第20卷 第7期　　工 程 数 学 学 报　　Vol.20 No.8
2003年12月　　JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2003

文章编号:1005-3085(2003)07-0063-06

露天矿生产的车辆安排

丁余良，　胡海林，　郭丽君
指导教师：　李新秀
(南京邮电学院,南京 210003)

编者按：本文模型完整、正确、叙述清楚严格,求解方法可行,结果准确,对整条路线车次约束讨论较好,确是一篇优秀论文。此外本文还讨论了有关几种等待的情况,虽未完全解决,但已属不易。缺点是本文不太精炼,此处已作删节.

摘　要：本文研究了露天矿生产的车辆安排最优化问题。利用主要目标法将多目标最优化问题转化为单目标最优化问题,根据主要目标(总运量)列出最小费用函数,将次要目标最小卡车数转化为约束条件,然后逐步简化,将非线性规划转化为线性整数规划,并通过 SAS 软件编程遍历 120 个线性规划子问题,经过比较得出最优解.最后在最优解基础上运用贪心算法求出所用的最少卡车数并给出了一个班次的运输方案。对于问题一,得到最小总运量为 85628.62 吨公里,此时 7 台电铲分别放在第 1,2,3,4,8,9,10 铲点,所需卡车最少为 13 辆。对于问题二,利用类似于问题一的解法,在充分利用现有卡车和铲车的条件下,求得最大的产量为 103334 吨,20 辆车完全利用,相应的铲点为:1,2,3,4,8,9,10。最小运输量为 147792.26 吨公里,相应的岩石产量为 49280 吨.矿石产量为 54054 吨。

我们还讨论了一辆卡车在不同的路线运输所产生的转移时间差和两辆卡车发生等待的条件.为解决等待问题提供了一种很好的方法。

关键词：主要目标法；贪心算法；转移时间差
分类号：AMS(2000) 90C29　　**中图分类号**：O221.2　　**文献标识码**：A

1　问题重述(略)　　2　模型假设(略)　　3　符号说明(略)

4　问题分析

这是一个多目标最优化问题。优化目标有两个,最小运输量和最少卡车数,两个目标在一定程度上是相互影响的。在运输成本中,总运量是主要决定因素,把总运量作为主要目标,将卡车数转化成约束条件,使卡车总数不大于20,得到改进模型。根据多目标的主要目标法的有效解理论,在此最优解集上求最少卡车数的有效解或弱有效解。另外,由于电铲和卸点只能同时为一辆卡车服务,若此时还存在其他卡车在该铲点或卸点需要服务,就出现等待情况,在解决时应避免该情况发生。在装石料时若一条路线中卡车数超过一定值时,必然会出现等待。为了方便讨论,我们按矿石漏,倒装场 I,倒装场 II,岩石漏,岩场的顺序将它

们依次记作卸点 $D_1, D_2, \cdots D_5$，装点 $S_1, S_2, \cdots S_{10}$。于是，每条 $S_i \to D_j \to S_i$ 路线的运行周期为 $T(i,j) = 3 + 5 + \dfrac{120d(i,j)}{v}$，其中 $d(i,j)$ 为 S_i 与 D_j 之间的距离(km)，v 为卡车速度(km/h)。由于每装一次车的平均时间为 5min(大于卸车时间 3min)，那么每条路线上可容纳的最大车辆数 $w(i,j) = \left[\dfrac{T(i,j)}{5}\right]$。此外，每辆车一个班次工作 480min，则一辆车在相应的路线上运输次数的上界为 $ME(i,j) = \left[\dfrac{480}{T(i,j)}\right]$。

5 模型的建立及求解

5.1 模型准备

在模型建立之前，先给出几个必要的命题(证明过程略)和分析过程。我们用标志数 c_n 来刻画第 n 辆车是否被利用。当第 n 辆车被利用时 $c_n = 1$，否则 $c_n = 0$。

命题 1 第 n 辆车是否被利用的标志数 $c_n = flag(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), n = 1,2,\cdots,20$，其中 $Y_n(i,j)$ 是第 n 辆车从 S_i 到 D_j 的运输次数，$flag$ 为符号函数。

命题 2 第 i 个铲点是否有铲车的标志数 $h_i = flag(\sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), i = 1,2,\cdots,10$。

5.2 问题一的模型

对于问题 1 和问题 2，都必须满足：

1) 各铲点向所有卸点提供的岩石和矿石总量应分别不大于该铲点矿石数量 k_i 和岩石数量 y_i，即为模型 *I* 中的(1)式。

2) 由所有铲点向各卸点运输的石料总和应不小于卸点所需石料的下限，即为模型 *I* 中的(2)式。

3) 品位限制，在三个矿石卸点，矿石的平均铁含量应在给定范围内，即为模型 *I* 中的(3)式。

4) 由于铲车数量为 7，所以要求利用的铲点数不超过 7 个，即为模型 *I* 中的(4)式。

5) 每个铲点的工作次数不大于 96 次，即为模型 *I* 中的(5)式。

6) 每个卸点的工作次数不大于 160 次，即为模型 *I* 中的(6)式。

综上所述，可得问题一的基本模型

模型 Ⅰ

$$\min f = 154 \sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} \{ Y_n(i,j) d(i,j) \}$$

$$\min \sum_{n=1}^{20} c_n \quad \text{这里} \ c_n = flag(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), n = 1,2,\cdots,20$$

$$s.t. \quad 154 \sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{3} Y_n(i,j) \le k_i; 154 \sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j) \le y_i i = 1,2,\cdots,10 \tag{1}$$

$$154 \sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10} Y_n(i,j) \ge MD_j \qquad j = 1,2,\cdots,5 \tag{2}$$

$$28.5\% \le \frac{\sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10} Y_n(i,j)\beta_i}{\sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10} Y_n(i,j)} \le 30.5\%, j = 1,2,3; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{10} h_i \le 7, h_i = flag(\sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), i = 1,2,\cdots,10; \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j) \le 96 \quad i = 1,2,\cdots,10; \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10} Y_n(i,j) \le 160 \quad j = 1,2,\cdots,5; \tag{6}$$

$$h_i \in \{0,1\}; c_n \in (0,1), i = 1,2,\cdots,10; n = 1,2,\cdots,20 \tag{7}$$

$$Y_n(i,j) \in N \cup \{0\}; n = 1,2,\cdots,20; i = 1,2,\cdots,10; j = 1,2,\cdots,5 \tag{8}$$

5.3 模型的求解

模型Ⅰ是双目标规划,运输总量为线性函数,所需卡车数是非线性的,并且不连续,无法用一般的非线性规划求解。根据多目标规划中的主要目标法,将运输总量设为主要目标,最少卡车数设为次要目标,将次要目标转化为约束条件,从而使得模型Ⅰ简化为单目标规划问题。由前面的讨论,将最少卡车数转化为约束条件后,可以求出最优解。于是,化简后的改进模型为

模型 Ⅱ:

$$\min f = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\{(\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j)) \times d(i,j)\}$$

$s.t.$ (1),(2),(3),(5),(6),(7),(8) 同模型 Ⅰ;

$$\sum_{i=1}^{10} h_i = 7, \quad h_i = flag(\sum_{n=1}^{20}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), i = 1,2,\cdots,10; \tag{4$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{20} c_n \le 20, c_n = flag(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} Y_n(i,j)), n = 1,2,\cdots,20. \tag{9}$$

由于排时计划无效,等待问题很难从基本上解决,我们这里深入讨论一个班次内所有卡车来回于第 i 个铲点和第 j 个卸点次数的上界 $M(i,j)$,由于每条路线卡车的运行周期是一定的,且相邻两车间隔不小于 5 分钟,因而在整条路线上的车次也是一定的,加之受到相应铲点岩石和矿石最大产量的限制,可得到($ME(i,j)$为一辆车在相应的路线上运输次数的上界)

$$M(i,j) = \min\{w(i,j) \times ME(i,j), [p(i,j)/154]\}$$

$$M = \begin{bmatrix} 61 & 68 & 64 & 68 & 71 & 72 & 68 & 84 & 87 & 70 \\ 61 & 68 & 64 & 68 & 70 & 81 & 66 & 84 & 87 & 80 \\ 61 & 68 & 64 & 68 & 71 & 81 & 68 & 64 & 70 & 81 \\ 81 & 71 & 70 & 68 & 72 & 75 & 68 & 74 & 80 & 81 \\ 81 & 71 & 84 & 68 & 74 & 80 & 68 & 74 & 76 & 81 \end{bmatrix}^T = (M(i,j)_{10\times 5}$$

其中 $p(i,j) = \begin{cases} y_i, & j = 1,2,3 \\ k_i, & j = 4,5 \end{cases}, ME(i,j) = [\dfrac{480}{T(i,j)}]$

于是,$\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j) \le M(i,j), \forall i = 1,2,\cdots,5.$ 得到最终求解模型

模型 Ⅲ: $\min f = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\{(\sum_{n=1}^{20}) Y_n(i,j)) \times d(i,j)\}$, $s.t.$(1)……(9)同模型 Ⅱ

$$\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j) \le M(i,j), i = 1,2,\cdots,10, j = 1,2,\cdots,5. \tag{10}$$

根据以上的改进模型,为了便于求解,暂时不考虑约束条件(9),由 $\sum_{i=1}^{10} h_i = 7$ 按铲点位置

分成120个子问题，将 $\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j)$ 看作一个变量，一共50个变量。每个子问题恰好是整数线性规划，利用SAS软件对每个子问题分别求解，经过比较得到最优解：最小总运量为 $=556.03\times 154=85628.62$ 吨公里。此时5,6,7三个铲点没有运输量，恰好满足铲车数量的约束，主要目标已经解决。在此基础上，分析车辆分配方案，使所用卡车数量最少。若 $\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j)\geq ME(i,j)$，则安排一辆卡车在一个班次内只行驶 S_i-D_j 路线。但当 $\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j)$ 不是 $ME(i,j)$ 的整数倍时，必然还要其他卡车将剩余的石料运输完，其车次为 $Z(i,j)=\mathrm{mod}(\sum_{n=1}^{20} Y_n(i,j), ME(i,j))$。通过调整卡车在各路线的运输可使卡车数最少。这里运用了贪心算法[3]，具体算法如下：

(1) 将剩余车次矩阵 $Z_{10\times 5}$ 中非零元素对应运输时间周期矩阵 $T_{10\times 5}$ 从大到小排序；

(2) 首先尽可能多运输 $T_{10\times 5}$ 中最大元素所对应的路线，但不能超过班次的总工作时间，如有时间剩余，则转移到 $T_{10\times 5}$ 次大元素对应的路线，选择其中不超过班次总工作时间的最大路线；运输后就在 $T_{10\times 5}$ 中减去已运输的次数；

(3) 依此策略直至一辆卡车的工作时间排满为止；

(4) 若 $Z_{10\times 5}$ 中还存在非零元素就返回(1)，按上述方法重复，直至剩余车次矩阵 $Z_{10\times 5}$ 中元素都为零，结束。

经过调整并且考虑到转移时间差，我们得到第一问所需最小车辆数为13辆，其安排如表1。

定理1 在该问题中所利用的最少的车辆数为13辆。

证明 在最优解中，我们将运输周期 $Z_{10\times 5}$ 和运输计划安排车次 $N_{10\times 5}$ 相乘并求和得出在此方案下的理想工作时间总和 $total=\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} T(i,j)\times N(i,j)=6038.976$ 分钟，每辆卡车的有效工作时间都是480分钟，所需卡车数 $n=total/480=12.5813$ 辆，所以所需卡车数必然大于12辆。而表1中已给出了13辆车的可行运输方案，所以命题成立。

表1 问题1一班次的运输方案

卸点＼铲点	1	2	3	4	8	9	10	品位
1	0	$13_{(3)}$	0	0	$25_{(1)},29_{(11)}$	0	$5_{(2)}6_{(3)}$	30.50%
2	0	$3_{(1)},39_{(8)}$	0	$6_{(4)}37_{(10)}$	0	0	0	30.02%
3	0	$13_{(5)}$	$2_{(6)}$	0	0	0	$23_{(6)}47_{(12)}$	30.49%
4	$37_{(4)}44_{(7)}$	0	$8_{(6)}35_{(9)}$	0	0	0	0	——
5	0	0	0	0	0	$38_{(12)},32_{(2)}$	$15_{(5)}$	——

其中，$13_{(3)}$ 表示第3辆卡车在铲点2与卸点1之间共运输了13车次，其他类似。

5.4 转移时间差

在以上的讨论中，我们均没有考虑当一辆卡车从一条路线转移到另一条路线上的时间差。时间差的产生主要是在运输过程中，这辆车无需再回到原来的铲点，而是直接到另一条路线上相应的铲点，由于两条路线的不同，造成了卡车在转移过程中的转移时间差。不妨设

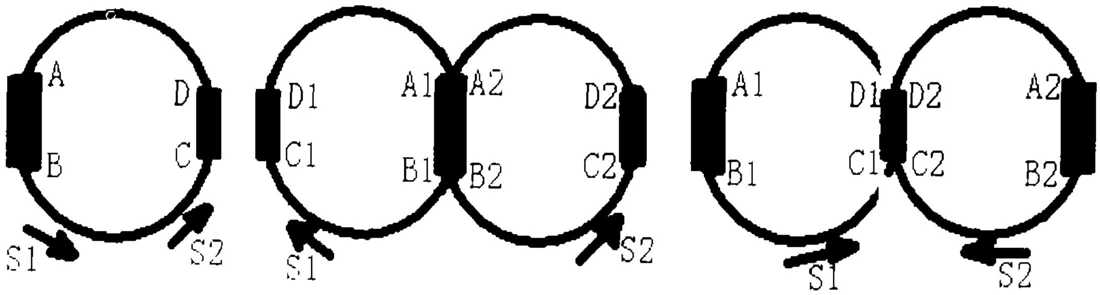
(i,j)为一条从 S_i 到 D_j 的运输路线,那么当一辆卡车从路线转移到路线时,其转移时间差

$$\Delta t((i_1,j_1)\rightarrow(i_2,j_2))=\begin{cases}0 & ,if:i_1=i_2\\ \dfrac{T(i_2,j_1)-T(i_1,j_1)}{2} & ,if:i_1\neq i_2\end{cases}$$

结论:根据最优结果进行分配车次,考虑转移时间差,其时间的总量必然比原来的理想时间总和6038.976大。

5.5 等待问题的讨论

由于对任何多于两辆车的讨论都可转化为两辆车的情况,所以,在此仅讨论两辆车产生等待的情况。根据卡车出现等待的位置对等待情况进行分类:



图中:AB 表示装货时间段(5min),CD 表示卸货时间段(3min),S1,S2 表示两辆卡车,t_1,t_2 分别表示两辆卡车开始在A点装货的时间,$t_{C1(2)}$表示时间段 $A1(2)-B1(2)-C$,,T 表示一圈所用的时间;对于图一,$Max\{\mathrm{mod}(t_2-t_1),\mathrm{mod}(t_1-t_2,T)\}$表示这两辆车在运行时间圈上的时间间隔。

1.在铲点处产生等待.如果有两辆车在同一条路线上运行,那么它们的运行可以用图一表示,只有当 $Max\{\mathrm{mod}(t_2-t_1),\mathrm{mod}(t_1-t_2,T)\}<5$ 时,两车才会在装点发生等待。如果这两车在不同的路线上但是在同一个铲点装货运行,如图二,则只有当以下三式 $0<\mathrm{mod}(t-t_1,T_1)<5$,$0<\mathrm{mod}(t-t_2,T_2)<5$,$max(t_1,t_2)<t<480$ 联立有解的时候,两车才会产生等待.

2.卸点处产生等待.类似于1的讨论,可以分为两种情况:当两辆车在同一条路线上面运行时(图一),那么必须满足 $Max\{\mathrm{mod}(t_2-t_1),\mathrm{mod}(t_1-t_2,T)\}<3$,(卸货时间 CD);当两辆车在不同一条路线上运行时(图三),只有当以下三式 $t_{C1}<\mathrm{mod}(t-t_1,T_1)<3+t_{C1}$,$t_{C2}<\mathrm{mod}(t-t_2,T_2)<3+t_{C2}$,$max(t_1,t_2)<t<480$ 联立有解时,两车才会发生等待。

5.6 问题二的模型

对于问题2,基于问题1的约束条件,求最大产量且运输量最小,可得出模型如下:

模型Ⅳ: $\max p=154\sum_{n=1}^{20}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}Y_n(i,j)$

$\min f=154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\{(\sum_{n=1}^{20}Y_n(i,j))\times d(i,j)\}$,$s.t.$ (1)……(10) 同模型Ⅲ。

采用类似于问题1的解法、首先不考虑约束条件(9),按铲点分布不同,共分为 $C_{10}^{7}=120$ 个整数线性规划子问题,求出其产量最大的解。然后,将最大产量作为一个约束条件,并考虑岩石产量优先,再次利用SAS求解最小运量。求得总产量671车次,10.3334万吨,总运量为147792.26吨公里,其中岩石产量为320车次,49280吨;矿石产量为351产量,

54054 吨;卡车数量为 20 辆。

类似于问题 1,采用贪心算法,并且考虑转移时间差,求出安排如表 2:

表 2 问题 2 一班次的运输方案

卸点 \ 铲点	1	2	3	4	8	9	10	品位
1	0	0	$4_{(7)}18_{(13)}$ $18_{(19)}$	0	$18_{(4)}2_{(10)}$	$20_{(2)}$	0	30.50%
2	$24_{(10)}$	$10_{(6)}10_{(7)}$ $39_{(12)}$	$3_{(8)}5_{(9)}$	$4_{(3)}37_{(14)}$ $13_{(4)}14_{(5)}$	0	0	0	30.06%
3	0	$8_{(6)}$	$16_{(9)}$	0	$32_{(15)}32_{(18)}$	0	$24_{(1)}$	30.50%
4	$23_{(7)}5_{(10)}$ $44_{(11)}$	$19_{(5)}$ $9_{(6)}$	$32_{(8)}$	$27_{(3)}1_{(4)}$	0	0	0	——
5	0	0	0	0	$1_{(6)}11_{(2)}$	$38_{(16)}38_{(17)}$	$22_{(1)}5_{(2)}$ $45_{(20)}$	——

6 模型的评价与改进

本文对建立的两个基本模型逐步简化求解,将多目标规划利用主要目标法转化为单目标规划,非线性规划转化为线性规划,利用 SAS 软件的整数规划求解,模型简单,适用性强,容易编程实现求解,并且能够很好的解决问题的整数约束。由于模型的简单化,就避免不了很多的重复操作,将原问题分成 120 个简单的整数规划的子问题,为了求得最优解,必须遍历这 120 个问题,求出各个子问题的最优解,再进行比较,时间开销很大;但是,在求解过程中,我们发现很多情况其实是不符合要求的,这样可以将那些对产量上限很不敏感的铲点不予考虑,作出适当的简化。

参考文献:

[1] 林锉云等.多目标优化的方法与理论[M].长春:吉林教育出版社,1992

[2] 倪勤.SAS 最优化软件速成[M].北京:科学出版社,1998

[3] 王晓东.计算机算法设计与分析[M].北京:电子工业出版社,2001

Truck Arrangement for an Opencast Iron Mine

DING Yu-liang, HU Hai-lin, GUO Li-jun

Advisor:LI Xin-xiu

(Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing,210003)

Abstract: In this paper, we study the optimization problem of the truck arrangement for an opencast iron mine. We use the primary - object method to transform the multi - object optimization problem to a single - object optimization problem. Based on the primary object (the total transportation load), we setup a minimal transportation load function, and use the secondary object as a regulation, then we simplify the cost function, and transform the non - linear programming problem to the linear programming problem. (下转 114 页)

[2] 宋济.知识助我登上领奖台[J]. 游泳,2002;4:27-28
[3] 彭援军.毛泽东畅游九江[J].游泳,2002;4:28-28
[4] 史力生.用数字直接模拟层流[J].长沙铁道学院学报,1994;12(2):43-54
[5] 杨波,程亮,陈晶,李亮,吴莎. 抢渡长江最佳路线的探讨[J].数学通讯,2002;24:42-43

The Application of Mathematic Model in the Competition of Crossing the Changjiang River

CHEN Li, PAN Hai-li, GUO Ling
Instructor: CHEN Tao
(Nanchang University, Nanchang 330047)

Abstract: This paper establishes the optimal model for crossing issue. At the beginning, exact results are presented on the first two questions given in the article. We also analyze the main reason for the percentages different of people who can succeed in reaching the opposite bank in 1934 and in 2002 and gives the necessary requirements for those who can reach the destination successfully. In 2002 the minimal speed of those successful competitors was 1.43m/s. In the process of analyzing the latter problems, the idea that adjusting the competitor's flat-out direction as current changes is brought forward to establish Model Ⅱ and Model Ⅲ. Model Ⅳ provides an ideal crossing way in the case that one can adjust his flat-out direction at any time as current changes and gives a relatively rational distribution function of water speed. By analyzing water speed on the foundation of the real condition, we get a more rational distribution function of water speed and build Model Ⅴ. The LINGO and MATHEMATICA software are used in proceeding to get the optimized answer. By the end, the models established in this paper can be spread to other fields such as air-flight, space flight and navigation.

Keywords: the competition of crossing the Changjiang River; optimal route

---

(上接68页)

Abstract: Using the SAS software, we traverse all the 120 linear programming sub-problems, and get the most optimum solution. Based on the solution we use the greedy algorithm to get the least truck number and the plan for every truck's routine. For problem one, we figure out that the minimal total transportation load is 85628.62 ton * km, the seven forklifts are placed in the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 8th, 9th forklifts position, 13trucks are needed. For problem two, we use the similar solution to problem one, and make a full use of the present resource, we get a maximal production quantity is 103334 ton, 20 trucks are used, and forklifts are placed in the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 8th, 9th, 10th forklifts position. The minimal transportation load is 147792.26 ton * km, the quantity of rocks is 49280 ton, the quantity of ore is 54054 ton

Furthermore, we analyze the time when two trucks would wait in the same line, and the cost of time for a truck moving from one transportation routine to another.

Keywords: primary-object method, greedy algorithm, the time difference of transfer.