第20卷 第5期
2003年03月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.20 No.5
Mar. 2003

文章编号:1005-3085(2003)05-0117-07

赛 程 安 排

崔 凯, 杨 飞, 张 艳
指导教师: 张福利
(南京审计学院,南京 210029)

编者按:本文最显著的优点是:设计了简单有效的算法,对参赛队数 n 的一切可能值,都能立即得出均衡性最优的赛程安排,并对算法的合理性和所得方案的最优性给出了足够令人信服的证明。该算法简单易行,特别是对 n 为奇数时的算法更为特色突出。

文中也有明显的缺点。比如,未按题意要求明确地列出 $n=9$ 时的赛程安排及各队休息场次表;讨论休息总场次时对"方差"这一概念的使用也有误。

摘 要:本文通过建立数学模型研究了赛程安排问题。首先,我们运用了"排除-假设法"给出了5支球队参赛的赛程安排,并使各队每两场比赛中间都至少相隔一场。然后,在公平性的前提下,给出了各队每两场比赛中间间隔的场次数的上限,我们按参赛队的队数 N 分两种情况讨论:①当 N 是偶数时,运用"最大号固定右上角逆时针轮转法";②当 N 是奇数时,运用"最小号固定双向轮转法"。得出的上限公式均为:上限 $=[(n-3)/2]$。最后,考虑到体现公正性指标的不唯一性,我们又在模型优化中给出了其他指标,并用这些指标衡量了我们排出的赛程的优劣。

关键词:排除-假设法;最大号固定右上角的逆时针轮转法;同余理论;最小号固定的双向轮转法
分类号:AMS(2000) 68M20 中图分类号:O226 文献标识码:A

1 问题重述

N 支球队在同一块场地上进行单循环赛,如何安排赛程对各队来说都尽量公平。就此问题建立数学模型。

2 模型假设

1)衡量公平的标准为各队每两场比赛中间相隔场次数尽量相等。

2)偶数支球队参赛时,每支球队参加且仅参加完一次比赛为一轮;奇数支球队参赛时,因为每轮比赛均有一队轮空,所以依次将两小轮连接为一大轮,每支球队参加且仅参加完两次比赛为一大轮。

3 模型的分析、建立与求解

1)对于5支球队,我们给出了一种各队每场比赛中间至少相隔一场的安程安排。记5

支球队为 A、B、C、D、E,如下表1所示

表1 5支球队的赛程安排

	A	B	C	D	E	每两场比赛间隔场次数
A	×	1	6	9	3	1,2,2
B	1	×	4	7	10	2,2,2
C	6	4	×	2	8	1,1,1
D	9	7	2	×	5	2,1,1
E	3	10	8	5	×	1,2,1

此赛程编制过程如下，如图1所示

不妨假设第一场比赛 A 对 B,记为 $A-B$。第二场比赛为 $C-D$,在各队每两场比赛中间至少相隔一场的前提要求下,仅有 E、A、B 可以参加第三场比赛,即 $E-A$、$A-B$、$E-B$,由于 A、B 已在第一场比赛过,故排除 $A-B$,则仅剩 $E-A$,$E-B$ 两种可能,不妨设第三场比赛为 $E-A$。以此类推,以后各场比赛程序安排为 $B-C$,$D-E$,$A-C$,$B-D$,$E-C$,$A-D$,$B-E$。因为球队之间进行的是单循环赛,所以任何两队之间只能进行一场比赛。即对任何一队而言,曾经与其交战过的队,在以后的比赛当中不再相遇。

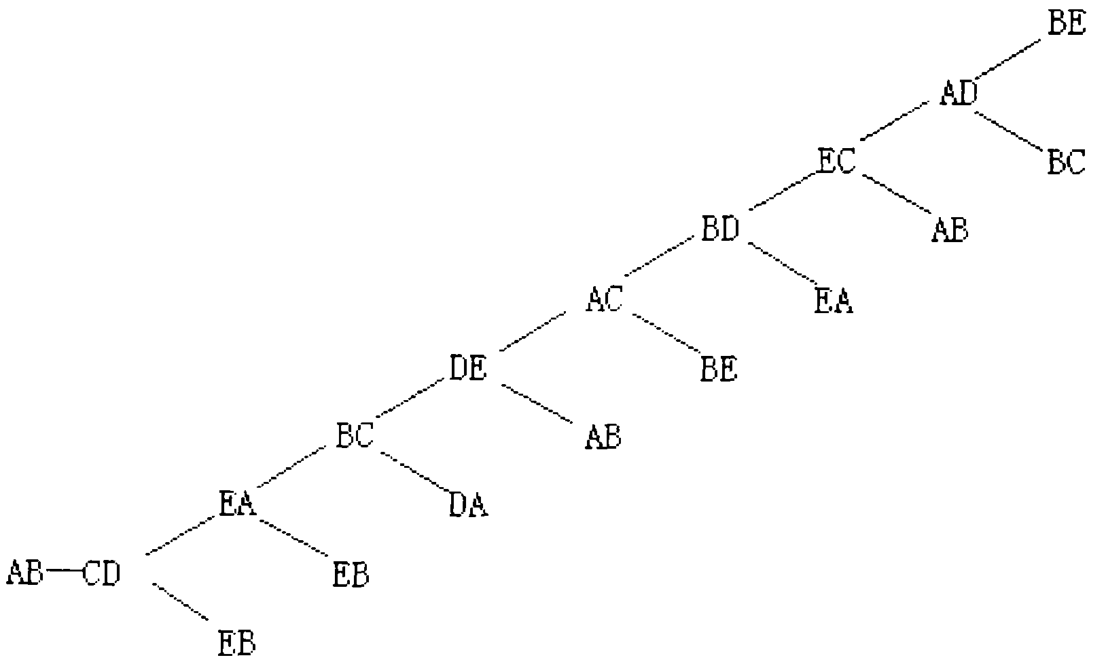

图1 5支球队赛程安排的编制过程

按此"排除-假设法",即可得出表1。当然,用我们在2)中所给的方法也可以给出满足要求的赛程安排。

2)对于各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限问题,我们认为这里的"上限"是指各队每相邻两场比赛中间相隔的最小场次数的上界。即每一球队任意相邻两场比赛中间间隔场次数都大于等于此上限。

在求上限的过程中，我们运用图论的基本思想，按照参赛队的队数 N 分两种情况进行讨论（对2、3或4支球队，由于不会出现每相邻两场比赛间隔不为0的情况，因此不做考虑。）

i＞ 当 N 为大于5的偶数时，我们运用"最大号固定右上角逆时针轮转法"（简称"轮转法Ⅰ"）给出了 N 个队的赛程安排。

当 N 为偶数时采用轮转法Ⅰ。轮转法Ⅰ的算法为：先将最大号放置在右上角（因为各号码在排序过程中机会均等，不妨假设放置的号是最大号），其他各号按大小顺序沿逆时针方向依次捉对，排出第一轮；最大号固定右上角不动，其他各号每轮按逆时针方向转动一个号位，从而排出以后各轮全部次序。（以8个参赛队为例，数字1—8代表8个参赛队），其编排方法如表2所示

表2 8支球队赛程安排的编制过程

第一轮	第二轮	第三轮	第四轮	第五轮	第六轮	第七轮
1-8	7-8	6-8	5-8	4-8	3-8	2-8
2-7	1-6	7-5	6-4	5-3	4-2	3-1
3-6	2-5	1-4	7-3	6-2	5-1	4-7
4-5	3-4	2-3	1-2	7-1	6-7	5-6

以下证明表2所示的比赛赛程是可行性的。

我们运用同余理论推出以下公式，当 $X \neq N$ 且

$$X \neq \begin{cases} r/2 & r\text{ 为偶数} \\ (r+N-1)/2 & r\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{1}$$

时，取 Xr 满足

$$\begin{cases} X + Xr \equiv r \bmod (N-1) \\ 1 \leqslant Xr \leqslant N-1 \end{cases} \tag{2}$$

当

$$X = \begin{cases} r/2 & r\text{ 为偶数} \\ (r+N-1)/2 & r\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{3}$$

时，取 $Xr = N$，凡满足上述公式的赛程都是可行的。

［字母说明］ r：轮数　　X：对 N 个队进行编号，$X = 1,2,3\cdots N$

Xr：与第 X 队进行比赛的队的编号

下证为什么满足上述公式的赛程都是可行的。

为此我们需要证明以下两点要求

1)在第 $r(1 \leqslant r \leqslant N-1)$ 轮比赛中，按这样的安排，必有 $Xr \neq X$ 且不同的队 $X \neq X'$ 的对手也是不同的，即 $Xr \neq Xr'$；

2)每一个确定的队 X，在所有这 $N-1$ 轮比赛中的对手是不同的，即当 $r_1 \neq r_2$ 时，必有 $Xr_1 \neq Xr_2$。

对于要求1)运用反证法。

当 X, X' 都不等于 N 且满足式子(1)时，X, X' 由式(2)确定。若 $X = Xr$，则由式(2)推出

$X \equiv X'(\mathrm{mod} N-1)$。由此以及 $1 \leqslant X, X' \leqslant N-1$ 推知 $X = X'$，所以不可能。若 $Xr = X$，则由式(2)知 $2X = 2Xr \equiv r(\mathrm{mod} N-1)$，由此以及 N 是偶数推出必有式(3)成立，这和式(1)矛盾，所以也不可能，这里附带证明了此时 Xr 也满足式(1)(以 Xr 代 X)。这就证明了除了 $X = N$ 及式(3)确定的一个队(它当然不等于 N)之外，在第 r 轮比赛中，其它的 $N-2$ 个队恰好两两分组进行比赛，而由式(2)知这两个例外的队恰好是分在一组比赛。

这就证明了要求 1)。

下面证明要求 2)。

对于第 N 队，若 $Nr_1 = Nr_2$，由式(2)知，$Nr = \begin{cases} r/2 & r \text{ 为偶数} \\ (r+N-1)/2 & r \text{ 为奇数} \end{cases}$

因此，$2r \equiv r\ (\mathrm{mod} N-1)$，故由 $Nr_1 = Nr_2$，推出 $r_1 = r_2(\mathrm{mod} N-1)$，即 $r_1 = r_2$。这就证明了要求 2)对第 N 队成立。当 $1 \leqslant X \leqslant N-1$ 时，若 $Xr_1 = Xr_2 = N$，则由已经证明的第 N 队在不同轮的比赛中对手是不同的，就推出 $r_1 = r_2$；若 $Xr_1 = Xr_2 \neq N$ 由要求 1)和式(1)对 $r = r_1$，r_2 均成立，因此式(2)对 $r = r_1, r_2$ 也都成。所以推出 $r_1 \equiv r_2(\mathrm{mod} N-1)$，即 $r_1 = r_2$。证毕。

因此按上述公式安排的赛程是可行的。

不妨以 $N = 8$ 时为例，按公式排出的赛程如表 3 所示

表 3 8 支球队的赛程安排

第一轮	第二轮	第三轮	第四轮	第五轮	第六轮	第七轮
1-7	1-8	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-6	2-7	3-7	2-8	2-3	2-4	2-5
3-5	3-6	4-6	4-7	5-7	3-8	3-4
4-8	4-5	5-8	5-6	6-8	6-7	7-8

比较表 3 和表 2 可发现，将表 3 中的比赛轮次略作调整即可得表 2，由于在调整过程中，每轮中 $X - Xr$ 没有改变，所以表 2 仍满足要求 1)与 2)，所以由轮转法 I 给出的赛程是可行的。

我们已通过 C 语言编制出 N 个队运用“轮转法 I”进行赛程安排的程序。具体程序及实现见 A 盘。通过观察 N 取不同值时的赛程安排，我们总结出 N 与上限之间的关系，见下表

表 4 N 与上限的关系

队数	6	8	10	12	14	16	18	20	…	N
上限	1	2	3	4	5	6	7	8	…	$[(N-3)/2]$

由表中数字，我们猜想上限 $= [(N-3)/2]$，下面证明此公式。

不妨将第一轮进行的 $N/2$ 场比赛的场次进行如下排列

表 5 第一轮前 $N/2$ 场比赛的场次排列

第一场	第二场	第三场	……	第 $N/2$ 场
1—N	2—$(N-1)$	3—$(N-3)$	……	$N/2$—$(N/2+1)$

从第二轮开始，每一轮的首场比赛的两支球队应从上一轮前两场比赛过的球队中选择，因为参赛的队伍都应满足以下两个条件

1)已交战双方不再进行比赛；

2)各队每相邻两场中间间隔的场次数最大。

故参加第二轮首场比赛的球队只能是在第一场赛过的球队和第二场赛过的球队中选择。无论哪种选择,都有上限[$(N-3)/2$]。

在满足此上限的条件下,$N=8$ 的赛程编制如表 2 所示。

ii> 当 N 为大于或等于 5 的奇数时,我们运用“最小号固定双向轮转法”(简称“轮转法Ⅱ”)给出了 N 个队的赛程安排。

当 N 为奇数时采用轮转法 II。轮转法 II 的算法为:先将最小号固定在一大轮(说明见模型假设)的左上角以及这轮第 $N+1$ 场比赛的右方(因为各号码在排序过程中机会均等,不妨假设固定的号是最小号。),以两小轮连接处为界,上方的小轮其余各号按大小顺序逆时针方向依次捉队;下方的小轮其余各号按大小顺序顺时针方向依次捉队,排出第一轮。最小号固定不变,上方的小轮其他各号按顺时针方向转动一个号位,下方的小轮其他各号按逆时针方向转动一个号位,从而排出以后各轮的次序,共转动$(N-3)/2$ 轮。以 9 个队为例,编排方法及比赛次序如表 6 所示

表 6　9 支球队赛程安排的编制过程及比赛次序

第一轮	第二轮	第三轮	第四轮
1 - 9	1 - 2	1 - 3	1 - 4
2 - 8	3 - 9	4 - 2	5 - 3
3 - 7	4 - 8	5 - 9	6 - 2
4 - 6	5 - 7	6 - 8	7 - 9
5——1	6——1	7——1	8——1
9 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5
8 - 3	9 - 4	2 - 5	3 - 6
7 - 4	8 - 5	9 - 6	2 - 7
6 - 5	7 - 6	8 - 7	9 - 8

以下证明运用此方法给出的比赛赛程是可行的。

表 7　N 支球队第一大轮的比赛次序

比赛场次	第一轮比赛次序
第一场	$1 — N$
第二场	$2 —(N-1)$
第三场	$3 —(N-2)$
……	……
第$(N-1)/2$场	$(N-1)/2 —(N+3)/2$
第$(N+1)/2$场	$(N+1)/2 — 1$
第$(N+3)/2$场	$N — 2$
第$(N+5)/2$场	$(N-1) — 3$
第$(N+7)/2$场	$(N-2) — 4$
……	……
第 N 场	$(N+3)/2 —(N+1)/2$

因为两小轮分开旋转,故将两小轮分开讨论,以第一大轮为例,如图 7 所示。

先看上小轮,若要已经交战的两队再次碰面,必须经过$(N-1)/2$次轮转,而上小轮共有$(N-1)/2$个队,所以只能依次轮转$(N-3)/2$次。而$(N-3)/2<(N-1)/2$,因此,双方不可能再交战。

下小轮同理可得。

因此,此方法可行。

我们已通过 *C* 语言编制出 *N* 个队运用“轮转法 *II*”进行赛程安排的程序。具体程序及实现见 *A* 盘。通过观察 *N* 取不同值时的赛程安排,我们总结出 *N* 与上限之间的关系,见表 8

表 8 *N* 与上限的关系

队数	5	7	9	11	13	15	17	19	…	N
上限	1	2	3	4	5	6	7	8	…	$[(N-3)/2]$

由表中数字,我们猜想上限$=[(N-3)/2]$,下面证明此公式。

不妨将前$(N-1)$场做出如表 7 的排列。因为参赛的队伍都应满足以下两个条件:1)已交战双方不再进行比赛;2)各队每两场中间间隔的场次数最大。

当进行第$(N+1)/2$比赛时,由于前$(N-1)/2$场比赛中,第$(N+1)/2$队没有参加比赛,则必须由第$(N+1)/2$队出战。同时,其对手必须在 1 和 N 中选择。而无论是第$(N+1)/2$队对第 1 队,还是第$(N+1)/2$队对第 N 队,上限都只能是$[(N-3)/2]$。

在满足此上限的条件下,$N=9$ 的赛程编制如表 6 所示。

4 模型优化

我们利用所建立的模型给出的上述赛程安排只是考虑了各队每相邻两场比赛中间得到的休整时间是否均等,而衡量一个赛程安排优劣的指标还很多。我们又讨论了下面的指标

在保证“上限”的基础上,为了使各队休息总场次数均衡,我们分析了各队休息总场次数的方差,以 8 个队参赛为例,如表 9 所示

表 9 8 支球队赛程安排的优劣分析

	1	2	3	4	5	6	7	8	每两场比赛间隔场次数	休息总场次数	休息总场次数的方差
1	×	16	26	11	23	6	20	1	4,4,4,3,2,2	19	1
2	16	×	12	22	7	19	2	25	4,4,3,2,2,2	17	1
3	26	12	×	8	18	3	15	21	4,3,2,2,2,4	17	1
4	11	22	8	×	4	14	27	17	3,2,2,2,4,4	17	1
5	23	7	18	4	×	28	10	13	2,2,2,4,4,4	18	0
6	6	19	3	14	28	×	24	9	2,4,4,4,3,2	19	1
7	20	2	15	27	10	24	×	5	2,4,4,4,3,2	19	1
8	1	25	21	17	13	9	5	×	3,3,3,3,3,3	18	0

对于我们排出的赛程,休息总场次数的方差非常小,说明各队休息总场次数几乎一致。

5 模型评价

该模型充分考虑了公平的原则,使各队每两场比赛中间的相隔的场次数达到上限,有较强的现实意义。此外,当参赛的队数为偶数时,我们给出了用"轮转法 I"排出赛程安排的计算机程序和计算上限的公式;当参赛的队数为奇数时,我们给出了用"轮转法 II"排出赛程安排的计算机程序和计算上限的公式,可操作性较好。当然,模型也存在一些不足,例如没有考虑到参赛队的强弱问题,我们无法做到赛程次序上的完全机会均等。

总体看来,我们已经力求竞赛次序上的最大机会均等以维护竞赛的公正,确保竞赛的价值,实现竞赛的目的。

参考文献:

[1] 姜启源.数学模型[M].北京:高等教育出版社,2001

[2] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,1992

[3] 莫寄怡.关于循环赛中轮转方法的探讨[M].北京:人民体育出版社,1987

Match Arrangement

CUI Kai, YANG Fei, ZHANG Yan

Advisor: ZHANG Fu-li

(Nanjing Audit Institute, Nangjing 210029)

Abstract: This article studies the problem of the match arrangement, by establishing this mathematical model. First, the "expel-hypothesis" method is employed to arrange to the five participations in the game, and we ensure that each team will not participate in the game continuously, for example, at least a break after two games. Then, under the premise of the equity, we give each team's the maximum of breaks between two games. We divide the discussion of two kinds of circumstances: ① when the N is an even number, we use the "turn against the clock with maximum fixed at the right top corner"; ② when the N is an odd number, we use the "turn in two diverse direction with minimum fixed". The conclusion is: upper limit = $[(n-3)/2]$. Finally, in consideration of equity index, which is not the unique, we give other indexes in the model improvement, and these indexes are employed to measure whether the arrangement is good or not.

Keywords: expel-hypothesis; congruence theory; turn against the clock with maximum fixed at the right top corner; turn in two diverse direction with minimum fixed