

算法图论 (Graph Theoretic Algorithms)

第一部分：区间图、弦图、相似图、完美图

本书英文版共 29 讲，第一部分共 12 讲，系译者学习的同时为备以后查阅复习之便作的翻译，内容基本忠实于原著，且大部分是直译，同时加入了译者的少许想法，并补上了少部分略去的证明过程（限于译者的水平只能证明一些力所能及的证明）。

第 1 讲是概论导读；第 2 到 10 讲比较详细地介绍了区间图、弦图及其相关的性质、算法（包括证明）以及延伸内容，其中第 7 到 9 讲涉及相似图的一些内容，部分定理尚未证明；第 11、12 讲介绍完美图、相交图及其部分特例，侧重于介绍性，概念结论较多但证明较少，可以作为知识性的阅读。

《尚为解决的问题》是译者翻译学习过程中遇到的一些不懂的问题，原文中未给出详细证明，而译者目前还无法自己证明的，这些在译文中将用粗括号扩出。各路高手如有知道方法的情与译者联系，不胜感激！

复旦附中 葛潇

第一讲、概论

本讲对这门课程的主要议题进行了大致的介绍。

1. 概念

这门课程涉及了一些特殊的图以及这些图上某些已经得到改进及仍未解决的问题。

为了解我们所说的内容，我们必须回顾一些特殊图中的概念、算法、复杂度分析及 NP—HARD 问题。在这门课中对些将不作深入，我们假设读者以对这些有所了解。

2. 一些图的分类

下面我们将给出这门课程中将涉及的一些图的形式。在以后的各讲中将进行深入的分析。

- **区间图 (Interval graphs):** 如果一个图能用一些区间的 intersection graph 表示，那么这个图称为区间图。更准确地说，给定一系列区间，将其中每个区间看作一个顶点，两个顶点间有边，当且仅当这两个点所代表的区间相交。一个图是区间图，当且仅当它能通过以上方法构造出来。（见图 1）

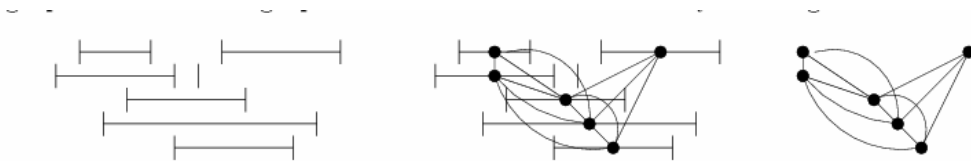


图 1：一些区间及它们所构成的区间图

我们同时学习各种相关的图，例如弦图和完美图。这部分的主要参考是[Go180]。

- **树 (Trees):** 一个图是一颗树，当且仅当它是连通的，并且没有环。我们将同样学习有关的图，例如 partial k-trees. 这部分的主要参考是[Bod93]。
- **平面图 (Planar graphs):** 一个图如果能画在二维平面上，且各边没有交点，则该图称为平面图。注意每个树都是平面图，但反之却不一定。我们将同样学习有关的图，例如 outer-planar graphs 和 series-parallel graphs（混联图）。这部分的主要参考是[NC88]。

本课程中除特别说明，一般所指的图都是简单的、连通的，且至少有两个顶点（或是图有意义的最少顶点）。显然这不会影响大多数算法的适用性。

同时，一般给出的图都是无向图，虽然有时我们为了设计算法人为地加上方向。

3. 一些问题

下面是我们将学习的一些问题，以及它们在一些特殊图上的复杂度。

- **最大独立集 (Maximum Independent Set):** 这是著名的 NP 难题。但在区间图中，最大独立集问题能够在 $O(N+M)$ 时间内解决，同时在树上可以在线性时间内解决，但对于平面图这仍是 NP 难题。
- **最大割 (Maximum Cut):** 图 $G = (V, E)$ 上的一个割将该图的顶点分成两个子集： $V = A + B$ 。更准确地说，给定一种顶点划分，一个割是哪些一个端点在 A 中，另一个在 B 中的边组成的集合。最大割问题是寻找一种顶点划分方式，使得对应割集中的边数最多。同样也有最小割问题。最小割问题用最大流的方法可以在多项式时间内解决，但最大割问题是 NP 难题。但在平面图上最大割问题是多项式级的；在树上，最大割问题是平凡

的（因为树是二分图，因此最大割集就是边集）；区间图上最大割问题是 open{开放的}。

4. 典型问题

综上所述可以得知，这门课程的主要问题是：

给定一个问题 P 和一类图 C ，在 C 上解决 P 的复杂度是多少？

我们将逐个学习各种特定的图，对于某个特定的图，提出一下两个问题：

- 有什么图论问题在 C 上会变得简单些（复杂度低些）？
- 有什么图论问题在 C 上仍是 NP 难题？

这些有衍生出一些问题：

- 在多少时间复杂度内可以判断一个图是否属于 C 这类图？
- 一个图属于图 C 的充要条件是什么？这将赋予 C 新的性质。
- 如果图 G 不属于 C ，它到 C 的“接近程度”是多少？

这种想法的目的是将 G 转化位属于 C 的另一个图 G' ，在 G' 上解决问题 P ，并试图有 G' 的解获得 G 的解（或近似解）。

“接近程度”有各种定义，可以是删除或加上一些顶点或边，收缩或展开边，用顶点代替交点等等。

不幸的是这些问题大多数是 NP 难题……☹

第二讲、区间图

本讲中，我们将考虑区间图的一些应用。我们将考虑区间图于其他图有什么不同，以及各种区间图的共同点。

1. 介绍

图论学习中常常要考虑一些特殊的图，区间图就是其中之一。我们之后将给出它的严格定义。但目前可以把区间图看作一系列区间的一种表示。有关一系列区间的问题在实际中有广泛的应用，例如日程安排问题、航班调度问题、交通灯的同步协调等。因此学习区间图不仅使我们了解它的数学构形，而且有着在实践中发挥作用的潜力。

学习区间图时，我们首先给出一个更精确的定义，接着将考虑区间图的一些应用，然后学习怎样判定一个图是否是区间图（同时看到一些不是区间图的图），最后看一些对区间图的等价的不同的表示法。

2. 定义

一个区间是有两个端点的线段，端点可以是开的或闭的。给定一些区间，可以定义一个相交图（intersection graph）。

定义 1：给定一些区间，定义一个相交图的每个顶点 v 代表一个区间 I_v ，顶点 (v,w) 间有边，当且仅当 I_v 交 I_w 非空。

定义 2：一个图 G 是区间图，如果它是若干区间的相交图。

定义 3：一个图 $G = (V, E)$ 的诱导子图是由它的一个顶点子集 S 与 E 中所有两个端点都在 S 中的边组成的子图。

我们可以通过删去 G 中的一些顶点及与它们相联的边得到一个诱导子图。

3. 区间图

区间图在一系列领域中有应用前途，例如：

考古学[Spi97]

计划拟定[CLRS00]

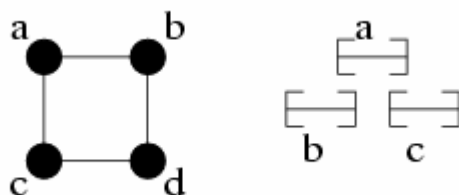
生物学[WG86]

请读者参考 PDF 文件的简述与参考文献。：-P

以下是一些不是区间图的例子：

1、 k 阶简单环 C_k ($k \geq 4$)。

我们来看一下 C_4 （见图 3），假设它是区间图。由于 a 与 b, c 相联，它们对应的区间必须相交。但是 b 和 c 之间没有边，因此它们对应的区间不相交这样的情况只可能如图 3 右图所示。但由于 d 与 b, c 均相联，则 d 对应的区间（简记为区间 d ）与区间 b 、区间 c 都相交，那么它必将与区间 a 相交，这与 a, d 间无边矛盾。

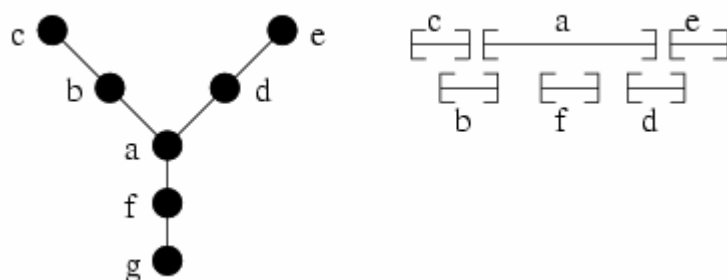


2、任何以 C_k ($k=4$) 为一个诱导子图的图。

这表明区间图在删除顶点及收缩边的操作下是封闭的。具体地说，如果我们从区间图中删除一个顶点，只要把它对应的区间从区间集中删去，结果仍是一个区间图。如果收缩一条边，只要把其端点所对应的区间合并成一个区间即可。

3、形如图 4 的树。

与 C_k 的方法类似，我们可以设计出前六个顶点对应的区间，但加入最后一个顶点 g 时，由于区间 g 必须与区间 f 相交，则它必须与区间 a 相交，矛盾。

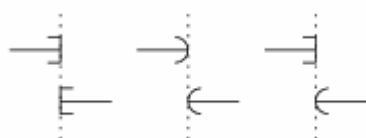


目前为止我们尚未给出开区间与闭区间或半开闭区间的区别。我们将证明知道它们是等价的。

定理 1：开区间、闭区间、半开闭区间对应的区间图是等价的。

注意这不是说我们可以随意地将开区间改为闭区间，或将闭区间改为开区间。这表示给定一个区间图，我们总能设计出一个只包含开区间或闭区间的区间集，使它对应与给定的图。

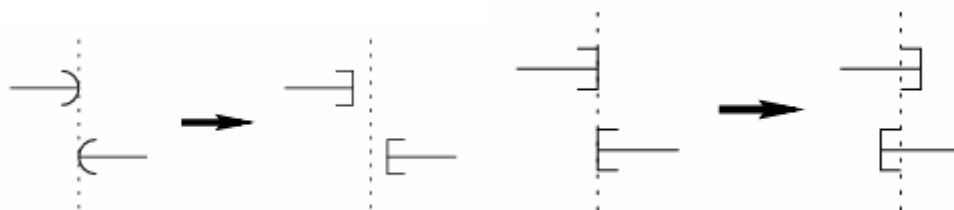
我们注意到如果不存在“重点”，即一个区间恰在另一个区间开始的点上结束，那么区间的开闭不影响区间图的形态，即区间的开闭可以随意改变。“重点”只可能有三种形态（见图 5，对称的情形被忽略了）。其中第一种情况下，两个区间相交，后两种情况则不相交。



4. 定理 1 的证明

证明：我们只证明任意区间集能等价地转化为只包含闭区间的区间集。

首先看一些对于“重点”的操作。对于情况 2，两个区间不相交，我们将它们稍微拉开一段很小的距离，并改为闭区间。情况 3 同样可以这样操作。对于情况 1，将它们稍微拉近一段小距离（见图 6）。



下面给出正式证明：

给定一个区间集 $I=\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ ，其中每个区间 $I_i=\{S_i, F_i\}$ 两端可以是开的或闭的。我

们再定义 $I'=\{I_1',I_2',\dots,I_n'\}$,其中 $I_i=\{S_i',F_i'\}$ 两端都是闭的, 其中 $\{S_i',F_i'\}$ 如下取值:

$$\begin{aligned} [s_i, f_i] &\rightarrow [s_i - \frac{\epsilon}{2}, f_i + \frac{\epsilon}{2}] \\ [s_i, f_i) &\rightarrow [s_i - \frac{\epsilon}{2}, f_i - \epsilon] \\ (s_i, f_i] &\rightarrow [s_i + \epsilon, f_i + \frac{\epsilon}{2}] \\ (s_i, f_i) &\rightarrow [s_i + \epsilon, f_i - \epsilon] \end{aligned}$$

其中 ϵ 的值将在之后给出。注意以上操作是之前提到的操作正式的定义。

引理 1: 对于任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, 有 $I_i' \cap I_j' \neq \emptyset$, 反之亦成立。

证明:

1、充分性

有两种情况, 这两个区间或在某个“重点”相交, 或有一段非空的公共开区间。情况 1 经操作后, 两个区间将重合长为 ϵ 的一段区间。情况 2 中有三种可能。如这端都是闭, 那么操作后它们的交集长度将增加 ϵ ; 如这两端都是开的, 操作后它们的交集长度将减少 $2 \times \epsilon$; 如这两端一开一闭, 操作后它们的交集长度将减少 $\epsilon/2$ 。最坏情况下交集长度将减少 $2 \times \epsilon$, 如果令 $\epsilon \leq 1/3 \times$ (那端交集的长度), 则在所有情况下这两个区间仍然相交。充分性得证。

2、必要性

只要证明充分性的否命题, 情况与充分性类似, 只要满足 $\epsilon \leq 1/3 \times$ (两靠近端点的距离) 即可。(参见图 9)



最终, 取 $\epsilon \leq 1/3 \min\{|x_i - x_j|, x_i, x_j \in \{s_1, \dots, s_n, f_1, \dots, f_n\}, x_i \neq x_j\}$ 可以保证引理 1 对于所有区间成立。

引理 1 中对所取的区间没有限制, 因此操作后对应的区间图的形态不变, 定理 1 得证。

■

定理 1 表明任何区间集可等价为一个有闭区间组成且没有“重点”的区间集, 这样我们可以按左端点坐标从小到大的顺序给区间图的顶点编号。同时我们可以给每条边加上方向, 即从左往右 (弧头编号 > 弧尾编号)。这里我们给出一些定义:

定义 6: 有向图 $G=(V, E)$ 中顶点 V_i 的前驱集 $\text{Pred}(V_i)=\{V_j \mid (V_j, V_i) \in E\}$;

后继集 $\text{Succ}(V_i)=\{V_j \mid (V_i, V_j) \in E\}$ 。 $|\text{Pred}(V_i)|$ 称为 V_i 的入度; $|\text{Succ}(V_i)|$ 称为 V_i 的出度。

注意: 区间图中所有 $\text{Pred}(V_i)$ 中的元素对应的区间两两相交。这说明 $\{V_i\} \cup \text{Pred}(V_i)$ 是一个团。

第三讲、基于区间图的一些算法

本讲中我们将了解有关计算区间图的染色数与最大团的算法。为此我们将介绍完美消除序的概念。我们将看到这两个 NP 难题在区间图上能用线性的时间解决。

1. 介绍

图的染色问题是图论中的经典问题，在诸如拟定计划等发面有一系列应用[Ver85]。尤其是平面图的染色问题，即地图染色问题，已被深入地研究过。其中最著名的成果包括 Appel 和 Haken 证明的四色定理等[AH76]。

同样地，最大团问题也在诸多领域有着应用，例如 operation research、种系分析、图案识别等[Oga86]。

本讲中我们将在区间图上有效地解决这两个问题，同时介绍图的一个性质，使得该算法达到最优。在以后各讲中我们讲深入研究这类图，并发现它属于弦图的范畴。

让我们从回顾区间图的定义开始本讲的内容：

定义 1：给定一些区间，满足每个顶点代表一个区间 I_v ，顶点间有边，当且仅当两个区间相交的图称为区间图。

2. 图的染色

这一节我们将学习区间图的顶点染色问题，即一种给区间图顶点染色的方案，使得每条边的两个端点颜色不同。我们暂不考虑边染色问题。

定义 2：一个图 G 的染色数 $X(G)$ 是将 G 进行染色所需要的最少的颜色数。

定义 3：我们把“能否将一个图用 K 种颜色染色”称为 K 染色问题。

2 染色问题等价与判断一个图是否是二分图。由于满足性问题中 2-SAT 问题是多项式级的，而 3-SAT 问题是 NP 难题，能够证明对任意图的 2 染色问题是线性的而 K 染色问题 ($K \geq 3$) 是 NP 难题。我们将简单地阐述 3 染色问题的复杂度。

定理 1：3 染色问题是 NP 难题。

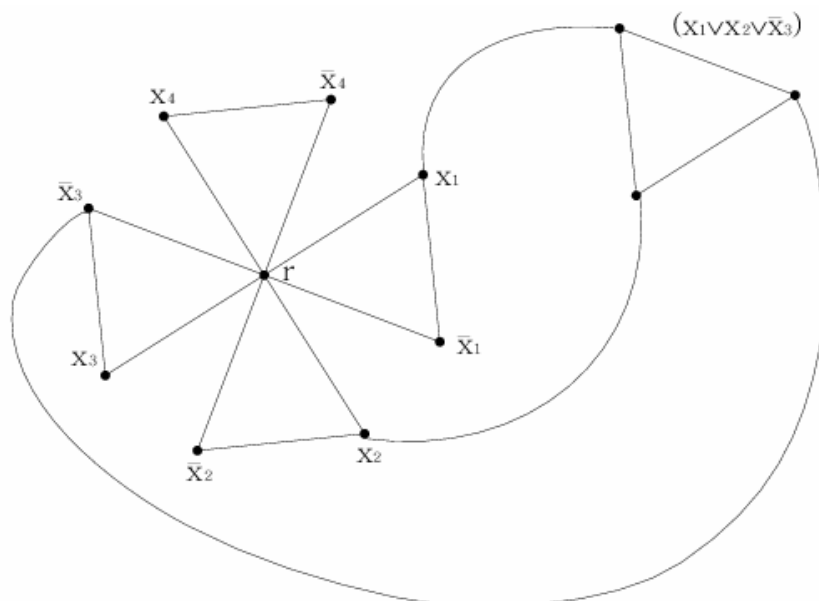
(注意：本课程中遇到的多数问题是 NP 难题，我们只证明问题的 NP 性。)

证明：

定义 4：NAE-3-SAT 问题：给定一个命题集合 U 和一个由 U 及非 U 的若干三元子集组成的集合 C ，是否存在一个 U 中变量的取值方法使 C 中的每个子集至少包含一个 TRUE 值与一个 FALSE 值？这已被证明是 NP 难题[GJ79,p.259]

我们如图 1 构造一个图：

- 对 U 中的每个变量建立两个顶点 u 和 u' （称为内点）以及连接 u 、 u' 与一个共同的中心点 r 的三条边。
- 对每个 $c \in C$ ，定义一个两两相联的三角形代表，三个点分别与对应的三个内点相联。
- 我们用 R ， T ， F 这三种颜色染色，其中 R 是 r 的颜色。
- 对于每个变量， u 与 u' 中的一个必须染 T (TRUE)，另一个染 F 。



接下来要说明的是 NAE-3-SAT 问题是该图 G 的 3 染色问题的特例。

必要性：如果一个图能够 3 染色，则内点必为 T 或 F 色，代表这个命题的真假，对于余下的每个三角形，它们所连接的三个内点不可能是同色的（否则这三个点只可能染两种颜色，必定不是可行的反色方法），即满足 NAE-3-SAT 问题的要求。

我们已经证明如果我们能解决 3 染色问题，那么我们也能解决 NAE-3-SAT 问题。因为 NAE-3-SAT 已被证明是 NP 难题，因此 3 染色问题也是 NP 难题。定理 1 得证。

■

3. 图染色的一个贪心算法

虽然求图的染色数是 NP 难题，我们能用贪心算法进行一种可行染色（颜色数可能大于 $X(G)$ ）。

1. INPUT: Graph G , vertex ordering v_1, \dots, v_n
2. for $i = 1 \dots n$ {
3. let j be the smallest color not used in $\text{Pred}(v_i)$.
4. color v_i with color j .
5. }

这个算法能找到 G 的一种可行染色方法，并且使用至多 $\max\{V_i \text{ 的入度} \mid 1 \leq i \leq |V|\} + 1$ 种颜色（当然这个结果很不理想⊗）。注意顶点的顺序直接影响着颜色数的多少。

注：以上算法表明平面图可以用六色染色。（见 2003 集训队论文，刘才良）

4. 染色算法最佳的条件

现在我们将研究在什么情况下，贪心算法能够得到最优解。

定理 2：对于区间图，使用自然编号法（见第二讲）编号，则以上贪心算法可以得到最优解。

证明：我们已知贪心算法得到的颜色数最多是 $\max\{V_i \text{ 的入度} \mid 1 \leq i \leq |V|\} + 1$ 。记 I^* 为这

一个最大值达到时的顶点编号，我们知道区间图中一个顶点及它的所有前驱构成以一个团，因此 $\text{Pred}(V_{i^*}) \cup V_{i^*}$ 是一个大小为 $(V_{i^*} \text{的入度} + 1)$ 的团。为给这个团染色需要 $(V_{i^*} \text{的入度} + 1)$ 种颜色。由此可见贪心算法找到的颜色数达到了下界，即最优。定理 2 得证。■

这个证明了为了得到最优解我们所要做的只是寻找一个特殊的顶点编号序列。我们给这个性质一个名称：

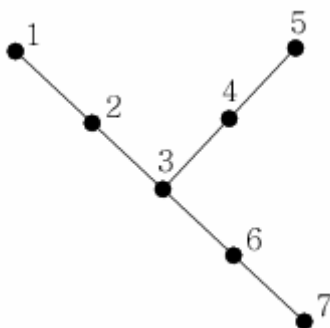
定义 5：一个顶点序列 $\{V_1..V_n\}$ 如果对任意 i 满足 $\text{Pred}(V_i)$ 是一个团，那么这种序列称为完美消除序列。

很容易知道：

定理 3：如果一个图 G 具有完美消除序列，就可以在线性时间内求出 $X(G)$ 。

注：1：即使我们知道一个图有完美消除序列，我们不得不找到这个序列。之后我们将得知这在线性时间内可以解决。具体细节参见第五讲的内容或[Gol80]。

2：一个具有完美消除序列的图不一定是区间图，图 2 就是一个例子。



5. 最大团问题

我们将讨论的下一个问题是：最大团问题的复杂度是多少？

回忆一下最大团的有关定义：

定义 6：一个图的最大团数 $W(G)$ 是 G 构成团的最大的顶点子集的元素个数。

定理 4：计算 $W(G)$ 是 NP 难题。

完整的证明可参考[GJ79,p.53-56]。我们只给出以下两步证明的大致框架：

1. 证明最大团问题与顶点覆盖问题等价：如果 I 是 G 的一个顶点覆盖，那么 $G-I$ 是 \bar{G} 中的一个团。
2. 证明 3-SAT 问题是顶点覆盖问题的特解问题。■

现在我们说明图 G 是区间图时，能够在线性时间内算出 $W(G)$ 。

在定理 2 的证明中我们看到 $\text{Pred}(V_{i^*}) \cup V_{i^*}$ 是一个大小为 $|\text{Pred}(V_{i^*})| + 1$ 的团，因此 $W(G) \geq |\text{Pred}(V_{i^*})| + 1$ 。我们又知道对于任意图 G ， $X(G) \geq W(G)$ ，因为染色一个大小为 K 的团至少需要 K 中颜色。定理 2 的证明表明 $X(G) = |\text{Pred}(V_{i^*})| + 1$ ，所以 $X(G) \geq W(G) \geq |\text{Pred}(V_{i^*})| + 1 = X(G)$ ，这表明：

定理 5：对于具有完美消除序列的图 G ， $X(G) = W(G)$ 。

于是在第三节中的贪心算法中找到的团中的一个就是最大团，因此找最大团在 $O(m+n)$ 时间内能够解决。

我们同时得到：

推论 1: 对于区间图的任何诱导子图 G , $X(G) = W(G)$ 。

证明: 区间图的任何诱导子图都是区间图, 由定理 5 即证。■

第四讲、区间图及其补图

本讲中我们将讨论在一个区间图中寻找最大独立集的问题。我们还将研究区间图的补图与可无环传递定向图的关系。最后我们将介绍弦图的概念。

1. 介绍

之前各讲中我们讨论了区间图，并知道一些典型的难题在区间图上可以高效地解决。有一些问题，诸如图的染色、最大团问题、哈氏回路问题以及判断两个图是否同构的问题都是 NP 难题。然而在区间图上，我们能出色地将这些问题在多项式（而且经常是线性）时间内解决。这一讲中将讨论的最大独立集问题就是其中之一。我们将使用贪心算法求出一个图的最大独立集，前提是该图具有完美消除序列并且这个序列已知。有关该问题的详细内容参见 Lorna Stewart 的主页 <http://web.cs.ualberta.ca/stewart/GRAPH/index.html>。

我们将了解的另一类图是区间图的补图。我们将学习一种对这些图的边的自然确定法，并发现区间图的补图实际上是相似图。

最后，我们将介绍弦图并证明具有完美消除序列的图都是弦图。

2. 定义

一个图 G 的独立集是它的一个边集为空的诱导子图。一个具有 K 个顶点的独立集称为 K 独立集。一个极大独立集是一个独立集，但加入任何其他节点都将破坏独立集的性质。一个最大独立集是 G 中存在的顶点数最多的独立集，记为 $\alpha(G)$ 。

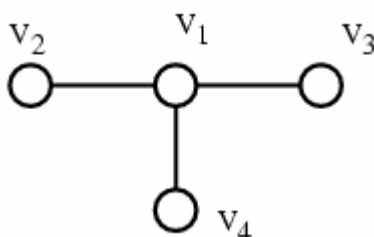
3. 寻找独立集的一个可行算法

以下算法用贪心法寻找图 G 的一个独立集。它不一定是极大（或最大）的。算法的输入是图 G 以及一个顶点序列 $\{v_1..v_n\}$

初始时记所有顶点未访问（untouched）。

```
for  $i = 1, \dots, n$  {  
    if  $v_i$  is “untouched” {  
        add  $v_i$  to the independent set  
        mark all of  $Succ(v_i)$  as “touched”  
    }  
}
```

假设贪心算法的输入是一个完美消除序列，它能保证得到一个最大独立集吗？考虑图 1 所示的图 G 。



显然这个图具有完美消除序列 $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ 。然而当贪心算法作用与该图时，它将找到独立集 $\{V_1\}$ ，这显然不是最大独立集。然而如果将完美消除序列的逆序作为输入，却可以得到最大独立集。

定理 1：如果 $\{V_1..V_n\}$ 是一个完美消除序列，那么以上贪心算法对与顶点序列 $\{V_n..V_1\}$ 可以得到最大独立集。

证明：很容易得知完美消除序列的逆序具有如下性质：对于每个 $i \in \{1..n\}$ ， $\{V_i\} \cup \text{Succ}(V_i)$

是一个团。对与某个未方位的点 V_i ，它与它的后继中至多有一个在独立集中。如果这些点都不在独立集中，显然加入点 V_i 后仍是一个独立集，而且必原来更大；如果这些点中有某个 V_j 在独立集中，用 V_i 代替 V_j ，显然得到的仍是一个独立集，而且与原来一样大。综上所述，对任意一个不包含 V_i 的独立集，总存在一个包含 V_i 的独立集，且不比原来小，这对最大独立集同样成立，即 V_i 的贪心选择是正确的。定理 1 得证。■

另外，我们给出一个利用拟阵进行的证明作为参考：

证明：建立拟阵 $M = (S, I)$ ， S 为图 G 的顶点集，按照完美消除序列逆序编号； I 为 G 的独立集集合。显然 I 具有遗传性质。又设 I 中的两个元素 A, B ， $|A| > |B|$ ， B 中的每个顶点最多有一个后继属于 A ，否则由于 B 的后继集是一个团得出矛盾。因为 $|A| > |B|$ ， A 中必有至少一个元素 V 不是 B 中任何元素的后续，即将 V 加入 B 中， B 仍是独立集。因此 I 满足交换性质。综上所述， M 是一个拟阵。令每个 S 中的元素的权为 1，则最大独立集问题转化为求拟阵的最大权独立子集问题。根据拟阵理论，贪心算法成立。定理 1 得证。■

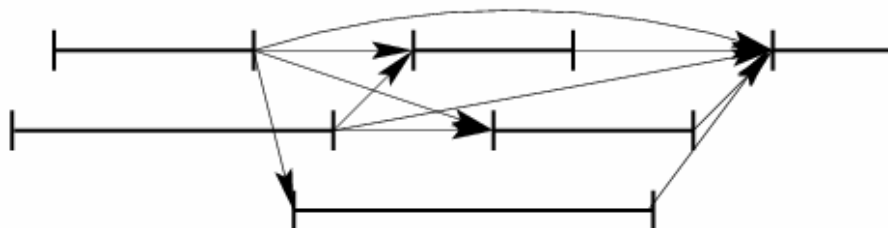
通过运用以上一类算法，很多 NP 难题在区间图上能够用线性或多项式时间解决，这些问题包括图的染色、最大团问题、最大独立集问题、哈氏回路问题以及判断两个图是否同构。然而另一些问题仍然是 NP 难题，例如货郎问题：给定一些城市即之间的距离，要求找出一条访问每个城市的最短路径。如果将城市看作顶点，距离作为边权，货郎问题就是在图中寻找包含所有顶点的最短路。由于可以在任意两个城市间行走，该图是一个完全图 K_n 。显然 K_n （不包括边权）是一个区间图。

4. 区间图的补图

许多情况下，一个图与它的补图属于同一类图。那么区间图也是这样么？

构造一个区间图，完美在相交的区间之间连边。因此在它的补图中，每个顶点仍然代表一个区间，但两个顶点之间有边，当且仅当对应的区间不相交（见图 2）。另外，边由左到

右进行定向。给定一个区间图 $G = (V, E)$ ，它的补图 $\overline{G} = (V, DE)$ ，其中 $(u, v) \in DE$ ， $u, v \in V$ 是一条 u 到 v 的有向边，区间 I_u 在 I_v 的左边。



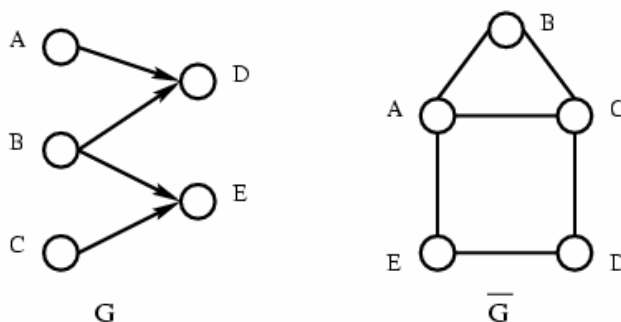
定义 1：图 $G = (V, E)$ 的一个定向图（又称竞赛图）是把 E 中的每条边 (u, v) 定向后得到的有向图。 G 的一个无环定向图是它的一个不含有向环的定向图。一个定向方法如果

满足对所有 $u, v, w \in V$, 且 u 到 v 有边, v 到 w 有边, 则 u 到 w 有边, 则称为具有传递性的定向。一个边定向无环且具有传递性的定向图称为无环传递定向图。
 定义 2: 具有传递定向图无环传递定向图的无向图称为相似图。补图是相似图的图称为伴相似图。

显然一个区间图的补图 \overline{G} 是边无环可传递的。因此区间图的补图（不带方向）是可无环传递定向的, 或者说区间图（不带方向）是伴可无环传递定向的。但区间图不一定是可无环传递定向的（包含两条边的链就是一个反例），所以区间图的补图不一定是区间图。

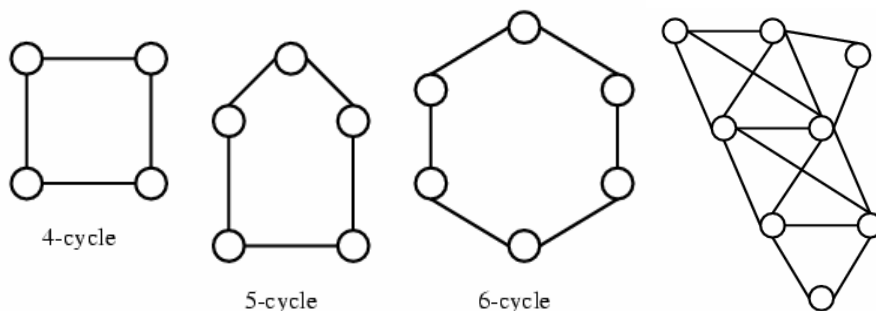
反之, 所有伴相似图都是区间图吗? 图 3 表示了一个相似图 G , 它的补图是伴相似图, 但却不是区间图（因为它包含四阶简单圈 C_4 ）。

另外, 二分图都是可无环传递定向的, 只要另所有的边由 X 集指向 Y 集即可。



5. 弦图

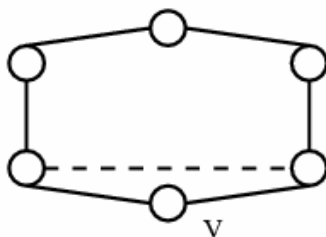
定义 3: 如果一个图的任何诱导子图都不是 K 阶环 ($K \geq 4$) (见图 4), 那么该图称为弦图 (见图 5)。



与区间图类似, 我们感兴趣的是弦图具有哪些性质, 它属于或包括哪些类图。

定理 2: 如果一个图 G 具有完美消除序列, 则 G 是弦图。

证明: 假设 G 不是弦图, 令 C 是一个 K 阶环 ($K \geq 4$), C 中不相邻的顶点间没有边。又令 v 是该环内最后一个在完美消除序列中出现的顶点。则 v 至少有两个相邻的顶点 (即环中的相邻点), 这两个顶点必定构成一个团 (它们都是 v 的前驱), 即它们之间有边, 这与 C 的性质矛盾 (见图 6)。定理 2 得证。■



第五讲、完美消除序列

本讲的主题有关弦图和完美消除序列。我们已知具有完美消除序列的图都是弦图，本讲中将了解到所有弦图都具有完美消除序列。

为了证明这一点，我们引入了单纯顶点的概念，并证明弦图都含有单纯顶点。证明过程中，完美还将得知弦图的子图也是弦图。

我们讲给出两个在线性时间内求出完美消除序列的算法，并给出了一个算法运行全过程的例子。

作为一个推论，独立集、染色、团等问题在弦图上都能用线性时间解决。

1. 介绍

我们已经知道弦图的定义，弦图同时又有很多名字：严格巡回图、单调传递图、三角图、完美消除图等。其中有些不难理解。

我们已学习了区间图，不久将知道区间图都是弦图。

2. 弦图与完美消除序列

我们的目标是证明图 G 是弦图，当且仅当 G 具有完美消除序列。这个命题的必要性已经证明，现在我们来证明充分性。

首先引入单纯点的概念：如果与顶点 V 相邻的所有顶点构成一个团，则 V 称为单纯点。

定理 1：任何弦图 G 具有至少一个单纯点。如果 G 不是完全图，那么它至少具有两个不相邻的单纯点。

证明：完全图的情况是平凡的（每个顶点都是单纯点），我们只考虑 G 不是完全图的情况。

我们对 G 的顶点数 N 使用归纳法：

1：奠基 $N=1$ 时。平凡解，显然成立。

2：归纳假设：对所有 $N \leq K$ ($K \geq 1$)， G 有两个不相邻的单纯点。

3：归纳证明：令 $N=K+1$ ，

由于 G 不是完全图，可以找到边 $(a, b) \notin E$ 。

记 $G[V-S]$ 为 G 的顶点子集 $V-S$ 诱导的子图。 S 为 $V-\{a,b\}$ 中的最小的子集，满足 a 与 b 在 $G[V-S]$ 两个不同的连通分支 A 和 B 中， S 可以是空集。

S 的这种取法一定存在，因为我们可以令 S 为所有与 a, b 相邻的顶点集合（ $G-S$ 中 a, b 是孤立点）。

我们的目标是在 A 和 B 中分别找到一个单纯点。我们只考虑在 A 中找到一个单纯点， B 中的方法是同样的。

令 G_{A+S} 是顶点集 $A \cup S$ 诱导的子图。

情况 1： G_{A+S} 是完全图。那么 a 是 G_{A+S} 中的一个单纯点，也是 G 中的单纯点（由于 $a \in A$ ， a 的相邻点都在 G_{A+S} 中）。

情况 2： G_{A+S} 不是完全图。由于 $B \not\subseteq G_{A+S}$ ，则 $|G_{A+S}| < |G|$ 根据归纳假设， G_{A+S}

$+S$ 中有两个不相邻的单纯点 x, y ， $(x, y) \notin E$ 。

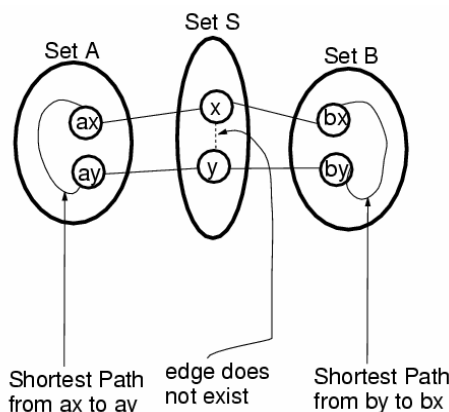
情况 2A： x, y 中有一个属于 A ，不妨设为 x 。与情况 1 类似， x 也是 G 中的单纯点。

情况 2B: x 和 y 都属于 S 。我们将证明这种情况不存在。用反证法。

引理 1: x 与 y 在 A 、 B 中都有相邻的顶点。

证明: 不失一般性, 假设 x 在 A 中没有相邻顶点。那么我们可以将 x 从 S 中删去, 得到一个更小的 S' , S' 同样将 A 、 B 分离, 这与 S 的最小性矛盾。引理 1 得证。

于是, 令 x 的两个相邻点 $ax \in A$, $bx \in B$, y 的两个相邻点 $ay \in A$, $by \in B$ 。由于 A 是一个连通分支, 存在从 x 到 y 的一条路径, 且该路径除 x , y 外的所有顶点都在 A 中。同理存在一条除端点都在 B 中的路径连接 x , y (见图 1)。



设使用 A 中顶点从 x 到 y 的最短路径是 $(x, a_x, a_1, \dots, a_k, a_y, y)$,

使用 B 中顶点从 x 到 y 的最短路径是 $(y, b_y, b_1, \dots, b_m, b_x, x)$, 则

$(x, a_x, a_1, \dots, a_k, a_y, y, b_y, b_1, \dots, b_m, b_x, x)$ 是一个

环, 显然它的长度不小于 4。当 $ax=ay$ 且 $bx=by$ 时它的长度是 4。

由于在弦图中, 所有长度不小于 4 的环上都有弦 (连接不相邻顶点的边), 我们必须在以上环中找到一条弦。显然 A 到 B 中没有弦 (A , B 是不同的连通分支)。

A 到 $A \cup \{x, y\}$ 中或 B 到 $B \cup \{x, y\}$ 中也没有弦, 因为我们选取的最短路。而

$(x, y) \notin G$, 也不可能是弦。因此这个环上没有弦, 这与 G 是弦图矛盾。因此

此情况 2B 不存在。

综上所述, A 中存在一个单纯点。同理 B 中也存在一个单纯点。显然这两个点不相邻。

定理 1 得证。■

以上证明使用了一个事实: $A \cup S$ 是一个弦图。下面进行证明:

定理 0: 弦图的任何诱导子图都是弦图。

证明: 假设图 G 是一个弦图, H 是 G 的任意一个诱导子图。那么有 $V(H) \subseteq V(G)$, E

$(H) \subseteq E(G)$ 。显然 H 中没有新的环出现。因为 G 中所有大于 3 阶的环都有弦, 这对

H 中的环显然也成立。定理 0 得证。■

推论 2: 每个弦图都有我们消除序列。

证明: 对顶点数 N 归纳。

1: $N=1$, 显然成立。

2: $N=K-1$, $K \geq 2$ 成立时, 令 $N=K$ 取 G 中的一个单纯点 V_k , $G[V-V_k]$ 也是弦图,

有归纳假设，令它具有一个我们消除序列 $\{V_1..V_t\}$ ， $t=K-1$ 。由于 V_k 是单纯点，易得序列 $\{V_1..V_t, V_k\}$ 是 G 的一个完美消除序列。推论 2 得证。■

推论 2 的证明暗示了一种迭代地寻找完美消除序列的方法。

这种方法最先由 Fulkerson 和 Gross 在 1965 年提出。他们提出运行这个算法时将出现两种情况：

- 算法运行至没有顶点剩余。那么找到了一个完美消除序列，且 G 是弦图。
- 在某个时刻，找不到单纯点。那么 G 不是一个弦图。

推论 3：独立集问题、染色问题、团问题在弦图上都可以在线性时间内解决。

证明：首先寻找一个完美消除序列。下一节中我们将得知这可在线性时间内解决。然后使用以前各讲的算法很容易解决上述的问题。推论 3 得证。■

3. 算法

本节中我们将了解在 $O(n+m)$ 时间内寻找完美消除序列的具体算法。

3. 1. 最大势算法 (MCS)

以下算法是 Tarjan 在 1976 年提出的。算法中顶点从 1 到 N 编号。通过选择一个未选择但与最多的已选择顶点相邻的顶点。

```
for  $i = 1, \dots, n$   
  Let  $v_i$  be the vertex such that  $v_i \notin \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$  and  
   $v_i$  has the most neighbours in  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ 
```

可以得知得出的序列 $\{V_1..V_n\}$ 是完美消除序列。证明从略。

3. 2. 字典序广度优先搜索 (Lexicographical BFS)

以下算法由 Lueker、Rose、Tarjan 在 1976 年提出。算法将顶点标号，然后选择字典序“最大”的标号顶点。标号仅在选择过程中使用。标号 L_a 大于 L_b ，当且仅当字典中 L_a 在 L_b 后出现。

```
For all vertices  $v$ , let  $L(v) = \emptyset$  (label)  
for  $i = n, \dots, 1$   
  Let  $v_i$  be the vertex such that  $v_i \notin \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$  and  
   $v_i$  has the lexicographically largest label  $L(v_i)$   
  For all neighbours  $v$  of  $v_i$ , set  $L(v) = L(v) \circ i$ 
```

算法的正确性将在下一讲中证明。

4. 算法过程实例

本节中我们将给出以上两种算法运行的完整实例。图中灰色顶点表示已选择的顶点，黑色顶点表示目前选择的顶点。(译者注：这里只给出图例描述，具体图例请看 E 文版。)

4. 1. 最大势算法 (MCS)

第 K 次迭代后，顶点 $V_1..V_k$ 的值将被标出。

顶点边的数字表示：顶点（该顶点的相邻点中已选择的顶点数）。

每次迭代是我们只对尚未选择的顶点感兴趣，因此我们将不更新已选择顶点的相邻点中已选择的顶点数。

3. 2. 字典序广度优先搜索 (Lexicographical BFS)

第 K 次操作时 $\{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-i+1}\}$ 的值被标出。

顶点边的数字表示：顶点（该顶点的标号）。

我们不更新已选择顶点的标号。

注意到两种算法得出的完美消除序列是相同的，但不一定始终是这样。

另外，可以发现存在 MCS 与 BFS 都得不到的完美消除序列。这将作为本讲的作业☺。

第六讲、弦图的判定

给定一个弦图，LexBFS 与 MCS 算法可以找到一个完美消除序列。本讲中，我们将了解这两种算法实现的细节，并给出简要的正确性证明。同时我们将看到 LexBFS 在 $O(n+m)$ 的时间内得到完美消除序列。

1. 介绍

每个弦图都有完美消除序列。我们将用 LexBFS 算法在 $O(n+m)$ 的找到这个序列。回忆以下 LexBFS 算法：每次选择标号最大的顶点并更新它的相邻点。直接做到这一点需要多余线性的时间，我们使用了特殊的数据结构使得寻找、更新顶点的时间降为 $O(1)$ 。

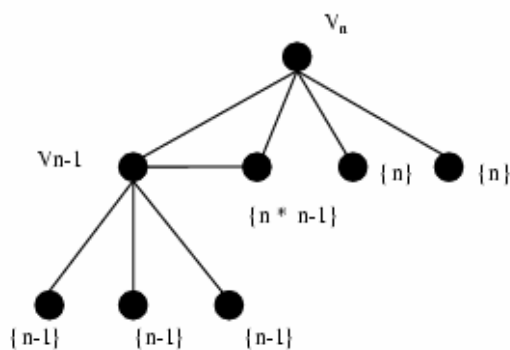
判定一个图是否是弦图，我们需要测试 LexBFS 算法返回的序列是否是完美消除序列。朴素的算法是测试每个顶点的前驱集合是否构成一个团，这需要 $O(\sum_{v \in V} (deg(v)^2) = O(mn))$ 的时间。但事实上，我们可以知道使用恰当的测试顺序，一个完美消除序列的每条边至多被检查两次。因此我们得到了一个时空复杂度都为 $O(m+n)$ 的算法。

2. LexBFS 算法的复杂度

回忆以下 LexBFS 算法的流程：

1. For all vertices v , set $L(v) = \emptyset$;
2. For $i = n \dots 1$
3. among all vertices $\neq v_{i+1}, \dots, v_n$
4. pick up v_i with the lexicographically largest label $L(v_i)$;
5. for each unnumbered vertex w that is adjacent to v
6. Set $L(w) = L(w) \circ i$

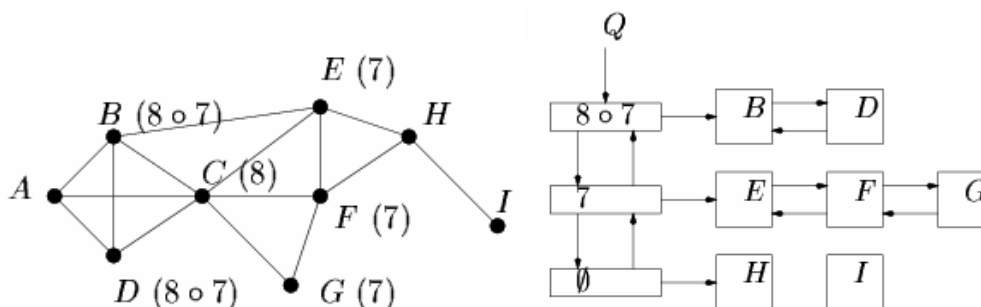
我们可以指出该算法是一个广度优先搜索。观察一下算法生成的搜索树，顶点 v_n 的相邻点在 v_{n-1} 的相邻点之前被访问。LexBFS 与标准 BFS 的唯一区别是 LexBFS 给 v_n 的相邻点加上了特别的顺序。（图 1）



3. 数据结构

为了高效地执行 LexBFS 算法，我们使用一个链表形的数据结构，其中表 Q 中的每个节

点是指向另一个链表的指针，称为一个“桶”。表 S_l (l 表示一个标号) 包含了所有的满足 $L(V) = l$ 顶点 V ， L 是顶点 V 的标号。 Q 中不能包含空链表。 Q 中的各桶按字典序排列，最大的在最前面。我们看一个例子：



假设我们首先选择顶点 A 并标号它的所有相邻点；接着，我们选择顶点 C 并更新它的相邻点，我们得到的表 Q 将如图 3 所示。

实际中，每个顶点所在的桶 $S(L(V_i))$ 也被记录下来。另外，每个桶在 Q 中的位置也被记录下来。注意：为了插入与删除的方便，这些链表都是双链表。

对于这种数据类型的世纪操作，初始时所有顶点都标号 0 ，因此 Q 只有一个桶 S_0 包含了所有顶点。显然这个初始化能在 $O(n)$ 时间内解决。

为了获得下一个顶点并更新数据，我们进行一下操作：

1. 令 V_i 是第一个桶中的第一个元素（显然 V_i 是目前标号最大的一个顶点）。
2. 将 V_i 从桶 $S(L(V_i))$ 中删去。
3. 如果 $S(L(V_i))$ 已空，将它从 Q 中删去。
4. 对于每个 V_i 的相邻点 W ：
 5. 如果 W 仍在 Q 中（ W 尚未选择，必须更新它的标号和它在 Q 中的位置）
 6. 找到 $S(L(W))$ 以及它在 Q 中的位置。
 7. 寻找 Q 中 $S(L(W))$ 上一个桶。
 8. 如果这样的桶不存在，或它不是 $S_{L(W)-1}$
 9. 在 Q 中的当前位置建立一个桶 $S_{L(W)}$ 。
 10. 将 W 从 $S(L(W))$ 中取出并加入 $S_{L(W)}$ 中。
 11. 如果 $S(L(W))$ 已空，将它删除。
 12. 将 $L(W)$ 更新为 $L(W) + 1$ 。

现在分析该算法的复杂度。获得 V_i 以需要 $O(1)$ 时间。从桶中删除一个元素也只要 $O(1)$ 时间。

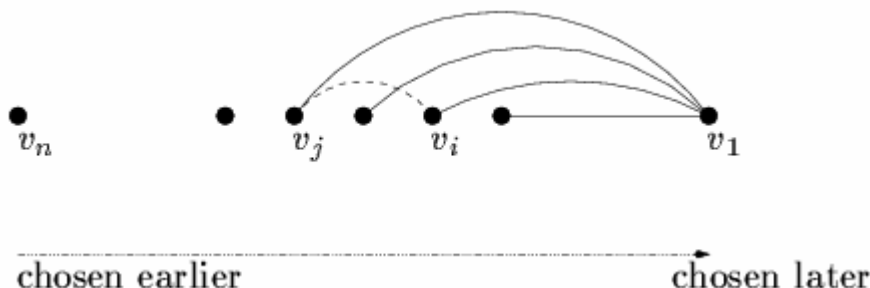
更新 Q 时，我们必须更新 V_i 所有未选择的相邻点。对每个顶点需要 $O(1)$ 时间（所有需要的值都被储存下来了）。因此用时为 $O(\text{顶点 } V_i \text{ 的度})$ 。总的时空复杂度都为 $O(n+m)$ 。

空间也是线性也许不很明显。注意每个标号的长度可能到达 $O(n)$ ，例如对于完全图。但注意我们只在选择某个顶点 W 的相邻点时才增长它的标号。因此每个顶点的标号长度与它的度成正比，所以总空间复杂度为 $O(n+m)$ 。

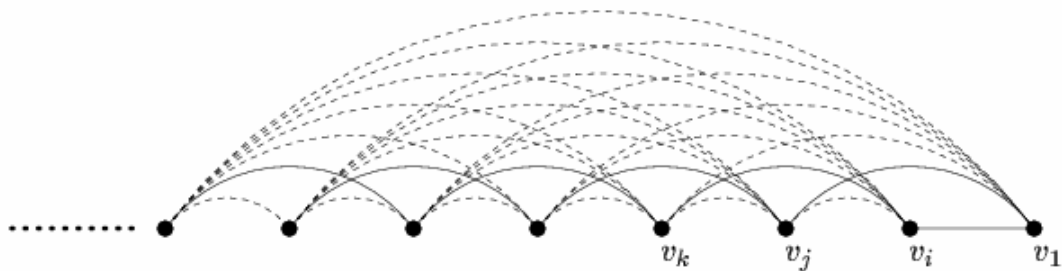
我们下面证明这个算法的确找到一个完美消除序列（如果有的话）。

定理 1：令 $G = (V, E)$ 是一个图， $\{V_1..V_n\}$ 是 LexBFS 算法得出的序列（ V_n 是首先被选

假设 V_1 不是单纯点, 那么存在 V_1 的两个相邻点 V_i 和 V_j , 它们之间没有边。不妨令 $j>i$, 即 V_j 在完美消除序列 (假设是) 中在 V_i 之前。(图 4)


$$\begin{aligned} L(v_1) &= \cdots j \cdots \\ L(v_i) &= \cdots \cancel{j} \cdots \end{aligned}$$
$$\begin{array}{lcl} L(v_1) & = & \cdots \not{k} \cdots j \cdots \\ L(v_i) & = & \cdots k \cdots \not{j} \cdots \end{array}$$

于是我们又一次重复论点：为什么 V_k 在 V_j 之前被选择？于是又有之前的另一个顶点……这样的证明不断进行，知道推出矛盾（图 6）：每次都导出一个新的顶点，但 G 的顶点是有限的，矛盾。因此 V_1 是单纯点。根据上一讲的归纳证明，定理 1 得证。



■

4. 检验完美消除序列

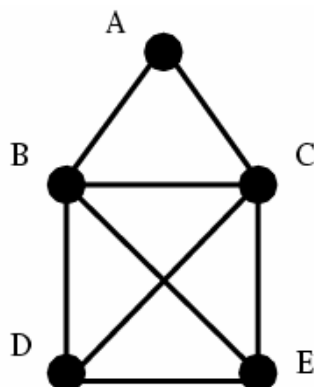
定理 1 证明了如果 G 是弦图，LexBFS 能够找出完美消除序列。为了判定弦图我们只需要验证 LexBFS 返回的序列是否是完美消除序列。我们的算法用时为 $O(n+m)$ 。

假设顶点 v 有一些前驱（否则 v 不需检验），令 u 是这些前驱中的最后一个。如果这是一个完美消除序列，那么 v 的前驱集构成一个团，所以 u 必须与 v 的所有其他前驱相邻，我们检验这一点。另一方面，如果检验成立，则 v 的其他前驱都是 u 的前驱，我们只要对 u 进行测试就可以了。

该算法的流程如下：

1. for $j = n$ down to 1 do
2. if v_j has predecessors
3. Let u be the last predecessor of v_j .
4. Add $Pred(v_j) - \{u\}$ to $Test(u)$.
 ($Test(u)$ denotes the multi-set of vertices for which
 we want to test whether they are neighbours of u .)
5. (Now test $Test(v_j)$.)
6. Mark all vertices in $Pred(v_j)$ as touched
7. for every vertex w in $Test(v_j)$,
8. if w is not touched, return FALSE.
9. Mark all vertices in $Pred(v_j)$ is untouched
10. return TRUE

我们用图 7 的图了解这个算法的运行过程：



假设我们将检验序列 $\{A, D, B, C, E\}$ ，这不是完美消除序列。算法运行如下：

- 第一轮： $Pred(E) = \{B, C, D\}$, $U=C$, $Test(C) = \{B, D\}$ 。由于 $Test(E) =$

\emptyset ，未发现错误，继续。

- 第二轮: $\text{Pred}(C) = \{A, B, D\}$, $U=B$, $\text{Test}(B) = \{A, D\}$ 。由于 $\text{Test}(C) = \{B, D\}$, C 与它们都相邻，未发现错误，继续。
- 第三轮: $\text{Pred}(B) = \{A, D\}$, $U=D$, $\text{Test}(D) = \{A\}$ 。由于 $\text{Test}(B) = \{A, D\}$, B 与它们都相邻，未发现错误，继续。
- 第四轮: $\text{Pred}(D) = \emptyset$, Test 集合不变。但由于 $\text{Test}(D) = \{A\}$ ，但 D 不与 A 相邻，因此返回 **FALSE**。

译者注： 1：这个算法也可以从前向后进行，可能更便于理解。

2：代码第 4 行有个错误: $\text{Pred}(V_j) \rightarrow \text{Pred}(V_i)$ 。

定理 2：以上算法当且仅当 $V_1..V_n$ 是完美消除序列时返回 **TRUE**。

证明：如果算法返回 **FALSE**。则一定存在顶点 $W \in \text{Test}(V_j) - \text{Pred}(V_j)$ 。由于 W 在 $\text{Test}(V_j)$ 中，则 W 与 V_j 都是某个顶点 V_i 的前驱。由于 $W \notin \text{Pred}(V_i)$ ，那么 V_i 的前驱集合不是一个团，所以 $V_1..V_n$ 不是完美消除序列。

另外，假设 $V_1..V_n$ 不是完美消除序列，但算法却返回 **TRUE**。令 I 为满足以下条件的最小值：存在 $V_j, V_k (j < k)$ 是 V_i 的两个前驱，它们不相邻。令 U 为 V_i 最后的前驱。检验 V_i 时， U 的前驱是一个团，因此 V_i 与 V_j 中至少有一个就是 U （否则算法在检验 U 时会返回 **FALSE**）。令 $U=V_j$ ，我们处理 V_i 时会将 V_k 加入到 $\text{Test}(U)$ 中，于是检验 U 时，我们会发现 $V_k \in \text{Test}(U)$ ，但 $V_k \notin \text{Pred}(U)$ ，算法将返回 **FALSE**，矛盾。定理 2 得证。■

$$|V| + \sum_{v \in V} |\text{Adj}(v)| + \sum_{v \in V} |\text{Test}(v)|$$

我们可以发现，整个算法的时空复杂度为

每个顶点 V ，算法只会将 $\text{Pred}(V)$ 加入到某一个 $\text{Test}(U)$ 中去即

$$\sum_{v \in V} |\text{Test}(v)| = \sum_{v \in V} |\text{Deg}(v)|$$

，因此算法的复杂度为 $O(n+m)$ 。

将这个算法与 LexBFS 算法结合在一起，我们就得到了本章的最终结论：

定理 3：弦图的判定可以在线性时间内解决。

第七讲、弦图与相似图

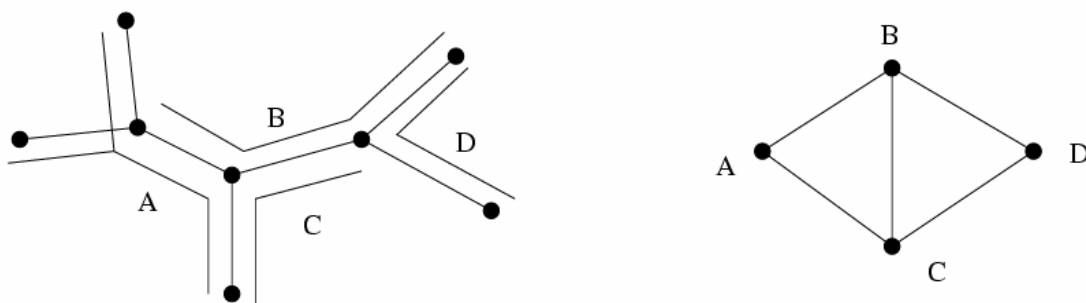
本讲中我们将结束对弦图的讨论。我们还将给出子树的相交图的描述，它很好地推广了区间图性质。同时我们将总结弦图的一些结论。我们将介绍相似图以及有效地解决判定、最大团、顶点染色等问题的算法。

1. 介绍

我们知道弦图有两个等价命题：不含无弦的环；有完美消除序列。现在我们给出另一个等价命题：弦图可以表示为某个树的某个子树集的相交图：

定理 1：有 N 个顶点的图 $G = (V, E)$ 是弦图，当且仅当存在一棵树 T 的 N 棵子树 $T_1..T_n$,

满足 $(v_i, v_j) \in E$, 当且仅当 $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ 。(图 1)



这是我们要证明的首要结论。

我们同时介绍相似图的概念。

2. 子树集的相交图

定义 2：给定一棵树 T 及其若干子树 $T_1..T_n$ 。令 $V = \{v_1..v_n\}$, $E = \{v_i v_j \mid T_i \cap T_j \neq \emptyset\}$,

那么 $G = (V, E)$ 称为子树集 $\{T_i\}$ 的相交图。

这个定义有些不严密。我们申明：这里两个子树相交表示它们有公共边。另外，没有任何子树完全包含与另一棵子树。事实上这个申明并不是很实质，请看下面的引理：

引理 3：已知子树集 $T_1..T_n$ ，令 G 是它们的相交图，则存在另一个子树集 $T'_1..T'_n$ ，满足它的相交图 G' 与 G 同构，并且对任何 T'_i, T'_j , $i \neq j$ ，都存在边 e 满足 $e \in T'_i$, $e \notin T'_j$ 。

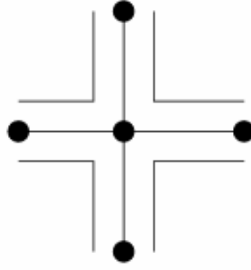
证明：对于那些包含于其他树的子树，只要在其中某个顶点上增加一条新边即可。■

注意引理 2 的否命题是错的，因此我们可以将定义 2 如下描述：

定义 4：给定一棵树 T 及其若干子树 $T_1..T_n$ 。令 $V = \{v_1..v_n\}$, $E = \{v_i v_j \mid T_i \cap T_j \cap E$

$(T) \neq \emptyset\}$ ，那么 $G = (V, E)$ 称为子树集 $\{T_i\}$ 的边相交图。

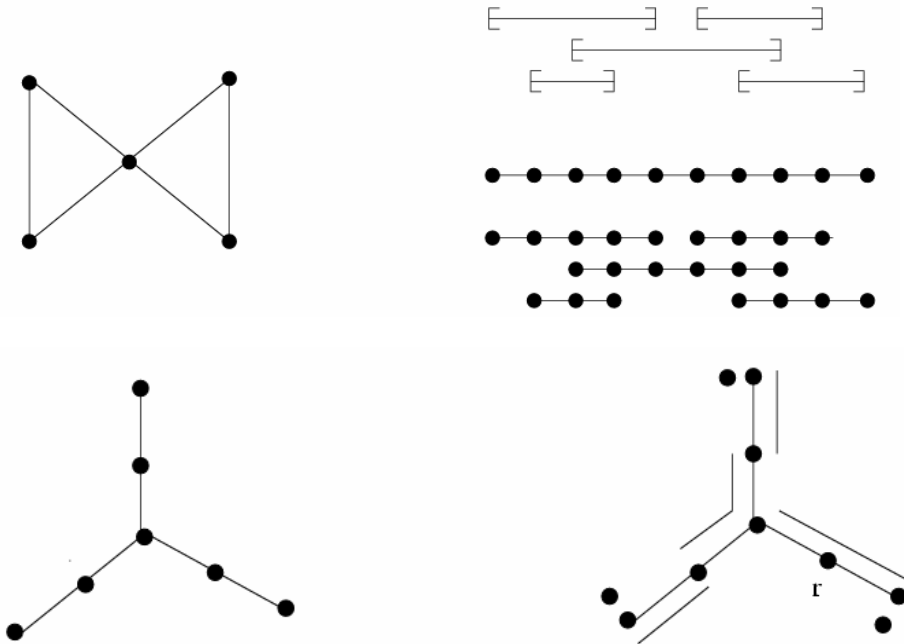
注意定义 4 中的子树不满足 Helly 性质（见定义 5）。显然，有定义 4 确定的图总是有定义 2 确定的图的子图。另外任何由定义 2 确定的图都能用定义 4 确定，证明类似引理 3，但反之则不一定。（见图 2，无弦环 C_4 ）



因此我们可以假定子树互不包含且使用边相交。实际中，这些都将用到，以上引理证明了这些假设不会改变图类型。以后我们将不在重申这些条件。

证明定理 1 之前，我们先回忆一下。我们曾证明 N 个顶点的区间图可以用一系列端点不重合的闭区间表示，并且这些端点可以离散到 1 至 $2N$ 间的整数。事实上，我们证明了区间图是一条线段的若干子线段形成的相交图。因此，定理 1 是由区间图到弦图的一个更一般的描述。

容易得知线段的相交图是子树集的相交图的特例。图 3 表示前者可以转化为后者；图 4 是后者无法转化为前者的一个例子。



注：图 4 表明是一个一般性的方法：对于一棵树 T ，对它的每个顶点定义一棵子树为该点于它的所有子节点诱导的子树，那么这些子树形成的相交图就是 T 本身。

3. 定理 1 的证明

这里我们只处理两子树相交是顶点相交的情形（即定义 2 的情形）。

定义 5: 令 A 为一个集合集, 如果对于 A 的每个满足以下性质的子集 A_1 : 对所有 $A_i, A_j \in A_1$,

都有 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$; 都有 $\bigcup_{A \in A_1} A \neq \emptyset$, 那么称 A 满足 Helly 性质。

Helly 性质表示两两相交等价于有共同的交集。

为了知道这对子树集成立，考虑这样的一种情况： T_1, T_2, T_3 是 T 的三个子树两两相交，但却没有公共的交集。令 V_{ij} 是 T_i 与 T_j 交集中的一个顶点， $1 \leq i < j \leq 3$ ，则这些顶点必须两两不同。由于树是连通的，从 V_{12} 到 V_{13} 有一条简单路径 P_1 ， P_1 在 T_1 中。同理 T_2

中有路径 P_2 连接 V_{12} 与 V_{23} , T_3 中有路径 P_3 连接 P_{23} 与 P_{13} 。这三条路径构成 T 中的一条回路。由于 V_{12} 、 V_{23} 、 V_{13} 互不相同, 这个回路至少包含一个长度不小于 3 的简单环, 这与 T 是一个图矛盾。

对于多于三个的情况是类似的。

我们首先证明有子树集形成的相交图都是弦图。

证明: 给定树 T 与子树集 $T_1..T_n$, 我们对 $|T|$ 用归纳法:

$|T|=1$ 时, T 是平凡图, 即 $T_i=T$, $i=1..n$ 。相交图是完全图, 属于弦图。

$|T|\geq 2$ 时, T 含有一个叶节点 V 。有两种可能。如果没有子树恰在 V 相交, 那么我们将 V 从 T 及所有包含它 T_i 中删去, 相交图不会改变。由归纳假设, 这个图是弦图; 如果存在两个子树恰在 V 相交, 由于 V 是叶节点, 必有一个子树仅含 V 一个节点, 不妨设为 T_n 。注意与 T_n 相交的任何其他子树都包含 V , 也就是说所有与 T_n 相交的子树两两相交。那么在相交图中 T_n 的所有相邻点形成一个团, 即 T_n 代表的点是单纯点。根据归纳假设, T 中 V 后的相交图存在完美消除序列, 将 T_n 代表的点加在最后, 则整个相交图有完美消除序列, 即这个图是弦图。即证。■

下面我们证明每个弦图都能表示为一个子树集的相交图。

证明: 我们一步步地建立树 T , 每增加一个顶点就增加一个子树。

令 G 是一个弦图, 它有一个完美消除序列 $\{V_1..V_n\}$ 。首先令 $T=T_1=K_1$ 。对于 $i=2, 3..n$, 注意 V_i 的前驱对应的子树两两相交。由于满足 Helly 性质, 这些子树至少有一个公共点 P 。在 T 中加入一个新顶点 Q , Q 只与 P 相联, 并将 Q 与边 (P, Q) 加入所有 V_i 的前驱对应的子树, 最后令 $T_i=\{Q\}$ 。正确性易得。■

4. 对弦图的最后补充和总结

我们现在有了弦图的三个等价条件: 有完美消除序列、没有无弦环、能表示成子树集的相交图。事实上还有许多其他描述。以下的等价条件在[Gol80]中有描述, 这里不加证明地给出。

定理 6: 一个图 G 是弦图, 当且仅当任何极小分离集 S 诱导的子图都是完全图。

所谓分离集 S 就是对任意两个连通但不相邻的顶点, 满足 $G-S$ 中这两个顶点不连通。

第五讲中已经证明过弦图的任何极小分离集必定是个团, 下面证明任何不是弦图的图都存在不是团的最小分离集。

证明: 假设图 G 不是弦图, 则 G 一定存在长度大于 4 的无弦环 C 。取 C 中任意两个不相邻顶点 A, B , 取 A, B 的一个极小分离集 (显然是存在的), 那么这个集合一定包含 C 中的两个不相邻的顶点 (否则 A, B 之间仍然连通), 即不是一个团。即证。■

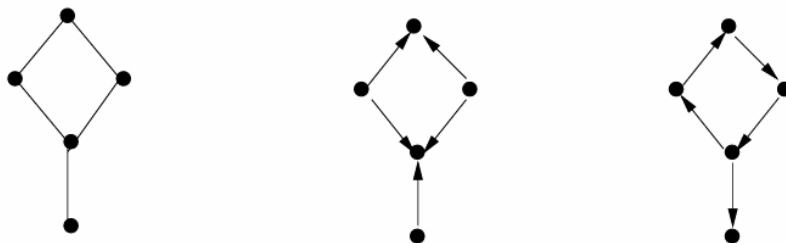
我们能够在线性时间内判定弦图 [RTL76, TY84], 区间图也是如此 [BL76, KM89, HM91, HPV96]; 对于弦图, 寻找最大割是 NP 难题, 对于区间图尚不清楚复杂度; 区间图的哈氏圈用线性时间解决 [CPL93], 对于弦图尚不清楚。

5. 相似图

给定一个无向图, 我们能够通过某种方式给边定向。如果这种定向不形成环, 称为无环的 (注意原无向图可能有环); 如果对于任何顶点 X, Y, Z , $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z$, 都有 $X \rightarrow Z$, 称为传递的。(过去有过定义)

定义 7: 一个能够无环且具有传递性地定向的无向图 G 称为相似图。一个无环且具有传递性的有向图称为一个部分序。

注意相似图也可能有环或不具传递性的定向方式。(图 5)



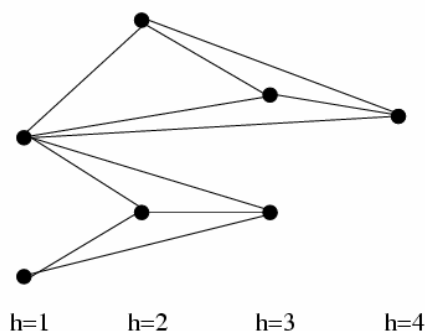
Golumbic 给出了一个用线性时间判定相似图的算法[Gol80]。回忆：如果 G 是区间图，则 G 补图是相似图。事实上，标号方式是显然的：两个区间对应的顶点不相邻，当且仅当它们不相交，因此可以从左到右给边定向。

6. 相似图的顶点染色

首先简单地观察一下。令 P 是一个部分序中的一条有向边，则由传递性， P 上的每对顶点间都有弧，因此 P 上的顶点在原图 G 中是一个团。这是在线性时间内求出 $W(G)$ 与 $X(G)$ 的算法基础。

给定一个部分序，我们定义顶点上的函数 H ： $H(V) = 1 + \max\{H(W) \mid W \rightarrow V\}$ ，如果 V 的入度为零，令 $H(V) = 1$ 。（图 6）

由于没有环，这种定义是唯一确定的。在将顶点拓扑排序后， H 可以在线性时间内求出。



注意如果 $V \rightarrow W$ ，由 $H(W) \geq H(V) + 1$ 。也就是说对于给定的 I ， H 值为 I 的顶点集构成一个独立集。令 K 是 H 的最大值，则我们可以给每个点染色 $H(V)$ ，获得一个 K 染色方法。对于顶点 V ，如果 $H(V) > 1$ ，则它必定有一个前驱 W 满足 $H(W) = H(V) - 1$ 。于是存在着一个长度为 K 的有向路径，即原图中存在着大小为 K 的一个团。于是我们有： $X(G) \leq K \leq W(G)$ 。但对任何图都有 $X(G) \geq W(G)$ ，于是有 $X(G) = K = W(G)$ 。我们得到了以下结论：

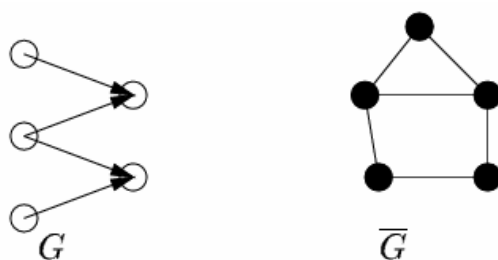
定理 8：在一个部分序中， $X(G)$ 与 $W(G)$ 的值（包括一个最优染色方案和一个最大团）可用线性时间解决。

第八讲、相似图

相似图是图论中一类著名的图，它与区间图有着密切联系。边定向后的相似图称为部分序，许多 NP 难题在部分序上存在有效算法。本讲中我们将在部分序上解决一些 NP 问题，并讨论相似图、区间图、弦图之间的联系。

1. 介绍

无向图 G 是相似图，如果它能无环传递地定向；如果 G 的补图是相似图， G 称为伴相似图。我们已知区间图是伴相似图，但反之却不一定。图 1 显示了一个不是区间图的伴相似图。



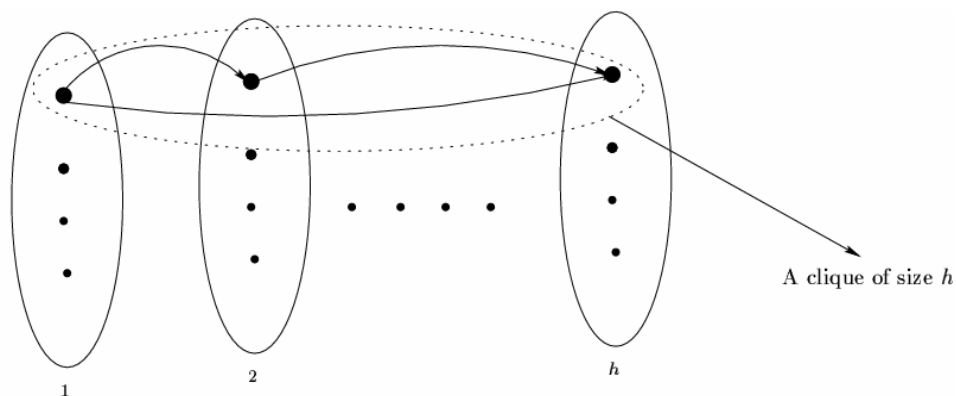
一个相似图可能由多种无环传递定向方式，每种方式对应于一个部分序。

下一节中我们将介绍在部分序上有效地解决一些 NP 问题；第 4 节中将讨论相似图、区间图、弦图之间的联系。

2. 一些算法

2.1 最大团

部分序是有向无环图 (DAG)，因此它存在一个确定的 H 函数（见上讲）。我们能用线性时间计算出那个函数。如果在 H 函数中有 K 种值，则存在一条长为 K 的有向路径。由于定向具有传递性，这条路径上的点构成一个团。（图 2）这就是一个最大团，因为一个团中不会有 H 值相同的顶点。显然这种算法用时是线性的。



同时我们就用 K 中颜色对顶点染色，易知 $W(G) = X(G) = K$ 。

2.2 权最大团

如果我们赋予顶点权函数 W ，定义包含顶点 $V_1..V_m$ 的团的权值为 $W(V_1) + \dots + W(V_m)$ ，权最大团问题就是要寻找一个权值最大的团，权可以为负。

在部分序上，我们可以使用动态规划解决这个问题。假定部分序 G 的顶点 $V_1..V_n$ 是一

个拓扑序列。定义 $C(V)$ 为包含 V 且最“大”顶点为 V 的权最大团的权。我们可以如下计算 C ：

for $i \leftarrow 1$ to n

 Initialize $C(v_i)$ to be 0.

 for all predecessors v_j of v_i do

$C(v_i) \leftarrow \text{Max}\{C(v_i), W(v_i) + \text{Max}(0, C(v_j))\}$

最终权最大团的权为 $\text{MAX}\{C(V_1) \dots C(V_n)\}$ 。

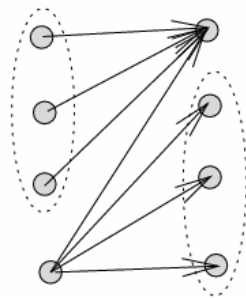
结论 1：这个算法确实找到了权最大团。

证明：假设以 V_i 为最大顶点的权最大团是 $V_{i1} \dots V_{ik}$ ，其中 $V_{ik} = V_i$ 。如果 $K=1$ ，显然算法是正确的；如果 $K \geq 2$ ，由于定向具有传递性， $V_{i1} \dots V_{ik-1}$ 必定是最大顶点为 V_{ik-1} 的权最大团（否则那个权最大团替换 $V_{i1} \dots V_{ik-1}$ ，加上 V_i 将形成一个权更大的团，矛盾），它的权是 $C(V_{ik-1})$ ，因此原团的值就是 $W(V_i) + C(V_{ik-1})$ ，这在算法中被计算过。即证。■

很容易知道算法用时是线性的。另外我们可以记录决策，从而构造出一个权最大团。

2. 3 最大独立集

假设 H 函数值共有 K 种。所有具有相同 H 值的顶点形成一个独立集。我们也许会猜测独立数 $A(G)$ 就是具有各 H 值的顶点数的最大值。但图 3 显示了一个反例。不过，我们任可以用多项式的时间找到部分序上的最大独立集。



定义 (1)：令 P 是一个部分序， P 上的一个链是一个两两可比的顶点集（即一个全序）。

定义 (2)：令 P 是一个部分序， P 上的一个反链是一个两两不可比的顶点集。

【定理 1：用最少数量的链覆盖一个部分序所需的链的数目等于该部分序上的反链的势的最大值。】

这个定理是 Dilworth 在 1950 年提出的，这里暂不加证明地使用： P 。

定义 (3)：一个图的团覆盖是用该图中的若干团覆盖所有的顶点。图 G 的团覆盖数是对 G 进行团覆盖所需的最少团数。记为 $K(G)$ 。

不妨加一个限制：团覆盖中的各个团两两没有交集。显然这不会改变 $K(G)$ 的值。

定理 (1)：对于任何部分序 G ，都有 $I(G) = K(G)$ 。 I 为独立数。

证明：由于 G 是部分序，因此 $W(G) = X(G)$ ，即 G 是完美图（见第十讲）。根基完美图定理， G 是伴完美图，因此 $I(G) = K(G)$ 。■

定义 (3)：一个图 G 的广独立集是 G 的一个两两不连通的顶点子集。 G 的广独立集数是它最大广独立集的顶点个数，记为 $I'(G)$ 。

定理 (2)：对于任意有向无环图 G ，它的广独立数等于其简单有向路径覆盖数 $C'(G)$ （这里的路径覆盖允许顶点被重复覆盖）。

证明：构造图 G' ， $V(G') = V(G)$ ， $(A, B) \in E(G')$ ，当且仅当 G 中从 A 可以到达 B 。

由于 G 是有向无环图，易证 G' 是部分序。于是有 $I(G') = K(G')$ 。根据 G' 的定义， G' 的任意独立集就是 G 的广独立集，反之亦成立，所以有 $I(G') = I'(G)$ 。又对于 G 中的任意简单有向路径， G' 中存在一个包含该路径上各点的团，反之亦成立（利用完全图的竞赛图的性质），因此有 $C'(G) = K(G)$ 。于是 $I'(G) = C'(G)$ 。即证。■

推论 1：二分图 $G = (X, Y, E)$ 中（最大）匹配数 $M(G) =$ （最小）覆盖数 $B(G)$ 。

证明：对 G 的每条边定向为 $X \rightarrow Y$ ，易知 G 的简单路径覆盖数 $C'(G) = |V| - M(G)$ （最长的简单有向路径长为 1）；有由于定向后“可达”与“相邻”等价，因此 $I'(G) = I(G) = |V| - B(G)$ 。由定理 (2)， $I'(G) = C'(G)$ 得 $M(G) = B(G)$ 。即证。■

对于部分序 G ，为求 $I(G)$ （即 $I'(G)$ ）我们只要求出 $C'(G)$ （即 $K(G)$ ）即可。

对于 $C'(G)$ 的求法，可以设定每个顶点访流量下限为 1，每条边流量下限为 0，上限都为无穷大，通过有上下界的最小可行流解决，具体细节这里不再展开。

2. 4 部分序上的其他算法

在部分序上可以有效地解决诸如最大独立集、最小团覆盖、求所有极大团等问题。

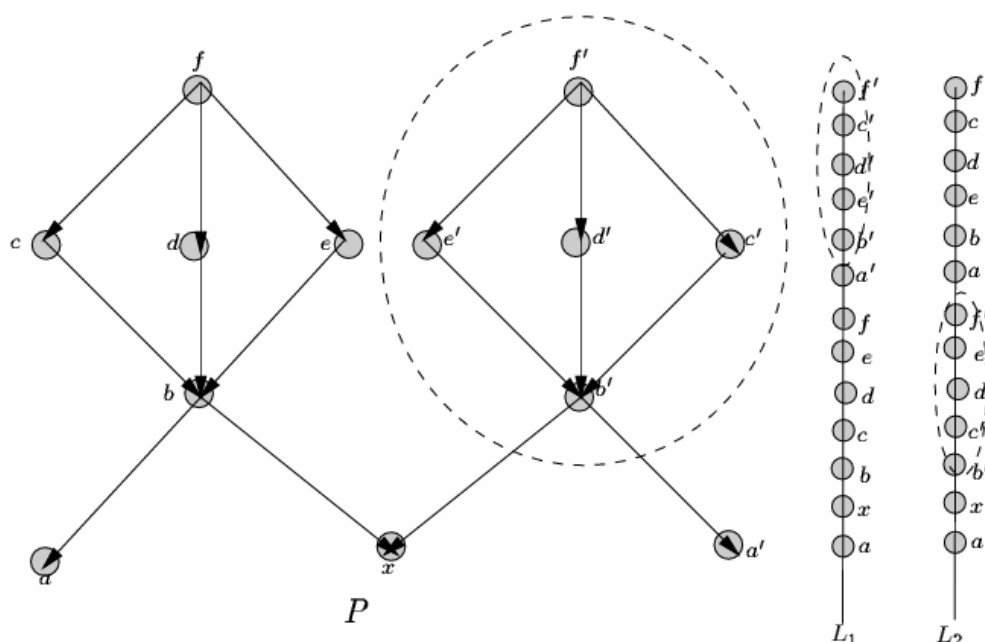
但是另一些问题，例如哈氏回路、支配集等仍是 NP 问题。这一部分的参考数目有许多（见 PDF 文件）。

3. 部分序的尺度

每个部分序 P 都可以扩充成全序（或称拓扑序）。令 $L(P)$ 为 P 的所有全序组成的集。

$L(P)$ 的中满足以下性质的子集 L_0 称为 P 的一个实现集：
$$\bigcap_{l \in L_0} l = P$$
， P 的最小实现集的大小称为 P 的尺度，即为 $D(P)$ 。

例如：图 4 中的部分序 P 的尺度为 2。右侧是 P 的一个最小实现集。注意 P 的子图（圈出部分），也是一个尺度为 2 的部分序，它在两个全序中一次在元素 a 之前，一次在 a 之后。



我们可以用 $O(n)$ 的空间表示一个全序，因此我们可以用 $O(D \cdot n)$ 的空间表示一个尺度为 D 的部分序。这对尺度为常数的部分序不失为一种好办法。

一个部分序的子序是它顶点集的一个子集，顺序与原先相同（即一个诱导子图）。一个子序的尺度不会大于它的母部分序的尺度。

【定理 3: 令 G 是一个相似图, P 是其上一个部分序, 若 G 与 \overline{G} 都是相似图, 则 $D(P) \leq 2$ 。】

【定理 4: 相似图上的两个部分序 P 、 Q 满足 $D(P) = D(Q)$ 。】

4. 再谈区间图

目前, 我们已知区间图都是弦图和伴相似图, 反之呢?

定理 5: 以下命题是定价的:

(1) G 是区间图

(2) G 没有长度大于 3 的无弦环, 且 G 是伴相似图。

(3) G 的极大团可以连续地编号。即我们可以讲它们排为 $C_1..C_k$, 满足对于任何 $v \in V$, 序列 $\{j | j \in \{1..k\}, v \in C_j\}$ 是连续整数集。

证明: (1) \Rightarrow (2): 我们已知这个命题成立。

(3) \Rightarrow (1): 令 $I(V) = [\text{Min}\{j | V \in C_j\}, \text{Max}\{j | V \in C_j\}]$ 。由 (3) 可知如果 $I(V) = [A, B]$, 那么对所有 $V \in C_j$ 有 $j \in [A, B]$ 。

如果 $(U, V) \in G$, 则 U, V 都在至少一个极大团 C_j 中, 因此 $j \in I(U) \cap I(V)$ 。反之如果 $j \in I(U) \cap I(V)$, U, V 都在一个极大团 C_j 中, 因此 $(U, V) \in G$ 。

(2) \Rightarrow (3):

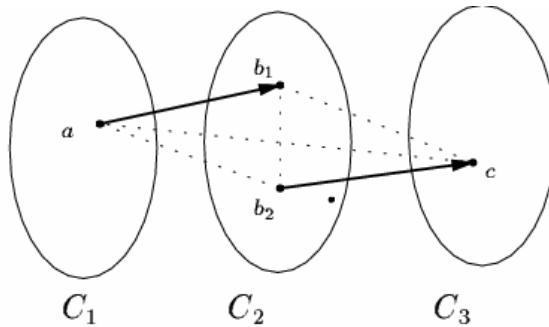
我们定义一个有向图 H , $V(H)$ 是 G 中所有极大团。 H 中 C_1 到 C_2 有边, 如果 \overline{G} 中存在

边 $U \rightarrow W$, 其中 $U \in C_1, W \in C_2$ 。这里 \overline{G} 表示将 G 的补图无环传递定向后的有向图。

结论 2: H 具有传递性。

证明: 假设 (C_1, C_2) 和 (C_2, C_3) 都在 H 中, 但 (C_1, C_3) 不在 H 中 (图 5)。存在顶

点 $A \in C_1, B_1, B_2 \in C_2, C \in C_3$ 满足 $(A, B_1), (B_2, C)$ 都在 \overline{G} 中。



假设 $B_1 = B_2$, 由于 \overline{G} 具有传递性, 可以推知 (A, C) 在 \overline{G} 中, 于是 $(C_1, C_3) \in H$, 矛盾。因此 $B_1 \neq B_2$ 。

假设 $(C, A) \in \overline{G}$, 则有 $(B_2, B_1) \in \overline{G}$ 。但 B_1, B_2 在同一个团中, 它们之间在 \overline{G} 不会有边, 矛盾。另外显然 $(A, C) \notin \overline{G}$, 于是有 $(A, C) \in G$ (G 是无向图)。

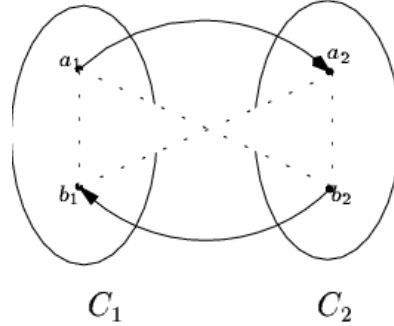
假设 $(B_1, C) \in \overline{G}$, 由 \overline{G} 的性质 $(C_1, C_3) \in H$, 矛盾。假设 $(C, B_1) \in \overline{G}$, 则 $(B_2,$

$B_1) \in \overline{G}$, 矛盾。于是有 $(B_1, C) \in G$ 。同理有 $(A, B_2) \in G$ 。

这样我们得到了 G 中的一个无弦四阶环 $(A, C, B1, B2)$ ，与 G 的性质矛盾。即证。■

结论 3: H 是无环的。

证明：由于 H 具有传递性，假设 H 有环，则该环必定是两个顶点间的双向边 $C1 \leftrightarrow C2$ (图 6)，否则由传递性会得出矛盾。



假设 $(A1, A2)$ 和 $(B1, B2) \in \overline{G}$ ，这里 $A1, B1 \in C1$; $A2, B2 \in C2$ 。显然 $A1 \neq B1$ (否则由传递性由 $(B2, A2) \in \overline{G}$ ，矛盾)。同理 $A2 \neq B2$ 。

假设 $(A2, B1) \in \overline{G}$ ，则 $(A1, B1) \in \overline{G}$ ，矛盾。同理 $(B1, A2) \notin \overline{G}$ 。同样地在 \overline{G} 中 $A1, B2$ 之间没有边相联。于是 G 中有无弦四阶环 $(A1, B1, A2, B2)$ ，矛盾。即证。■

我们证明了 H 是无环传递的，因此它有拓扑序列。假设其中一个是 $C1..Cm$ 。

结论 4: 这个序列满足 (3)。

证明：用反证法。假设不满足 (3)，则存在 $U \in G$ 和 $I < J < K$ ，满足 $U \in Ci$, $U \in Ck$ ，但 $U \notin Cj$ 。

对于所有的 $W \in Cj$ ， \overline{G} 中 U 与 W 间不会有边，否则假如有边 $U \rightarrow W$ ，则 $(Ck, Cj) \in H$ ，因此拓扑序列中 Ck 不会在 Cj 之后；加入有边 $W \rightarrow U$ ，同理可得拓扑序列中 Ci 不会在 Cj 之前。于是在 G 中 U 与 W 之间有边。由于 W 的任意性， U 与 Cj 中任意顶点在 G 中都相邻，因为 $U \notin Cj$ ，所以 Cj 不是极大团，矛盾。■

综上所述，(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)。定理 5 得证。■

由定理 5，我们得知区间图是弦图与伴相似图的交集。且区间图中所有的极大团满足条件 (3)。对于证明中涉及的图 H ，不妨称它为极大团生成图。

第九讲、区间图的判定

本讲中我们回顾区间图三个等价命题的证明，这是区间图判定的基础。我们同时回顾怎样在弦图上寻找极大团，并了解如果这个图是区间图，这些团可以如何编号。寻找编号可以简化为顶点—团矩阵中行的连续 1 性质。我们还将介绍 PQ 树，这是判定一个矩阵是否具有连续 1 性质的基础数据结构。

1. 介绍

区间图是若干区间的相交图。许多难题在区间图上可以有效地解决。因此怎样高效地判定区间图在理论和实践上都有重要的意义。这就是本讲的中心内容。

译者注：此处仅作简译，大家可以练练 E 文。☺

2. 区间图的性质

译者注：本节请参见第八讲第四节，内容完全一致，不过格式比较规范，有兴趣的读者可以自己看看 PDF 文件。

3. 区间图的判定

以上结论使我们得到了区间图判定的一个算法，大致思路如下：

INPUT: a graph G

OUTPUT: yes, G is an interval graph; or no, G is not an interval graph

1. Find all the maximal cliques of G .
2. Try to order the maximal cliques of G such that the set of cliques containing any given vertex of G are consecutive.

3.1 寻找极大团

寻找任意图的所有极大团问题甚至不只是 NP 问题，存在有些图的极大团数目是指数级的。不过区间图的极大团不会多于线性的数量级。我们只考虑弦图，因为区间图都是弦图。定理 2：有 N 个顶点的弦图中至多有 N 个极大团。

证明：令 G 是一个弦图， σ 是 G 的一个完美消除序列。对所有的 V ， $\{V\} \cup \text{Pred}\{V\}$ 是一个团，这样的团共有 N 个。我们证明每个极大团都是这种形式的。

令 M 是 G 的一个极大团，则 $M \subseteq \{V\} \cup \text{Pred}\{V\}$ ， V 是 M 中序号最大的顶点。由于 M 是极大团，所以 $M = \{V\} \cup \text{Pred}\{V\}$ 。即证。■

思考 1：相似图的极大团数是什么数量级的？

【将相似图无环传递定向后，每个极大团一一对应与一条极长链。定义如下一个有向无环图 G ： $|V(G)| = N^2$ ，分为 N 个顶点子集 $V_1..V_n$ ，每个顶点到所有所在子集号大于它的顶点连弧，则极长链有 $O(N^2)$ 条，因此极大团数目是指数级的。】

思考 2：一个更强的结论。 $\{V_i\} \cup \text{Pred}\{V_i\}$ 是极大团，当且仅当对 V_i 的任何后继 V_j ，至少有一个 V_i 的前驱不是 V_j 的前驱。这个结论的正确性很容易得知，这里不再证明。实践中，可以对每个顶点设置一个函数 $M(V)$ ，表示 $\{V\} \cup \text{Pred}\{V\}$ 是否是极大团，初始时都置为 TRUE。处理顶点 V 时，考虑它最大的前驱（如果存在的话） U ，如果 U 的所有前驱都是 V 前驱则令 $M(U) = \text{FALSE}$ ，易知只要考虑这一个顶点即可（假如有其他顶点的前驱都是 V 的前驱，则它的前驱都是 U 的前驱，因此处理 U 时已经置为 FALSE 了）。

这表明可以使用与判定完美消除序列类似的算法来获得所有的极大团，这一步用时 $O(n+m)$ 。

思考 3：执行寻找所有极大团的算法前必须确信该图是弦图，仅此算法的 STEP1 必须在执行判定弦图的某个算法之后才可实行。

3. 2 寻找极大团的一个“连续性”序列

这个问题可以简化为判定一个矩阵是否具有行连续 1 性质，见下文。

3. 3. 连续 1 性质

令 G 是一个图， A 是 G 的一个顶点-团矩阵，即 A 的每一行代表 G 的一个顶点，每一列代表 G 的一个极大团，且满足：

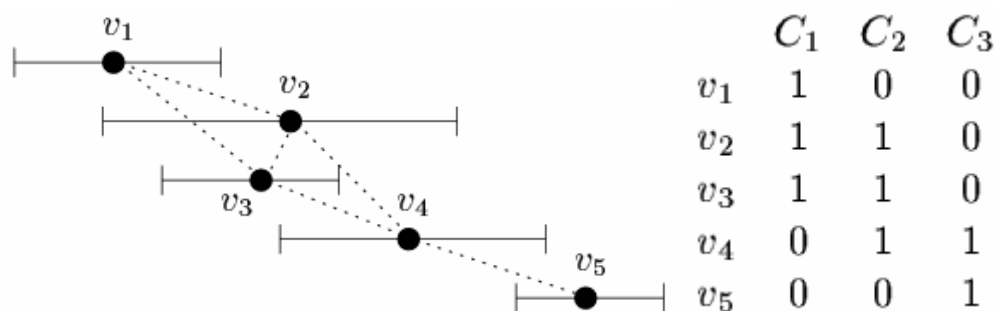
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \in C_j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

寻找 G 团的“连续性”编号就是寻找将 A 的各列的一种重排方式，使得每行中的所有 1 都是连续的。如果这种重排方式存在，就称这个矩阵具有行连续 1 性质。

3. 3. 1. 一个例子

考虑以下这个图 G ：

其中的所有极大团有 $C_1=\{V_1,V_2,V_3\}, C_2=\{V_2,V_3,V_4\}, C_3=\{V_4,V_5\}$ 。它的顶点-团矩阵如下：



可以看见每行的 1 都是连续的，因此 C_1 、 C_2 、 C_3 确实是一个“连续”的极大团序列。

3. 4. PQ 树

判定一个矩阵是否具有行连续 1 性质可以如下表述：

给定一个有限集 X 和 X 的一个子集集合 L ，求 X 的一个重排 $\Pi(X)$ ，满足对 $\forall I \in L$ ，

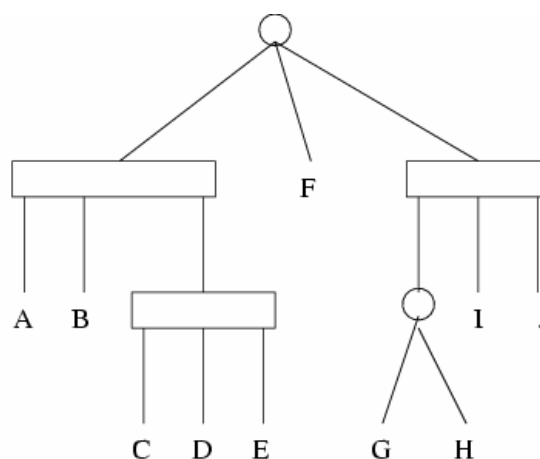
I 中的元素在 Π 中是连续的。

1976 年，Booth 与 Loeker 提出了一个称为 PQ 树的数据结构来解决这个问题。

从左到右记下 PQ 树的各个叶节点，表示一个重排 $\Pi(X)$ 。PQ 树的节点有两种类型：Q 类型，用矩形标识，表示它的子节点只可以是给定的顺序或它的反序；P 类型，用圆形标识，表示它的子节点的任何重排方式都是允许的。

例如以下的 PQ 树表示可行的排列有：

- ABCDEFGHIJ



- ABEDCFGHIJ
- EDCBAFGHIJ
- FCDEBAJIHG

3. 5. 测试算法

测试图 G 是否是区间图的算法中，STEP2 初始时建立一个 PQ 树，包含一个 P 节点作为根，顶点—团矩阵的每个列都是根的一个子节点；接着算法依次处理各个约束条件。下一讲中我们将了解这个算法细节，并证明 PQ 树能够在有效的时间内进行更新，精确地说，在 $O(m+n)$ 的时间内。

第十讲、区间图的判定与完美图

本讲中，我们将完成用 PQ 树判定区间图的讨论，并且介绍完美图与完美图定理。

1. 介绍

怎样判定区间图是利用区间图有效地解决某些 NP 问题的前提与基础。本讲中，我们继续研究 Booth 与 Lueker 提出的 PQ 树模型，这是一种储存元素排列方式的数据结构，它能在线性时间内判定区间图，并建立一个得到该区间图（如果是的话）的区间集合。我们只给出算法的梗概，更详细的内容可以参考[BL76]。

我们还将总结一些在线性时间内判定区间图的其他方法。

最后，我们定义了完美图，它包含了一些我们已知的图的类型，例如弦图和相似图。我们同时定义伴完美图，并表述了完美图定理，它表明完美图与伴完美图是等价的。

2. PQ 树

PQ 树（定义见上讲）能够有效地储存满足一定约束的所有可能排列。

3. 区间图的判定

回忆一下，区间图的判定可以简化为判定该图的所有极大团能否有一种排列方式，满足对任意顶点，包含它的极大团序号是连续的。我们用 PQ 树解决这个问题。令 PQ 树的叶节点集 X 表示图中的所有极大团。定义 L 是一个连续性约束集， $L = \{I_v \mid v \in V\}$ ， I_v 是包含 v 的极大团集合。

初始时，我们允许所有可能的排列，之后一次加入 L 中的一个元素。

下面详细地讲一下操作步骤：（注：这些内容是译者自加的，有何缺误请大家指教）

我们的目标是在一棵 PQ 树上加入一个连续性约束，得到一个即满足原树约束，又满足新加入约束的新 PQ 树。

首先将新加入约束中的各元素在原 PQ 树中代表的顶点染色。我们分两类情况处理：根是 Q 节点和根是 P 节点。每种情况里又分两类任务：任务 1，将当前节点下所有染色的节点约束为连续的；任务 2，将当前节点下所有染色的节点与不染色节点都约束为连续的。下面我们会知道任务 1 会归结到任务 2，因此主要问题是任务 2。

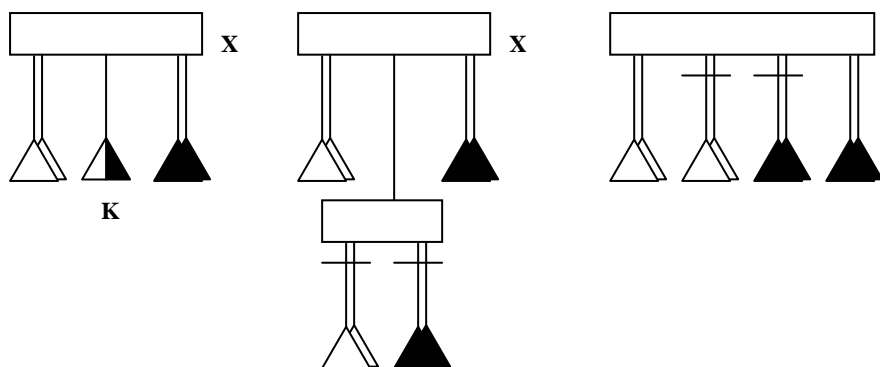
用 $\text{Type}(V)$ 表示某顶点是 P 节点还是 Q 节点。

定义函数 $\text{Solve}(X, \text{Typ}, 2)$ 表示在以节点 X (X 的类型为 Typ) 为根的子树中完成任务 2 的操作，函数返回一个以 X 为根的子树，其中 X 规定为 Q 节点（当然如 X 只有两个节点是 X 为 P、Q 节点是等价的）。

首先说明几个图例：矩形表示一个 Q 节点，圆形表示一个 P 节点，三角表示一棵非空子树，双三角表示零个或若干个相邻的子树。黑色表示所有叶节点都是染色的，白色表示所有叶节点都是不染色的，半黑半白表示叶节点中染色与不染色的叶节点都存在，用 CL 表示。树枝上的横线只为标注子树的来源，与 PQ 树本身无关。

1. $\text{Solve}(X, Q, 2)$

显然若 $\text{CL}(X) = \text{白色}$ ，不必进行任何处理。否则考虑 X 节点所有子节点，由于可翻转，不妨假设 X 最右侧的子节点不是白色。从右向左依次 X 的各子节点的颜色，如果不是形如若干黑—（零个或一个半黑半白）—若干白的形式（如图 1A），则必定无解，退出。否则如果中间没有半黑半白的子树，则不必作任何操作，否则假设第 K 个子树是半黑半白的。



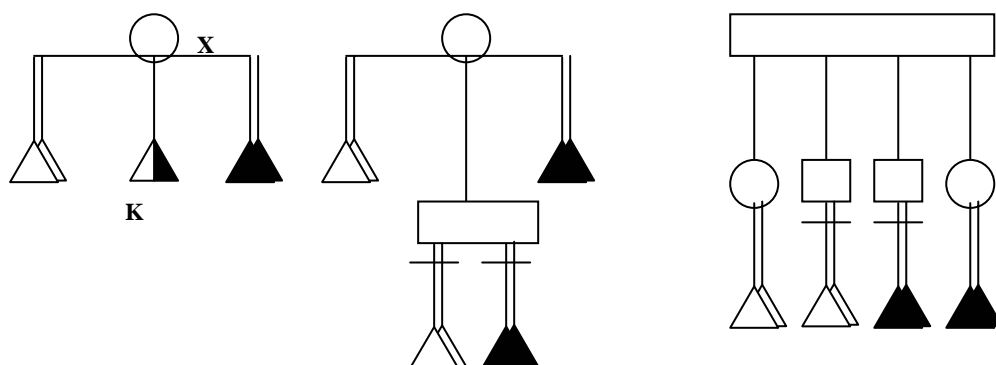
首先执行 $\text{Solve}(K, \text{Type}(K), 2)$ ，结束后 PQ 树的部分形态如图 1B 所示。根据 Q 节点的性质以及 Solve 函数的要求，可以将 PQ 树变形为图 1C 所示，即达到了 Solve 的目标。

2. $\text{Solve}(X, Q, 1)$

这个过程是类似的，只不过可能有两个半黑半白的子树，分别作 1 类任务处理，在像上面一样操作就可以了。

3. $\text{Solve}(X, P, 2)$

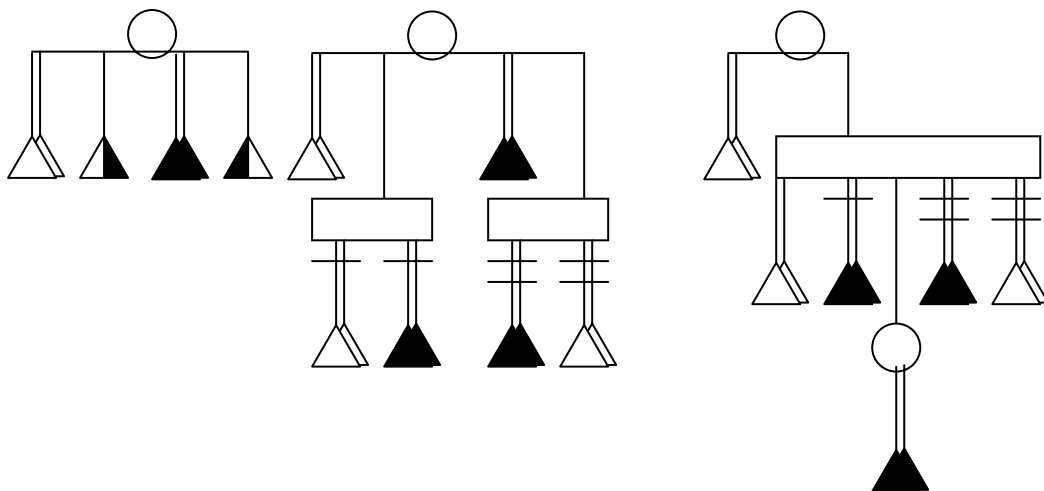
首先扫描各子树的颜色，显然最多只能有 1 个半黑半白子树（否则无解），先假设有一个半黑半白子树 K，不妨设如图 2A 排列。



同样先处理 $\text{Solve}(K, \text{Type}(K), 2)$ ，如图 B2，加入新约束后等效变化为图 B3，目标达到。

4. $\text{Solve}(X, P, 1)$

这里仅用图例说明。



可以看到任务 2 不依赖于任务 1，任务 1 也不依赖于任务 1，因此第 4 部分 Solve 函数输出的子树根节点为 P 节点没有关系。以上算法递归地进行，直至 X 为叶节点回溯。另外操作时很容易对新增的顶点确定颜色，如果遇到仅有一个子树的节点，可以将它删去。

下面分析一下时间复杂度，假设涉及的元素有 N 个，约束条件有 T 个。建树只要 $O(N)$ 时间；对于每个约束，染色（包括内节点）需要 $O(N)$ ，递归求解时每个节点至多操作一次，每次操作复杂度正比于它与它的某个子节点的度数和，总时间也是 $O(N)$ 。因此总复杂度为 $O(NT)$ 。

注意算法运行后，如果能够成功地加入所有约束，PQ 树将储存所有可行的极大团序列。利用第八讲中的方法，可以得到一个获得该区间图的区间集合。

4. 区间图判定的其他算法

以上是第一个用线性时间解决区间图判定的算法。Korte 与 Mohring 之后提出了一个建立在改进 PQ 树基础上的算法；Hsu 与 Ma 给出了一个不使用 PQ 树的算法。

Habib、Paul、Vincent 在一篇未发表的论文中使用了一个用修改的 LexBFS 算法判定区间图的方法；Corneil、Olariu 与 Strwart 用五次 LexBFS 算法判定区间图，每次使用不同的方法处理“平局”，且每次从上一次的最后选择的顶点开始算法。

5. 完美图

定义 1：一类图 C 具有遗传性质，如果 C 中的任意图的任意诱导子图都在 C 中。例如，区间图、弦图、相似图都具有遗传性质。

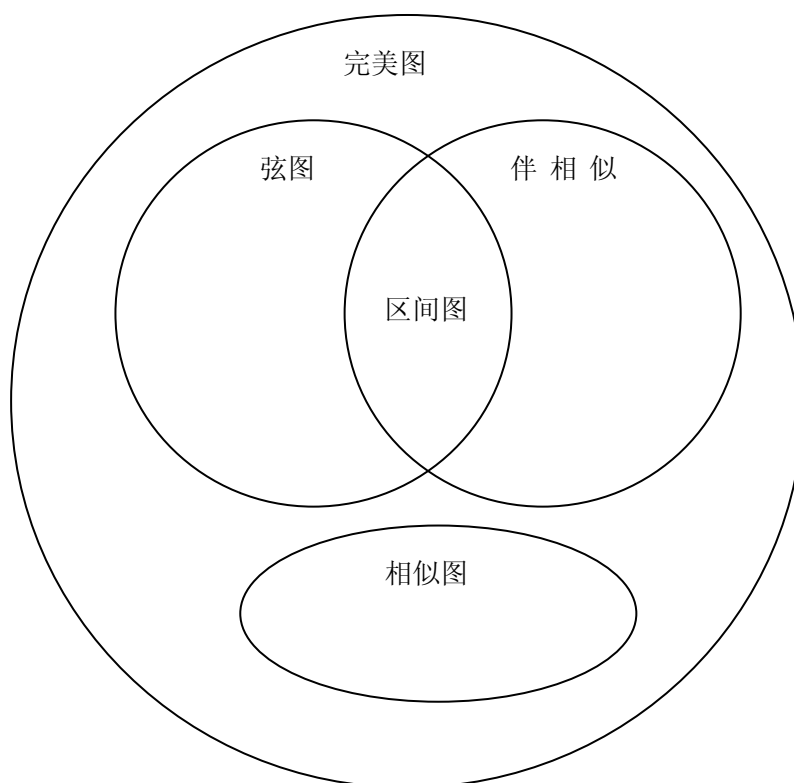
定义 2：一个图 G 是完美图，如果 $W(G) = X(G)$ ，且对于 G 的任意诱导子图 H，都有 $W(H) = X(H)$ 。

由定义可知完美图具有遗传性质。另外，如果一类图 C 具有遗传性质，且 C 中的任意图 G 都有 $W(G) = X(G)$ ，那么 C 中的所有图都是完美图。这表明区间图、弦图、相似图都是完美图。

定义 5：一个图是伴完美图，如果有 $I(G) = K(G)$ （I 是独立数，K 是团覆盖数），且对于 G 的任意诱导子图 H，都有 $I(H) = K(H)$ 。

注意对任意图 G， $I(G) = W(\overline{G})$ ，

且 $K(G) = X(\overline{G})$ ，（将每个团中的元素染同一种颜色，不同的团染不同的颜色，则补图中同色的顶点不相邻，即 K



$\chi(G) \geq \chi(\overline{G})$; 又对于 \overline{G} 中的任意染色方法, 染同一种颜色的顶点在 G 中必定是一个团, 因此 $\chi(\overline{G}) \geq \kappa(G)$ 。

因此, 图 G 是伴完美图的充要条件是 \overline{G} 是完美图。

【定理 1: (完美图定理) 一个图是完美图, 当且仅当它的补图是完美图。

这个定理的证明暂缺。⑤】

于是我们得知: 一个图是完美图, 当且仅当它是伴完美图。一个推论是伴相似图是完美图。

图 3 总结了迄今为止我们所学的一些图的类型之间的关系。

**第十一讲、完美图

本讲中我们将给出完美图的一些性质。我们将讨论强完美图猜想以及它的一些推论。我们还将提到完美图的一些特例，例如分离图和排列图。

1. 介绍

完美图的任意诱导子图都满足最大团数等于染色数。我们将介绍一个多项式级的算法计算这个值。

有趣的是，目前的实践表明，当一个图中不存在所谓“奇阶洞”或“奇阶反洞”时，它就是一个完美图，这叫做完美图猜想。至今仍没有人能够证明或证伪它。

第3节我们将讨论完美图的判定。之后将给出完美图的一些性质以及它的一些特例，比如分离图、极限图、排列图和超完美图。

2. 定义

完美图的定义见第十讲。一个不是完美图的例子是5阶无弦简单环。它的最大团数是2，但染色数却是3。但是它的任意诱导子图（本身除外）都是完美图。这样的图称为极小非完美图。

我们将长为K的无弦简单环称为K阶洞，它的补图称为K阶反洞。

引理1：奇阶洞与奇阶反洞都是极小非完美图。

证明很简单，这里略去。

猜想1：一个图是完美图，当且仅当它的任何诱导子图都不是奇阶洞或奇阶反洞。

这称为强完美图猜想（SPGC）。它尚未被证明。

3. 完美图的性质

3.1 完美图的判定

这个问题的研究还未取得很大的进展，还不知道它是否有有效算法或是NP问题，而且即使SPGC成立也是这样。

3.2 完美图的独立数、团覆盖数、最大团数、染色数

虽然判定完美图是很困难的，但一旦知道一个图是完美图，我们能够得到它的很多性质。

定理1：可以在多项式时间内求出完美图G的 $\alpha(G)$ 、 $\omega(G)$ 、 $\chi(G)$ 。

【证明：这里只给出证明梗概，详细内容参见[BLS99]。

（译者注：本部分比较难理解，知识也较多，这里只能暂作直译）

定义1：均衡矩阵 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 关于图G的可行，如果：

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 1, & \text{if } (i, j) \text{ is an edge of } G \\ \in \mathbb{R}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

对一个均衡矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，令 $\lambda_{\max}(M)$ 为M的最大的特征根。定义图G的函数 $\theta(G) = \min\{\lambda_{\max}(F) \mid F \text{ 关于 } G \text{ 可行}\}$

（注：均衡矩阵即关于左上/右下对角线对称的矩阵）

可以证明对于任何图G，有 $\omega(G) \leq \theta(G) \leq \chi(G)$ 。我们知道对于完美图G， $\omega(G) = \chi(G)$ ，所以有 $\omega(G) = \theta(G) = \chi(G)$ 。

接下来要做的是证明 θ 函数在有效时间内可以求出。可以得知 $\theta(G)$ 是一个半确定规划问题，这可以用椭圆逼近的方法解决。准确地说，对于任意 $\xi > 0$ ，可以在有效时间内得到一个有理数 R ，满足 $|R - \theta(G)| < \xi$ 。由于 G 是完美图，我们知道 $\theta(G)$ 是整数，因此只要取 $\xi < 1/2$ 就能准确得到 $\theta(G)$ 的值了。

这样我们得到了 $W(G)$ 与 $X(G)$ 的值，而 $I(G) = W(\overline{G})$ 、 $K(G) = X(\overline{G})$ 。由于 \overline{G} 也是完美图，我们同样可以得到这两个值。】

**4. 完美图的一些特例

本节介绍性地给出完美图的一些特例。具体的细节参见[Gol80]。

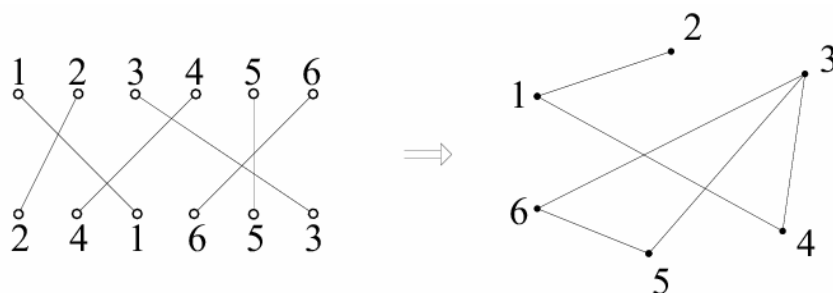
4. 1 分离图

一个图 $G = (V, E)$ 是分离图，如果 V 可以分割两个子集 I 和 C ，其中 I 是一个独立集， C 是一个团。例如图 2。

【定理 2: G 是分离图，当且仅当 G 与它的补图都是弦图。】

4. 2 排列图

假设 π 是 $1..N$ 的一个排列。定理一个无向图 $G = (V, E)$ ，包含 N 个顶点 $1..N$ 。两个顶点 U, V 间有边当且仅当它们在 π 中是一对逆序对。更准确地说， $(U < V) \text{ XOR } (\pi(U) > \pi(V))$ 为真。



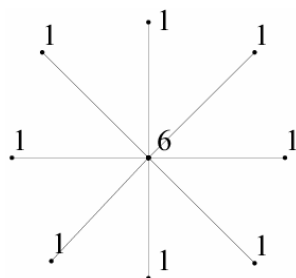
【定理 3: 图 G 是排列图，当且仅当 G 与它的补图都是相似图。】

4. 3 极限图

图 G 是极限图，如果存在顶点的一个权函数 $W: V \rightarrow \mathbb{N}^*$ 和一个限值 $T \in \mathbb{N}^*$ ，满足任意

顶点子集 I 是独立集，当且仅当 $\sum_{v \in I} W(v) \leq T$ 。

图 4 是一个 $T=6$ 的极限图的例子：



(注：由于疏忽此图画错了，应该是 $K_{1,6}$ 而不是 $K_{1,8}$ ，即周围只有 6 个顶点)。

可以证明【当 G 与它的补图都是区间图时】， G 是一个极限图，但反之不成立。

4. 4 超完美图

对 $G = (V, E)$ 的每个顶点 X ，定义一个非负的权值 $W(X)$ ，定义 V 的任意子集的权值等于各个元素权值的和。则有序对 (G, W) 称为一个带权图。对带权图 (G, W) 的一个“区间染色”是将每个顶点 X 映射到一个长度为 $W(X)$ 的开区间 I_x ，且相邻的顶点对应的区间不相交。一种染色的“测度”定义为 $\sum_x I_x$ 的总长度。带权图的区间染色数 $X(G, W)$ 是将 G 的顶点区间染色得到的最小的测度值。

带权图 (G, W) 的“权最大团数” $W(G, W)$ 定义为 G 的权最大团的权值。

定义 2：图 G 是超完美图

【定理 4：所有相似图都是超完美图。】

**第十二讲、相交图

本讲中我们将介绍相交图与它的一些特例，如边图、圆弧图、T-区间图和正交图，以及这些图的基本性质、判定、染色、独立集、与其他类型图的关系等问题，但多数将不给出证明。（除了译者自证的）

1. 介绍

我们已经了解了一些相交图，例如区间图、弦图、排列图等。许多现实问题都可以转化为相交图上的问题。由于相交图的范围广泛，它包含一些特例，例如边图、T-区间图、圆弧图、正交图等。

图的判定、独立集、染色、团、与其他类型图的关系等是图论中的一些经典问题，多数情况下这些都是 NP 问题，但对于某些探索的相交图，部分问题可以有效解决。

第 2 解中将给出相交图的定义并进行简要的讨论。之后几节将逐个讨论一些相交图的特例。

2. 相交图

定义 1: 一个图是个相交图，如果它的每个顶点 V 可以映射到一个集合 S_V ，满足两个顶点间有边，当且仅当它们对应的集合的交集非空。

定理 1: 所有的图都是相交图。

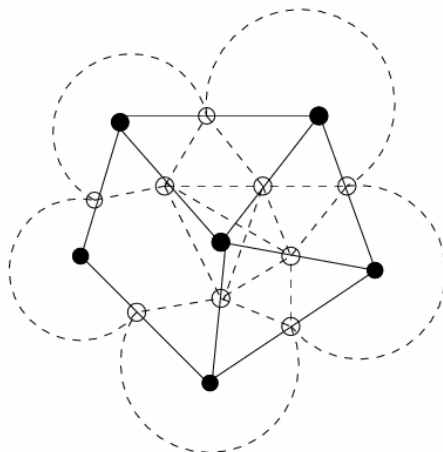
证明: 令 $S_V = \{\text{以 } V \text{ 为一个端点的边集}\}$ 。显然若 (V, W) 有边，当且仅当该边是 V, W 对应集合交集集中的元素。即证。■

问题 1: 有定理 1 的证明可知一个元素个数为 $|E|$ (边数) 的全集中的若干子集的相交图可以成为这个图 $G = (V, E)$ 。但是更小的全集是否可行呢？全集元素的下界又是什么？这是一个开放的问题。

3. 边图

定义 2: 一个图 G 的边图 H 满足 $V(H) = E(G)$ ， H 中两个顶点间有边，当且仅当它们对应的边在 G 中有一个公共端点。

图 1 中白点与虚线显示了一个图的边图。



显然一个五阶的无弦环的边图是它本身，即一个洞，所以边图不一定是完美图。

3. 1. 边图的一些结论

假设图 G 的边图是 H ，下边是一些经典问题在 H 上的一些结论，这里不加证明。

- 判定：边图可以在 $O(n+m)$ 时间内判定，具体方法见[Rou73,Leh74]。
- 独立集：边图上的最大独立集问题就是原图 G 上的最大匹配问题，由于最大匹配在任意图上都可以有效地解决（一种方法是利用带花树），因此边图的独立集问题也是可解的。
- 团覆盖：这个问题就是原图的顶点覆盖问题，这是一个 NP 问题。但当 G 是二分图时这个问题是可解的。
- 染色：这个问题等价与原图的边染色问题，也是 NP 问题。但可以得知图 G 的边色数要么等于度最大顶点的度，要么等于这个数加 1，因此搜索时有较强的剪枝。【而且对于二分图，有边色数等于度最大顶点的度】，因此是可解的。
- 团：边图 H 中的团对应的原图中的边要么是三角形，要么交于同一点（很容易理解和证明），因此只要测试原图中所有三角形于各个顶点即可。这个问题是可解的。

另外，虽然边图不都是完美图，可以证明二分图对应的边图都是完美图。

定理 2：二分图对应的边图都是完美图。

证明：1、证明二分图对应的边图中没有高于 3 阶的奇阶洞

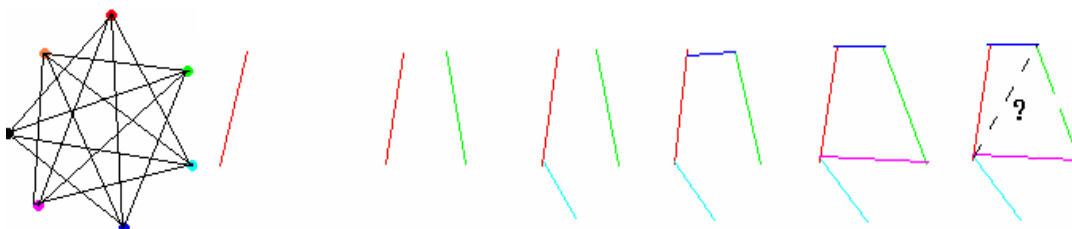
假设边图中存在高于 3 阶的奇阶洞，则易知这些顶点在原图中对应的边构成一个奇阶环，这与二分图中没有奇阶环矛盾。

2、证明二分图对应的边图中没有高于 3 阶的奇阶井

假设边图中存在 $2K+1$ 阶井，($K \geq 2, K \in \mathbb{N}^*$)。

若 $K=2$ ，则该 5 阶井就是一个 5 阶环，由 1 得矛盾；

若 $K=3$ ，设该 7 阶井的顶点依次为 $1..7$ ，从 1 开始依次构造原图，可以发现前 5 条边加入满足条件的本质不同的方式只有一种，而第 6 条边无法加入，矛盾（如图）。这个性质对任意边图都成立。



若 $K \geq 4$ ，设该 7 阶井的顶点依次为 $1..2K+1$ ，则易知顶点集 $\{1,3,5,7,\dots,2K-1\}$ 与 $\{2,4,6,8,\dots,2K\}$ 在边图中分别构成两个顶点数不少于 4 的团。由于边图中的团在原图中只有两种情况，这里三角形显然不可能，因此必定是交于同一点的边集。由因为边图中顶点 1、2 见无边，因此这两个团的公共点 A、B 不重合。又边图中顶点 $2K+1$ 与顶点 2, 3, 4, 5 都相邻，因此原图中该边只可能连接顶点 A 和 B。于是该边与边 1 相邻，这与边图中这两个顶点见无边矛盾。这个性质对任意边图都成立。

综上所述，二分图的边图中没有高于 3 阶的奇阶井。

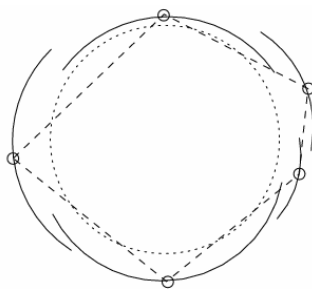
由 1、2，根据强完美图猜想，二分图边图是完美图。证毕。■

**4. 圆弧图

圆弧图是另一类相交图，可以看作区间图的推广。

定义 3：图 G 是圆弧图，当且仅当 G 是一个圆周上若干圆弧的相交图。

图 3 是一个圆弧图的例子。可见这个圆弧图是一个 5 阶洞，因此圆弧图不一定是完美图。



4. 1. 圆弧图的结论

- 判定：可以在线形时间 $O(n+m)$ 时间内判定，具体见[HBH90,DHH96]。
- 染色：圆弧图的染色与一般图一样是 NP 问题。[GJMP78]
- 团：这是一个可解的问题，见[Gav74]。

5. T-区间图。

定义 4：一个图 G 是 T -区间图，当且仅当它是元素个数不多于 T 的区间的集合构成的相交图。

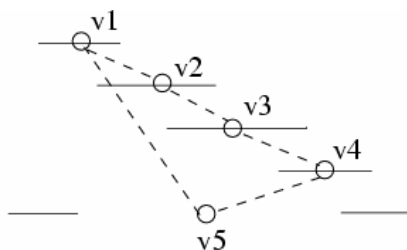


图 4 是一个 2-区间图的例子，这个图是一个 5 阶洞，因此当 $T \geq 2$ 时 T -区间图不一定是完美图。

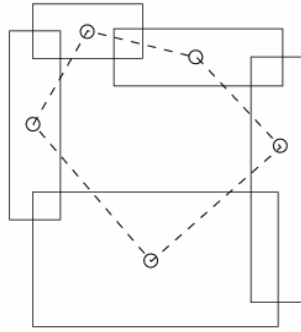
5. 1. T-区间图的结论

- 与其他类型图的关系
 - 一由定义可知 1-区间图就是区间图
 - 一树是 2-区间图
 - 一边图是 2-区间图
 - 一平面图是 3-区间图
 - 一任意图 G 都是 $\lceil (\Delta + 1)/2 \rceil$ 区间图，其中 Δ 是 G 中度最大顶点的度。
- 判定：当 $T \geq 2$ 时判定 T -区间图是 NP 问题，但判定 1-区间图是可解的，之前各讲已经讲过了。

6. 正交图

定义 5：一个图 G 称为 D -正交图，当且仅当 G 是 D 维空间中若干正交的几何形构成的相交图。

图 5 是一个 2-正交图的例子，这是一个 5 阶洞，因此正交图不一定是完美图。



6. 1. 正交图的结论

- 判定：当 $D > 1$ 时， D -正交图的判定是 NP 问题。
- 与其区间图的关系：1-正交图是区间图（也就是 1-区间图），但当 $D > 1$ 时 D -正交图与 D -区间图没有明确的关系。下面给出 $D=2$ 时这两种图的差别：
 - 2-正交图中的每个顶点 V 都是分别平行与 X 轴与 Y 轴的两个向量 I_v^x 与 I_v^y 的叉积，记为 $V = I_v^x \times I_v^y$ 。但 2-区间图中的每个顶点 V 是两个区间 I_v^1 与 I_v^2 的并集，记为 $V = I_v^1 \cup I_v^2$ 。
 - 2-正交图中的每条边 (V, W) 表示顶点 V, W 的两个分向量都相交，而 2-区间图中的一条边 (V, W) 表示顶点 V, W 对应的四个区间中不属于同一顶点的任意一对或多对相交。
- 与其他类型图的关系：任意图 G 都可以表示成 D -正交图的形式，其中 D 随 G 的不同而不同。
- 独立集：正交图上的独立集问题是 NP 问题（1-正交图除外）。

尚未解决的问题

- 1: 相似图的判定算法。
- 2: 有关部分序尺度的两个定理的证明。
- 3: 有关链与反链定理的证明。
- 4: **LexBFS** 算法（以及最大势算法）求完美消除序列的正确性证明。
- 6: 完美图定理的证明。
- 7: 有关一些特殊完美图的定理的证明。
- 8: （证明）二分图的边色数等于度最大顶点的度。