平面度误差的最小二乘法分析

张　昉
(沙洲职业工学院, 江苏 张家港 215600)

摘　要: 本文就平面度误差的数学模型与按最小乘法建立理想平面(评定基准)的数学模型展开分析讨论; 并结合实例分析, 得出较客观地评定平面度误差或测量较大平面的平面度误差, 最小二乘法是最佳方法。

关键词: 最小二乘法; 平面度误差
中图分类号: TG84　　文献标识码: B　　文章编号: 1671-5276(2002)03-0017-03

Analysis of Least Square Method for Flatness Error

ZHANG Fang
(Shazhou Vocational Institute of Technology, JS Zhangjiagang 215600, China)

Abstract: The paper studies the mathematical model of flatness error and the ideal plane made by least square method. With illustration of practical cases, the author reaches the conclusion that least square method is the best one in judging and measuring larger plane's flatness error.

Key words: least square method; flatness error

1　引言

平面度误差是指被测实际表面对其理想平面的变动量。理想平面是评定平面度误差的评定基准, 而评定基准的方位不同求得的平面度误差值也就不同。若用水平仪、自准直仪按节距法测量实际表面上各点相对于测量基准的平面度误差时, 确定评定基准的方法可用: 简便法、最小二乘法和最小包容区域法。本文着重分析介绍按最小二乘法来确定评定基准, 从而求得平面度误差值。与另外两种方法相比, 最小二乘法能准确而充分地利用全部原始观测数据所提供的信息, 较客观地评定出不需要经过多次试算的平面度误差, 而且可直接运用于电子计算机运算, 使平面度误差的计算达到迅速、准确、可靠。

2　建立被测实际表面的数学模型

平面度误差是指被测实际表面不平的程度, 而平面在空间直角坐标系中, 它的方程一般为:

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

若令 $a_1 = -\dfrac{D}{C}$, $a_2 = -\dfrac{A}{C}$, $a_3 = -\dfrac{B}{C}$, 则平面一般方程可写成为:

$$Z = a_1 + a_2 X + a_3 Y$$

设实际表面上的任意点 P_{ij} 点的位置由 X_i、Y_j、Z_{ij} 三个坐标确定。X_i、Y_j、Z_{ij} 分别为被测实际表面上任意点 P_{ij} 沿 X 坐标轴、Y 坐标轴、Z 坐标轴方向测得的向量值(图 1)。

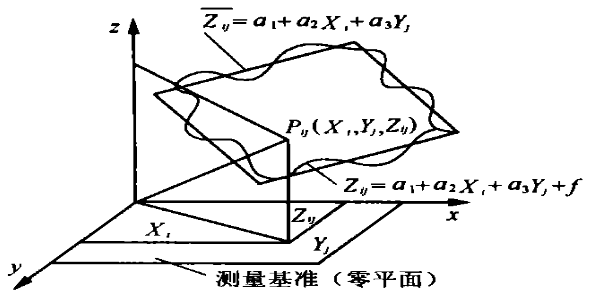

图 1　被测实际表面与评定基准示意图

若 Z_{ij} 和另两个自变量 X_i, Y_j 之间的内在关系是一个平面, 实际表面上的各点与此平面的偏离是由一些随机因素影响引起的, 因此可假设通过试验测得 N 组观测数据: $P_{ij}(X_i, Y_j, Z_{ij})$　$i = 0, 1, 2, \cdots, k$,　$j = 0, 1, 2, \cdots, m$。

则三维空间实际表面的数学模型为:

收稿日期: 2001-12-19

$$\begin{cases} Z_{00} = \alpha_1 + \alpha_2 X_0 + \alpha_3 Y_0 + f_{00} \\ Z_{10} = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_0 + f_{10} \\ \cdots \\ Z_{k0} = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_0 + f_{k0} \\ Z_{k1} = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_1 + f_{k1} \\ \cdots \\ Z_{km} = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_m + f_{km} \end{cases} \tag{1}$$

设 $Z = \begin{pmatrix} Z_{00} \\ Z_{10} \\ \vdots \\ Z_{k0} \\ \vdots \\ Z_{km} \end{pmatrix}$　$x = \begin{pmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 1 & X_0 & Y_0 \\ \cdots & & \\ 1 & X_k & Y_m \end{pmatrix}$

$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$　$f = \begin{pmatrix} f_{00} \\ f_{10} \\ \cdots \\ f_{k0} \\ \cdots \\ f_{km} \end{pmatrix}$

式中：α_1、α_2、α_3 是三个待估计的参数，X_i、Y_j 是两个可以精确控制的一般量，f_{ij} 是被测实际表面上各测点相对于评定基准的偏差，它是 N 个相互独立且服从同一正态分布（$\alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_j + \sigma$）的随机变量。则实际表面的数学模型(1)就可写成矩阵形式：

$$Z = \alpha X + f \tag{2}$$

3　最小二乘法的评定分析

对于长方形或正方形实际表面的平面度原始观测数据的获得，可用删格式布置被测实际表面上的测量截面和测点，即选择测量截面的方向与被测实际表面纵、横向平行，测量顺序为：$A \to B \to C$，$A \to B' \to C$，然后以 $A \to B$ 截面上各测点为始点，平行地测量 n 个截面 $P_1 \to P_1'$，$P_2 \to P_2'$，……，以 A 为零点，计算其他测点相对零平面（评定基准）的误差(图 2)。评定基准的方位随着对被测实际表面数学模型(2)中参数 α 的估计方法，不同而异不同方位的评定基准所求得的平面度误差值亦不相同。科学而常用的确定评定基准的方法，是最小二乘法，即在确定评定基准时，应使被测实际表面上的各点到最小二乘平面的距离的平方和为最小。

用最小二乘法估计参数 α_1、α_2、α_3，设 a_1、a_2、a 分别为α_1、α_2、α_3 的最小二乘估计，则评定基准的数学模型为$\overline{Z_{ij}} = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_j$。

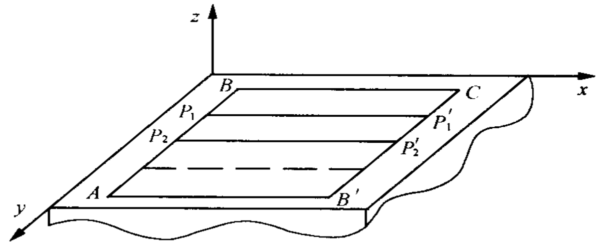

图 2　测量平面度误差时的布点示意图

由最小二乘法可知，a_1、a_2、a_3 应使得被测实际表面上全部观测值 Z_{ij} 与评定基准的回归值$\overline{Z_{ij}}$ 的偏差平方和达到最小，即：

$$S = \sum (Z_{ij} - \overline{Z_{ij}})^2 - \sum (Z_{ij} - a_1 - a_2 X_i - a_3 Y_j)^2 = \text{最小}$$

对于通过试验给定的数据（X_i、Y_j、Z_{ij}），S 是 a_1、a_2、a_3 的非负二次式，所以最小值一定存在，根据极限定理，a_1、a_2、a_3 应是下列方程的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a_1} = -2\sum (Z_{ij} - a_1 - a_2 X_i - a_3 Y_j) = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_2} = -2\sum (Z_{ij} - a_1 - a_2 X_i - a_3 Y_j) X_i = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_3} = -2\sum (Z_{ij} - a_1 - a_2 X_i - a_3 Y_j) Y_i = 0 \end{cases}$$

将该正规方程进一步简化为：

$$\begin{cases} Na_1 + (\sum X_i) a_2 + (\sum Y_j) a_3 = \sum Z_{ij} \\ (\sum X_i) a_1 + (\sum X_i^2) a_2 + (\sum X_i Y_j) a_3 = \sum X_j Z_{ij} \\ (\sum X_j) a_1 + (\sum X_i Y_j) a_2 + (\sum Y_j^2) a_3 = \sum Y_j Z_{ij} \end{cases} \tag{3}$$

令

$$B = \begin{pmatrix} N & \sum X_i & \sum Y_j \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i Y_i \\ \sum J_i & \sum X_i Y_i & \sum Y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \sum Z_{ij} \\ \sum X_i Z_{ij} \\ \sum Y_i Z_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

则三维空间线性方程组(3)的解可用矩阵形式表达，当 $B \neq 0$ 时则：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

式中 $a_j = \frac{1}{|B|}(B_{1j}A_1 + B_{2j}A_2 + B_{3j}A_3)$, $j = 1$、2、3, B_{ij} 为 $|B|$ 元素 b_{ij} 的代数余子式. 如:

$$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

4　应用举例

若用分度值为 0.01mm/m 的合像水平仪按图 3 所示网络布点测量一块小平板的平面度误差, 被测实际表面上各测点在直角坐标系中的坐标值 (X_i, Y_j, Z_{ij}) 列于表 1 中, 则可按上式(4)求得: $a_1 = 6.95$, $a_2 = -2.00$, $a_3 = -0.80$, 则被测实际表面的评定基准回归方程为: $Z_{ij} = 6.95 - 2.00X_i - 0.80Y_j$, 因此可以算出被测实际表面上各测点相对于此评定基准回归值的误差值为:

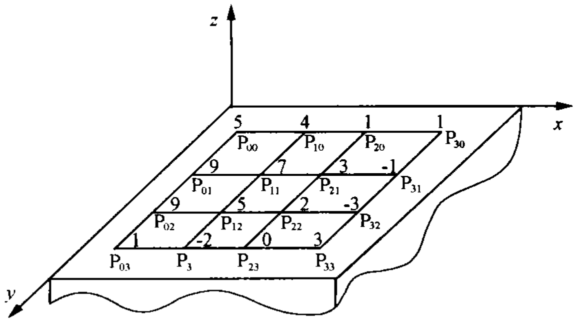

图 3　平面度误差测得数据

$$f_{ij} = Z_{ij} - \overline{Z_{ij}} = Z_{ij} - (6.95 - 2.00X_i - 0.80Y_j)$$

取附表中被测实际表面上各测点相对于评定基准回归值的最大正、负误差的绝对值之和作为工件整体的平面度误差, 即 $f = |f_{33\max}| + |f_{13\min}| = |+4.45| + |-4.45| = 9.00\mu m$

附表　最小二乘法的数据处理

测点 P_{ij}	实际表面测定坐标值									评定基准回归值的坐标值 $\overline{Z}_{ij}$	平面度误差 f_{ij}
	X_i	Y_i	Z_{ij}	X_i^2	Y_j^2	Z_{ij}^2	X_iY_j	X_iZ_{ij}	Y_jZ_{ij}		
P_{00}	0	0	+5	0	0	1	0	0	0	+6.95	−1.95
P_{10}	1	0	+4	1	0	4	0	4	0	+4.95	−0.95
P_{20}	2	0	+1	4	0	0	0	2	0	+2.95	−1.95
P_{30}	3	0	+1	9	0	9	0	3	0	+0.95	+0.05
P_{01}	0	1	+9	0	1	81	0	0	9	+6.15	+2.85
P_{11}	1	1	+7	1	1	49	1	7	7	+4.15	+2.85
P_{21}	2	1	+3	4	1	9	2	6	3	+2.15	+0.85
P_{31}	3	1	−1	9	1	1	3	−3	−1	+0.15	−1.15
P_{02}	0	2	+9	0	4	81	0	0	18	+5.35	+3.65
P_{12}	1	2	+5	1	4	25	2	5	10	+3.35	+1.65
P_{22}	2	2	+2	4	4	4	4	4	4	+1.35	+0.65
P_{32}	3	2	−3	9	4	9	6	−9	−6	−0.65	−2.35
P_{03}	0	3	+1	0	9	25	0	0	3	+4.55	−3.55
P_{13}	1	3	−2	1	9	16	3	−2	−6	+2.55	−4.55
P_{23}	2	3	0	4	9	1	6	0	0	+0.55	−0.55
P_{33}	3	3	+3	9	9	1	9	9	9	−1.45	+4.45
Σ	24	24	44	56	56	316	36	26	50		

5　结论

最小二乘法评定平面度误差从数理统计分析观点来看, 能够准确地和充分地处理原始观测数据所提供的信息, 较客观地评定平面度误差, 有利于采用电子计算机进行运算, 尤其适用在测量较大平面的平面度误差。测量较大平面时, 因其布点较多, 若不用最小二乘法, 则往往需要经过许多次试算, 使计算变得繁琐, 而采用最小二乘法只需简单的四则运算, 不仅较易掌握, 且可迅速准确地求得其平面度的误差。

参考文献:

[1] 肖云茹. 概率统计计算方法[M]. 天津: 南开大学出版社, 1994.

[2] 傅成昌. 形位误差检测技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 1990.

[3] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 北京: 北京机械工业出版社, 1985.