第20卷 第5期
2003年03月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 20 No. 5
Mar. 2003

文章编号：1005-3085（2003）05-0130-04

赛程安排中的数学问题

姜启源
（清华大学，北京 100084）

摘 要：本文结合论文评阅中发现的问题，对赛程安排这道题目给出了一般性结果，并提出可进一步研究的问题。

关键词：赛程安排；每两场比赛间相隔场次数
分类号：AMS（2000）68M20　　**中图分类号**：O226　　**文献标识码**：A

许多体育比赛都要安排比赛日程，抛开宣传、商业等方面的考虑，对各参赛队的公平性应该成为赛程安排是否妥当最重要的标准之一，这道赛题的目的是讨论最简单的一种比赛——单循环赛——的赛程安排问题。

赛题从5支球队的赛程安排出发，要求各队每两场比赛中间至少相隔一场，用多种方法（甚至凑的方法）都能给出一个达到要求的赛程，表1就是一种。可以发现，尽管用不同方法排出的赛程（表1左部）不尽相同，但是每两场比赛间相隔场次数及总相隔场次数（表1中、右部）是一样的（不计ABCDE的次序）。这就是说，每两场比赛最小相隔场次的上界是1，最大相隔场次的下界是2，总相隔场次数最小是1》3 = 3，最大是2》3 = 6，下面将会看到，这种性质可以推广到任意奇数支球队。

表1

	A	B	C	D	E	每两场比赛间相隔场次数	总相隔场次数
A	X	1	6	9	3	1，2，2	5
B	1	X	4	7	10	2，2，2	6
C	6	4	X	2	8	1，1，1	3
D	9	7	2	X	5	2，1，1	4
E	3	10	8	5	X	1，2，1	4

1　n 支球队赛程安排的一般结果

题目中2)问的是“各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少”，这一问法稍有含混，确切的提法应为“各队每两场比赛最小相隔场次的上界”，如5支球队赛程安排（表1）中的1。实际上题目中1)是为2)作铺垫的，上下联系起来，应该有正确的理解。

记各队每两场比赛最小相隔场次为 r，用多种方法可以证明 r 的上界是 $[\frac{n-3}{2}]$（[❷]表示取整数部分），评阅中看到的最简单的一种证明是(不分 n 的奇偶)

设赛程中某场比赛是 i，j 两队，i,队参加的下一场比赛是 i，k 两队（$k \neq j$），要使各队

每两场比赛最小相隔场次为 r，则上述两场比赛之间必须有除 i, j, k 以外的 $2r$ 支球队参赛，于是 $n \geq 2r+3$，注意到 r 为整数即得 $r \leq [\frac{n-3}{2}]$。

证明这个上界可以达到的办法是构造性的，即对任意的 n 编排出达到该上界的赛程。虽然题目只要求给出 $n = 8,9$ 的情况，但是确有一些参赛队对任意的 n 作出了或繁或简的编制方案，按照他们的办法确实可以达到这个上界。本刊发表的两篇优秀论文都给出了比较简便的方法，两队对于 n 为偶数时的方法基本上是一样的，对于 n 为奇数时则有所差别。读者可以查阅这两篇文章，这里就不再对赛程的编排方法进行讨论。

如果考察一下 $n = 8,9$ 时的具体结果，会发现一些似乎有规律的现象

$n = 8$ 时最小相隔场次数的上限为 2，$n = 9$ 时最小相隔场次数的上限为 3，按照上述两篇优秀论文的方法可以分别得到如表 2、表 3 的结果（许多参赛队都得到类似的结果，只是可能与表 2、表 3 的左部不尽相同）。

表 2

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	每两场比赛相隔场次数	相隔场次总数
A_1	⑨	1	5	9	13	17	21	25	3, 3, 3, 3, 3, 3	18
A_2	1	⑨	20	6	23	11	26	16	4, 4, 4, 3, 2, 2	19
A_3	5	20	⑨	24	10	27	15	2	2, 4, 4, 4, 3, 2	19
A_4	9	6	24	⑨	28	24	3	19	2, 2, 4, 4, 4, 3	19
A_5	13	23	10	28	⑨	4	18	7	2, 2, 2, 4, 4, 4	18
A_6	17	11	27	14	4	⑨	8	22	3, 2, 2, 2, 4, 4	17
A_7	21	26	15	3	18	8	⑨	12	4, 3, 2, 2, 2, 4	17
A_8	25	16	2	19	7	22	12	⑨	4, 4, 3, 2, 2, 2	17

表 3

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	每两场比赛相隔场次数	相隔场次总数
A_1	⑨	36	6	31	11	26	16	21	1	4, 4, 4, 4, 4, 4,4	28
A_2	36	⑨	2	27	7	22	12	17	32	4, 4, 4, 4, 4, 4,3	27
A_3	6	2	⑨	35	15	30	20	25	10	3, 3, 4, 4, 4, 4,4	26
A_4	31	27	35	⑨	3	18	8	13	23	4, 4, 4, 4, 3, 3,3	25
A_5	11	7	15	3	⑨	34	24	29	19	3, 3, 3, 3, 4, 4,4	24
A_6	26	22	30	18	34	⑨	4	9	14	4, 4, 3, 3, 3, 3,3	23
A_7	16	12	20	8	24	4	⑨	33	28	3, 3, 3, 3, 3, 3,4	22
A_8	21	17	25	13	29	9	33	⑨	5	3, 3, 3, 3, 3, 3,3	21
A_9	1	32	10	23	19	14	28	5	⑨	3, 4, 3, 4, 3, 4,3	24

从表 2、表 3 的中部可以看到，$n = 8$ 时每两场比赛相隔场次数只有 2,3,4，$n = 9$ 时每两场比赛相隔场次数只有 3,4，按照上述两篇优秀论文的方法，以上结果可以推广，n 为偶数时每两场比赛相隔场次数只有 $\frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}$，$n$ 为奇数时只有 $\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}$。

2 衡量赛程优劣的其它指标

除了"各队每两场比赛最小相隔场次的上界"这一指标外，还可以用一些指标来衡量赛程的优劣，如

1) 平均相隔场次

记第 i 队第 j 个间隔场次数为 c_{ij}，$i = 1,2,\cdots,n$，$j = 1,2,\cdots,n-2$，则平均相隔场次为

$$\bar{r} = \frac{1}{n(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}c_{ij} \tag{1}$$

$\bar{r}$ 是赛程整体意义下的指标，它越大越好。而(1)式右端的求和就是表2、表3最后一列之和。

检查 $n = 8$ 的赛程(表2)得 $\bar{r} = 3$；检查 $n = 9$ 的赛程(表3)，得 $\bar{r} = 220/63 = 3.49$。

实际上，可以得到 $\bar{r}$ 的上界为

$$\bar{r}_{\max} = \begin{cases} k - \dfrac{2k^2}{4k^2-1}, & n = 2k+1 \\ k-1, & n = 2k \end{cases} \tag{2}$$

上述结果表明，表2、表3给出的赛程都已达到了这个上界。

2) 相隔场次的最大偏差

赛程中各队每两场比赛相隔场次的“均匀性”可由 c_{ij} 与 $\bar{r}$ 的偏差来度量，定义

$$f = \max_{i,j} | c_{ij} - \bar{r} | \tag{3}$$

$$g = \max_{i} | \sum_{j=1}^{n-2} c_{ij} - (n-2)\bar{r} | \tag{4}$$

f 为整个赛程相隔场次的最大偏差，g 为球队之间相隔场次的最大偏差，它们都是越小越好。

检查 $n = 8$ 的赛程(表2)得 $f = 1$，$g = 1$；检查 $n = 9$ 的赛程(表3)，得 $f = 0.5$，$g = 5.5$。

实际上，可以得到 f 的下界为

$$f_{\min} = \begin{cases} \dfrac{2k^2}{4k^2-1}, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 2k \end{cases} \tag{5}$$

及 $n = 2k$ 时 g 的下界为

$$g_{\min} = 1 \tag{6}$$

上述结果表明，表2给出的赛程达到了 f 和 g 下界，表3给出的赛程也达到了 f 的下界。

3 若干问题

评阅中发现的问题之一是对“各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限”的理解和确定。事实上，只要把握住这道题的目的是要编排对各队尽量公平的赛程，再加上对5支球队赛程的分析，就应该有正确的理解。有的参赛队把它理解为“各队每两场比赛最大相隔场次的下界”，如5支球队赛程安排(表1)中的2，这样虽有误解，但是只要以下正确地按照这个理解去作，赛程安排自然会达到“各队每两场比赛最小相隔场次的上界”，评阅中考虑到了这一点。

有些队没有得到或者没有能够证明最小相隔场次的上界是 $[\frac{n-3}{2}]$，这样编出的 $n = 8$ 和 $n = 9$ 的赛程一般不会好，即 $n = 8$ 时最小相隔场次小于2，$n = 9$ 时最小相隔场次小于3。

对于那些既给出了“最小相隔场次上界”的正确的证明(当然方法有繁有简)，也编排出达到题目要求的 $n = 8$ 和 $n = 9$ 的赛程的论文，评阅中将更高的奖项给了在以下几方面作得较好的队

1) $n = 8$ 的赛程中各队每两场比赛相隔场次数只有2,3,4，$n = 9$ 的赛程中各队每两场

比赛相隔场次数只有 3,4;

2) 赛程的编制方法能够推广到任意数 n 的情况;

3) 对衡量赛程优劣的其它指标的讨论比较充分。

顺便指出,其它指标的讨论是开放性的,只要能合理地衡量赛程的优劣就行,如有的队用 $d = \frac{1}{n(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|c_{ij}-\bar{c}_i|}{\bar{c}_i}$(其中 $\bar{c}_i$ 为 c_{ij} 的平均值)表示平均相对离差,d 越小越好;有的队考虑到比赛场次靠后的队比场次靠前的队获得的信息要多,于是引入所谓平均信息度 $f = \frac{\max\limits_i(SA_i) - \max\limits_i(SA_i)}{n}$(其中 $SA_i = \sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}$, a_{ij} 为 i 队的第 j 场比赛),f 越小,各队获得的信息越接近。当然,如果能得到所定义指标的最优值,从而可以衡量你编排的方案是否达到了这个最优值(正如本文(1)(6)作的那样),就更好了。

这个题目涉及的是单循环赛,并且只有一块场地(或同时只能举行一场比赛),比较简单,复杂一些的情况有:单循环赛,有多块场地(或同时可举行多场比赛);双循环赛,即两队主客场各赛一次,安排赛程时除间隔场次外,要考虑主客场因素。另外,像桥牌比赛那样,不仅对手要轮换,牌局也要轮换的赛程安排就更复杂一些。

The Mathematical Problems for Match Scheduling

JIANG Qi-yuan

(Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: The general results for the contest title of match scheduling with the found problems in judging students' paper are presented. Also, some problems for further study are offered.

Keywords: match scheduling; number of breaks between two adjacent games of one player

---

(上接 137 页)

Optimization Design for Lineal Light

QIAN Zheng-ping,　CAI Rui-chu,　SUN Hong

Advisor:　LIANG Man-fa,　HONG Yi (chief)

(South China University of Technology, Guangzhou, 510640)

Abstract: In this paper, a reflection model for lineal light is presented and the intensity distribution is exactly calculated. We divide the lineal light into point light and the revoluting paraboloid into tiny flat mirrors. By analytical calculation, the differential unit model is developed according to the reflection laws. Through numerical simulation, we conclude that the optimized length of lineal light in the specific design code is 3. 98 ~ 4. 02mm.

Keywords: numerical simulation; lineal light; optimization design