

# SCC0202 – Algoritmos e Estruturas de Dados I

## Árvores Rubro-Negras

**Prof.: Dr. Rudinei Goularte**

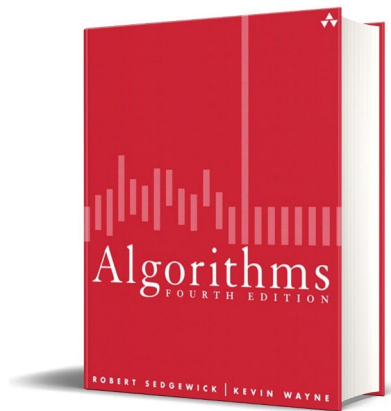
(rudinei@icmc.usp.br)

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Sala 4-229

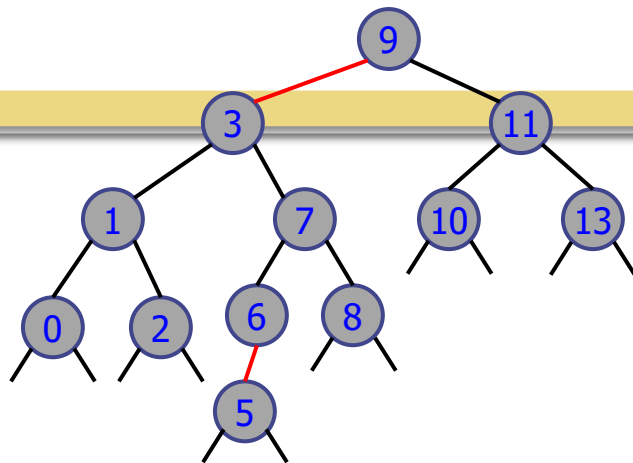
# Outras árvores balanceadas de busca

- 2-3 Trees, 2-3-4 Trees, Red-Black Trees,...
- Árvores Rubro-Negras
  - Guibas & Sedgwick, 1978
- Left-Leaning Red-Black Trees
  - Sedgwick, 2008



# Árvore Rubro-Negra

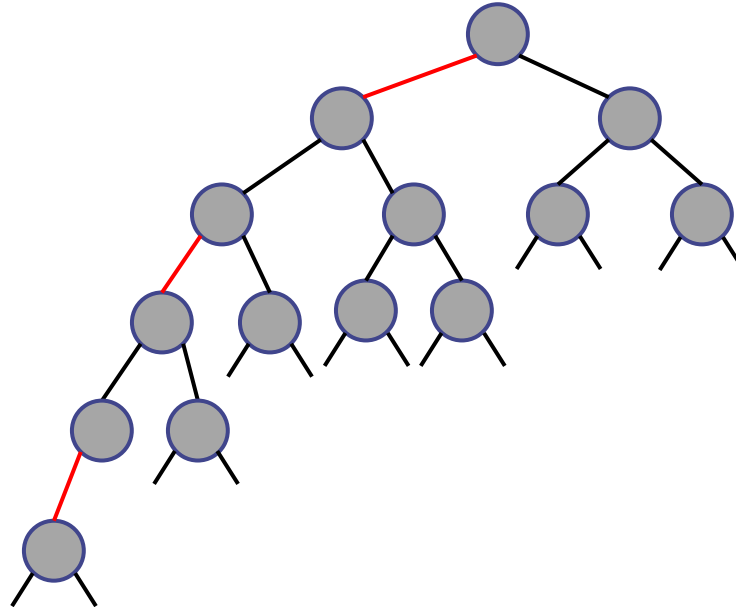
- ◆ É uma ABB
- ◆ Arestas são coloridas
  - Vermelha
  - Preta
- ◆ Regras
  - 1. Aresta vermelha sempre vai para o filho esquerdo
  - 2. Todo nó possui, no máximo, uma aresta vermelha **incidente**
    - ◆ Incluindo a aresta que vem do pai
  - 3. Balanceamento negro perfeito
    - ◆ Todo filho nulo está à mesma distância da raiz – distância negra
      - Considerando apenas as arestas negras



# Árvore Rubro-Negra

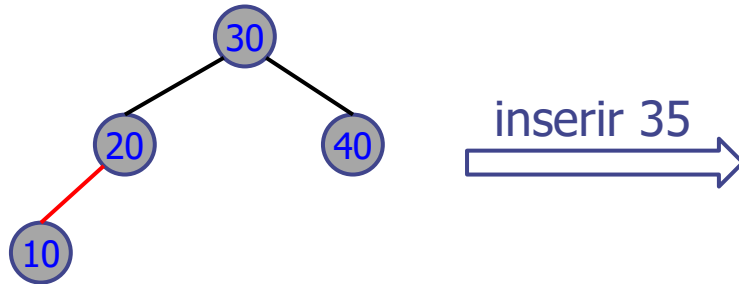
## ◆ Altura no pior caso

- $h \leq 2 \log(n)$



# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



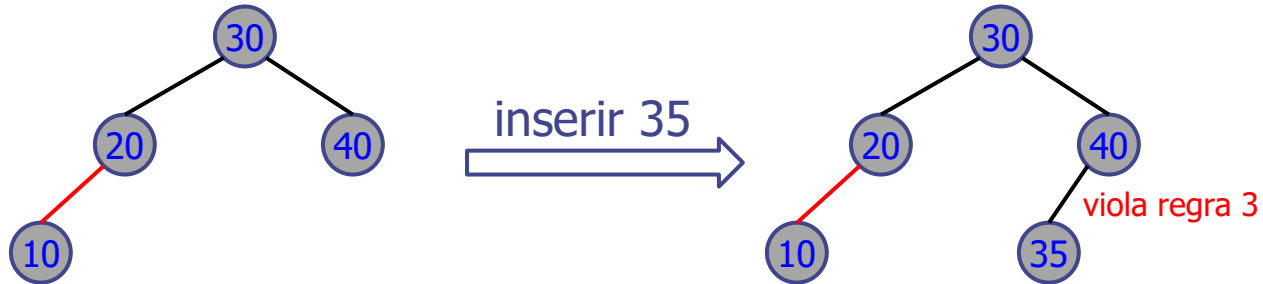
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



# Árvore Rubro-Negra

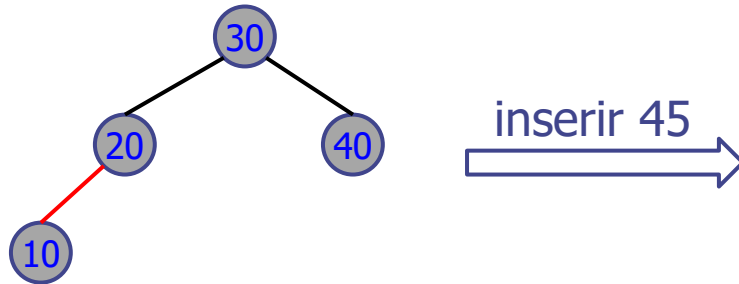
- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB





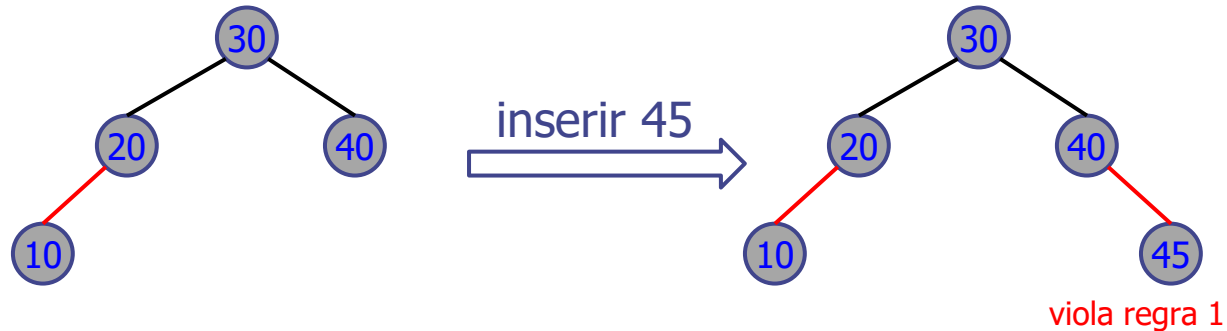
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



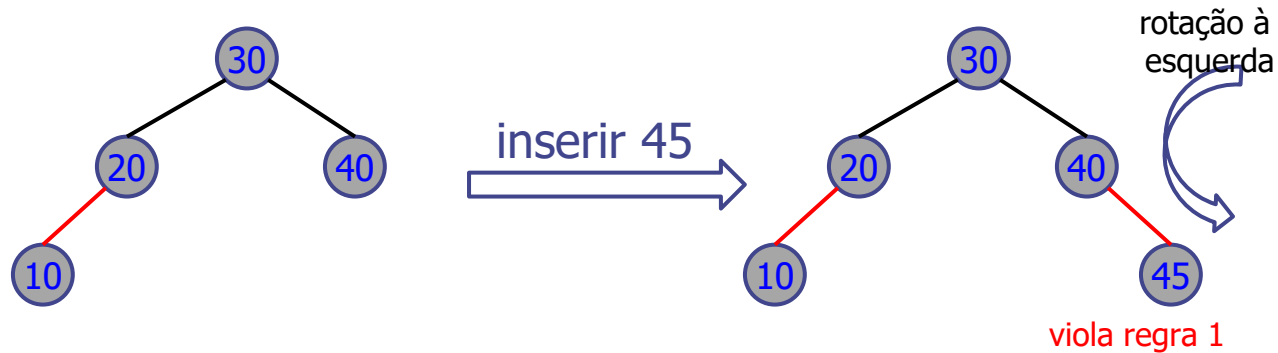
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



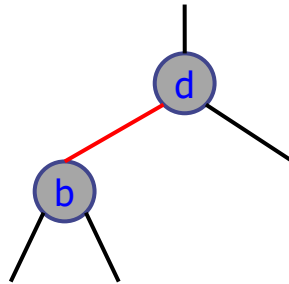
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó sem incidência vermelha
  - Igual à ABB



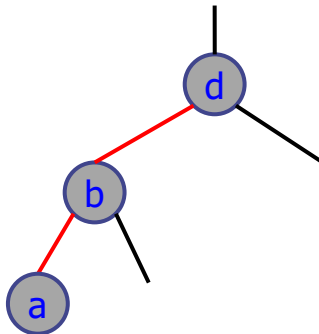
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó com incidência vermelha
  - Igual à ABB
  - 3 casos
    - ◆ Todos violam a regra 2



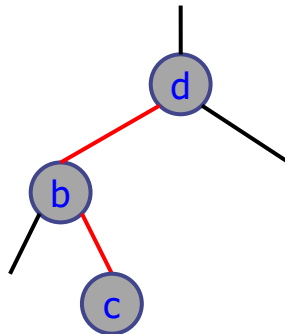
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó com incidência vermelha
  - Igual à ABB
  - 3 casos
    - ◆ Todos violam a regra 2



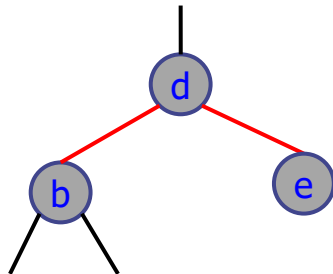
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó com incidência vermelha
  - Igual à ABB
  - 3 casos
    - ◆ Todos violam a regra 2



# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Inserção em nó com incidência vermelha
  - Igual à ABB
  - 3 casos
    - ◆ Todos violam a regra 2





# Árvore Rubro-Negra

## ◆ Manutenção das 3 regras após

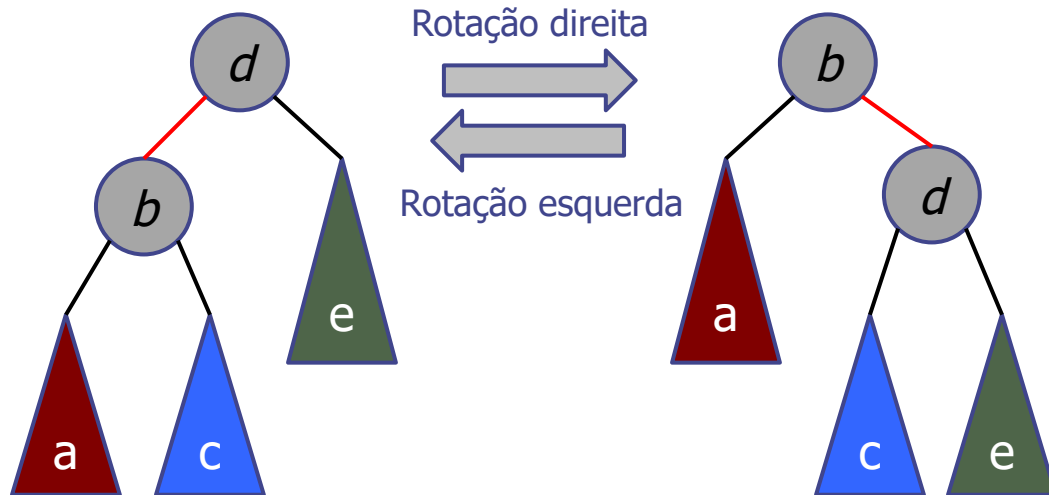
- Inserção
- Remoção

## ◆ Operações locais

- Rotação à esquerda
- Rotação à direita
- Inversão de cores

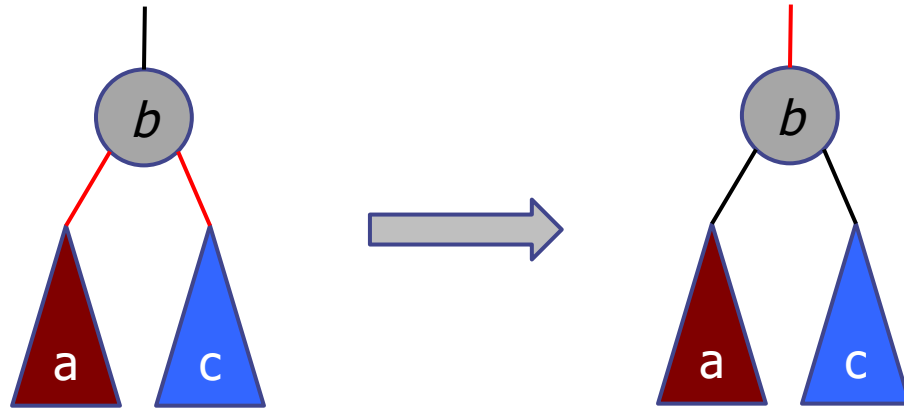
# Árvore Rubro-Negra

- ◆ Rotações à esquerda e à direita
  - Parecidas com AVL



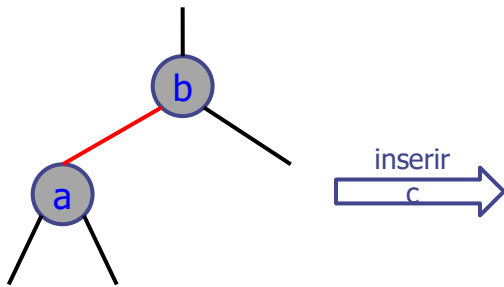
# Árvore Rubro-Negra

## ◆ Inversão de cores (arestas)

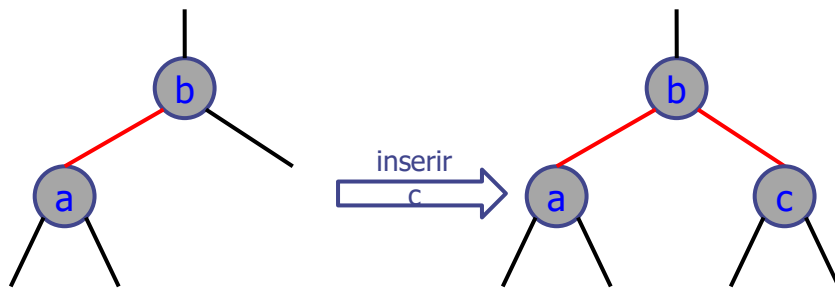


nenhuma das 3 operações infringe a regra 3!

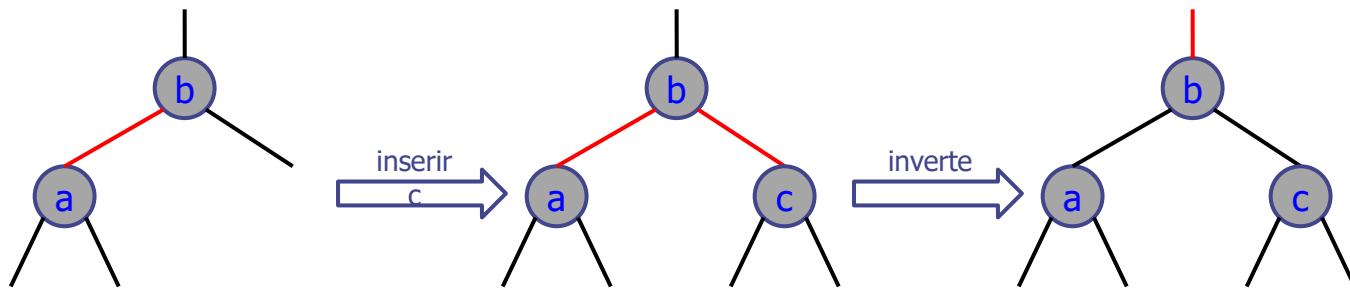
# Inserção em nó com incidência vermelha (1o. caso)



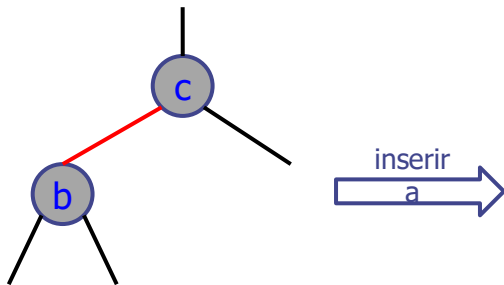
# Inserção em nó com incidência vermelha (1o. caso)



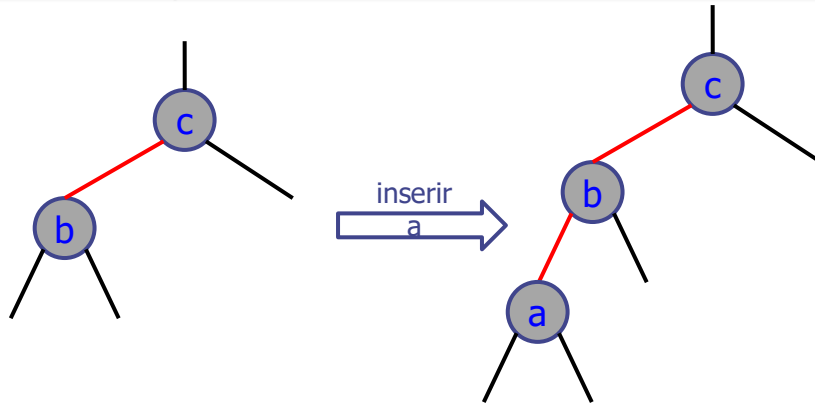
# Inserção em nó com incidência vermelha (1o. caso)



# Inserção em nó com incidência vermelha (2o. caso)

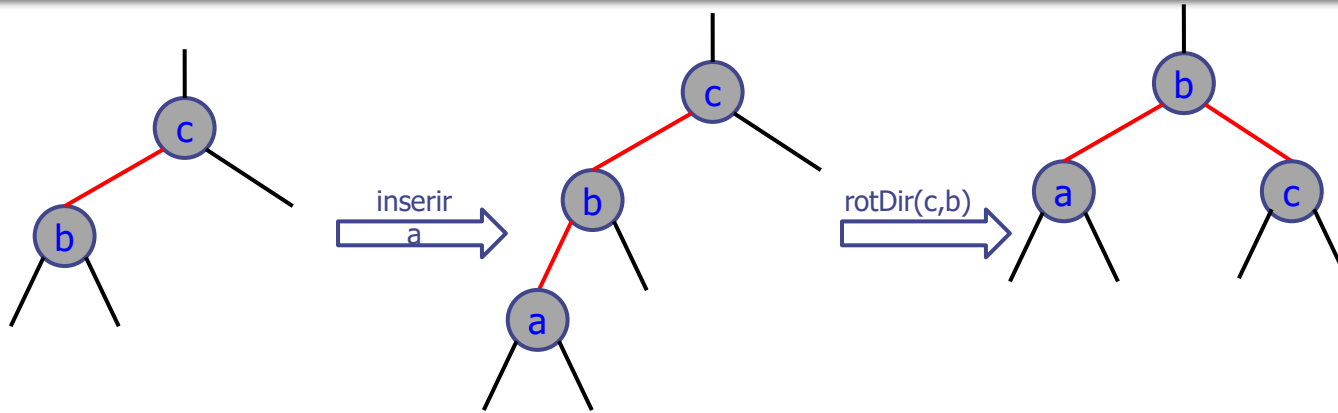


# Inserção em nó com incidência vermelha (2o. caso)

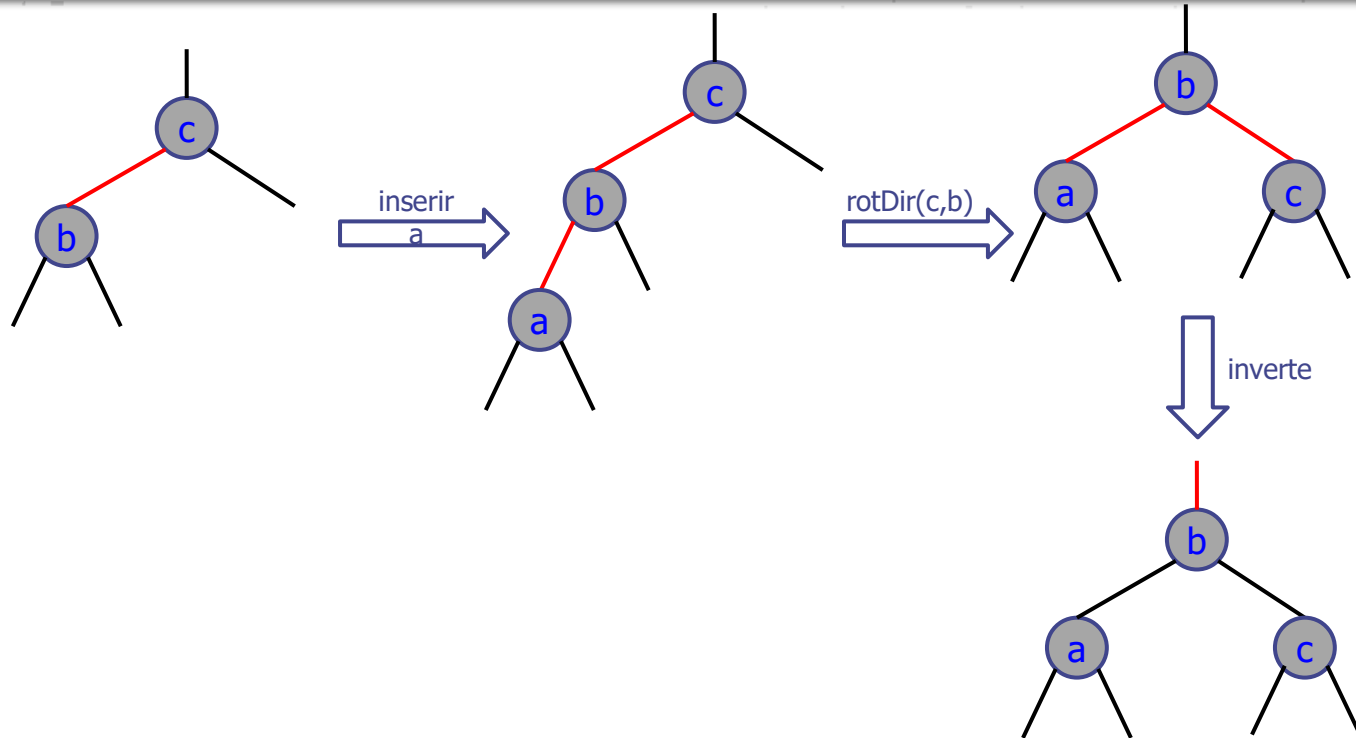




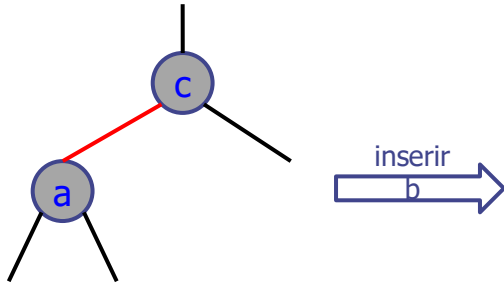
# Inserção em nó com incidência vermelha (2o. caso)



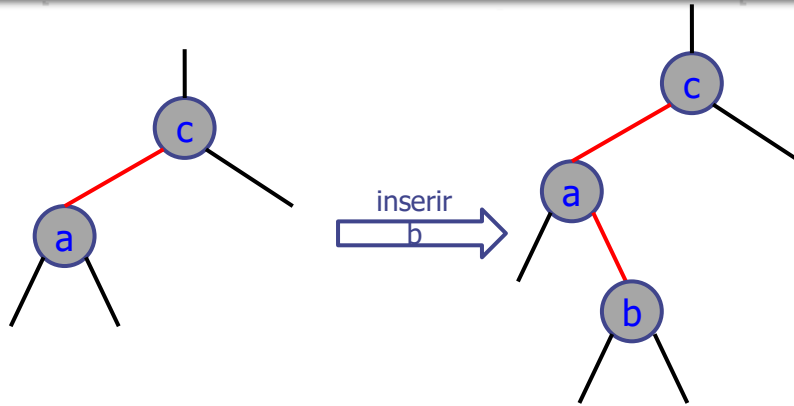
# Inserção em nó com incidência vermelha (2o. caso)



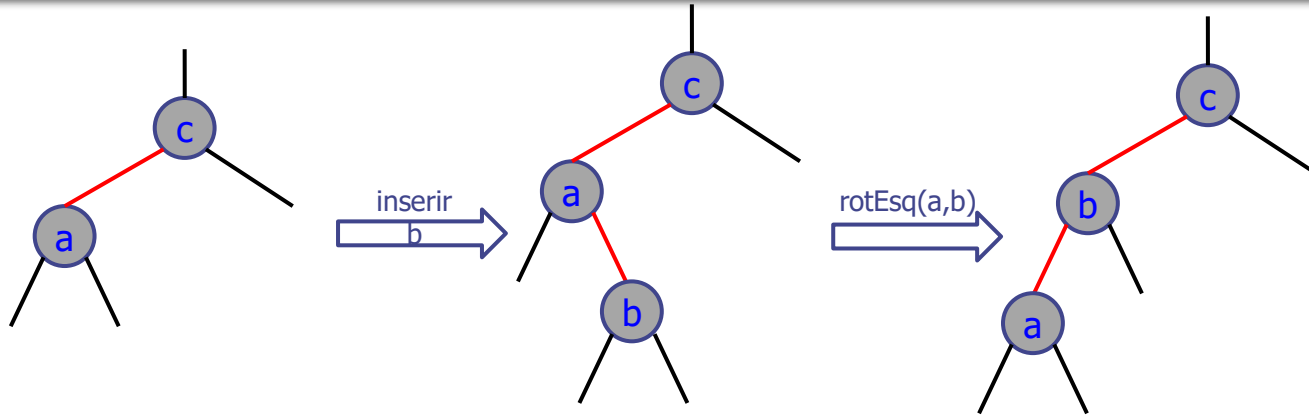
# Inserção em nó com incidência vermelha (3o. caso)



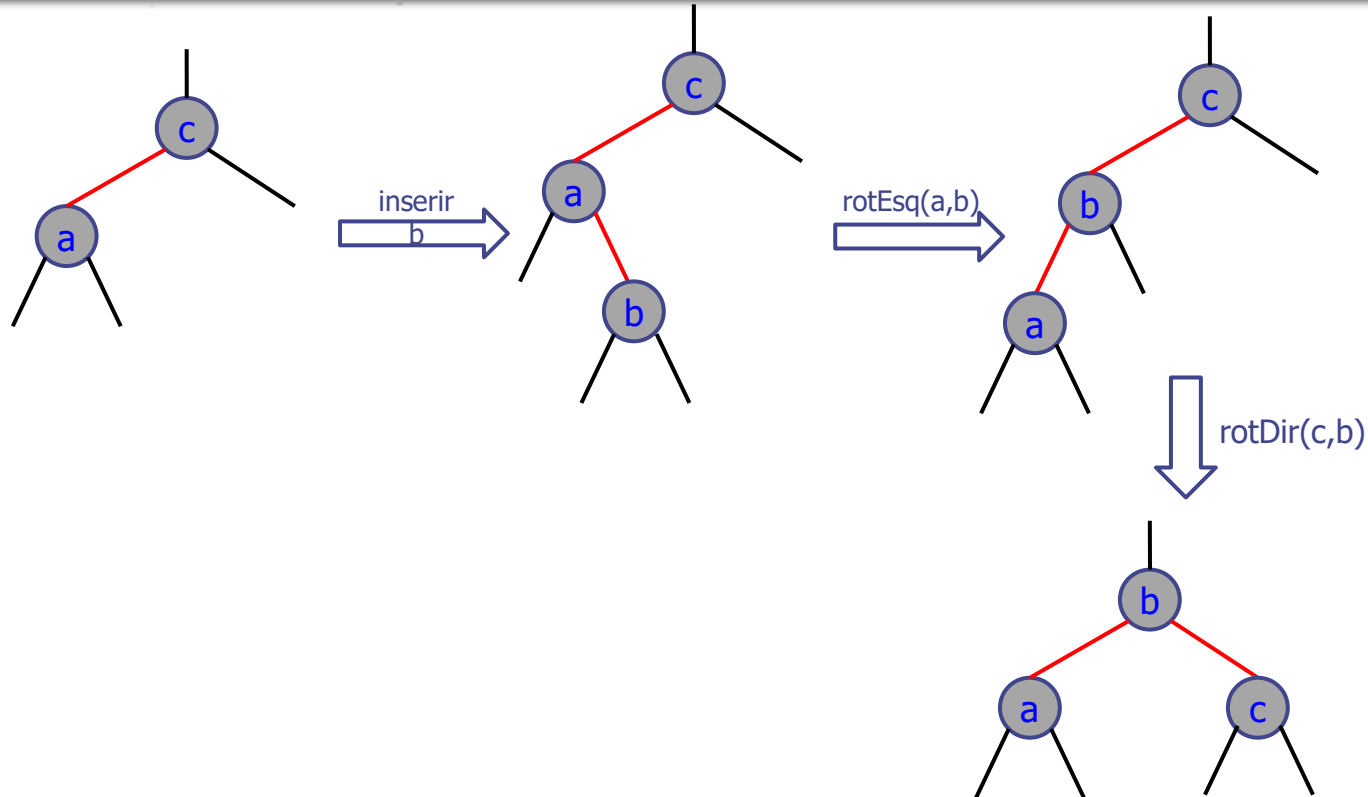
# Inserção em nó com incidência vermelha (3o. caso)



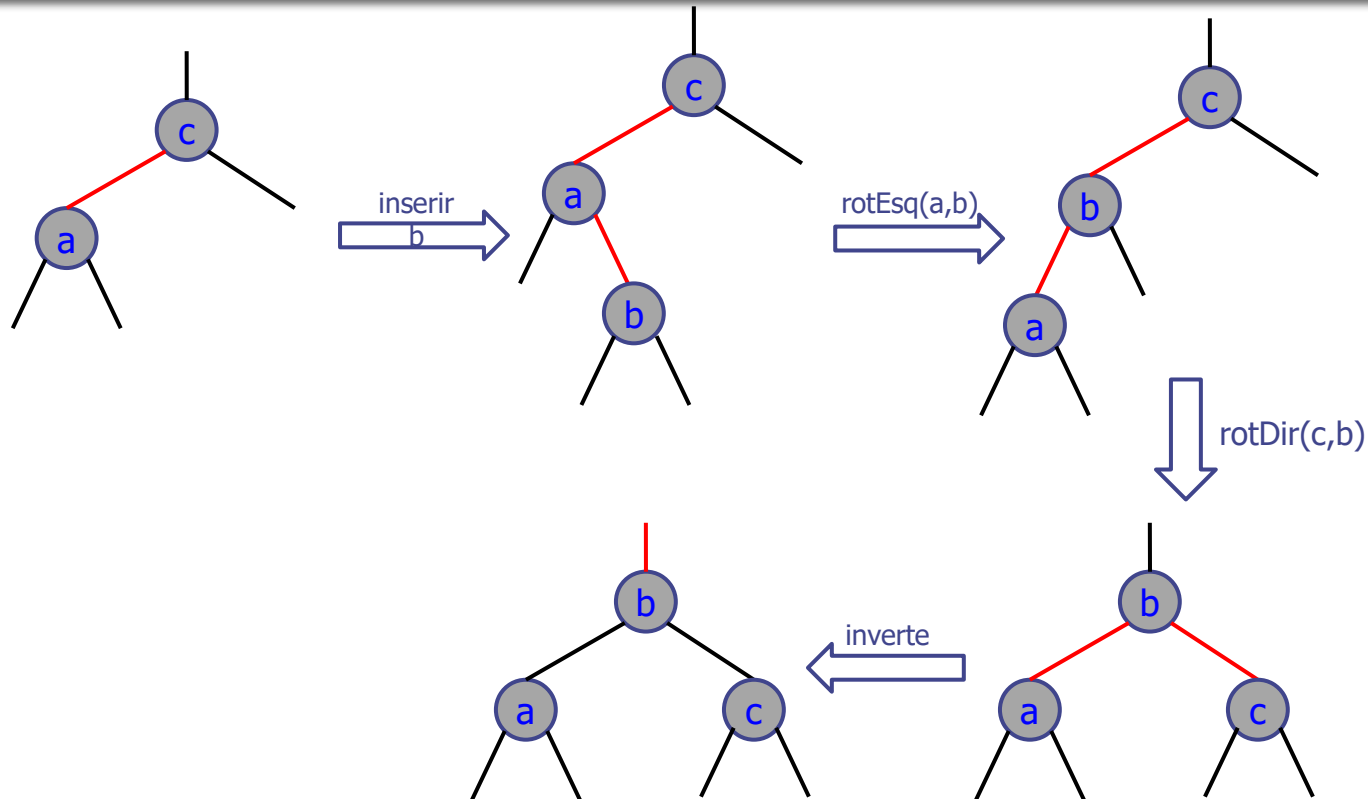
# Inserção em nó com incidência vermelha (3o. caso)



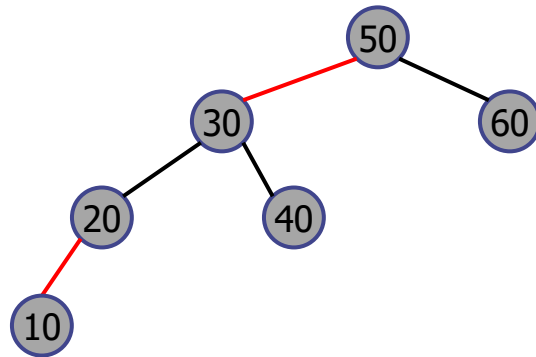
# Inserção em nó com incidência vermelha (3o. caso)



# Inserção em nó com incidência vermelha (3o. caso)



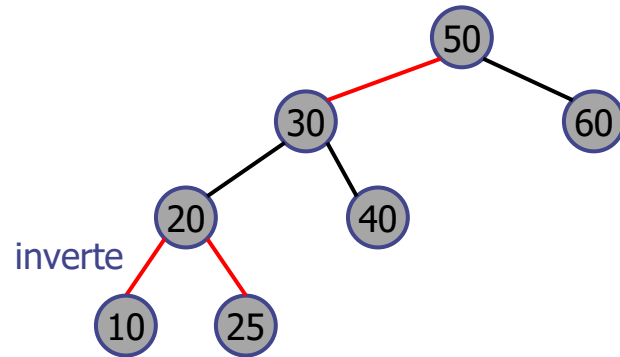
# Exemplo



inserir 25

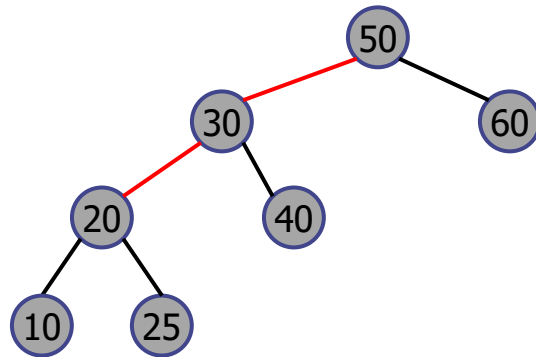


# Exemplo



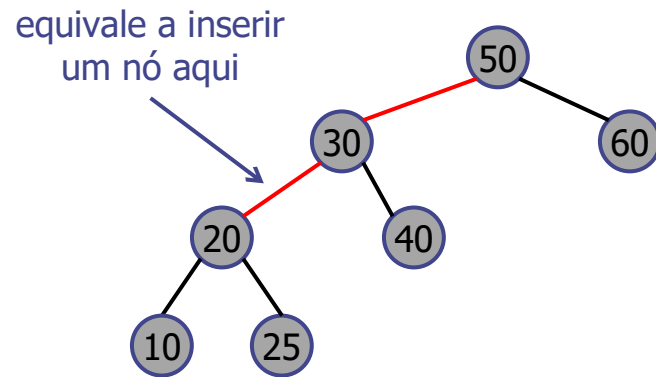
inserir 25

# Exemplo



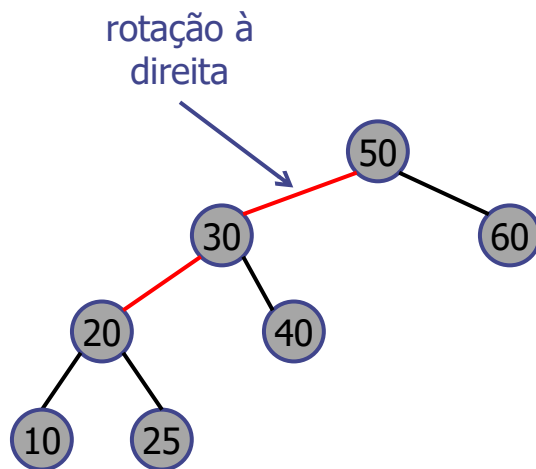
inserir 25

# Exemplo



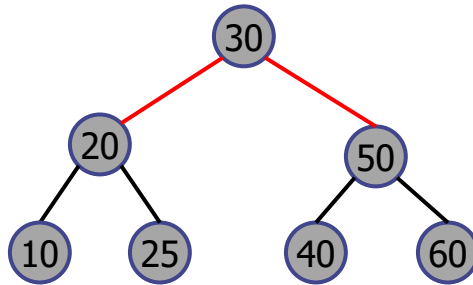
inserir 25

# Exemplo



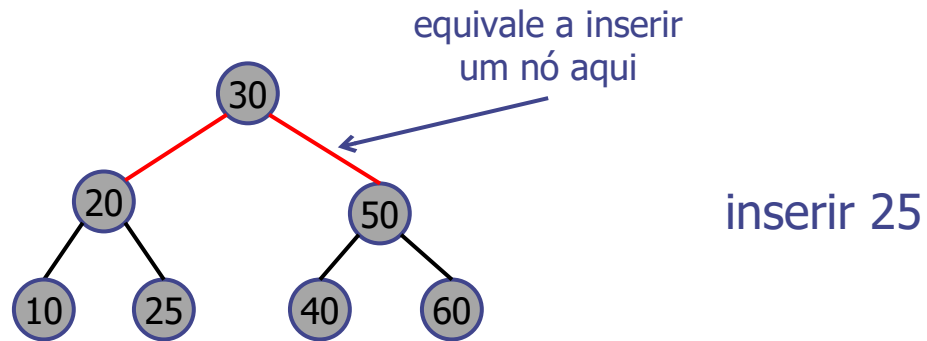
inserir 25

# Exemplo

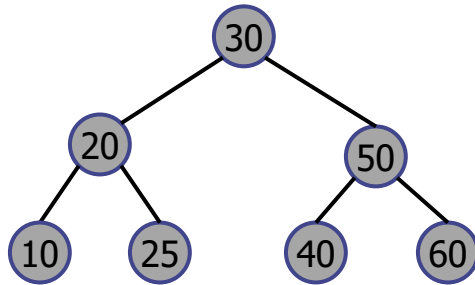


inserir 25

# Exemplo



# Exemplo



inserir 25

# Exercício

◆ Inserir em uma árvore rubro-negra as seguintes chaves:

- 10, 15, 20, 17, 25, 5, 12



# Inserção: resumo

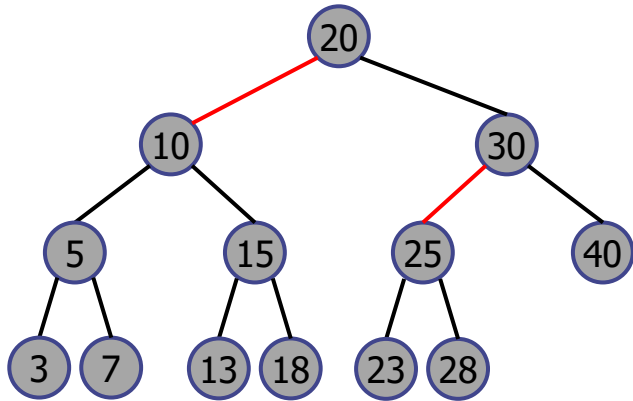
- ◆ Segue algoritmo da ABB
- ◆ Sempre insere aresta vermelha
- ◆ Pode quebrar regras 1 e 2
- ◆ Operações locais corrigem problemas
  - Localmente
- ◆ Operação **inverte**
  - Propaga aresta vermelha para cima
  - Pode ser tratada **recursivamente** como inserção
  - Até alcançar um nó
    - ◆ Sem incidência vermelha; ou
    - ◆ Raiz da árvore

# Remoção

- ◆ Remoção sempre de um nó folha com aresta vermelha
  - Aplicar conceitos de remoção de ABB no caso de nó não folha
    - ◆ Substituição de chave não altera formato/propriedades da árvore
  - Propagar aresta vermelha da raiz até a folha se necessário
    - ◆ Operações inverte, rotação direita e esquerda

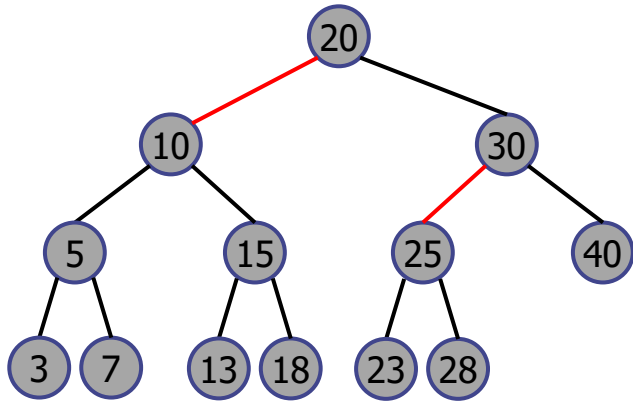
# Exemplo 1

◆ Remover a chave 40 da árvore abaixo:



## Exemplo 2

◆ Remover a chave 3 da árvore abaixo:



# Referências

## ◆ Árvores Rubro-Negras

- <https://www.youtube.com/watch?v=YBacFFv4Mbo>
- <http://www.cs.princeton.edu/~rs/talks/LLRB/RedBlack.pdf>
- <https://www.cs.princeton.edu/~rs/talks/LLRB/LLRB.pdf>

◆ Material baseado nos originais do prof. Marcelo G. Manzato