个赛程结束。

2). 再将 A_2 置于 A_1 结束的位置，开始往回隔 1 次每$\frac{n-1}{2}$场参加一场比赛，然后依次每场参加一场比赛，直到整个赛程的开始。

3). 再将 A_3 置于 A_2 结束的位置，开始往回隔 2 次每$\frac{n-1}{2}$场参加一场比赛，然后依次每$\frac{n+1}{2}$场参加一场比赛，直到整个赛程结束。

4). A_i 依此类推，置于 A_{i-1} 结束的位置，开始往回隔$(i-1)$次每$\frac{n-1}{2}$场参加一场比赛，然后依次每$\frac{n+1}{2}$场参加一场比赛，直到整个赛程开始或结束。

5). 最后将 A_n 安排在其它的比赛场次即可。利用这种方法，我们可以得到 A_i 在整个赛程中所参加场次的推导公式，当 i 为奇数且 $i<n$ 时

$$A_{ik}=\begin{cases}\dfrac{i+1}{2}+(k-1)\dfrac{n-1}{2}, & k\leqslant i-1,\\ \dfrac{i+1}{2}+(i-1)\dfrac{n-1}{2}+(k-i)\dfrac{n+1}{2}, & i\leqslant k\leqslant n-1.\end{cases}\tag{1}$$

当 i 为偶数时

$$A_{ik}=\begin{cases}\dfrac{i+2}{2}+(k-1)\dfrac{n+1}{2}, & k\leqslant n-i-1,\\ \dfrac{i+2}{2}+(n-i-1)\dfrac{n+1}{2}k(k+i-n)\dfrac{n-1}{2}, & n-i\leqslant k\leqslant n-1.\end{cases}\tag{2}$$

当 $i=n$ 时

$$A_{ik}=1+\left[\frac{k}{2}\right]\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(\frac{n+1}{2}\right),1\leqslant k\leqslant n-1\tag{3}$$

我们由表中可以看到，由于 A_i 每两场之间的间隔均为$\frac{n-1}{2}$或$\frac{n-3}{2}$场，即此时每两场比赛中间相隔的场次数的上限为$\frac{n-3}{2}$。

维普资讯 http://www.cqvi

命题 2 对于任意一个奇数 n，且 $n \geqslant 5$ 时，n 支球队比赛，$U = \frac{n-3}{2}$。

证明 由于整个赛程的总场次数为$\frac{n(n-1)}{2}$，而单循环赛中每一支球队的总场次数均为 $n-1$ 场，即任意一支球队 A_i 平均每$\frac{n}{2}$场就有一场自己的比赛。若 $U \geqslant \frac{n}{2}-1$，则所有球队的每两场平均间隔数均为$\frac{n-2}{2}$，即每支球队均应保证每两场比赛间隔数为$\frac{n-2}{2}$。显然，这是不可能的。故 $U < \frac{n-2}{2}$，即 $U \leqslant \frac{n-3}{2}$。又根据上述的“蛇形回转法”可知，$U \geqslant \frac{n-3}{2}$，故 $U = \frac{n-3}{2}$。

3）$n=8$，$n=9$ 时的赛程安排

a）. n 为 8 时编制过程，查表 1 即得到表 2

表 2 $n=8$ 时的赛程安排表

场 次	1	2	3	4
第一轮	A_1	A_3	A_4	A_5
	A_2	A_8	A_7	A_6
第二轮	A_1	A_4	A_5	A_6
	A_3	A_2	A_8	A_7
第三轮	A_1	A_5	A_6	A_7
	A_4	A_3	A_2	A_8
第四轮	A_1	A_6	A_7	A_8
	A_5	A_4	A_3	A_2
第五轮	A_1	A_7	A_8	A_2
	A_6	A_5	A_4	A_3
第六轮	A_1	A_8	A_2	A_3
	A_7	A_6	A_5	A_4
第七轮	A_1	A_2	A_3	A_4
	A_8	A_7	A_6	A_5

结果如下

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	每两场比赛间相隔场次数						休息总场数
A_1	×	1	5	9	13	17	21	25	3	3	3	3	3	3	18
A_2	1	×	20	6	23	11	26	16	4	4	4	3	2	2	19
A_3	5	20	×	24	10	27	15	2	2	4	4	4	3	2	19
A_4	9	6	24	×	28	24	3	19	2	2	4	4	4	3	19
A_5	13	23	10	28	×	4	18	7	2	2	2	4	4	4	18
A_6	17	11	27	14	4	×	8	22	3	2	2	2	4	4	17
A_7	21	26	15	3	18	8	×	12	4	3	2	2	2	4	17
A_8	25	16	2	19	7	22	12	×	4	4	3	2	2	2	17

b）. n 为 9 时编制过程

我们利用前面提到的“蛇形回转法”对方案进行编排，我们可轻松地排出 9 支球队的赛

维普资讯 http://www.cqvip

程安排

A_1	$1 \xrightarrow{5} 6 \xrightarrow{5} 11 \xrightarrow{5} 16 \xrightarrow{5} 21 \xrightarrow{5} 26 \xrightarrow{5} 31 \xrightarrow{5} 36$
A_2	$2 \xleftarrow{5} 7 \xleftarrow{5} 12 \xleftarrow{5} 17 \xleftarrow{5} 22 \xleftarrow{5} 27 \xleftarrow{5} 32 \xleftarrow{4} 36$
A_3	$2 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{4} 10 \xrightarrow{5} 15 \xrightarrow{5} 20 \xrightarrow{5} 25 \xrightarrow{5} 30 \xrightarrow{5} 35$
A_4	$3 \xleftarrow{5} 8 \xleftarrow{5} 13 \xleftarrow{5} 18 \xleftarrow{5} 23 \xleftarrow{4} 27 \xleftarrow{4} 31 \xleftarrow{4} 35$
A_5	$3 \xrightarrow{4} 7 \xrightarrow{4} 11 \xrightarrow{4} 15 \xrightarrow{4} 19 \xrightarrow{5} 24 \xrightarrow{5} 29 \xrightarrow{5} 34$
A_6	$4 \xleftarrow{5} 9 \xleftarrow{5} 14 \xleftarrow{4} 18 \xleftarrow{4} 22 \xleftarrow{4} 26 \xleftarrow{4} 30 \xleftarrow{4} 34$
A_7	$4 \xrightarrow{4} 8 \xrightarrow{4} 12 \xrightarrow{4} 16 \xrightarrow{4} 20 \xrightarrow{4} 24 \xrightarrow{4} 28 \xrightarrow{5} 33$
A_8	$5 \xleftarrow{4} 9 \xleftarrow{4} 13 \xleftarrow{4} 17 \xleftarrow{4} 21 \xleftarrow{4} 25 \xleftarrow{4} 29 \xleftarrow{4} 33$
A_9	$1 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{5} 10 \xrightarrow{4} 14 \xrightarrow{5} 19 \xrightarrow{4} 23 \xrightarrow{5} 28 \xrightarrow{4} 32$

结果如下

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	每两场比赛间相隔场次数							休息总场数
A_1	×	36	6	31	11	26	16	21	1	4	4	4	4	4	4	4	28
A_2	36	×	2	27	7	22	12	17	32	4	4	4	4	4	4	3	27
A_3	6	2	×	35	15	30	20	25	10	3	3	4	4	4	4	4	26
A_4	31	27	35	×	3	18	8	13	23	4	4	4	4	3	3	3	25
A_5	11	7	15	3	×	34	24	29	19	3	3	3	3	4	4	4	24
A_6	26	22	30	18	34	×	4	9	14	4	4	3	3	3	3	3	23
A_7	16	12	20	8	24	4	×	33	28	3	3	3	3	3	3	4	22
A_8	21	17	25	13	29	9	33	×	5	3	3	3	3	3	3	3	21
A_9	1	32	10	23	19	14	28	5	×	3	4	3	4	3	4	3	24

4)整个赛程的公平性指标

事实上,在 5 个队时,若要保证每个队不连续比赛,必然有一个队的比赛场次为 1,4,7,10,另一个队的比赛场次为 2,4,6,8(或 3,5,7,9),这两个队的比赛间隔相差太多,极不合理! 对于 n 比较大的情况,这种矛盾也是必然存在的。为了衡量整个赛程的公平性,保证每两场比赛间相隔场次数尽可能均匀,在这里我们采用方差分析对模型进行检验。

计算得表 3

表 3 (a) n 为 8 时的方差检验结果($\alpha = 0.05$)

差异源	SS	df	MS	F	P − value	F crit
组　间	1.145833	7	0.16369	0.193526	0.985145	2.249024
组　内	33.83333	40	0.845833			
总　计	34.97917	47				

表 3 (b).n 为 9 时的方差检验结果($\alpha = 0.05$)

差异源	SS	df	MS	F	P − value	F crit
组　间	6.031746	8	0.753968	4.191176	0.000591	2.115222
组　内	9.714286	54	0.179894			
总　计	15.74603	62				

维普资讯 http://www.cqvip

从表 3 中我们可以看出，n 为 8 时通过检验，即各组间差异不大，结果较为理想，体现了一定的公平性，从而验证了我们的模型。而 n 为 9 时，未能通过检验，即各组间还存在一定差异，有不公平的现象。但由于每循环定有一个队轮空，而在首尾循环显然不如在中间循环轮空，此现象无法避免。再说编排方案中各队每两场比赛间相隔场次数分布较为均匀，至多只有一场之差。故仍可接受，认为赛程安排基本公平。

5　模型的评价和推广

1）模型的评价

(i)本模型较好的解决球队赛程安排的公平性问题，优点在于：

a)应用排列组合的方法对赛程安排进行一定的限制，避免了赛程安排盲目性；b)本模型具有较强的操作性，便于组织人员用于编排赛程；c)本模型在建立的进程中，充分应用了各种方法来求相对公平的赛程，具有一定的推广性。

(ii) 不足以及需要改进的地方在于：

本模型只适合在最理想的状态下进行比赛，而不考虑象天气因素以及其它原因造成的比赛间隔。

2）模型的推广

在参赛队数较多的情况，可将全部参赛队分组后按组安排单循环赛程，方便比赛的组织管理，减少人力物力。

参考文献：

[1]　姜启源．数学模型（第二版）[M]．北京：高等教育出版社，1991

[2]　范金城．工程数学：概率论与数理统计 [M]．沈阳：辽宁大学出版社，1999

[3]　徐宁迎．EXCEL 电子表格与生物统计 [M]．北京：中国农业科技出版社，2000

[4]　李尚志．数学建模竞赛教程 [M]．南京：江苏教育出版社，1996

[5]　周义仓等．数学建模实验 [M]．西安：西安交通大学出版社，1999

Answers to the Model of the Arrangements of Ball – games' Processes

ZHANG Jia,　XIE Chun-he,　LIU Yuan-gui

Advisors:　JIANG Yong,　CHEN Chao-ying,　QIU Xian-yan

(Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002)

Abstract: This article is aimed at solving the practical problems which are the arrangements of single-round robin among teams. Considering the justice and the quality of the whole process, the model puts forward the corresponding method of the arrangements of processes based on n. when n is even number, we conclude that the upper limit is $(n-4)/2$ by using "circular technique". When n is odd number, we conclude that the upper limit is $(n-3)/2$ by using "S – shaped technique". At the end of this article, we obtain the reasonable results when we use "variance analysis" in evaluating the justice of processes.

Keywords: arrangements of ball games' processes; justice