

文章编号:1005-3085(2003)07-0115-08

# 抢渡长江的数学模型

李祥镇, 何秀珍, 朱荣华

指导老师: 陈雪娟

(集美大学, 福建 厦门 361021)

**编者按:** 本文物理思想清晰, 设定长江两岸间不同的水流速度分布和游泳者速度, 给出了通用的竞渡模型。

离散化数值逼近由编程实现, 模拟计算完备, 得到了最优解。

**摘要:** 选手在“抢渡长江”比赛中如何以最短的时间顺利到达终点建立了一个通用的约束性最优解模型。

考虑一般的情况, 即游泳者的速度  $U$ 、游泳角度  $\theta$ 、水流速度  $V$  的变化规律都未知。用  $y$  表示游泳者离岸边的垂直距离, 把  $U$ 、 $\theta$  均看作关于  $y$  的函数, 分别记作  $U(y)$ 、 $\theta(y)$ 。本文所给出的约束性最优化模型如下:

$$\begin{cases} \min T = \int_0^{1160} \frac{dy}{U \sin \theta} \\ s. t. \int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1000 \end{cases}$$

在模型的求解中, 为了问题的简化, 假设  $U$  一定, 即游泳者始终保持游泳的速度恒定。将江面的宽度作细分, 记每点为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。设在任意的一段  $[y_i, y_{i+1})$  中, 游泳者的角度为  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), 水流速度为沿岸边距离的线性连续函数:  $V_i(y) = p_i y + q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $y \in [y_i, y_{i+1})$ , 其中,  $p_i = \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}$ ,  $q_i = V(y_i) - y_i \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}$ 。

模型的求解方法可以采用拉格朗日条件极值的求解方法和二分法来求解。本文中我们利用 VC++ 编程实现。而且, 对江面宽度所作的细分  $y_1, y_2, \dots, y_n$  将大大影响到模型的最优解。当  $n$  取值越大时, 即剖分越细时, 模型得到的结果越优。对于问题 4 中描述的水流速度连续变化的条件下, 我们得到具体的结果如下

对江面划分的段数 $n$	最短时间 $T(sec)$	对江面划分的段数 $n$	最短时间 $T(sec)$	对江面划分的段数 $n$	最短时间 $T(sec)$
3	891.4781	9	883.2587	1160	881.6862

**关键词:** 运动的分解; 拉格朗日条件极值; 最优问题

**分类号:** AMS(2000)

**中图分类号:**

**文献标识码:** A

## 1 问题的重述(略)

## 2 基本假设

a 选手在抢渡过程中的状态保持良好。

c: 把选手看成一个质点。

b 不考虑当天的天气状况对选手成绩的影响。 d: 假设竞渡区域两岸平行。

e 游泳者的绝对速度 = 游泳者自身的游泳速度  $v_1$  + 水流速度  $v_2$ 。

### 3 符号说明

$U$	游泳者的速度大小	$\theta$	游泳者速度方向与水流方向的夹角
$V$	长江水流的速度大小	$H$	两岸之间的垂直距离
$L$	起点正对岸到终点的水平距离	$U_x$	游泳者速度在水流方向上的分量
$U_y$	游泳者速度在两岸垂直方向上的分量	$T$	游泳者游到终点总共所用的时间
$y$	在垂直两岸的方向上距离起点的距离		

### 4 问题的分析和模型的准备

这是一道依据物体运动的合成与分解求最优解的问题。

**问题 1** 在假设成立的前提下, 由于  $U$ 、 $\theta$ 、 $V$  三者在游泳过程中时刻保持不变, 因此质点在水平方向上和竖直方向上都做匀速直线运动。根据运动的合成: 质点的合运动也是匀速直线运动。由于第一名游泳者顺利到达了终点, 所以 2002 年比赛的起点和终点都是他运动轨迹上的点。综合匀速直线运动和运动轨迹上的点便可求解此题。

**问题 2** 在问题 1 的假设下, 游泳者始终以和岸边垂直的方向游泳, 这时  $\theta = \pi/2$ 。因此游泳者能否顺利到达终点取决于  $U = 1.5$  米/秒,  $\theta = \pi/2$  是否为问题 1 几个等式的公共解。1934 年和 2002 年能游到终点的人数百分比有很大差别的一个重要原因是: 1934 年和 2002 年的终点不同。由于终点位置的不同引起了水平方向位移的不同。因此, 如果参赛者仍然按照 1934 年的参赛者的路线必然到不了终点。假设参赛者在不同比赛中的速度变化不是很大, 则影响参赛者能否顺利到达终点的关键因素是参赛者选择的游泳方向(即  $\theta$  的大小)。

**问题 3 和 4** 当问题 1 中的假设不成立时, 游泳者在整个竞渡过程中做变速运动。又由于  $U$ 、 $\theta$ 、 $V$  三个变量在整个过程中变化的规律是否保持一致是未知的, 可以把游泳者在竖直方向上的运动划分为  $n$  段, 各个分段点的离岸位移依次  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。假定每一小段上  $U$ 、 $\theta$ 、 $V$  三者与  $y$  的函数关系保持不变。再根据定理: 作直线运动的质点在任意时刻的瞬时速度都等于位移对时间的一阶导。推广到整个范围, 便可得到一个以总时间  $T$  为函数值的函数等式。再以水平方向上的运动为约束条件, 问题 3 和问题 4 就可根据一个目标函数最优解的模型求解。

### 5 模型的建立与模型的求解

首先建立一个直角坐标系: 以起点为原点, 水流方向为  $x$  轴正方向, 起点垂直到对岸的方向为  $y$  轴正方向。

**问题 1** 根据假设的条件和问题的分析, 可得到下列等式:

在水平方向上质点的运动满足

$$L = (1.89 + U_x) \times T \quad (1)$$

在竖直方向上质点的运动满足

$$H = U_y \times T \quad (2)$$

根据速度的正交分解可得:

$$U_x = U \times \cos\theta \quad (3)$$

$$U_y = U \times \sin\theta \quad (4)$$

1. 对于 2002 年在竞渡过程中第一名到达终点的游泳者而言:  $T = 848$  秒

把③④分别代入①②得:  $L = (1.89 + U \times \cos\theta) \times 848$   $H = U \times \sin\theta \times 848$

利用 MATLAB 求解, 得出:  $U = 1.5416$  米/秒  $\theta = 117.4558$  度

2. 当  $T$  不确定时, 联立(1)~(4)式可得

$$\frac{L}{H} = \frac{1.89 + U \times \cos\theta}{U \times \sin\theta} = \frac{1000}{1160}$$

由已知条件可得:  $U \times (\sin\theta - 1.16 \times \cos\theta) = 2.1924$  ( $\theta \in (0, \pi)$ )

因此, 由  $U > 0$  可知:  $\sin\theta - 1.16 \times \cos\theta > 0 \Rightarrow \tan\theta > 1.16 \Rightarrow \theta > 0.859337$  弧度

同时, 对于  $U, \theta$  满足的  $\frac{L}{H} = \frac{1.89 + U \times \cos\theta}{U \times \sin\theta}$  函数关系利用 MATLAB 画出它们的关系, 如图 1 所示。

3. 已知速度  $U = 1.5$  米/秒

由方程①②③④得:  $L = (1.89 + 1.5 \times \cos\theta) \times T$ ,  $H = 1.5 \times \sin\theta \times T$

得到两组解:  $\theta_1 = 121.8548$  度  $T_1 = 910.5$  秒;  $\theta_2 = 156.6179$  度  $T_2 = 1948.6$  秒

因此, 游泳者有两种选择。但  $T_2$  与  $T_1$  的差为 1038.1 秒。因此游泳者应选择  $\theta = 121.8548$  度。

**问题 2** 1. 依据前面的分析可知, 问题 1 和问题 2 的模型是一致的, 此时  $\theta = \pi/2$ 。当  $\theta = \pi/2$  时,  $\sin\theta = 1, \cos\theta = 0$ , 把它们代入问题 1 中所建立的模型求得  $U = 2.1924$  米/秒,  $T = 529.1$  秒。所以只有当游泳者的速度达到 2.1924 米/秒才能到达终点。当  $U = 1.5$  米/秒时, 依据  $1160 = 1.5 \times T$ , 解得  $T = 773.3333$  秒。当  $T = 773.3333$  秒时, 游泳者在水流方向上游动的距离等于  $1.89 \times T = 1461.6$  米  $> 1000$  米。因此当  $U = 1.5$  米/秒时, 若游泳者垂直于河岸游, 不可能到达终点。

2. 在横渡比赛中, 由于沿着水流方向上的位移是固定的, 选手们往往觉得越顺着水流方向的前进, 所用的时间会越短。但选手忽略了一个重要因素: 竖直方向上的位移也是确定的。在越顺着水流方向游时, 并不代表就能在最短时间内到达对岸。由前面问题 1 中 2. 的模型求得: 当  $L = 1000$  米时,  $\theta$  必须在  $(0.859337, \pi)$  的范围内, 游泳者才能顺利地到达对岸。所以由于路线选择的错误, 很多选手 (特别是业余选手) 被冲到下游。而 1934 年  $\theta$  在  $(0.234133266, \pi)$  范围内, 很明显 1934 年  $\theta$  的范围比 2002 年  $\theta$  的范围大了很多。(如图 2 所示)

进一步推广到任意的  $L$ , 选手要顺利到达终点满足的等式是相同的

$$\frac{L}{H} = \frac{1.89 + U \times \cos\theta}{U \times \sin\theta}$$

考虑一般的情况, 即  $U, \theta, V$  的变化规律都未知。把  $U, \theta$  均看作关于  $y$  的函数分别记作  $U(y), \theta(y)$ , 但在整个竞渡过程中游泳者的平均速度是由其自身的素质决定的。同时, 游泳者由于受自身素质的限制, 游泳者的速度总不会超过其所能达到的最大游泳速度。设  $\bar{U}$  为游泳者的平均速度,  $M$  为游泳者所能达到的最大速度。因此, 对于关于  $y$  的函数  $U$  和  $\theta$ , 它们有如下的限制条件:

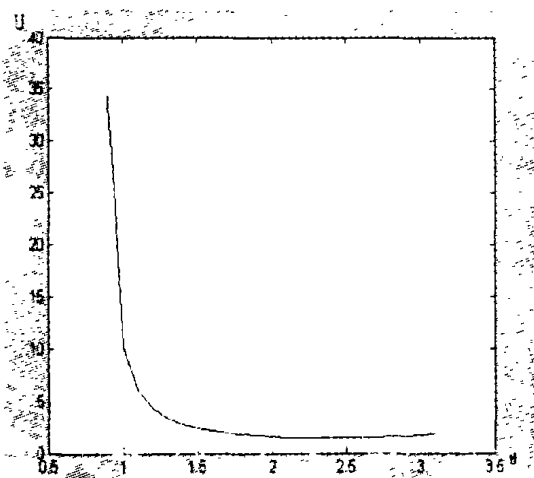


图 1

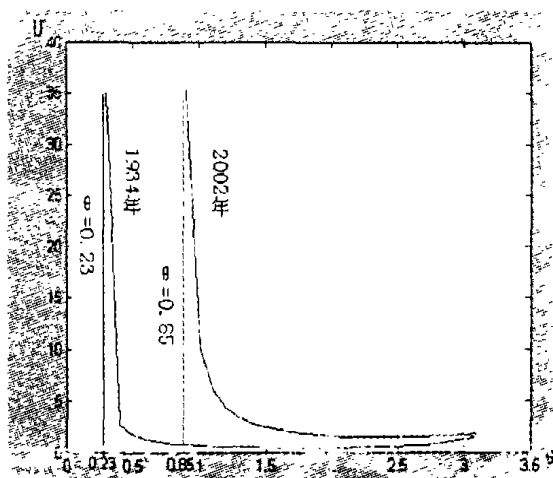


图 2

$$\textcircled{1} \frac{\int_0^{1160} U(y) dy}{1160} = \bar{U} \quad \textcircled{2} \max_{y \in [0, 1160]} U(y) \leq M \quad \textcircled{3} \theta(y) \in (0, \pi)$$

根据微分的性质有:  $dy = U \sin \theta dt \Rightarrow dt = \frac{dy}{U \sin \theta} \Rightarrow \int_0^T dt = \int_0^{1160} \frac{dy}{U \sin \theta}$

因此, 模型的目标函数, 即游泳者所花的总的时间为:  $T = \int_0^{1160} \frac{dy}{U \sin \theta}$

在游泳者游到对岸时, 水平方向上的位移达到  $L$ 。于是有约束条件

$$\int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1000$$

所以, 该问题可以归结为求解具有约束性最优化模型

$$\begin{cases} \min T = \int_0^{1160} \frac{dy}{U \sin \theta} \\ s. t. \int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1000 \end{cases}$$

为了问题的简化, 假如  $U$  一定, 即游泳者始终保持游泳的速度恒定。将江面的宽度作细分, 记每点为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。设在任意的一段  $[y_i, y_{i+1})$  中, 游泳者的角度为  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , 流速为沿离岸边距离的线性连续函数

$$V_i(y) = p_i y + q_i (i = 1, 2, \dots, n-1), y \in [y_i, y_{i+1})$$

$$\text{其中 } p_i = \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}, q_i = V(y_i) - y_i \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}$$

则可以将约束条件转换为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{V_i(y) + U \cos \theta_i}{U \sin \theta_i} dy = 1000 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{p_i}{2}(y_{i+1}^2 - y_i^2) + q_i(y_{i+1} - y_i) + U \cos \theta_i(y_{i+1} - y_i)}{U \sin \theta_i} = 1000$$

$$\text{令 } g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{p_i}{2}(y_{i+1}^2 - y_i^2) + q_i(y_{i+1} - y_i) + U \cos \theta_i(y_{i+1} - y_i)}{U \sin \theta_i} - 1000$$

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{U \sin \theta_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{U \sin \theta_i}$$

所以该模型转化为

$$\begin{cases} g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \\ \min f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \end{cases}$$

根据拉格朗日条件极值的求法, 定义拉格朗日函数  $L = f + l \cdot g$ ,  $l$  为常数。

使得  $f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  取到最小值的必要条件是:  $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$

这样就得到  $(n-1)$  个关于  $\theta_i$  的函数:  $\cos \theta_i = \frac{-l \cdot U}{1 + l[\frac{p_i}{2}(y_{i+1} + y_i) + q_i]}$  进而可以求

出  $\sin \theta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  关于  $l$  的表达式。

这个求解过程, 可以利用二分法或其它方法计算。在此我们利用 VC++ 编程实现。由于是求解一元方程, 所以当  $n$  取有限大时, 都可以保证其计算量和计算时间。且当  $n$  取值越大时, 说明考虑的情况越多,  $T$  的值越会接近最优。

下面就可以利用这个模型分别解决了问题 3 和问题 4。

**问题 3** (1) 假设  $U$  是常量,  $\theta$  在整个过程中保持不变。这时原方程组只有一个解, 不存在最优解的问题。由约束条件:

$$\int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1000 \Rightarrow 1160 U \cdot \cos \theta - 1000 U \cdot \sin \theta + 2191.6 = 0$$

所以当  $U = 1.5$  米/秒时, 算出  $\theta = 121.7882$  度,  $T = 909.8$  秒

(2) 假设  $U$  为常量,  $n = 4$

$$\text{约束条件: } \int_0^{1160} \frac{V(y) + U \sin \theta}{U \sin \theta} dy = 1000$$

此时,  $y_1 = 0, y_2 = 200, y_3 = 960, y_4 = 1160$   $p_1 = p_2 = p_3 = 0, q_1 = 1.47, q_2 = 2.11, q_3 = 1.47$

模型为

$$\begin{cases} g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{V_i + U \cos \theta_i}{U \sin \theta_i} dy - 1000 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_i + U \cos \theta_i}{U \sin \theta_i} (y_{i+1} - y_i) - 1000 = 0 \\ \min f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{U \sin \theta_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{U \sin \theta_i} \end{cases}$$

根据前面一般模型的解法, 可以求得:  $\cos \theta_i = \frac{-l \cdot U}{l \cdot V_i + 1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , 进而求得最优时间  $T$ 。

当  $U = 1.5$  米/秒,  $n = 4$  时通过运行程序 (源程序见附录 Prog 1.c) 求得的最优值为:

$\theta_1 = 126.051268$  度,  $\theta_2 = 118.059889$  度,  $\theta_3 = 126.051268$  度,  $T = 903.987610$  秒

这说明游泳者在前 200 米的游泳方向是  $\theta_1$ , 中间 760 米是  $\theta_2$ , 后面 200 米是  $\theta_3$ 。所花的时间是 903.987610 秒。

**问题 4** 也是模型的一个应用。与问题 3 一样, 分两种情况讨论:

(1) 假设  $U$  为常量,  $\theta$  在竞渡过程中保持不变, 依据方程组可以求出唯一的解。

$$\int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1000 \quad \text{把 } V(y) \text{ 代入到上式约束条件中得到:}$$

当  $U = 1.5$  米/秒时, 求出  $\theta = 121.5568$  度,  $T = 904.097229$  秒

(2) 假设  $U$  为常量, 江面的宽度划分为  $n - 1$  段, 每段上角度看作保持不变。

①首先, 取  $n = 4$  的方案。

$$y_1 = 0, y_2 = 200, y_3 = 960, y_4 = 1160 \quad \begin{cases} p_1 = \frac{2.28}{200} \\ q_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = 0 \\ q_2 = 2.28 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = -\frac{2.28}{200} \\ q_3 = \frac{2.28 \times 1160}{200} \end{cases}$$

$$\text{模型为} \quad \min \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{U \sin \theta_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{U \sin \theta_i}$$

约束条件

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{V(y) + U \cos \theta_i}{U \sin \theta_i} dy = 1000$$

$$\text{利用一般模型的解有: } \cos \theta_i = \frac{-l \cdot U}{1 + l \left[ \frac{p_i}{2} (y_{i+1} + y_i) + q_i \right]} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

令  $U = 1.5$  米/秒, 通过调用程序 (源程序见附录 Prog 2. c) 解得:

$\theta_1$	127. 36192	T	892. 4781
$\theta_2$	114. 538623		单位: (秒)
$\theta_3$	127. 361936		

②进一步, 取  $n = 10$  的方案。此时,  $y_1 = 0, y_2 = 66, y_3 = 132, y_4 = 200, y_5 = 400, y_6 = 640, y_7 = 960, y_8 = 1026, y_9 = 1083, y_{10} = 1160$

$$\begin{cases} p_{1,2,3} = \frac{2.28}{200} \\ q_{1,2,3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{4,5,6} = 0 \\ q_{4,5,6} = 2.28 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{7,8,9} = -\frac{2.28}{200} \\ q_{7,8,9} = \frac{2.28 \times 1160}{200} \end{cases}$$

则, 可以运行程序 (源程序见附录 Prog 3. c) 求解得到:

$\theta_1$	137. 850940	$\theta_7$	114. 988766
$\theta_2$	122. 712537	$\theta_8$	121. 76065
$\theta_3$	115. 074804	$\theta_9$	135. 981494
$\theta_4$	112. 455848	T	883. 2587
$\theta_5$	112. 455848		单位: (秒)
$\theta_6$	112. 455848		

③进行更细的划分, 取  $n = 1161$  (即江面被划分为 1160 段)。使用程序 Prog 4. c 求解。

此时,  $y_i = i - 1$ 。则可以将游泳者游泳的角度与离开岸边距离的关系如图 4 所示。从以上两种情况可以看出方案②比方案①, 游泳者所花的时间更少。

游泳者在这两种情况下的游泳轨迹如图 3 所示:

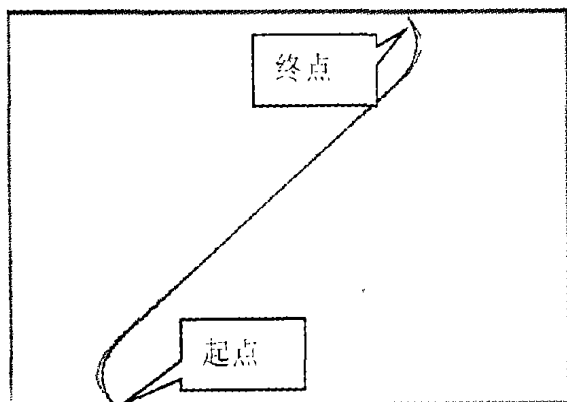
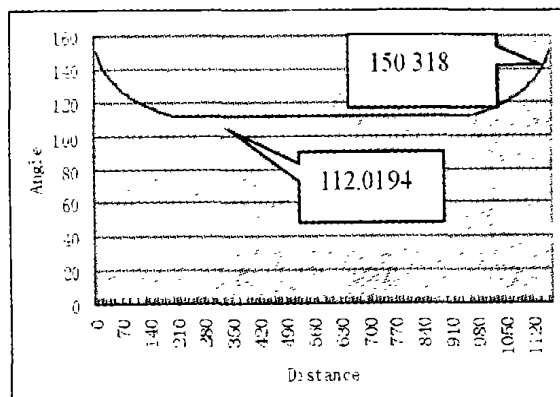


图3 图中更加弯曲的那条曲线是方案②的游泳路线

图4 总时间  $T = 881.6862$  单位: (秒)

## 6 竞渡策略短文

从古至今, 策略无论是在人们的日常生活中还是在经济生活中都占据着举足轻重的地位。好的策略是成功的开始。俗话说: “知己知彼, 百战不殆”。一个好的策略来源于对环境的充分了解, 对一名渡江选手来说也不例外。因此, 要实现成功的渡江, 选手首先必须要做的事是: 知己 = 了解自身的游泳速度, 知彼 = 明确当天比赛时水流的速度 + 比赛全程。面对着不同的水流速度和比赛路线, 并受自身游泳速度大小的限制, 选手应及时调整游泳的方向。

一个选手要获得最好的成绩就是要在最短时间内恰好到达终点。首先, 选手必须根据自身特定的速度, 求出游泳区域的宽度与自身游泳速度的比值和水平方向上的距离与水流速度比值。如果前者的比值大于后者, 选手只能选择逆流, 否则选手将会被水流冲到终点的下游。接着, 选手在确定了顺游还是逆流之后, 选手的速度越大, 选手应越偏离水流方向前进。而且这样的偏离方向必须大于一个特定的值。这个特定值的大小因水流方向上距离的变化而改变, 且随着距离的增大这个特定值会减小。

## 7 模型的优缺点

我们从问题的出发, 分析了应该考虑的各种情况, 建立了一般的数学模型, 并进行理论论证和实例验证。从而证明, 我们建立的数学模型能较好地解决问题。

此模型的优点在于模型极为广泛的使用性, 它建立的前提条件对  $U$ 、 $V$ 、 $\theta$  三者没有任何的约束。对每一个具体的情况, 都可以在模型中求解出来。

同时, 模型也存在着一些缺点。主要体现在: ①对整个竞渡阶段的细分是由人为因素决定的, 不同的划分会得到不同的最优解, 因此就会产生误差问题。②在论文中, 求解都是在假设  $U$  不变的情形下进行的。若  $U$  在竞渡过程中时刻改变, 且为离岸垂直距离  $y$  的函数, 模型的求解将会变得很复杂, 需重新编程求解。

## 8 模型的推广

我们建立模型的方法和思想对其它类似的问题也很适用, 本文所建立的模型不但能指导竞渡者在竞渡比赛中如何以最短的时间游到终点, 对其它一些水上的竞赛也具有参考意

义。例如：皮划艇比赛和飞机降落的分析等问题。此外还能对一些远洋航行的船只的路线规划问题给予指导，使船只能在最短的时间内到达目的地。

### 参考文献：

- [1] 王沫然. MATLAB6. 0 与科学计算 [M]. 北京：电子工业出版社，2001
- [2] 薛嘉庆. 最优化原理与方法 [M]. 东北：冶金工业出版社，1991
- [3] 陈传璋，金福临，朱学炎，欧阳光中. 数学分析 [M]. 北京：高等教育出版社，1990
- [4] 谭浩强. C 语言程序设计 [M]. 北京：清华大学出版社，1999

## Mathematical Model of Swimming Across the ChangJiang River

LI Xiang-zhen, HE Xiu-zhen, ZHU Rong-hua

Advisor: CHEN Xue-juan

(Jimei University Xiamen China 361021)

**Abstract:** This paper establishes a common mathematical model which Provides a strategy to swim across the river in the shortest time. The model divides the river into several segments and set the consumed time in swimming as a target function. The restriction is that: the distance in the horizontal direction should be the horizontal distance between the jumping - off point and the destination.

For the most common situation, denote  $U$  as the velocity of the swimmer,  $\theta$  as the angle of the swimmer's direction against the bank and  $V$  as the velocity of the stream. Denote  $y$  as the vertical distance between the swimmer and the bank, and take  $U, \theta$  as the function of  $y$  and denoted as  $U(y)$  and  $\theta(y)$ . All the above could be sum-

marized as:

$$\begin{cases} \min T = \int_0^{1160} \frac{dy}{U \sin \theta} \\ s. t. \int_0^{1160} \frac{V(y) + U \cos \theta}{U \sin \theta} dy = 1100 \end{cases}$$

In resolving the problem this paper assumes that  $U$  be invariable, which means the swimmer would swim with the same velocity throughout the competition. The width of the river is divided into little segments. Denote every dividing nodes as  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , and in every segment  $[y_i, y_{i+1}]$ : the angle of the swimmer is  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , the velocity could be expressed as:  $V_i(y) = p_i y + q_i (i = 1, 2, \dots, n-1), y \in [y_i, y_{i+1})$

$$\text{where } p_i = \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}, q_i = V(y_i) - y_i \frac{V(y_{i+1}) - V(y_i)}{y_{i+1} - y_i}$$

Lagrange conditional extremum theory and dichotomy are used to solve the above problem. VC++ is also used in realizing the method. What's more the division  $y_1, y_2, \dots, y_n$  will highly affect the final result, the more segments are divided the better result could be get. Under the assumption of question No. 4 this paper gets the following results:

The number of the segments: n	Best time: T(sec)	The number of the segments: n	Best time: T(sec)	The number of the segments: n	Best time: T(sec)
3	891.4781	9	883.2587	1160	881.6862

**Keywords:** decomposition of movement; Lagrange conditional extremum theory; optimization