排队论方法建模

排队是日常生活中常见的现象，某些资源、设备或空间的有限及社会部门对它们的需求是排队现象的主要因素，而诸如服务机构的管理水平低劣，服务效率不高，或顾客的无计划性以及其他原因也往往使不该有的排队现象出现。例如医院与病人，商店与顾客，机场与飞机，网络与用户，等等，诸如此类问题在一个排队系统中都有共同的特点：

1)有一个或多个服务设施，如医生，飞机跑道等，可称此为“服务员”。

2)有许多需要进入服务系统的被服务者，例如，候诊的病人，请求着陆的飞机等，称此为“顾客”。

3)当被服务者随机地一个一个(或者一批一批)进入系统后，每位需要服务的时间不一定是确定的，服务过程的这种随机性造成某阶段不能立即得到服务，而有时服务员又空闲无事。

一个服务系统总是有服务设施与被服务者构成。排队论主要是对系统建立数学模型，研究诸如单位时间内服务系统能够服务的顾客平均数、顾客平均的排队时间、排队顾客的平均数等数量规律。

§1、排队论的基本概念

§2、单服务窗的排队模型(M/M/1)

§3、多服务窗的排队模型(M/M/n)

§4、排队系统的优化模型

§1、排队论的基本概念

一、排队过程的一般模型

二、排队系统的目标参量(或运行指标)

三、排队模型的分类与记号

四、系统状态的概率

五、排队论问题中常见的概率分布

一、排队过程的一般模型

设要求服务的顾客从顾客总体进入排队系统(输入)，到达服务机构前排队等候服务，服务完后立即离开(输出)。排队系统主要有输入、排队规则和服务机构三个部分组成。

(一)输入过程：顾客到达排队系统的过程，具有如下的特征:

1)顾客总体(顾客源)可以是有限的，也可以是无限的;

2)顾客到来的方式可能是一个一个的，也可能是成批的;

3)顾客相距到达的间隔时间可以是确定的，也可以是随机的;

4)顾客的到达是相互独立的;

5)输入过程是平稳的，即相继到达的时间间隔分布与时间无关。

(二)排队规则：顾客到达后的排队方式、队形和队列数目，有三条特征:

1)排队方式

损失制：顾客到达系统时，如果系统中所有服务窗均被占用，且没有场地供顾客等待，则到达的顾客随即离去。比如打电话。

等待制：顾客到达系统时，虽然发现服务窗忙着，但系统有场地供顾客排队等候使用，于是到达系统顾客按先后顺序进行排队等候服务。

通常的服务规则是先到先服务，后到先服

务，随机服务，优先服务(比如急诊，快递等)。

混合制：它是损失制与等待制混合组成的排队等候系统。此系统仅允许有限顾客等候排队，其余顾客只好离去或顾客中有的见到排队队伍长而不愿意费时等候，也有排队等候的顾客当等候时间超过某个时间就离去，均属这种系统。

2)排队可以是有形的，也可以是无形的。有的排队容量是有限的，有的是无限的。

3)排队数目可以是单列，也可以是多列，有的可相互转移，有的不可相互转移。

(三)服务机构：对顾客提供服务的设施或对象，有以下特征：

1)服务机构可以没有服务员(台)，也可以有一或多个服务员(台)；

2)对于多个服务员(台)的情况，可以并联或串联;

3)服务方式可以是一个一个地进行，也可以是成批成批地进行(如团购);

4)服务时间可以是确定型的，也可以是随机型的，对于随机型需要知道它的概率分布。

5)服务时间的分布对时间是平稳的，即分布的期望值和方差参数都不受时间的影响。

顾客的输入过程，服务时间都是随机的，其概率分布要依原始数据的规律做出经验分布，利用统计学的方法，确定服从哪种分布，并估计其参数。

二、排队系统的目标参量(或运行指标)

排队系统主要是研究系统运行的效率，估计服务质量，确定系统参数的最优值，以决定系统结构是否合理、研究设计改进措施。因此研究排队问题，首先要确定用以判断系统运行优劣的基本量化指标，然后求出这些指标的概率分布和数字特征。系统运行的主要指标有：

1)逗留队长：排队的顾客数，其期望值记为L_s。

2)等待队长：系统中排队等待服务的顾客数，其期望值记为L_q。

若记正在接受服务的顾客数为L_n，则

$$L_s=L_q+L_n。$$

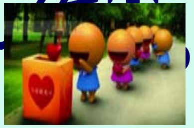
3)逗留时间：指一个顾客在系统中的停留时间，其期望值记为W_s。

4)等待时间：指一个顾客在系统中排队等待时间，其期望值记为W_q。

若记τ为接受服务时间，则

$$W_s= W_q+ \tau。$$

5)忙期：服务机构连续工作的时间长度，记作T，



6)损失概率：因系统条件限制，使顾客被拒绝服务而使服务部门受到损失的概率，记为$P_{损}$。

7)绝对通过能力A，表示单位时间内能被服务完顾客的期望值，或称平均服务率。

8)相对通过能力Q，表示单位时间能被服务完的顾客的期望值与请求服务的顾客数之比值。

三、排队模型的分类与记号

排队模型的标准形式为**X/Y/Z/A/B/C**，其中

X表示顾客相继到达间隔时间的概率分布，

Y表示服务时间的概率分布，

Z表示系统内服务台的个数，

A表示系统的容量限制，

B表示顾客数，

C表示服务规则，通常只考虑先到先服务情况。

比如M/M/C/N/m表示含义为

顾客到达间隔和服务时间服从指数分布，服务台为C个，系统容量N，顾客源为m，先到先服务，其中M表示指数分布。

四、系统状态的概率

所谓**系统的状态**是指系统中顾客的数量。它是求运行指标的基础。

1) 当队长无限制时，则顾客数 $n=0, 1, 2, \ldots,$

2) 当队长有限制且最大值为 N 时，$n=0, \ldots, N,$

3) 当服务台个数为 C 且服务即时制时, $n=0, \ldots, C$。

　　一般说来，状态的取值与时间t有关，因此在时刻t系统状态为n的概率为$P_n(t)$，如果

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

则称系统为稳态，通常情况都认为是稳态情形。

五、排队论问题中常见的概率分布

排队论中常见的分布有三种:

泊松分布，指数分布，埃尔朗分布。

1.泊松分布

设N(t)表示在时间[0, t)内到达的顾客数，

$P_n(t_1, t_2)$表示在时间段$[t_1, t_2)$内有n位顾客到达的概率，即

$$P_n(t_1, t_2)=P\{N(t_2)-N(t_1)=n\},$$

当$P_n(t_1, t_2)$满足如下三个条件时，称顾客的到达形成泊松流。

1)无后效性：在互不相交的时间区间内顾客到达数是相互独立的，即在时间段[t, t+Δt)内到达k个顾客的概率与t之前到达多少顾客无关。

2)平稳性：对充分小的Δt，在时间间隔[t, t+Δt]内有一位顾客到达的概率只与时间段Δt有关，与t无关，且

$P_1(t, t+\Delta t)=\lambda \Delta t+o(\Delta t)$，($\lambda>0$为平稳流强度)

表示单位时间内有一个顾客到达的概率。

3)普通性：在充分小的时间间隔[t, t+Δt]内最多到达1位顾客，到达2位或2位以上顾客的概率极小，可忽略不计，即

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{P}_n(t, t+\Delta t) = o(\Delta t)$$

下面求系统状态为n的概率：

取初始时刻为t=0，则可记$P_n(0, t)=P_n(t)$，

在$[t, t+\Delta t)$内，由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(t,t+\Delta t)=\mathrm{P}_0(t,t+\Delta t)+\mathrm{P}_1(t,t+\Delta t)+\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{P}_n(t,t+\Delta t)=1$$

在$[t, t+\Delta t)$内，没有顾客到达的概率为

$$\mathrm{P}_0(t,t+\Delta t)=1-\mathrm{P}_1(t,t+\Delta t)-\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{P}_n(t,t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

即 $P_0(t, t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。

将[0, t+Δt)分为[0, t)和[t, t+Δt)，则在时间段[0, t+Δt)内到达n位顾客的概率应为

$$\mathrm{P}_n(t+\Delta t)=\mathrm{P}\{\mathrm{N}(t+\Delta t)-\mathrm{N}(0)=n\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\{\mathrm{N}(t+\Delta t)-\mathrm{N}(t)=k\}\mathrm{P}\{\mathrm{N}(t)-\mathrm{N}(0)=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_{n-k}(t)\mathrm{P}_k(t,t+\Delta t) \quad \textbf{(注意独立性)}$$

$$=\mathrm{P}_n(t)(1-\lambda\Delta t)+\mathrm{P}_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\frac{\mathrm{P}_n(t+\Delta t)-\mathrm{P}_n(t)}{\Delta t}=-\lambda\mathrm{P}_n(t)+\lambda\mathrm{P}_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，有

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t),\quad P_n(0)=0\ (n\geq 1)$$

特别地，当n=0时，有

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t),\quad P_0(0)=1$$

解得，$P_0(t)=e^{-\lambda t}$，代入上式得$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$，……

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots\cdots,t>0,$$

结果表明在长为t的时间内到达n位顾客$\{N(t)=n\}$的概率服从泊松分布，其数学期望与方差分别为$E(N(t))=\lambda t$，　$D(N(t))=\lambda t$。

2 指数分布

当顾客流为泊松流时，用T表示两个顾客到达的时间间隔，T为一随机变量，其分布函数为

$$F_T(t)=P\{T\leq t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t},$$

分布密度为

$$f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t\geq 0。$$

所以T服从指数分布，且

$$E(T)=1/\lambda，D(T)=1/\lambda^2,$$

其中$1/\lambda$表示平均每到达一位顾客的时间间隔，因此λ可看做单位时间内进入系统的顾客数，也称平均到达率。

类似地，对一个顾客接受服务的时间X(即在忙期内相继离开系统的两个顾客的时间间隔)服从指数分布，设分布函数与分布密度分别为

$$F_X(t)=1-e^{-\mu t},\quad f_X(t)=\mu e^{-\mu t},\ t\geq 0,$$ 其中

1/μ表示平均一位顾客接受服务的时间，

μ表示单位时间内离开系统(被服务完)的顾客数，也称平均服务率。

3 埃尔朗(Erlang)分布

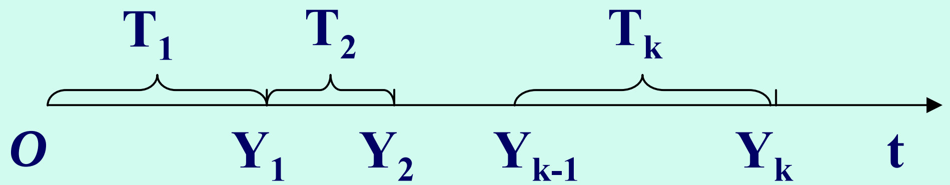
当顾客流为泊松流时，用Y_k表示第k个顾客到达的时刻，Y_k为一随机变量，其分布函数为

$$F_{Y_k}(t)=P\{Y_k \le t\}=P\{N(t)\ge k\}=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

$$f_{Y_k}(t)=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda t},\quad t\ge 0$$

此分布是参数为k, λ的埃尔朗分布。

泊松流过程



1)在[0, t]内到达的顾客数N(t)服从参数为λt的泊松分布,

2)到达间隔T_1 , T_2, …, T_k, …相互独立，同服从参数为λ的指数分布。

3)第k个顾客的到达时刻Y_k服从参数为k, λ的埃尔朗分布。显然

$$Y_k=T_1+T_2+\ldots+T_k$$

所以k个相互独立同服从参数为λ的指数分布随机变量之和服从参数为k, λ 的埃尔朗分布。

设系统中有串联的k个服务台，每个服务台对顾客的服务时间相互独立，同服从指数分布，则顾客接受k台服务的总时间T服从埃尔朗分布。

在伯努利试验中，到时刻t为止，共进行n次试验，这时成功次数服从二项分布。而在泊松过程中，到时刻t的来到数则服从泊松分布。

为等待第一次成功，伯努利试验中的等待次数服从几何分布；而泊松过程中则服从指数分布，它们都具有无记忆性。

为等待第r次成功，伯努利试验中的等待次数服从帕斯卡分布；而泊松过程中则服从埃尔朗分布。

§2、单服务窗的排队模型(M/M/1)

一、单服务窗损失制排队模型(M/M/1/1)

二、单服务窗等待制排队模型(M/M/1)

三、单服务窗混合制排队模型(M/M/1/m)

四、单服务窗闭合式排队模型(M/M/1/m/m)

五、可变服务率的M/M/1排队模型

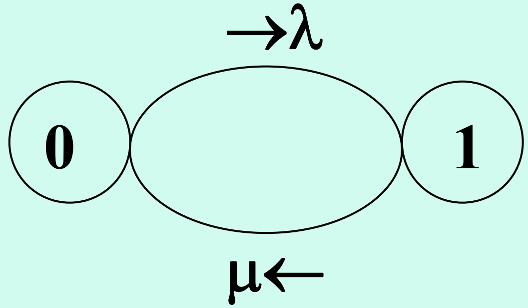
六、可变输入率的M/M/1排队模型

一、单服务窗损失制排队模型(M/M/1/1)

(M/M/1/1)表示顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，设参数分别为λ, μ, 系统只设一个服务窗，且只容一人，先到先服务。如果顾客到达发现服务窗忙着，他即离开。比如一条电话线。

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

0表示服务台闲，1表示服务台忙，系统状态流图



令t时刻, 系统处于空闲或忙的概率为$P_0(t)$或$P_1(t)$，在$[t, t+\Delta t)$内，

1)有一个顾客到达系统的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$,

2)没有顾客到达系统的概率为

$$1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

3)有一个顾客被服务完离开系统的概率为

$$\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

4)没有顾客离开系统的概率为

$$1-\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

在$t+\Delta t$时刻，服务窗空闲着及忙着的概率分别为

$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)$，整理得

$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-P_0(t)\lambda\Delta t+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)$,

$P_1(t+\Delta t)=P_0(t)\lambda\Delta t+P_1(t)(1-\mu\Delta t)+o(\Delta t)$，整理得

$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=P_0(t)\lambda\Delta t-P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)$

上式两端同除以Δt，令Δt→0得

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

设初始条件为: $P_0(0)=1$, $P_1(0)=0$, 又$P_0(t)+P_1(t)=1$,

解方程得

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t},$$

在平稳状态下，

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\ P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

2. 损失制模型(M/M/1/1)系统的运行指标

1)损失概率：$P_1=1-P_0=\lambda/(\lambda+\mu)$.

2)单位时间内平均损失的顾客数:

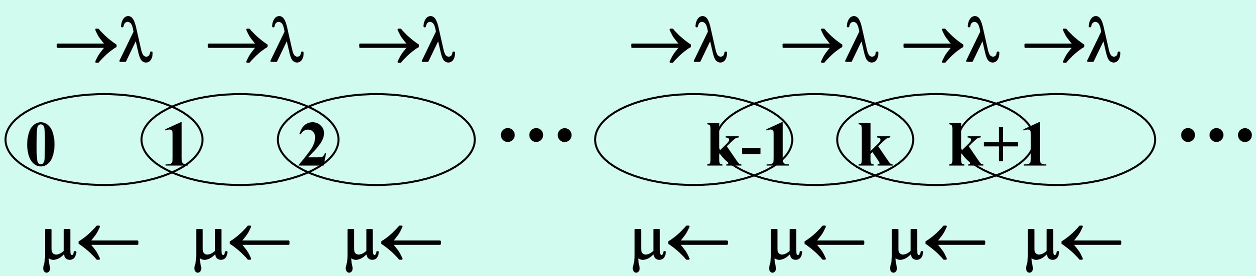
$$\lambda P_1=\lambda^2/(\lambda+\mu).$$

3)单位时间内平均进入系统的顾客数:

$$\lambda P_0=\lambda\mu/(\lambda+\mu).$$

二、单服务窗等待制排队模型(标准型M/M/1)

(M/M/1)表示顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ, 系统只设一个服务窗，系统的容量与顾客源是无限的，先到先服务。系统状态流图



1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

已知顾客的到达规律服从参数为λt的泊松分布，服务时间服从参数为μ的指数分布，若有n个顾客，只有一个接受服务，其余的顾客排队等待，于是在时间间隔$[t, t+\Delta t)$内有，

1)有一个顾客到达系统的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，

2)没有顾客到达系统的概率为$1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，

3)有一个顾客被服务完离开系统的的概率为

$$\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

4)没有顾客被服务完离开系统的概率为

$$1-\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

5)多于一个顾客到达或被服务完离去的 概率为

$$o(\Delta t),$$

现在考虑在$t+\Delta t$时刻，系统状态为n的概率$P_n(t+\Delta t)$，可能的情况见表:

情况	时刻t的顾客数	在区间$(t, t+\Delta t)$		在时刻$t+\Delta t$的顾客数	$P_n(t+\Delta t)$
		到达	离去		
(A)	n	×	×	n	$P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$
(B)	n+1	×	√	n	$P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$
(C)	n-1	√	×	n	$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)$
(D)	n	√	√	n	$P_n(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t$

这是一个生灭过程，四种情况互斥，则有

$$
\begin{cases}
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)+P_{n+1}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

$$\frac{\mathrm{P}_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=(-\lambda-\mu)\mathrm{P}_n(t)+\mu\mathrm{P}_{n+1}(t)+\lambda\mathrm{P}_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

令$\Delta t\to 0$，得

$$\frac{\mathrm{dP}_n(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)\mathrm{P}_n(t)+\mu\mathrm{P}_{n+1}(t)+\lambda\mathrm{P}_{n-1}(t),\ n=1,\,2,\,\cdots\cdots$$

当$n=0$时，类似地，可有

$$\frac{\mathrm{dP}_0(t)}{dt}=-\lambda\mathrm{P}_0(t)+\mu\mathrm{P}_1(t),$$

在稳定状态下，$\dfrac{\mathrm{dP}_n(t)}{dt}=0,\quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$

得稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda+\mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

这是关于P_n的差分方程，求解得

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0, \ P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \ (n \geq 1)$$

令ρ=λ/μ<1为服务强度，又由规范性，

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \quad \text{即} \quad P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\rho)^n = \frac{P_0}{1-\rho} = 1,$$

解得，$P_0=1-\rho$，$P_n=(1-\rho)\rho^n$，$n\geq 1$。

顾客平均逗留时间：

可以证明系统中顾客逗留时间服从参数为$\mu-\lambda$的指数分布。

顾客到达间隔服从参数为λ的指数分布，顾客被服务时间服从参数为μ的指数分布，记顾客逗留时间为随机变量Z，则可以证明**Z服从参数为$\mu-\lambda$的指数分布**。

事实上

假定在某一时刻某个顾客到达服务系统，他看到的队长为n，那么他在服务系统总共停留的时间就是$T_1+T_2+\ldots+T_n+T_{n+1}$，其中$T_1$为正在接受服务者的剩余服务时间，$T_2, \ldots, T_n$为等待接受服务者的服务时间，$T_{n+1}$是他本人接受服务的时间。所以该顾客的逗留时间为

$$Z=T_1+T_2+\ldots+T_n+T_{n+1}$$

在N=n条件下，因$T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}$相互独立且同指数分布，则Y服从埃尔朗分布，

$$P\{Z \le t \mid N = n\} = \int_0^t \frac{(us)^n}{n!} \mu e^{-\mu s} ds$$

事实上，设N为到达时刻的队长，则

$$P\{Z \le t\} = P\{Z \le t \mid N=0\}P\{N=0\} + P\{Z \le t \mid N=1\}P\{N=1\}$$

$$+ \ldots + P\{Z \le t \mid N=n\}P\{N=n\} + \ldots$$

【注】全概率公式的使用。

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{(us)^n}{n!}\mu e^{-\mu s}ds\right)\rho^n(1-\rho)$$

$$= \mu(1-\rho)\int_0^t e^{-\mu s}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\right)ds$$

$$= \int_0^t (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)s}ds = 1-e^{-(\mu-\lambda)t}$$

其中ρ=λ/μ<1为服务强度。

【注】逗留时间Z服从参数为μ-λ的指数分布。

2. 等待制模型(M/M/1)系统的运行指标

1)平均逗留队长(利用数学期望的计算公式):

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2)平均等待队长(系统内等待的平均顾客数):

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = (1-\rho)\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^{n-2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

3)顾客平均逗留时间:

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad 即 \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

4)顾客平均等待时间:

$$\mathbf{W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}}$$

5)系统中多于k个顾客的概率:

$$\mathbf{P\{X > k\} = 1 - \sum_{i=0}^{k} P_i = 1 - \sum_{i=0}^{k} (1-\rho)\rho^i = \rho^{k+1}}$$

6)系统的状态概率:

$$\mathbf{P_0 = 1 - \rho，\ P_n = (1-\rho)\rho^n，\ n \geq 1。}$$

综上所述：系统主要运行指标为

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}, \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda},$$

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}, \quad W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda},$$

由此可得如下结论：

$$L_s = \lambda W_s,\ L_q = \lambda W_q,\ W_s = W_q + \frac{1}{\mu},\ L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

上述关系式称为运行指标的**Little公式**。

例1 某音乐厅有一个售票处，营业时间为8~16时假定顾客到达的平均间隔为2.5分钟，被服务平均时间需1.5分钟，试问：

1)顾客不需要等待的概率；

2)平均排队长度；3)平均等待人数；

4)顾客在系统内平均逗留时间；

5)平均等待时间；

6)系统内顾客人数超过4人的概率；

7)顾客在系统内逗留时间大于15分钟的概率；

8)在6天工作日内系统没有顾客的小时数。

【解】由题意，$\lambda=24$人/小时, $\mu=40$人/小时, $\rho=0.6$,

1)顾客不需要等待的概率：$P_0=1-\rho=0.4$。

2)平均逗留队长:

$$L_s=\rho/(1-\rho)=1.5(\text{人})。$$

3)平均等待队长:

$$L_q=\rho^2/(1-\rho)=0.9(\text{人})。$$

4)顾客平均逗留时间:

$$W_s=1/(\mu-\lambda)=3\text{分}45\text{秒}。$$

5)顾客平均等待时间:

$$W_q=L_q/\lambda=2\text{分}15\text{秒}。$$

6)系统内顾客人数超过4人的概率;

$$P\{X>4\}=\rho^5=0.078。$$

7)顾客在系统内逗留时间大于15分钟的概率;

$$P\{T>1/4\}=e^{-(\mu-\lambda)/4}=0.018。$$

8)在6天工作日内系统没有顾客的小时数;

$$8P_0\times 6=19.2\text{小时。}$$

例2 某医院手术室根据接诊和手术时间记录，得到以下两个表，计算该服务系统地各项指标。

每小时到达的患者数n	出现次数 f_n
0	10
1	28
2	29
3	16
4	10
5	6
≥6	1
合计	100

完成手术时间v(小时)	出现次数 f_v
0.0~0.2	38
0.2~0.4	25
0.4~0.6	17
0.6~0.8	9
0.8~1.0	6
1.0~1.2	5
≥1.2	0
合计	100

【解】(1)单位时间(每小时)患者平均到达率

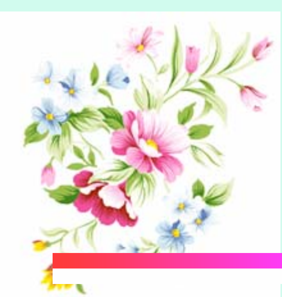
$$\lambda=\frac{\sum nf_n}{100}=2.1(\text{人}/\text{小时})$$

每次手术平均时间

$$\frac{1}{\mu}=\frac{\sum vf_v}{100}=0.4(\text{小时}/\text{人})$$

单位时间(每小时)完成手术的平均人次

$$\mu=\frac{1}{0.4}=2.5(\text{人}/\text{小时})$$



(2)可以通过检验法，认为患者到达数服从参数为λ=2.1的泊松分布，手术时间服从参数为μ=2.5的指数分布，

(3)逗留队长(患者数)： $L_s=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}=5.25$(人),

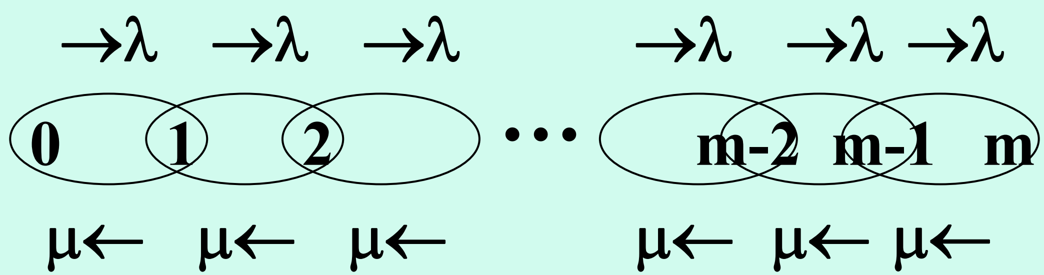
等待队长： $L_q=\dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=4.41$(人),

患者逗留时间： $W_s=\dfrac{1}{\mu-\lambda}=2.5$(小时),

患者等待时间： $W_q=\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}=2.1$(小时)。

三、单服务窗混合制排队模型(M/M/1/m)

(M/M/1/m)表示顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ, 系统只设一个服务窗，系统容量有限，先到先服务。系统状态流图



如上述方法，建立方程。

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)+P_{n+1}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=1,\ 2,\ldots,\ m-1, \\
P_m(t+\Delta t)= P_{m-1}(t)\lambda\Delta t+P_m(t)(1-\mu\Delta t)+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

令$\Delta t \to 0$，得

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t),$$

n=1, 2, …, m-1,

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \lambda P_{m-1}(t) - \mu P_m(t),$$

对应稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda + \mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}, \ 1 \le n \le m-1 \\ \lambda P_{m-1} = \mu P_m, \end{cases}$$

令$\rho=\lambda/\mu<1$，得递推关系式得，

$$P_n=\rho^n P_0 (1\le n\le m),$$

注意确定P_0方法

又由规范性 $$\sum_{n=0}^{m} P_n=1,$$

求解得 $$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}},\ \rho\neq 1,$$

$$P_n=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^n,\ \rho\neq 1,$$

【注】如果$\rho=1(\lambda=\mu)$ $P_0=P_1=\ldots=P_m=1/(m+1)$，即到达率与服务率相等时，稳态下系统的状态概率一致。

2. 混合制模型(M/M/1/m)系统的运行指标

1)系统的损失概率:

$$P_m = \rho^m P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^m, \quad \rho \neq 1,$$

2)系统状态的概率:

当ρ≠1时， $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}, \ \rho \neq 1,$

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^n, \ \rho \neq 1, \quad n=1, 2, \ldots, m,$$

当ρ=1时, $P_0 = P_1 = P_2 = \cdots = P_m = \frac{1}{m+1}$

3)平均逗留队长(系统内平均顾客数):

$$L_s=\sum_{n=0}^{m} nP_n$$

当ρ≠1时，

$$L_s=\sum_{n=0}^{m} nP_n=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\sum_{n=0}^{m} n\rho^{n}=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(m+1)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}}$$

当ρ=1时，

$$L_s=\sum_{n=0}^{m} nP_n=\sum_{n=0}^{m} n\frac{1}{m+1}=\frac{m}{2}$$

4)平均等待队长:

$$\mathbf{L_q} = L_s - L_0$$

其中L_0表示正在接受服务的顾客平均数,

正在接受服务的人数	0	1
P	P_0	$1-P_0$

因此$L_0=1-P_0$,

$$\mathbf{L_q} = \mathbf{L}_s - L_0 = \begin{cases} \dfrac{m}{2} - \dfrac{m}{m+1}, & \rho = 1, \\ \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{m\rho^{m+1} + \rho}{1-\rho^{m+1}}, & \rho \neq 1, \end{cases}$$

5)顾客逗留时间:

因为W_s与平均到达率λ有关，而λ表示系统的容量有空时的平均到达率，当系统满员(n=m)时，则到达率为0，为此引入有效到达率

$$\lambda_0 = \lambda - \lambda P_m = \lambda(1 - P_m)$$

有效到达率为

$$\lambda_0 = \lambda(1 - P_m) = \lambda\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^m\right) = \lambda\frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+1}}$$

有效服务强度为

$$\rho_0 = \frac{\lambda_0}{\mu} = \lambda\left(1 - \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+1}}\right)\frac{\rho}{\lambda} = \frac{\rho-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}} = 1 - P_0$$

于是顾客平均逗留时间为

$$\mathbf{W_s} = \frac{L_s}{\lambda_0} = \frac{L_s}{\mu(1-P_0)},$$

6)顾客平均等待时间:

$$\mathbf{W_q} = \frac{L_q}{\lambda_0} = \mathrm{W}_s - \frac{1}{\mu}.$$

例3 单人理发店有6把椅子接待人们等待理发，当6把椅子都坐满时，后来到的顾客不进店就离开，顾客平均到达率为3人/小时，理发平均时间为15分钟，即

$N=7$人，$\lambda=3$人/小时，$\mu=4$人/小时

(1)求某一顾客一到就能理发的概率；

(2)求等待理发的顾客的平均数；

(3)求有效到达率；

(4)求每位顾客的平均逗留时间;

(5)有多少顾客由于被拒绝而离开?

【解】(1) $P_0=\dfrac{1-3/4}{1-(3/4)^8}=0.2778,$

(2)$L_q=L_s-(1-P_0)=\dfrac{3/4}{1-3/4}-\dfrac{8(3/4)^8}{1-(3/4)^8}-(1-0.2778)=1.39$(人)

(3) $\lambda_0=\lambda(1-P_m)=\mu(1-P_0)=4(1-0.2778)=2.89$人/小时。

(4) $W_s=L_s/\lambda_0=2.11/2.89=0.73$小时=43.8分钟。

(5) $P_7=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{7+1}}\rho^7=\dfrac{1-3/4}{1-(3/4)^8}\left(\dfrac{3}{4}\right)^7\approx 0.037$(损失率)

四、单服务窗闭合式排队模型(M/M/1/m/m)

(M/M/1/m/m)表示顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ, 系统只设一个服务窗，系统容量有限，顾客源有限，先到先服务。系统状态流图

$$\rightarrow m\lambda \rightarrow (m-1)\lambda \qquad \rightarrow 3\lambda \ \rightarrow 2\lambda \rightarrow \lambda$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \cdots \qquad m-2 \quad m-1 \quad m$$

$$\mu\leftarrow \quad \mu\leftarrow \quad \mu\leftarrow \qquad \mu\leftarrow \quad \mu\leftarrow \quad \mu\leftarrow$$

有效到达率：设单位时间内每位顾客到达服务系统的概率为λ, 比如每台机器的故障率。则有效到达率

$$\lambda_0 = \lambda(m-L_s)$$

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-m\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)(m-n+1)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-(m-n)\lambda\Delta t-\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{n+1}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad n=1, 2,\ldots, m-1, \\
P_m(t+\Delta t)=P_{m-1}(t)\lambda\Delta t+P_m(t)(1-\mu\Delta t)+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

系统的稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda m P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda(m-n)+\mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda(m-n+1)P_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1, \\ \lambda P_{m-1} = \mu P_m \end{cases}$$

解关于P_n的递推方程并注意到，$\sum\limits_{n=0}^{m} P_n = 1$

解之得 $P_n = \dfrac{m!\rho^n}{(m-n)!} P_0, \quad n = 1, 2, \cdots, m,$

其中 $P_0 = \left(\sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{m!}{(m-n)!}\rho^n\right)^{-1}, \quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

由$\lambda m P_0 = \mu P_1$, $\lambda(m-1)P_1 = \mu P_2$, …得递推关系式:

$$\lambda(m-n)P_n = \mu P_{n+1}, \quad (0 \le n \le m)$$

对上式两端求和得

$$m\lambda \sum_{n=0}^{m} P_n - \lambda \sum_{n=0}^{m} nP_n = \mu \sum_{n=0}^{m} P_{n+1}$$ 注：$P_{m+1}=0$

再由平均逗留队长的定义及规范性,

$$m\lambda - \lambda L_s = \mu(1 - P_0)$$

解得 $$L_s = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

2. 闭合式模型(M/M/1/m/m)系统的运行指标

1)平均逗留队长:

$$\mathbf{L_s}=\sum_{\mathbf{n=0}}^{m}\mathbf{nP_n}=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-\mathrm{P_0})$$

2)平均等待队长:

$$\mathbf{L_q}=\sum_{\mathbf{n=1}}^{m}(\mathbf{n-1})\mathbf{P_n}=L_s-(1-P_0)=m-\frac{\mu+\lambda}{\lambda}(1-\mathrm{P_0})$$

3)顾客平均逗留时间:

$$\mathbf{W_s}=\frac{L_s}{\lambda_0}=\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}=\frac{m}{\mu(1-P_0)}-\frac{1}{\lambda},\quad \lambda_0=\mu(1-P_0)$$

4)顾客平均等待时间：$W_q = \frac{L_q}{\lambda_0} = W_s - \frac{1}{\mu}.$

5)系统状态的概率：

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!}\rho^n\right)^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \frac{m!\rho^n}{(m-n)!}P_0, \quad n = 1, 2, \cdots, m,$$

例4 某车间有6台机器，每台机器的连续运转时间服从指数分布，平均连续运转时间60分钟，一个工人负责修理这些机器，每次修理时间服从指数分布，平均每次为30分钟，求

(1)修理工空闲的概率;

(2)6台机器都出故障的概率;

(3)故障机器的平均台数;

(4)等待修理的平均台数;

(5) 每台平均停工时间；(6)如何评价此系统？

【解】 m=6, λ=1/60, μ=1/30, λ/μ=1/2,

(1)

$$P_0=\frac{1}{\frac{6!}{6!}(0.5)^0+\frac{6!}{5!}(0.5)^1+\frac{6!}{4!}(0.5)^2+\frac{6!}{3!}(0.5)^3+\frac{6!}{2!}(0.5)^4+\frac{6!}{1!}(0.5)^5+\frac{6!}{0!}(0.5)^6}=0.012.$$

(2) $P_6=6!/0!(0.5)^6P_0=0.135$

(3) $L_s=6-(1-0.012)/0.5=4.024$(台)

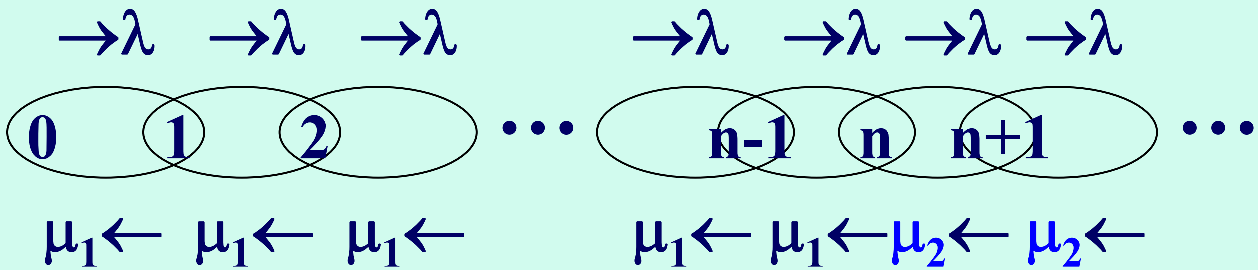
(4) $L_q=L_s-(1-P_0)=4.024-0.988=3.036$(台)

(5) $W_s=L_s/\mu(1-P_0)=122.186$(分钟)。

(6) 机器等待时间过长，修理工人没有空闲时间。应提高服务率或增加修理工人。

五、可变服务率的M/M/1排队模型

类似于等待制的假设，不同的是当顾客在服务窗接受服务过程中，当排队长度不超过n时，服务率为μ_1，当排队长度超过n时，服务率为μ_2，顾客到达率为λ，系统状态流图



1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu_1\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-\mu_1\Delta t)+P_{k+1}(t)\mu_1\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad k=1,\ 2,\dots,\ n-1, \\
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu_1\Delta t)+P_{n+1}(t)\mu_2\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-\mu_2\Delta t)+P_{k+1}(t)\mu_2\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad k=n+1,\ n+2,\ \dots,
\end{cases}
$$

于是得稳态方程为

$$
\begin{cases}
\lambda P_0 = \mu_1 P_1, \\
(\lambda+\mu_1)P_k = \mu_1 P_{k+1} + \lambda P_{k-1}, \ 1 \le k \le n-1 \\
(\lambda+\mu_1)P_n = \mu_2 P_{n+1} + \lambda P_{n-1}, \ k = n, \\
(\lambda+\mu_2)P_k = \mu_2 P_{k+1} + \lambda P_{k-1}, \ k > n,
\end{cases}
$$

由递推关系不难求得系统的状态概率为

$$
P_k = \begin{cases}
\rho_1^k P_0, & 1 \le k \le n, \\
\rho_1^n \rho_2^{k-n} P_0, & n < k,
\end{cases}
$$

其中 $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}, \ \rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$, 且$\rho_1 < 1, \ \rho_2 < 1$,

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0(1+\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^n+\rho_1^n\rho_2(1+\rho_2+\rho_2^2+\cdots+))$$

$$= P_0\left(\frac{1-\rho_1^{n+1}}{1-\rho_1}+\frac{\rho_1^n\rho_2}{1-\rho_2}\right)$$

$$P_0 = \left(\frac{1-\rho_1^{n+1}}{1-\rho_1}+\frac{\rho_1^n\rho_2}{1-\rho_2}\right)^{-1}$$

2. 可变服务率模型(M/M/1)系统的运行指标

1)平均逗留队长:

$$L_s=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k=P_0\left(\sum_{k=0}^{n-1}k\rho_1^k+\sum_{k=n}^{\infty}k\rho_1^n\rho_2^{k-n}\right)$$

$$=P_0\left(\rho_1\sum_{k=0}^{n-1}k\rho_1^{k-1}+\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}k\rho_2^{k-1}\right)$$

$$=P_0\left(\frac{\rho_1(1+(n-1)\rho_1^n-n\rho_1^{n-1})}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_1^n(n-(n-1)\rho_2)}{(1-\rho_2)^2}\right)$$

2)平均等待队长:

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=L_s-(1-P_0)$$

3)平均逗留时间:

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}$$

4)平均等待时间:

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

5)系统状态的概率

$$P_0 = \left(\frac{1-\rho_1^{n+1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1^n \rho_2}{1-\rho_2}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{P}_k = \begin{cases} \rho_1^k P_0, & 1 \le k \le n, \\ \rho_1^n \rho_2^{k-n} P_0, & n < k, \end{cases}$$

其中 $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$, 且$\rho_1 < 1$, $\rho_2 < 1$,

六、可变输入率的M/M/1排队模型

类似于等待制的假设，不同的是当顾客到达服务窗前，因发现排队顾客多而犹豫，究竟是否加入队伍等待服务，除了当时顾客的需要，主要考虑届时的队长，若队伍较长，加入队列的可能性较小，若队伍较短，加入队列的可能性较大，设α_k为加入队列的概率，k为队长，$k\to\infty, \alpha_k\to 0$，不妨设$\alpha_k=1/(1+k)$，顾客平均到达率为$\lambda_k=\lambda\alpha_k$，顾客接受平均服务率为$\mu$，系统状态流图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to\lambda & \to\lambda/2 & \to\lambda/3 & & \to\lambda/k & & \to\lambda/(k+2) & & \\
0 & 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & \\
\mu\leftarrow & \mu\leftarrow & \mu\leftarrow & & \mu\leftarrow & \mu\leftarrow & \mu\leftarrow & \mu\leftarrow &
\end{array}$$

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)(\lambda/n)\Delta t+P_n(t)(1-(\lambda/(n+1))\Delta t-\mu\Delta t) \\
\qquad +P_{n+1}(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

$n=1, 2, 3\ldots\ldots$

于是得稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\mu + \dfrac{\lambda}{n+1}) P_n = \dfrac{\lambda}{n} P_{n-1} + \mu P_{n+1},\ n \geq 1, \end{cases}$$

由$\lambda P_0=\mu P_1$, $(\lambda/2)P_1=\mu P_2$, …得递推关系为

$$\frac{\lambda}{n+1} P_n = \mu P_{n+1},\ n \geq 1,$$

$$P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1} = \frac{\rho^n}{n!} P_0,\quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} = e^{-\rho}$$

将$\mathbf{P_0}$值代入状态概率得，

$$\mathrm{P}_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

2. 可变输入率模型(M/M/1)系统的运行指标

顾客平均输入率为

$$\bar{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k P_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{k+1}\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\rho}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\rho}=\mu(1-e^{-\rho})$$

于是平均服务强度为

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{\lambda}}{\mu}=1-e^{-\rho}=1-P_0$$

1)平均逗留队长: $L_s=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}=\rho$

2)平均等待队长: $L_q=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_k=L_s-(1-P_0)=\rho+e^{-\rho}-1$

3)系统损失的概率:

$$P_{损}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{L_s=k\}(1-\alpha_k)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k-\sum_{k=0}^{\infty}P_k\alpha_k$$

$$=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k}{k+1}=1-\frac{1-e^{-\rho}}{\rho}$$

4)系统无损失的概率: $P_0=1-P_{损}=\dfrac{1-e^{-\rho}}{\rho}$

5)单位时间内平均进入系统队列的顾客数:

$$\lambda(1-P_{损})=\mu(1-e^{-\rho})=\bar{\lambda}$$

6)单位时间内平均损失的顾客数:

$$\lambda P_{损}=\lambda-\mu(1-e^{-\rho})=\lambda-\bar{\lambda}$$

§3、多服务窗的排队模型(M/M/n)

假设系统内有n个服务窗，顾客按泊松流到达系统，且相互独立，有n个服务窗为每个顾客服务，服务时间服从指数分布。下面就顾客源有限与无限，以及系统容量变化的情形进行讨论。

一、多服务窗损失制排队模型(M/M/n/n)

二、多服务窗等待制排队模型(M/M/n)

三、多服务窗混合制排队模型(M/M/n/m)

四、多服务窗闭合式排队模型(M/M/n/m/m)

一、多服务窗损失制排队模型(M/M/n/n)

1.系统的状态概率

倘若顾客到达时发现系统n个服务窗正忙，他即离开系统，又设顾客到达时间间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ, 此时系统可能出现的状态应为E={0,1, 2, …, n}中之一，0状态表示系统内没有顾客到达，k(1≤k≤n)状态表示系统内有k位顾客被服务，n-k个窗口空闲。状态图为

→λ →λ →λ →λ →λ

0 1 2 … n-2 n-1 n

μ← 2μ← 3μ← (n-2)μ← nμ←

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad 1\le k\le n-1, \\
P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-n\mu\Delta t)
\end{cases}
$$

同理可得稳态方程如下

由 $\lambda P_0=\mu P_1$, $\lambda P_1=2\mu P_2,\ldots$，于是得稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ \lambda P_{k-1} = k\mu P_k,\ 1 \le k \le n, \end{cases}$$

由递推关系不难求得系统的状态概率为

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{\rho^k}{k!} P_0,\quad k = 0,1,2,\ldots,n,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1},\ P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \frac{\rho^k}{k!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}\right)}, k = 0,1,\ldots,n$$

2. 损失制模型(M/M/n/n)系统的运行指标

1)损失概率: $P=P_n=\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$

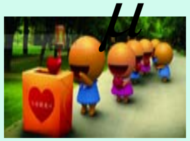
2)单位时间内平均损失的顾客数: $\lambda P_n=\lambda\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$

3)单位时间内平均进入系统的顾客数:

$$\lambda_0=\lambda(1-P_n)=\lambda(1-\frac{\rho^n}{n!}P_0)$$

4)系统在单位时间内占用服务窗的均值:

$$\bar{k}=\sum_{k=1}^{n}kP_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k}{(k-1)!}P_0=\rho\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}P_0=\rho(1-P_n)=\frac{\lambda_0}{\mu}$$



5)系统服务窗的效率：$\dfrac{\overline{k}}{n}$

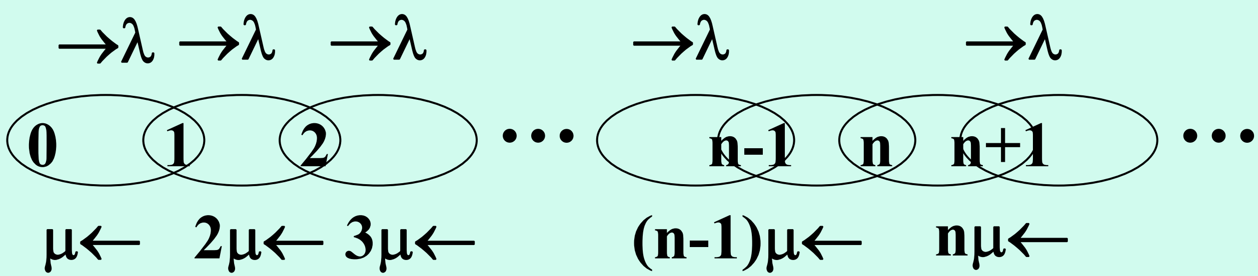
6)顾客平均逗留时间：

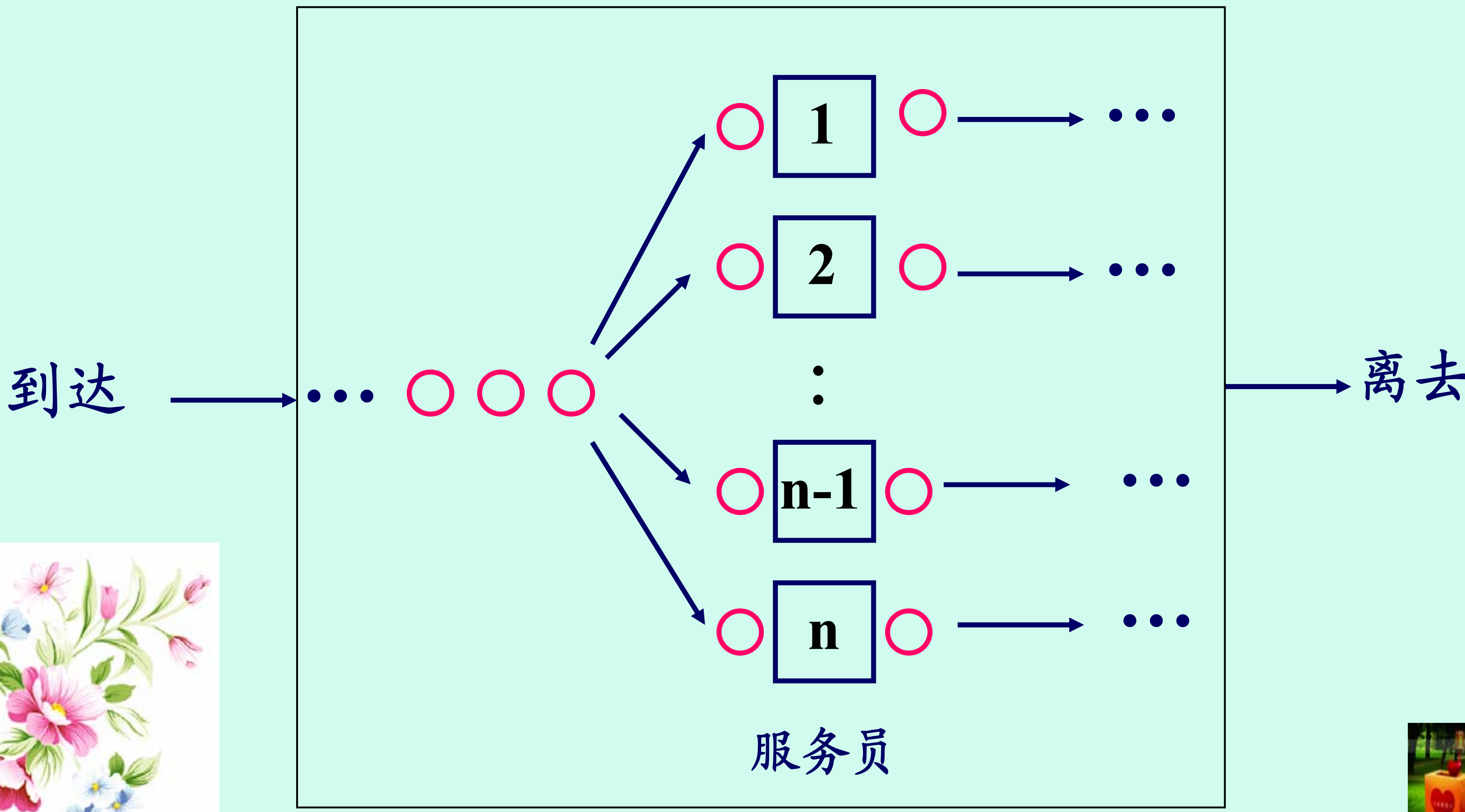
$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_0} = \frac{\overline{k}}{\lambda_0} = \frac{1}{\mu}.$$

二、多服务窗等待制排队模型(M/M/n)

1.系统的状态概率

倘若顾客到达时发现系统n个服务窗，且独立工作，又设顾客到达时间间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ，则整个系统的平均服务率应为nμ，令$\rho_1 = \lambda/n\mu$称为系统的服务强度，当$\rho_1>1$时，系统即出现排队现象，此时只有一个队等候，哪个窗口空闲按先后顺序前往接受服务。系统状态流图:


λ λ λ λ λ
0 1 2 … n-1 n n+1 …
μ 2μ 3μ (n-1)μ nμ


到达
1
2
n-1
n
离去
服务员

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad 1\le k\le n-1, \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)+P_{k+1}(t)n\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad k\ge n,
\end{cases}
$$

于是得稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda \mathrm{P}_0 = \mu \mathrm{P}_1, \\ (k+1)\mu \mathrm{P}_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + k\mu)\mathrm{P}_k,\ 1 \le k < n, \\ n\mu \mathrm{P}_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + n\mu)\mathrm{P}_k,\ k \ge n, \end{cases}$$

由递推关系不难求得系统的状态概率为

$$\mathrm{P}_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 = \dfrac{n^k}{k!} \rho_1^k P_0, & 0 \le k < n, \\ \dfrac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0 = \dfrac{n^n}{n!} \rho_1^k P_0, & k \ge n, \end{cases}$$

其中$\rho_1 = \lambda / n\mu$。

当ρ=nρ$_1$=λ/μ<1时，

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}_k = (\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}})P_0 = (\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\rho_1})P_0$$

$$P_0 = (\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\rho_1})^{-1}$$

2. 等待制模型(M/M/n)系统的运行指标

1)平均等待队长:

$$L_q=\sum_{k=n}^{\infty}(k-n)P_k=\sum_{i=1}^{\infty}iP_{i+n}=\frac{\rho_1(n\rho_1)^n}{n!(1-\rho_1)^2}P_0$$

2)平均忙着的服务窗个数:

$$\bar{k}=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k=\sum_{k=0}^{n-1}kP_k+n\sum_{k=n}^{\infty}P_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{\rho^k}{k!}P_0+\sum_{k=n}^{\infty}n\frac{\rho^k}{n^{k-n}n!}P_0=\rho$$

3)平均逗留队长: $L_s = L_q + \bar{k} = \dfrac{\rho_1 (n\rho_1)^n}{n!(1-\rho_1)^2} P_0 + \rho$

4)顾客平均逗留时间:

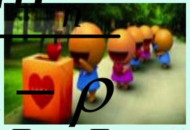
$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho_1 (n\rho_1)^n}{n!(1-\rho_1)^2 \lambda} P_0 + \frac{1}{\mu}.$$

5)顾客平均等待时间:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho_1 (n\rho_1)^n}{n!(1-\rho_1)^2 \lambda} P_0.$$

6)顾客等待概率:

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}>\mathrm{n}\} = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\rho^k}{n!n^{k-n}} P_0 = \sum_{k=n}^{\infty} P_n \rho_1^{k-n} = \frac{P_n}{1-\rho_1} = \frac{nP_n}{n-\rho}$$



7)系统状态的概率

$$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\rho_1}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{P}_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k}{k!}P_0=\dfrac{n^k}{k!}\rho_1^kP_0, & 0\le k<n,\\[2ex] \dfrac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0=\dfrac{n^n}{n!}\rho_1^kP_0, & k\ge n,\end{cases}$$

其中$\rho_1=\lambda/n\mu$。

【注】上述模型M/M/n多服务窗口等待制队列约定只有一个等候队列，若每个窗口都设一个队列，是否与n个等待制模型M/M/1一样？

设$n=3, \lambda=0.3, \mu=0.4$,

指　标	M/M/3	M/M/1
P_0	0.0748	0.25(每个子系统)
顾客等候概率	0.57	0.75(整个系统)
L_q	1.7	2.25 (每个子系统)
L_s	3.95	9.00(整个系统)
W_s	4.39	10(整个系统)
W_q	1.89	7.5(整个系统)
	优	不优

例5 某火车站售票处有三个售票窗口，顾客到达服从泊松分布，平均每分钟0.9人到达，服务时间服从指数分布，平均每分钟可服务0.4人，现假设排成一队，依次向空闲的窗口购票，试分析该排队系统。

【解】这是M/M/n系统，其中 $n=3, \lambda=0.9, \mu=0.4$，

$$\rho=\lambda/\mu=2.25,\quad \rho_1=\lambda/n\mu=0.725$$

售票处空闲的概率为

$$P_0=\frac{1}{1+\frac{0.9}{0.4}+\frac{1}{2!}\left(\frac{0.9}{0.4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{0.9}{0.4}\right)^3\frac{1}{1-0.75}}=0.0748$$

平均等待队长为

$$L_q=\frac{(0.9/0.4)^3\times 3/4}{3!(4!)^2}\times 0.0748=1.7(\text{人})$$

平均等待时间为 $W_q=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{1.7}{0.9}=1.89(\text{分钟})$

平均逗留时间为 $W_s=W_q+\frac{1}{\mu}=1.89+\frac{1}{0.4}=4.39(\text{分钟})$

三、多服务窗混合制排队模型(M/M/n/m)

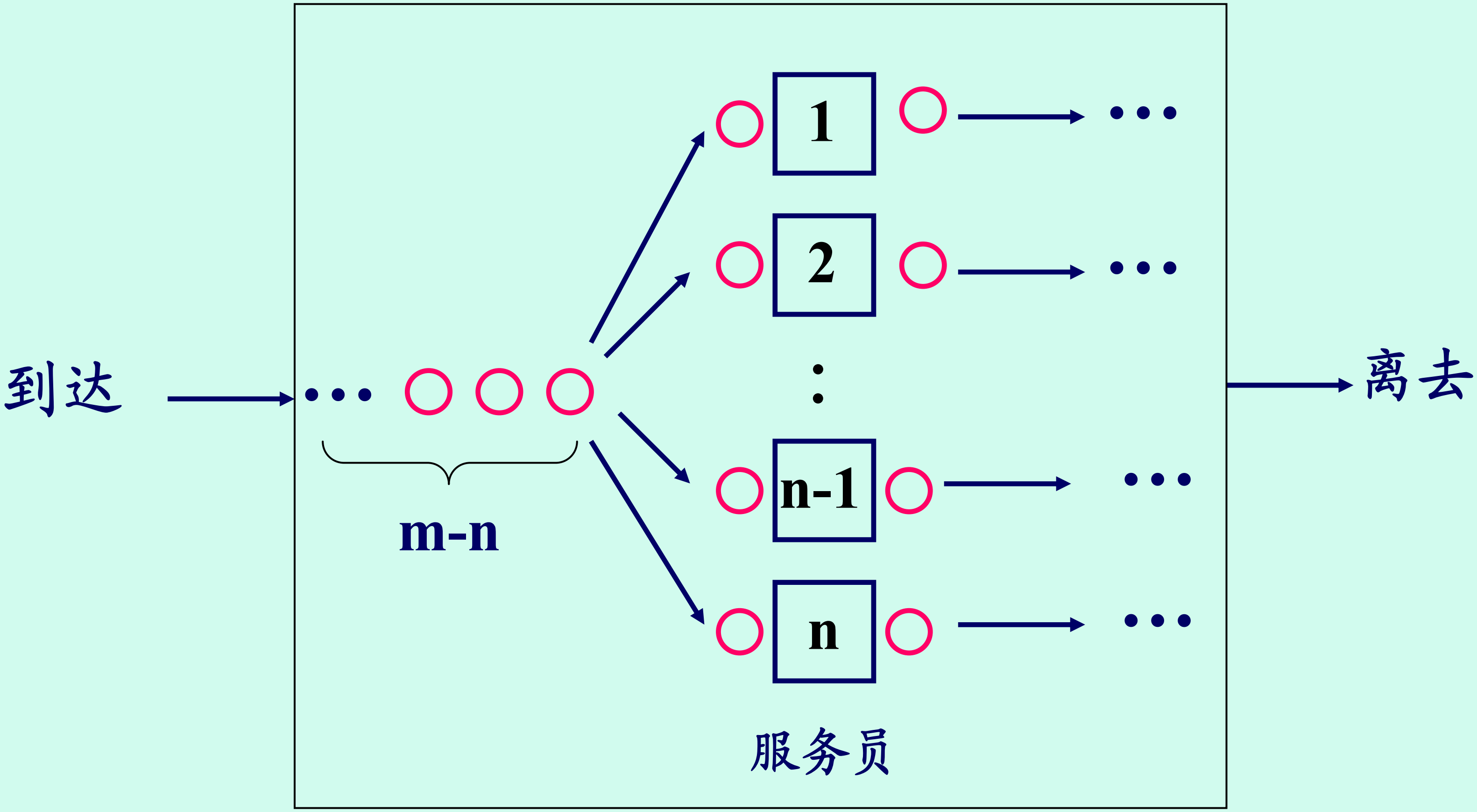
1.系统的状态概率

系统有n个服务窗，相互独立工作，又设顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，参数分别为λ, μ，系统的最大容量为m(m>n>1)，当系统客满时，有n个顾客接受服务，m-n个顾客排队等候，新来到系统的顾客便立即离去，显然此时系统有损失。其状态流图

$\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$ $\rightarrow\lambda$

0 1 2 ··· n-1 n ··· m-1 m

$\mu\leftarrow$ $2\mu\leftarrow$ $(n-1)\mu\leftarrow n\mu\leftarrow$ $n\mu\leftarrow$ $n\mu\leftarrow$



到达
m-n
1
2
n-1
n
服务员
离去

对于这样的系统，其状态空间为$E=\{0, 1, 2, \ldots, m\}$当状态$k(0<k<n)$时，每个窗口服务率为μ，故系统总服务率为$k\mu$，当状态$k\geq n$时，系统总服务率为$n\mu$，令$\rho_1=\lambda/n\mu$称为系统的服务强度。

1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad\qquad 1\le k\le n-1, \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)+P_{k+1}(t)n\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad\qquad n\le k<m, \\
P_m(t+\Delta t)=P_{m-1}(t)\lambda\Delta t+P_m(t)(1-n\mu\Delta t)+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

于是得稳态方程为

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (k+1)\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + k\mu) P_k, \ 1 \le k < n, \\ n\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + n\mu) P_k, \ n \le k < m, \\ \lambda P_{m-1} = n\mu P_m, \end{cases}$$

由递推关系不难求得系统的状态概率为

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 = \dfrac{n^k}{k!} \rho_1^k P_0, & 0 \le k < n, \\ \dfrac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0 = \dfrac{n^n}{n!} \rho_1^k P_0, & n \le k \le m, \end{cases}$$

当ρ=nρ$_1$=λ/μ，注意到 $\sum_{n=0}^{m} P_n = 1$

$$
P_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1-\rho_1^{m-n+1}}{1-\rho_1} \right)^{-1}, & \rho_1 \neq 1, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} (m-n+1) \right)^{-1}, & \rho_1 = 1, \end{cases}
$$

2. 混合制模型(M/M/n/m)系统的运行指标

1)损失概率：$P_m = \dfrac{n^n}{n!}\rho_1^m P_0$

2)单位时间内平均损失的顾客数:

$$\lambda P_m = \frac{\lambda n^n}{n!}\rho_1^m P_0$$

3)单位时间内平均进入系统的顾客数:

$$\lambda_0 = \lambda(1-P_m) = \lambda\left(1-\frac{n^n}{n!}\rho_1^m P_0\right)$$

4)平均忙着的服务窗个数:

$$L_0 = \bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + n\sum_{k=n}^{m} P_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{\rho^k}{k!}P_0 + \sum_{k=n}^{m} n\frac{\rho^k}{n^{k-n}n!}P_0 = \rho(1-P_m)$$

5)平均等待队长:

当$\rho_1 \neq 1$时,

$$L_q = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n)P_k = \sum_{i=1}^{m-n} iP_{i+n}$$

$$= \frac{\rho_1 (n\rho_1)^n}{n!(1-\rho_1)^2} P_0 (1-(m-n+1)\rho_1^{m-n} + (m-n)\rho_1^{m-n+1})$$

当$\rho_1 = 1$时,

$$L_q = \sum_{i=1}^{m-n} i \frac{n^n}{n!} P_0 = \frac{n^n}{2n!}(m-n)(m-n+1)P_0$$

6)平均逗留队长： $L_s = L_q + L_0$

7)顾客平均逗留时间：

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_0} = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

8)顾客平均等待时间：

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_0}$$

9)系统状态的概率

$$
P_0=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\rho^k}{k!}+\dfrac{\rho^n}{n!}\dfrac{1-\rho_1^{m-n+1}}{1-\rho_1}\right)^{-1}, & \rho_1\neq 1,\\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{n^k}{k!}+\dfrac{n^n}{n!}(m-n+1)\right)^{-1}, & \rho_1=1,\end{cases}
$$

$$
P_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k}{k!}P_0=\dfrac{n^k}{k!}\rho_1^kP_0, & 0\le k<n,\\ \dfrac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0=\dfrac{n^n}{n!}\rho_1^kP_0, & n\le k\le m,\end{cases}
$$

其中 $\rho=n\rho_1=\lambda/\mu$。

下面介绍M/M/n/m模型中几种特殊情况

若n=1，则可化为M/M/1/m排队模型，此时

$$
P_0=\begin{cases}\left(1+\rho\dfrac{1-\rho^m}{1-\rho}\right)^{-1}=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}, & \rho\neq 1,\\[2ex] \dfrac{1}{m+1}, & \rho=1,\end{cases}
$$

若ρ<1，m→∞, 则可化为M/M/1排队模型，此时

$$P_0=1-\rho$$

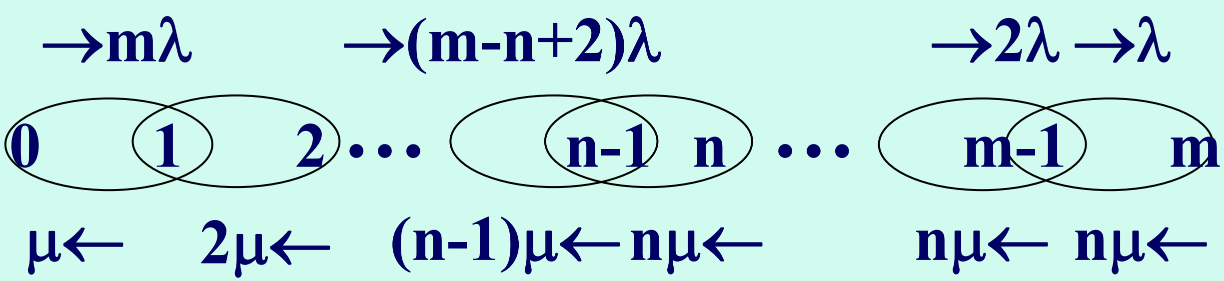
若n=m, 则可化为M/M/n/n排队模型, 此时

$$
P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1},\qquad P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0
$$

四、多服务窗闭合式排队模型(M/M/n/m/m)

1.系统的状态概率

系统有n个服务窗，相互独立工作，又设顾客到达间隔与被服务时间均服从指数分布，系统的容量和顾客源均为m，其状态空间为E={0, 1, …, m}，又每位顾客到达的概率为λ，服务窗的服务率为μ，如n位工人负责维修m台机器。其状态流图



1. 确定系统在任意时刻t的状态概率

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-m\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)(m-k+1)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-(m-k)\lambda\Delta t-k\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad 1\le k\le n-1, \\
P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)(m-k+1)\lambda\Delta t+P_k(t)(1-(m-k)\lambda\Delta t-n\mu\Delta t) \\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)n\mu\Delta t+o(\Delta t) \\
\qquad\qquad n\le k<m, \\
P_m(t+\Delta t)=P_{m-1}(t)\lambda\Delta t+P_m(t)(1-n\mu\Delta t)+o(\Delta t)
\end{cases}
$$

1.于是得稳态方程为

$$
\begin{cases}
m\lambda \mathrm{P}_0 = \mu \mathrm{P}_1, \\
(k+1)\mu \mathrm{P}_{k+1} + (m-k+1)\lambda P_{k-1} = ((m-k)\lambda + k\mu)\mathrm{P}_k,\ 1 \le k < n, \\
n\mu \mathrm{P}_{k+1} + (m-k+1)\lambda P_{k-1} = ((m-k)\lambda + n\mu)\mathrm{P}_k,\ n \le k \le m, \\
\lambda \mathrm{P}_{m-1} = n\mu \mathrm{P}_m,
\end{cases}
$$

由递推关系可求得系统的状态概率为

$$
\mathrm{P}_k = \begin{cases}
C_m^k \rho^k P_0, & 0 \le k < n, \\
\dfrac{C_m^k k! \rho^k}{n! n^{k-n}} P_0, & n \le k \le m,
\end{cases}
$$

当ρ=λ/μ，注意到 $\sum_{n=0}^{m} P_n = 1$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_m^k \rho^k + \sum_{k=n}^{m} \frac{C_m^k k! \rho^k}{n! n^{k-n}}\right)^{-1}$$

2. 闭合式模型(M/M/n/m/m)系统的运行指标

1)平均等待队长:

$$L_q=\sum_{k=n}^{m}(k-n)P_k=\sum_{k=n+1}^{m}(k-n)\frac{C_m^k k!\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$$

2)平均逗留队长:

$$L_s=\sum_{k=0}^{m}kP_k=\sum_{k=0}^{n-1}kP_k+\sum_{k=n}^{m}(k-n)P_k+\sum_{k=n}^{m}nP_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}kP_k+L_q+n(1-\sum_{k=0}^{n-1}P_k)$$

$$=L_q+n-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k$$

3)平均忙着的服务窗数:

$$L_0 = \bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kP_k = L_s - L_q = n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k$$

4)单位时间内平均服务完的顾客数:

$$\bar{\mu} = \mu\bar{k} = \mu n - \mu\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k$$

5)顾客逗留时间:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_0}$$

6)顾客等待时间:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_0}$$

7)系统状态的概率

$$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_m^k\rho^k+\sum_{k=n}^{m}\frac{C_m^k k!\rho^k}{n!n^{k-n}}\right)^{-1}$$

$$P_k=\begin{cases}C_m^k\rho^k P_0, & 0\le k<n,\\ \dfrac{C_m^k k!\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0, & n\le k\le m,\end{cases}$$

其中$\rho=\lambda/\mu$。

§4、排队系统的优化模型

一、一般排队系统的最优化问题

二、平均服务率取连续值时单服务窗M/M/1的最优服务率μ

三、多服务窗M/M/n最优服务台数

一、一般排队系统的最优化问题

1.最优化问题的分类

1)静态最优化(系统设计最优化)，是指在服务系统设置以前根据一定的质量指标，找出参数的最优值，从而使系统设计最经济。例如服务台数，系统容量等。

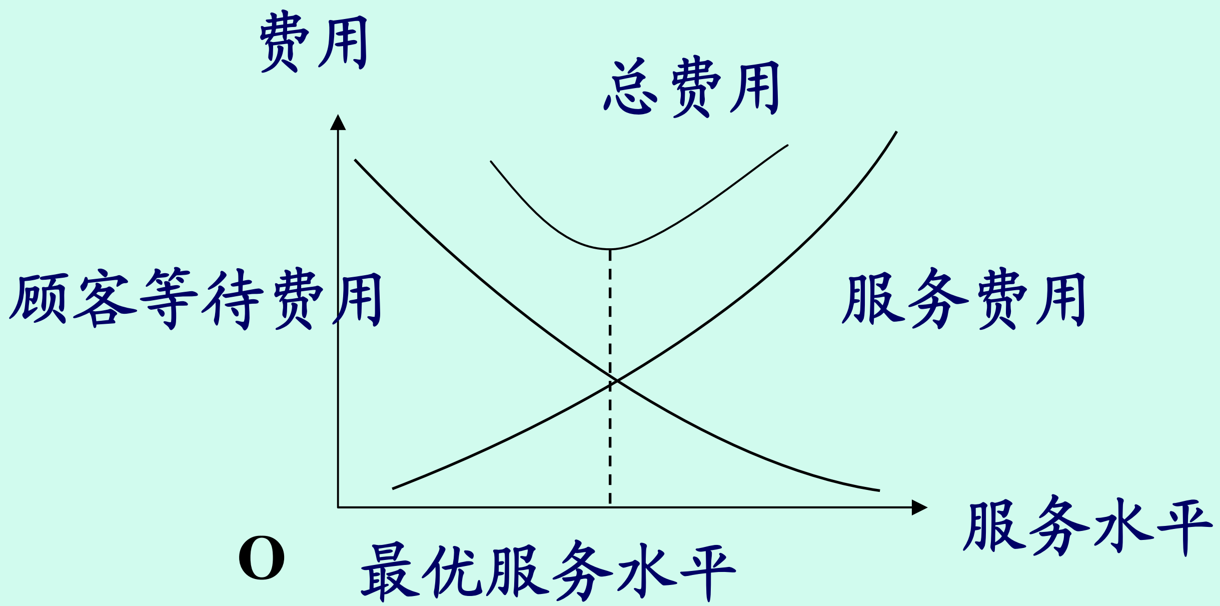
2)动态最优化(系统控制最优化)，是指对已有的排队系统寻求使其某一目标函数达到最优的运营机制。

2.费用模型

排队模型涉及的总费用是指服务机构的服务费用和顾客等待的费用两部分。一般来说，通过服务系统效率(通过服务员素质或增加服务窗)，从而减少顾客等待费用，但会增加服务机构成本。可考虑设计一个排队系统，使服务机构成本与顾客等待费用之和为最小。

服务机构的费用可以估计出来，但顾客等待的费用不易计算。比如交通堵塞，造成车队过长，会产生一定连带影响。

排队系统的总费用示意图



二、平均服务率取连续值时单服务窗 M/M/1的最优服务率μ

1. M/M/1排队模型的最优μ值

设C_1表示μ=1时单位时间服务完一位顾客服务机构的服务费用，C_2为每个顾客在系统中逗留单位时间的费用，于是排队系统在单位时间内的总期望费用

$$Z=C_1\mu+C_2L_s$$

将队长$L_s=\lambda/(\mu-\lambda)$代入上式，得

$$Z=C_1\mu+C_2\lambda/(\mu-\lambda)$$

求其极值，即令dz/dμ=0，则

$$C_1 - \frac{C_2\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = 0$$

解出最优解

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}\lambda}$$

即为最优服务率。

2. M/M/1/m排队模型的最优μ值

如果系统中有m个顾客，则后来的顾客将被拒绝，设P_m为拒绝的概率，1- P_m为接受服务的概率，$\lambda_0=\lambda(1-P_m)$表示单位时间内实际进入服务机构的顾客数，在稳态状态下，单位时间收入的期望值为$\lambda(1-P_m)G$，G表示系统服务完1位顾客能收入的费用，则系统的纯利润为

$$Z=\lambda(1-P_m)G-C_1\mu$$

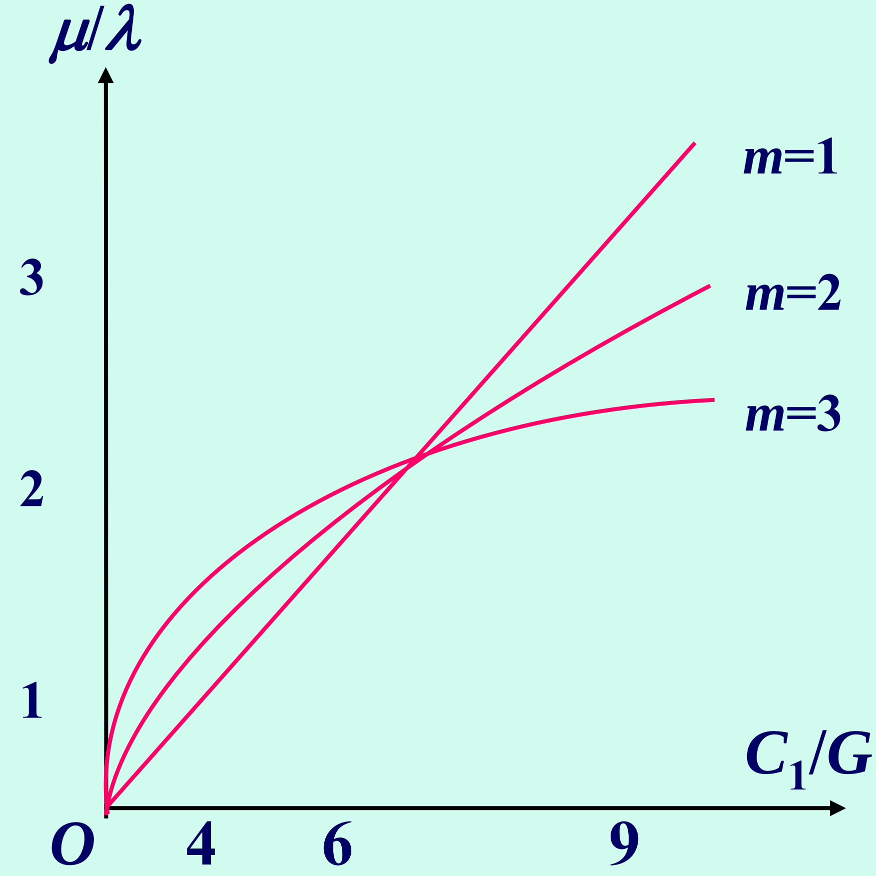
$$Z=\lambda G\frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+1}}-C_1\mu$$

求其极值，即令dz/dμ=0，则

$$\rho^{m+1}\frac{m-(m+1)\rho+\rho^{m+1}}{(1-\rho^{m+1})^2}=\frac{C_1}{G}$$

用数值方法求出μ*的数值解。

或者给定C_1/G，据图形求出μ^*/λ，如图



三、多服务窗M/M/n最优服务台数

设C_1为单位时间内每个服务台的服务成本费用，C_2为每个顾客在服务系统中逗留单位时间的费用，则单位时间内的总费用的期望值

$$Z=C_1 n+C_2 L_s$$

其中$L_s=L_s(n)$，$Z=Z(n)$，记n的最优值为n^*，则$Z^*=Z(n^*)$是最小费用。由于n只能取整数值，故Z(n)是离散函数，利用边际分析法求解:

$$\begin{cases} Z(n^*) \le Z(n^*-1) \\ Z(n^*) \le Z(n^*+1) \end{cases}$$

将$Z=C_1n+C_2L_s$代入并化简得

$$C_2L_s(n^*)+C_1n^* \le C_2L_s(n^*-1)+C_1(n^*-1)$$

$$C_2L_s(n^*)+C_1n^* \le C_2L_s(n^*+1)+C_1(n^*+1)$$

即 $$L_s(n^*)-L_s(n^*+1) \le \frac{C_1}{C_2} \le L_s(n^*-1)-L_s(n^*)$$

对于$n=1, 2, \ldots$，依次计算$L_s(n-1), L_s(n), L_s(n+1)$，即可确定最优值$n^*$。