

## 第二节 引例：蒲丰投针问题

在用传统方法难以解决的问题中，有很大一部分可以用概率模型进行描述。由于这类模型含有不确定的随机因素，分析起来通常比确定性的模型困难。有的模型难以作定量分析，得不到解析的结果，或者是虽有解析结果，但计算代价太大以至不能使用。在这种情况下，可以考虑采用 Monte Carlo 方法。下面通过例子简单介绍 Monte Carlo 方法的基本思想。

Monte Carlo 方法是计算机模拟的基础，它的名字来源于世界著名的赌城——摩纳哥的蒙特卡洛，其历史起源于 1777 年法国科学家蒲丰提出的一种计算圆周  $\pi$  的方法——随机投针法，即著名的蒲丰投针问题。

1)

Monte Carlo 方法的基本思想是首先建立一个概率模型，使所求问题的解正好是该模型的参数或其他有关的特征量。然后通过模拟一统计试验，即多次随机抽样试验（确定  $m$  和  $n$ ），统计出某事件发生的百分比。只要试验次数很大，该百分比便近似于事件发生的概率。这实际上就是概率的统计定义。利用建立的概率模型，求出要估计的参数。蒙特卡洛方法属于试验数学的一个分支。

### MATLAB 语言编程实现

```
l=1;
n=1000;
d=2;
m=0;
for k=1: n
    x=unifrnd (0, d / 2);
    p=unifrnd (0, pi);
    if    x < 0.5 * l * sin(y)
        m=m+1
    else
    end
end
p=m/n
pi_m=1/p
运行，即得结果。
```

蒙特卡洛方法适用范围很广泛，它既能求解确定性的问题，也能求解随机性的问题以及科学研究中的理论问题。例如利用蒙特卡洛方法可以近似地计算定积分，即产生数值积分问题。

### 任意曲边梯形面积的近似计算

一个古老的问题：用一堆石头测量一个水塘的面积。应该怎样做呢？测量方法如下：假定水塘位于一块面积已知的矩形农田之中。如图 8.2 所示。随机地向这块农田扔石头使得它们都落在农田内。被扔到农田中的石头可能溅上了水，也可能没有溅上水，估计被“溅上水的”石头量占总的石头量的百分比。试想如何利用这估计的百分比去近似计算该水塘面积？

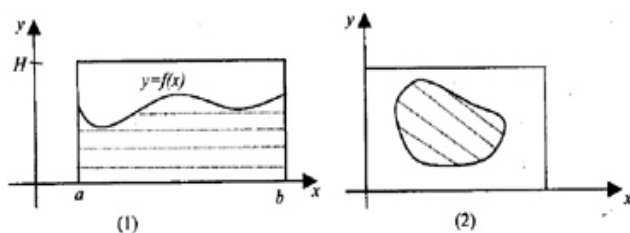


图 8.2 一块矩形下的水塘

结合图 8. 2 中的图形(1)分析, 只要已知各种参数及函数 ( $a, b, H, f(x)$ ), 有以下两种方法可近似计算水塘面积.

### 1. 随机投点法

- 1) 赋初值: 试验次数  $n=0$ , 成功次数  $m=0$ ; 规定投点试验的总次数  $N$ ;
- 2) 随机选择  $m$  个数对  $x_i, y_i, 1 \leq i \leq m$ , 其中  $a < x_i < b, 0 < y_i < H$ , 置  $n=n+1$ ;
- 3) 判断  $n \leq N$ , 若是, 转 4, 否则停止计算;
- 4) 判断条件  $y_i < f(x_i)$  (表示一块溅水的石头)是否成立, 若成立则置  $m=m+1$ , 转 2, 否则转 2;
- 5) 计算水塘面积的近似值  $S = H \times (b-a) \times m / N$ .

### 2. 平均值估计法

- 1) 产生  $[a,b]$  区间的均匀随机数  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) 计算  $f(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ ;

3) 计算 
$$S = \frac{(b-a)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)。$$

该方法的特点是估计函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上的平均值, 面积近似等于该平均值乘以  $(b-a)$ .