

第六节 范例

追逐问题

1. 问题提出

在图 8.4 中, 假设正方形 ABCD 的四个顶点处各站一人. 在某一时刻, 四人同时以匀速 v 沿顺时针方向追逐下一个人, 并且在任意时刻他们始终保持追逐的方向是对准追逐目标, 例如, A 追逐 B, 任意时刻 A 始终向着 B 追. 可以证明四人的运动轨迹将按螺旋曲线状汇合于中心 O.

怎样证明呢? 有两种证明方法. 一是分别求出四人的运动轨迹曲线解析式, 求证四条曲线在某时刻相交于一点. 另一方法则是用计算机模拟将四人的运动轨迹直观地表示在图形上.

2. 建立模型及模拟方法

模拟步骤:

1) 建立平面直角坐标系.

2) 以时间间隔 Δt 进行采样, 在每一时刻 t 计算每个人在下一时刻 $t + \Delta t$ 时的坐标.

3) 不妨设甲的追逐对象是乙, 在时间 t 时, 甲的坐标为 (x_1, y_1) , 乙的坐标为 (x_2, y_2) .

甲在 $t + \Delta t$ 时的坐标为 $(x_1 + v\Delta t \cos \theta, y_1 + v\Delta t \sin \theta)$,

$$\text{其中 } \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \sin \theta = \frac{y_2 - y_1}{d}, d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

同理, 乙在 $t + \Delta t$ 时的坐标为 $(x_2 + v\Delta t \cos \theta, y_2 + v\Delta t \sin \theta)$.

4) 选取足够小的 Δt , 模拟到 $d < v\Delta t$ 时为止.

5) 连接四人在各时刻的位置, 就得到所求的轨迹.

连续系统模拟的特点是首先选定一个时间步长 (通常是等间距的); 其次按时间顺序推进, 每推进一个时间步长, 就对系统的活动和状态按预定的规则和目的进行考察. 分析、计算、记录, 直到预定模拟结束条件 (通常是时间条件) 为止.

3. MATLAB 实现

根据以上模拟步骤, 可编出 MATLAB 程序(simu2.m)如下:

```
%取 v=1,t=12,A,B,C,D 点的坐标分别为 (0, 10), (10, 10), (10, 0), (0, 0)
v=1;
dt=0.05;
d=20;
x=[0 0 0 10 10 10 10 0];
x(9)=x(1);
x(10)=x(2);
hold
axis('equal')
axis([0 10 0 10]);
for k=1: 2: 7
    plot(x(k), x(k+1), 'r')
end
while(d>0. 1)
    for i=1: 2: 7
        d=sqrt((x(i)-x(i+1))^2+(x(i+1)-x(i+3))^2);
        x(i)=x(i)+v*dt*(x(i+2)-x(i))/d;
        x(i+1)=x(i+1)+v*dt*(x(i+3)-x(i+1))/d;
        plot(x(i),x(i+1),'r')
    end
    x(9)=x(1); x(10)=x(2);
```

```
end  
hold
```

运行上述程序(simu2, 回车)可得到图 8. 4.

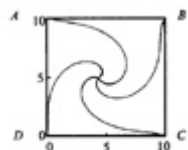


图 8.4 四人追逐问题

企业生产的库存系统

1. 问题提出

在销售部门、工厂等领域中都存在库存问题，库存太多造成浪费以及资金积压，库存少了不能满足需求也造成损失，部门的工作人员需要决定何时进货，进多少，使得所花费的平均费用最少，而收益最大，这就是库存问题。某企业生产易变质的产品。当天生产的产品必须当天售出，否则就会变质。该产品单位成本为 2.5 元，单位产品售价为 5 元。企业为避免存货过多而造成损失，拟从以下两种库存方案中选出一个较优的方案。

方案甲：按前一天的销售量作为当天的货存量；

方案乙：按前二天的平均销售量作为当天的货存量；

假定市场对该产品的每天需求量是一个随机变量，但从以往的统计分析得知它服从正态分布 $N(135, 22.4^2)$

2. 建立数学模型

计算机模拟的基本思路：

第一，需要获得市场对该产品的需要量的数据；

第二，计算出按照两种不同方案经 T 天后企业的利润值；

第三，比较大小，从中选出一个较优的方案。

为了增加可读性和方便地使用 MATLAB 语言编程，各变量的符号解释如下：

D —— 每天的需求量；

Q1 —— 方案甲当天的货存量；

Q2 —— 方案乙当天的货存量；

S_1 —— 方案甲前一天的销售量；

S_{21} —— 方案乙前一天的销售量；

S_{22} —— 方案乙前二天的销售量；

S_3 —— 方案甲当天实际销售量；

S_4 —— 方案乙当天实际销售量；

L_1 —— 方案甲当天的利润；

L_2 —— 方案乙当天的利润；

TL_1 —— 方案甲累计总利润；

TL_2 —— 方案乙累计总利润；

T —— 预定模拟天数。

建立数学模拟框图，如图 8. 5.

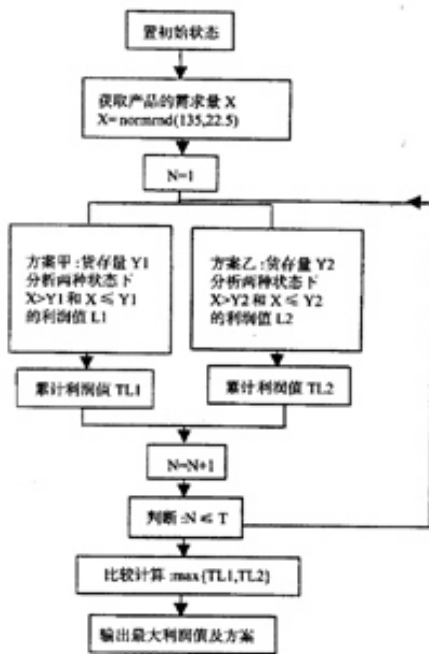


图 8.5 库存系统的模拟流程图

3. 求解

编制 MATLAB 程序(kucum.m)

```
function [TL1, TL2]=kucum (T, S1, S21, S22)
```

```
TL1=0; TL2=0; k=1;
```

```
while k<T
```

```
Q1=S1;
```

```
Q2= (S21+S22) / 2;
```

```
D=normrnd (135, 22. 4);
```

```
If D<Q1
```

```
S3=Q1;
```

```
else
```

```
S3=D;
```

```
end
```

```
if D<Q2
```

```
S4=Q2
```

```
else
```

```
S4=D;
```

```
end
```

```
L1=5*S3—2. 5*Q1;
```

```
L2=5*S4 — 2. 5*Q2;
```

```
TL1=TL1+L1;
```

```
TL2=TL2+L2;
```

```
K=k+1;
```

```
end
```

```
S1=S3;
```

```
S22=S21;
```

```
S21=S4;
```

运行程序(kutest. m)

```
T=10; S1=136; S21=136; S22=148;
```

```
「TL1, TL2」=kucun (T, S1, S21, S22)
```

计算结果:

$$TL1=3.5289e+003$$

$$TL2=3.5823e+003$$

反复运行程序, 因为多数情形是 $TL1 < TL2$, 所以认为方案乙较优.