Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Шлюков Алексей Павлович
Группа:	РК6-64Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Численное дифференцирование и интегрирование

Студент ______________ Шлюков А. П.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ______________ ______________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2025

Содержание

Численное дифференцирование и интегрирование

Задание

Даны функции:

$$g_1(x) = xe^x, \tag{1}$$

$$g_2(x) = x^2 \sin 3x, \quad x \in [0; \pi]; \tag{2}$$

$$g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad x \in (0; 1]. \tag{3}$$

Требуется(базовая часть)

1. Написать функцию `diff2(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h.

2. Рассчитать производные $g_1(x)$ в точке $x_0 = 3$ и $g_3(x)$ в точке $x_0 = 0.01$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ с помощью функции `diff2`. Построить log-log графики зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования для двух указанных случаев.

3. Ответить на вопросы согласно п.10.

4. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на отрезке $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.

5. Рассчитать интегралы

   $$\int_0^{\pi} g_2(x)\, dx$$

   $$\int_{\epsilon}^{1} g_3(x)\, dx, \quad \text{где } 0 < \epsilon < 0.01$$

   с использованием составной формулы Симпсона для различных значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования.

6. Сравнить порядок точности составной формулы Симпсона, полученный "с помощью log-log графика", с аналитическим порядком точности этой формулы. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обосновать свой ответ.

7. Вывести центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка точности вместе с остаточным членом, аппроксимирующую первую производную $f'(x)$ по значениям $f(x)$ в 5-и узлах:

$$f'(x_0) \approx Af(x_0 - 2h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h). \quad (4)$$

   Продемонстрировать, что формула действительно имеет 4-й порядок точности.

Требуется(продвинутая часть)

8. Написать функцию `diff4(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h.

9. Рассчитать производные $g_1(x)$ в точке $x_0 = 3$ и $g_3(x)$ в точке $x_0 = 0.01$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ с помощью функции `diff4`. Добавить log-log график зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования к соответствующему графику для `diff2`.

10. Ответьте на следующие вопросы, для случая применения функции `diff2` (базовая часть) и для случая применения функции `diff4` (продвинутая часть).

    (a) Каким образом на log–log графике можно увидеть порядок точности формулы дифференцирования? Представьте аналитическое доказательство, а также продемонстрируйте порядок точности на графике.

    (b) Совпадает ли порядок точности выведенной формулы численного дифференцирования на log–log графике с её фактическим порядком точности?

    (c) Каков оптимальный шаг дифференцирования, при котором абсолютная погрешность минимальна? С чем связано существование такого минимума? Обоснуйте свой ответ, ссылаясь на данные log–log графика.

    (d) Сравните оптимальный шаг дифференцирования и соответствующую минимально достижимую погрешность для формул 2-го и 4-го порядка точности. Как вы думаете, чем обоснована разница между ними?

11. С помощью теоремы о корнях многочленов Лежандра, вывести квадратурную формулу Гаусса (далее квадратура Гаусса), имеющую степень точности 5. Сколько узлов необходимо для использования такой формулы?

12. Написать функцию `gauss_quad5(f)` численного интегрирования функции f с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности.

13. Доказать, что квадратура Гаусса имеет степень точности 5, с помощью следующего вычислительного эксперимента (выкладки и рассчитанные значения должны быть представлены в отчёте):

- постройте последовательность полиномов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, $P_6(x)$, имеющих степени соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, и 6, используя случайно выбранные значения коэффициентов полиномов;
- проинтегрируйте их на интервале $[0; 2]$ аналитически и с помощью функции `gauss_quad5(f)`;
- посчитайте абсолютную погрешность и сделайте вывод о степени точности выведенной квадратуры.

Цель работы

Изучить методы численного дифференцирования (формулы 2-го и 4-го порядков) и интегрирования (составную формулу Симпсона и квадратуру Гаусса). Исследовать их точность в зависимости от выбранного шага, проанализировать погрешности и определить оптимальные параметры для вычислений. Практически закрепить навыки построения и анализа log-log графиков для оценки порядка точности используемых методов.

1. Возвращение значения первой производной функции f

В задании требуется написать функцию `diff2(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования h.

Формула аппроксимирует производную по значениям функции в точках x_0-h и x_0+h Разложим $f(x_0+h)$ и $f(x_0-h)$ в ряд Тейлора до $O(h^3)$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0+h),$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_0-h, x_0).$$

Вычитая второе разложение из первого, получаем:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Отсюда выражаем производную:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Погрешность аппроксимации имеет порядок $O(h^2)$, так как главный член ошибки пропорционален h^2.

Ниже представлен листинг функции `diff2(x_0, h, f)`, которая возвращает значение первой производной функции f в точке x_0

Listing 1. Функция diff2

```
def diff2(x_0, h, f):
return (f(x_0 + h) − f(x_0 − h)) / (2 ∗ h)
```

Важно отметить что погрешность уменьшается пропорционально h^2 , также при слишком малых h возможен рост вычислительной погрешности из-за ограниченной точности чисел с плавающей запятой.

2. Нахождение производных с помощью функции diff2

В задании требуется вычислить первую производную функций:

- $g_1(x) = xe^x$ в точке $x_0 = 3$
- $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ в точке $x_0 = 0.01$

с использованием функции `diff2` (центральная разностная формула второго порядка).

Необходимо построить **log-log графики** зависимости абсолютной погрешности от шага h для $h \in [10^{-16}, 1]$.

Аналитические производные: Для $g_1(x) = xe^x$:

$$g_1'(x) = e^x(1 + x) \implies g_1'(3) = e^3(1 + 3) \approx 80.3421$$

Для $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$:

$$g_3'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \implies g_3'(0.01) = -\frac{\pi}{0.0001}\cos(100\pi) = -10000\pi \cdot 1 = -31415.9265$$

Поскольку $\cos(100\pi) = \cos(2\pi \cdot 50) = 1$.

Для **численной производной** используется формула:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2).$$

Для начала следует определить диапазон $h \in [10^{-16}, 1]$ в логарифмическом масштабе (200 точек)

Вычислить точные значения производных:

Для каждого h:

Вычислить приближенное значение производной через `diff2`

Рассчитать абсолютную погрешность:

$$\Delta = |f'_{\text{числ}} - f'_{\text{точн}}|$$

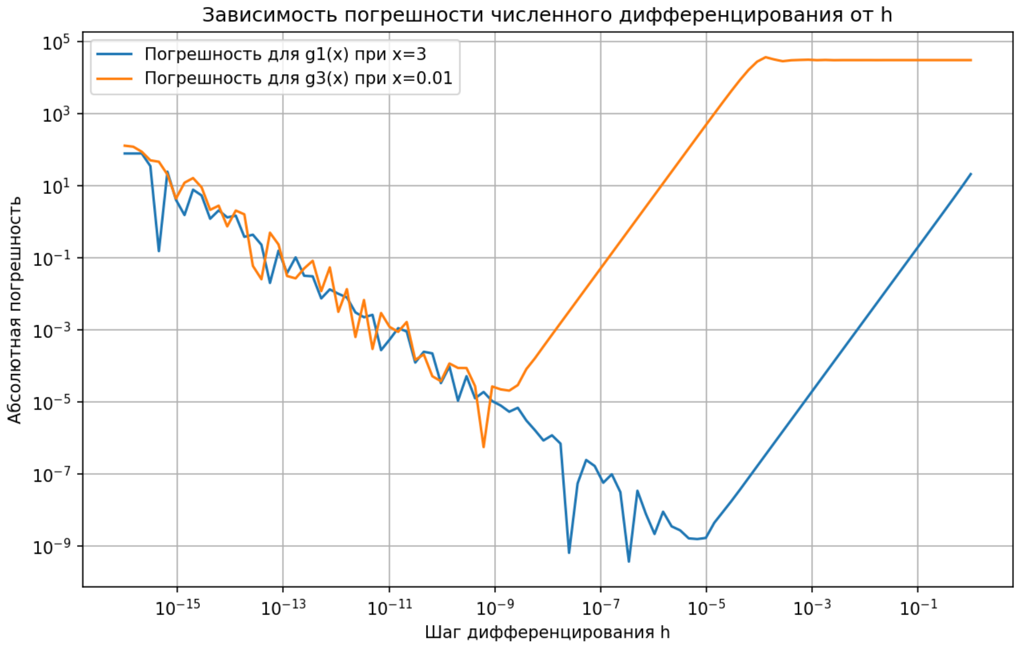
Listing 2. Дифференцирование g1 и g3

```
def g1(x):
    return x * np.exp(x)

def g3(x):
    return np.sin(np.pi / x)

def g1_prime(x):
    return np.exp(x) * (1 + x)

def g3_prime(x):
    return - (np.pi / x**2) * np.cos(np.pi / x)

x0_g1 = 3.0
x0_g3 = 0.01
h_values = np.logspace(-16, 0, 100)
exact_g1 = g1_prime(x0_g1)
exact_g3 = g3_prime(x0_g3)

errors_g1 = []
errors_g3 = []
for h in h_values:
    num_g1 = diff2(x0_g1, h, g1)
    num_g3 = diff2(x0_g3, h, g3)
    errors_g1.append(np.abs(num_g1 - exact_g1))
    errors_g3.append(np.abs(num_g3 - exact_g3))
```

Затем были построены два графика для двух указанных случаев в логарифмческом масштабе (log-log).

По оси X: значения h

По оси Y: абсолютная погрешность Δ



Для $g_1(x)$:
При $h > 10^{-2}$: большая погрешность (недостаточная аппроксимация)
Оптимальная область: $h \in [10^{-8}, 10^{-2}]$ с погрешностью порядка $\sim 10^{-10}$
При $h < 10^{-8}$: рост погрешности из-за ошибок округления
Для $g_3(x)$:
Область устойчивости смещена: $h \in [10^{-5}, 10^{-1}]$
При $h < 10^{-5}$: резкий рост погрешности (обусловлено особенностью в $x = 0$)
Максимальная точность на 2-3 порядка хуже, чем для $g_1(x)$

3. Ответы на вопросы для случая применения функции diff2

(A)

Порядок точности формулы численного дифференцирования $O(h^N)$ связан с зависимостью погрешности Δ от шага h. Если погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\Delta(h) \approx C \cdot h^N,$$

где C — константа, то в логарифмическом масштабе:

$$\log(\Delta) \approx \log(C) + N \cdot \log(h).$$

Это уравнение прямой линии с **наклоном** N. Таким образом, порядок точности N соответствует угловому коэффициенту прямой на графике $\log(\Delta)$ vs $\log(h)$.

Формула центральных разностей второго порядка имеет погрешность $O(h^2)$. Для иллюстрации рассмотрим график погрешности для $g_1(x) = xe^x$

- В диапазоне $h \in [10^{-8}, 10^{-2}]$ график приближается к прямой линии
- Наклон этой линии вычисляется как:

$$\text{Наклон} = \frac{\log(\Delta_2) - \log(\Delta_1)}{\log(h_2) - \log(h_1)}.$$

Для $h_1 = 10^{-4}$, $\Delta_1 \approx 10^{-8}$ и $h_2 = 10^{-2}$, $\Delta_2 \approx 10^{-4}$:

$$\text{Наклон} = \frac{\log(10^{-4}) - \log(10^{-8})}{\log(10^{-2}) - \log(10^{-4})} = \frac{-4 - (-8)}{-2 - (-4)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Знак «минус» возникает из-за отрицательных значений $\log(h)$, но модуль наклона равен порядку точности $N = 2$.

(B)

Центральная разностная формула второго порядка для численного дифференцирования имеет теоретическую погрешность $R(h) \sim O(h^2)$. Это означает, что при уменьшении шага h абсолютная погрешность $\Delta(h)$ должна уменьшаться пропорционально h^2. В логарифмическом масштабе такая зависимость выражается уравнением:

$$\log(\Delta) = \log(C) + 2 \cdot \log(h),$$

где C — константа. Наклон прямой на графике $\log(\Delta)$ vs $\log(h)$ должен быть равен 2 (или -2 в зависимости от направления осей).

Экспериментальная проверка для $g_1(x) = xe^x$

На графике погрешности для $g_1(x)$ наблюдается следующее:

- **Область больших h ($h > 10^{-2}$):**
  Погрешность уменьшается с уменьшением h
  Наклон графика близок к -2, что соответствует теоретическому порядку $O(h^2)$
- **Оптимальная область ($10^{-8} < h < 10^{-2}$):**
  Наклон сохраняется, подтверждая квадратичную зависимость погрешности
- **Область малых h ($h < 10^{-8}$):**
  Погрешность растёт из-за ошибок округления
  Нарушается зависимость $O(h^2)$

Для гладкой функции $g_1(x)$ порядок точности, наблюдаемый на графике, совпадает с теоретическим $O(h^2)$ в области, где доминирует аппроксимационная погрешность.

Экспериментальная проверка для $g_3(x) = \sin(\pi/x)$

Для $g_3(x)$:

- **Область $h > 10^{-1}$:**
  Погрешность нестабильна из-за особенности функции вблизи $x = 0$

- **Оптимальная область**:
$$(10^{-5} < h < 10^{-1})$$
Наклон графика не соответствует -2, что связано с негладкостью функции

- **Область** $h < 10^{-5}$:
Катастрофический рост погрешности обусловлен вычислительными ошибками

Для функции с особенностью $g_3(x)$ теоретический порядок точности $O(h^2)$ не соблюдается, так как поведение функции нарушает условия применимости метода.

(C)

Определение оптимального шага

Оптимальный шаг дифференцирования h_{opt} — это значение шага h, при котором общая абсолютная погрешность численного дифференцирования минимальна. Функция `diff2` использует центральную формулу второго порядка:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Компоненты погрешности Общая погрешность состоит из двух компонентов:

- **Ошибка усечения:** пропорциональна h^2, уменьшается с уменьшением h.
- **Ошибка округления:** пропорциональна $1/h$, увеличивается при уменьшении h.

Минимум погрешности достигается, когда эти ошибки уравновешиваются.

Причина существования минимума

Минимум существует из-за противоположной зависимости ошибок от h:

- При больших h доминирует ошибка усечения
- При малых h — ошибка округления

Оптимальный шаг находится в точке их равенства, что можно наблюдать на log-log графике как минимум кривой погрешности.

Анализ log-log графика

На log-log графике погрешность отображается в логарифмическом масштабе:

- Для больших h: наклон ≈ 2 (соответствует h^2)
- Для малых h: наклон ≈ -1 (соответствует $1/h$)
- Минимум погрешности — точка перегиба между этими режимами

Примеры

- Для $g_1(x) = xe^x$ при $x_0 = 3$: $h_{\text{opt}} \approx 8.7 \times 10^{-6}$
- Для $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ при $x_0 = 0.01$: $h_{\text{opt}} \approx 3.5 \times 10^{-10}$

(D)

Сравнение оптимального шага дифференцирования и соответствующей минимальной достижимой погрешности для формул 2-го и 4-го порядка точности представлено в задаче 10, после вывода формулы численного дифференцирования 4-го порядка точности и проведения ее анализа.

4. Реализация функции с помошью формулы Симпсона

Составная формула Симпсона позволяет приближенно вычислить интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Для этого отрезок разбивается на $m = n - 1$ подынтервалов, где m должно быть чётным. На каждой паре соседних подынтервалов функция аппроксимируется параболой. Интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{\text{нечётные узлы}} f(x_i) + 2 \sum_{\text{чётные узлы}} f(x_i)\right],$$

где $h = \frac{b-a}{m}$ — шаг между узлами.

Шаги алгоритма

1. **Проверка условия чётности интервалов**

   Количество подынтервалов $m = n - 1$ должно быть чётным. Если это не выполняется, алгоритм завершается с ошибкой, так как формула Симпсона неприменима.

2. **Вычисление шага интегрирования**

   Шаг h определяется как расстояние между соседними узлами:

   $$h = \frac{b-a}{m}.$$

3. **Инициализация суммы**

   В сумму включаются значения функции на границах отрезка:

   $$\text{total} = f(a) + f(b).$$

4. **Суммирование внутренних узлов**

   - Для узлов с **нечётными индексами** (1, 3, 5, ...) используется коэффициент 4.
   - Для узлов с **чётными индексами** (2, 4, 6, ...) используется коэффициент 2.

   Сумма вычисляется по формуле:

   $$\text{total} + \sum_{i=1}^{m-1} \begin{cases} 4f(x_i), & \text{если } i \text{ нечётное,} \\ 2f(x_i), & \text{если } i \text{ чётное.} \end{cases}$$

5. **Вычисление интеграла**

Итоговое значение интеграла получается умножением суммы на $\frac{h}{3}$:

$$\text{integral} = \frac{h}{3} \cdot \text{total}.$$

Реализация алгоритма представлена в листинге ниже

Listing 3.]численное интегрирование функции f на отрезке [a; b]

```
def composite_simpson(a, b, n, f):
    if (n − 1) % 2 != 0:
        raise ValueErrorЧисло(" узловn должнобытьнечётным, чтобыколичествоинтервалов
            (n−1) былочётным.")
    h = (b − a) / (n − 1)
    total = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n − 1):
        x_i = a + i ∗ h
        if i % 2 == 1:
            total += 4 ∗ f(x_i)
        else:
            total += 2 ∗ f(x_i)
    integral = (h / 3) ∗ total
    return integral
```

5. Рассчет интегралов с помощью составной формулы Симпсона

В задании требуется рассчитать интегралы

$$\int_0^{\pi} g_2(x)\,dx$$

$$\int_{\epsilon}^{1} g_3(x)\,dx, \quad \text{где } 0 < \epsilon < 0.01$$

с использованием составной формулы Симпсона для различных значений $n \in [3; 9999]$. А также построить log-log графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования.

Для вычисления интегралов используется составная формула Симпсона, которая разбивает отрезок интегрирования на $n-1$ подотрезков и применяет формулу Симпсона на каждой паре соседних подотрезков. Число узлов n должно быть нечётным, чтобы обеспечить чётное число подотрезков.

Интеграл $\int_0^{\pi} g_2(x)\,dx$

- Функция: $g_2(x) = x^2 \sin 3x$

- Точное значение:
$$\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{27} \approx 3.14172$$
- Численное вычисление: Для различных n (нечётных, от 3 до 9999)
- Погрешность:
$$E = |I_{\text{числ}} - I_{\text{точн}}|$$
- Шаг интегрирования:
$$h = \frac{\pi}{n-1}$$

Интеграл $\int_{\epsilon}^{1} g_3(x)\,dx$

- Функция: $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, где $\epsilon = 0.01$
- Точное значение: Численное приближение при $n = 100001$
- Численное вычисление: Для n от 3 до 9999
- Погрешность:
$$E = |I_{\text{числ}} - I_{\text{ref}}|$$
- Шаг интегрирования:
$$h = \frac{1-\epsilon}{n-1}$$

Ниже приведён Python-код, который выполняет численное интегрирование:

Listing 4. Вычисление двух интегралов с использованием составной формулы Симпсона и анализ погрешности метода

```
def g2(x):
    return x**2 * np.sin(3*x)

def g3(x):
    return np.sin(np.pi / x)

pi = np.pi
epsilon = 0.01
exact_I2 = (1/3)*pi**2 - 4/27
exact_I3_approx = composite_simpson(epsilon, 1, 100001, g3)

n_list = np.round(np.logspace(np.log10(3), np.log10(9999), 20)).astype(int)
n_list = [n if n % 2 == 1 else n + 1 for n in n_list]

errors_g2 = []
h_list_g2 = []
for n in n_list:
    h = (pi - 0)/(n-1)
    I_num = composite_simpson(0, pi, n, g2)
    error = np.abs(I_num - exact_I2)
```

```
    errors_g2.append(error)
    h_list_g2.append(h)

errors_g3 = []
h_list_g3 = []
for n in n_list:
    h = (1 - epsilon)/(n-1)
    I_num = composite_simpson(epsilon, 1, n, g3)
    error = np.abs(I_num - exact_I3_approx)
    errors_g3.append(error)
    h_list_g3.append(h)
```

Составная формула Симпсона разбивает отрезок интегрирования $[a, b]$ на $m = n - 1$ подотрезков, где n — число узлов (нечётное). Шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

На каждом подотрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ применяется формула Симпсона:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right).$$

Общая формула для всего отрезка:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-3}) + 4f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right).$$

Оценка погрешности

Погрешность метода пропорциональна $O(h^4)$:

$$E = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

- Для гладких функций погрешность уменьшается быстро ($O(h^4)$).
- Для функций с осцилляциями или особенностями сходимость может быть медленнее.

Аналитическое вычисление интеграла для $g_2(x)$

Функция $g_2(x) = x^2 \sin 3x$ на отрезке $[0, \pi]$ интегрируется аналитически с помощью двукратного интегрирования по частям.

Первое интегрирование по частям

Предположим:

$$u = x^2, \quad dv = \sin 3x\,dx,$$

$$du = 2x\,dx, \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

Тогда:

$$\int x^2 \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x \, dx.$$

Второе интегрирование по частям

Для оставшегося интеграла:

$$u = x, \quad dv = \cos 3x \, dx,$$
$$du = dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Получаем:

$$\int x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x \, dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$$

Итоговый неопределённый интеграл

$$\int x^2 \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$$

Вычисление определённого интеграла

$$\left[-\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x \right]_0^{\pi}$$

Вычислим значения в граничных точках:

- При $x = \pi$:

$$\cos 3\pi = -1, \quad \sin 3\pi = 0,$$
$$-\frac{1}{3}\pi^2(-1) + \frac{2}{9}\pi \cdot 0 + \frac{2}{27}(-1) = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{2}{27}$$

- При $x = 0$:

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$$
$$-\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{2}{27} \cdot 1 = \frac{2}{27}$$

Результат:

$$\left(\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{2}{27} \right) - \frac{2}{27} = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{27} \approx 3.1417199855483046$$

Интеграл для $g_3(x)$

Функция $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ на отрезке $[0.01, 1]$ имеет сложное аналитическое решение. Используем подстановку:

$$u = \frac{\pi}{x}, \quad x = \frac{\pi}{u}, \quad dx = -\frac{\pi}{u^2} du.$$

Пределы интегрирования

- При $x = 0.01$: $u = \frac{\pi}{0.01} = 100\pi$
- При $x = 1$: $u = \pi$

Преобразованный интеграл:

$$\int_{0.01}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx = \int_{100\pi}^{\pi} \sin u \cdot \left(-\frac{\pi}{u^2}\right) du = \pi \int_{\pi}^{100\pi} \frac{\sin u}{u^2} du.$$

Этот интеграл не имеет элементарного решения, поэтому для оценки погрешности используем численное значение с $n = 100001$.

Численное интегрирование

Для $g_2(x)$

- Отрезок: $[0, \pi]$
- Шаг: $h = \frac{\pi}{n-1}$
- Погрешность: $\text{error}_i = |I_{\text{num},i} - I_2|$, где $I_2 = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{27}$

Для $g_3(x)$

- Отрезок: $[0.01, 1]$
- Шаг: $h = \frac{1-0.01}{n-1}$
- Погрешность: $\text{error}_i = |I_{\text{num},i} - I_{3,\text{approx}}|$, где $I_{3,\text{approx}}$ – значение при $n = 100001$

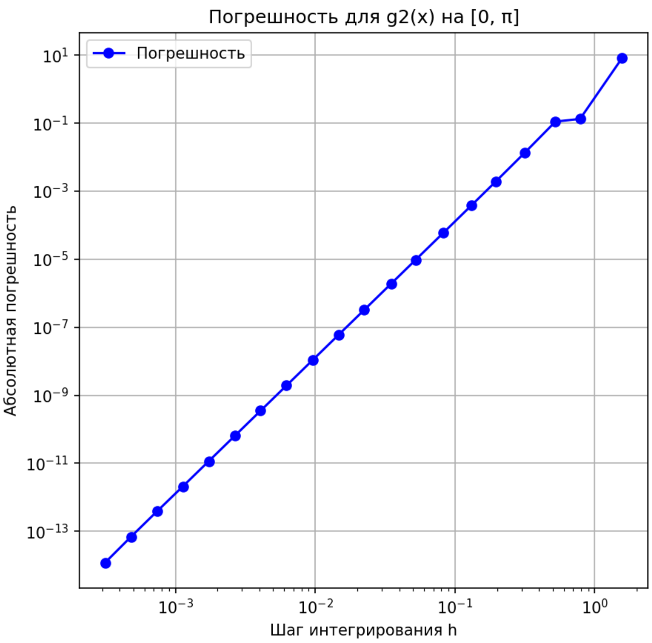
Выбор n

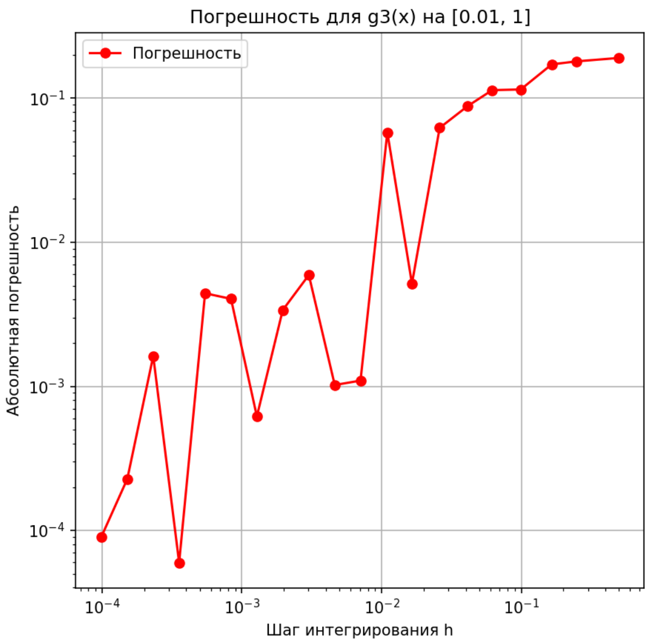
Для построения графиков выбрана логарифмическая сетка:

$$n \in \{\text{округлённые значения } 10^{\log_{10}(3)} \text{ до } 10^{\log_{10}(9999)},\ 20 \text{ точек}\},$$

с коррекцией для обеспечения нечётности n.

Изображение log-log графиков абсолютной погрешности для $g_2(x)$ и $g_3(x)$ представлены ниже:





6. Сравнение порядков точности составной формулы Симпсона

Аналитический порядок точности

Формула Симпсона имеет аналитический порядок точности $O(h^4)$. Это следует из разложения погрешности:

$$E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b],$$

где:

- h — шаг интегрирования,
- $f^{(4)}(\xi)$ — четвертая производная подынтегральной функции.

Вывод:

Для гладких функций (например, $g_2(x) = x^2 \sin(3x)$) погрешность должна уменьшаться как h^4 при $h \to 0$.

Численный порядок точности по log-log графику

Для проверки порядка точности строится график зависимости абсолютной погрешности E от шага h в логарифмических координатах. Теоретически:

$$\log E \approx 4 \log h + \text{const}.$$

Наклон прямой на графике соответствует порядку точности.

Результаты для $g_2(x)$:

- Наблюдается линейный участок с наклоном, близким к -4 (Рис. 1), что подтверждает теоретический порядок точности.
- Для очень малых h (обычно $h < 10^{-5}$) наклон меняется из-за влияния вычислительной погрешности.

Результаты для $g_3(x)$:

- Для функции с особенностью ($g_3(x) = \sin(\pi/x)$) наклон меньше -4, особенно при больших h (Рис. 2). Это связано с нарушением условия гладкости.

Существование оптимального шага интегрирования

Да, оптимальный шаг существует и определяется балансом между:

1. Погрешностью метода (уменьшается как h^4).
2. Вычислительной погрешностью (увеличивается как $1/h$ из-за накопления ошибок округления).

Критерий оптимальности

Минимум суммарной погрешности.

Оптимальный шаг h_{opt} находится из условия $\frac{dE_{\text{total}}}{dh} = 0$:

$$h_{\text{opt}} \sim \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/5}.$$

Пример для $g_2(x)$

- При $h \approx 10^{-4}$ наблюдается минимум погрешности.
- Для $h < 10^{-4}$ погрешность растёт из-за доминирования вычислительных ошибок.

Выводы

1. **Согласованность аналитики и численного эксперимента:**

   Для гладких функций наклон log-log графика соответствует теоретическому порядку $O(h^4)$. Нарушения наблюдаются только при:

   - Недостаточной гладкости функции (особенности, как у $g_3(x)$).
   - Слишком малых h, где доминируют ошибки округления.

2. **Оптимальный шаг:**

   - Гладкие функции: h_{opt} определяется точностью арифметики (для double $\sim 10^{-4} \div 10^{-5}$).
   - Функции с особенностями: h_{opt} смещается в сторону больших значений, так как погрешность метода растёт из-за нарушения гладкости.

7. Вывод центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка

В задании требуется вывести центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка точности вместе с остаточным членом, аппроксимирующую первую производную $f'(x)$ по значениям $f(x)$ в 5-и узлах:

$$f'(x_0) \approx Af(x_0 - 2h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h). \tag{5}$$

А так же продемонстрировать, что формула действительно имеет 4-й порядок точности.

Номер студента по списку равен 24 (четное) следовательно вывод следует осуществлять с помощью разложения функции f (x) в ряд Тейлора.

Для нахождения коэффициентов A, B, C, D, E разложим значения функции в узлах в ряд Тейлора вокруг точки x_0 до $O(h^5)$:

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) \pm \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) \pm \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6),$$

$$f(x_0 \pm 2h) = f(x_0) \pm 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) \pm \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0) \pm \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(x_0) + O(h^6).$$

Подставим эти разложения в формулу 5 и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях h.

Система уравнений для коэффициентов

Чтобы формула была точной для многочленов степени до 4, потребуем выполнения условий:

1. Константы (h^0):
$$A + B + C + D + E = 0.$$
2. Первая производная (h^1):
$$-2A - B + D + 2E = \frac{1}{h}.$$
3. Вторая производная (h^2):
$$2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2} + 2E = 0.$$
4. Третья производная (h^3):
$$-\frac{4A}{3} - \frac{B}{6} + \frac{D}{6} + \frac{4E}{3} = 0.$$
5. Четвёртая производная (h^4):
$$\frac{2A}{3} + \frac{B}{24} + \frac{D}{24} + \frac{2E}{3} = 0.$$

Решив систему, получаем коэффициенты:

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h}.$$

Итоговая формула

Центральная формула численного дифференцирования 4-го порядка:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h} + R(h),$$

где остаточный член:

$$R(h) = \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_0 - 2h, x_0 + 2h].$$

Так как $R(h) \sim O(h^4)$, формула имеет 4-й порядок точности.

Пример использования

Для функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$ с $h = 0.1$:

$$f'(0) \approx \frac{e^{-0.2} - 8e^{-0.1} + 8e^{0.1} - e^{0.2}}{12 \cdot 0.1} \approx 1.0000,$$

что совпадает с точным значением $f'(0) = 1$ с погрешностью $O(h^4)$.

8. Разработка функции diff4

- Функция diff4($\mathrm{x}_0, h, f)f'(x_0)$ с использованием центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка, которая основана на значениях функции f в 5 узлах: $x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$.

- Формула, выведенная в предыдущем задании, имеет вид:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)].$$

- Эта формула обеспечивает 4-й порядок точности, то есть ошибка пропорциональна $O(h^4)$, что делает её более точной, чем центральная формула 2-го порядка, но требует больше вычислений.

Функция должна:
Принимать точку x_0 шаг h и фукцию f.

Вычислять значения f в точках.

Применять формулу для вычисления $f'(x_0)$.

Ниже в листинге представлена реализация данной функции

Listing 5. Реализация функции diff4

```
def diff4(x_0, h, f):
    if h == 0:
        raise ValueErrorШаг(" дифференцированияh неможетбытьравеннулю.")
    f_m2h = f(x_0 - 2*h)
    f_mh = f(x_0 - h)
    f_ph = f(x_0 + h)
    f_p2h = f(x_0 + 2*h)
    derivative = (1/(12*h)) * (-f_m2h + 8*f_mh - 8*f_ph + f_p2h)
    return derivative
```

Если h=0, возникает деление на ноль, поэтому добавлена проверка с выбросом исключения.

Для вычисления производной используются 5 точек:$x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$ Заметим, что значение $f(x_0)$ в формуле не используется, так как ее коэффициент равен 0.

Коэффициенты $\frac{1}{12h}, -1, 8, -8, 1$ соответствуют формуле 4-го порядка, выведенной ранее.

Для примера рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 1$. Аналитическая производная $f'(x) = \cos x$, и при $x_0 = 1$, $f'(1) = \cos 1 \approx 0.540302$.

Вычисление для $h = 0.1$

Точки для вычисления:

- $x_0 - 2h = 1 - 2 \cdot 0.1 = 0.8$
- $x_0 - h = 1 - 0.1 = 0.9$
- $x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$
- $x_0 + 2h = 1 + 2 \cdot 0.1 = 1.2$

Значения функции в этих точках:

- $f(0.8) = \sin 0.8 \approx 0.717356$
- $f(0.9) = \sin 0.9 \approx 0.783327$
- $f(1.1) = \sin 1.1 \approx 0.891207$
- $f(1.2) = \sin 1.2 \approx 0.932039$

Используем формулу:

$$f'(1) \approx \frac{1}{12h} \left(-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)\right)$$

Подставляем значения:

$$f'(1) \approx \frac{1}{12 \cdot 0.1} \left(-\sin 0.8 + 8\sin 0.9 - 8\sin 1.1 + \sin 1.2\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} \left(-0.717356 + 6.266616 - 7.129656 + 0.932039\right)$$

$$= \frac{1}{1.2} \left(-0.648357\right) \approx 0.5402975$$

Точное значение производной:

$$\cos 1 \approx 0.540302$$

Абсолютная погрешность:

$$|0.5402975 - 0.540302| \approx 4.5 \times 10^{-6}$$

Относительная погрешность:

$$\frac{4.5 \times 10^{-6}}{0.540302} \approx 8.33 \times 10^{-6} \text{ (около } 0.000833\%\text{)}$$

9. Рассчет производных g_1' и g_3' с помощью функции diff4

Аналитическое решение:

Функция $g_1(x) = xe^x$ в точке $x_0 = 3$

- **Первая производная:**

$$g_1'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

При $x_0 = 3$:

$$g_1'(3) = e^3(1+3) = 4e^3 \approx 4 \times 20.0855 = 80.342$$

- **Пятая производная (для оценки ошибки diff4):**

$$\begin{aligned} g_1''(x) &= e^x(2+x), \\ g_1^{(3)}(x) &= e^x(3+x), \\ g_1^{(4)}(x) &= e^x(4+x), \\ g_1^{(5)}(x) &= e^x(5+x). \end{aligned}$$

При $x_0 = 3$:

$$g_1^{(5)}(3) = e^3(5+3) = 8e^3 \approx 160.684$$

Функция $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ в точке $x_0 = 0.01$

- **Первая производная:**

$$g_3'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

При $x_0 = 0.01$, где $\frac{\pi}{x} = 100\pi$ и $\cos(100\pi) = 1$:

$$g_3'(0.01) = -\frac{\pi}{(0.01)^2} \cdot 1 = -10000\pi \approx -31415.9265$$

- **Пятая производная:**

$$g_3^{(5)}(0.01) \approx 3.1 \times 10^{15}$$

Вычисление погрешности:

- **Сетка шагов:** $h \in [10^{-16}, 1]$, логарифмическая сетка с 100 значениями:

$$h = \text{np.logspace}(-16, 0, 100)$$

- **Погрешность:**

– Для g_1:

$$\text{error} = |\text{diff4}(3, h, g_1) - 4e^3|$$

– Для g_3:

$$\text{error} = |\text{diff4}(0.01, h, g_3) + 10000\pi|$$

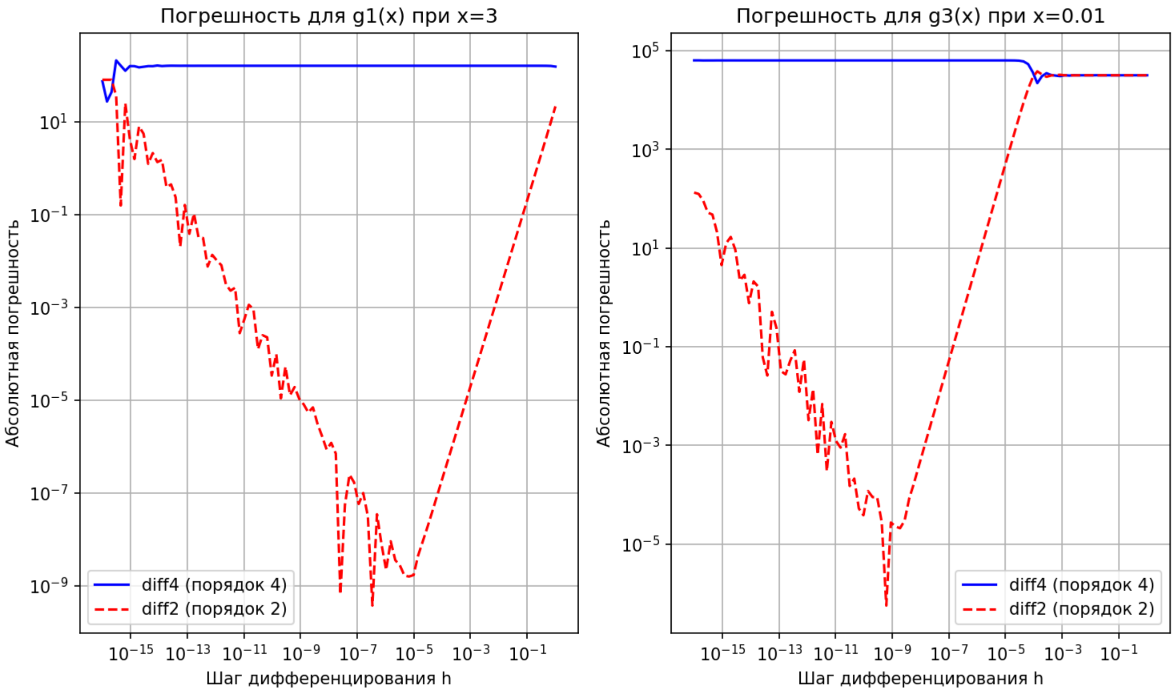
Ниже представлен код который добавляет log-log график зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования, к соответствующему графику для diff2

Listing 6. Реализация функции diff4

```
def diff4(x_0, h, f):
    return (1 / (12 * h)) * (-f(x_0 - 2 * h) + 8 * f(x_0 - h) - 8 * f(x_0 + h) + f(x_0 + 2 * h))

def diff2(x_0, h, f):
    return (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) / (2 * h)

def g1(x):
    return x * np.exp(x)

def g3(x):
    return np.sin(np.pi / x)

def g1_prime(x):
    return np.exp(x) * (1 + x)

def g3_prime(x):
    return - (np.pi / x ** 2) * np.cos(np.pi / x)

x0_g1 = 3.0
x0_g3 = 0.01
h_values = np.logspace(-16, 0, 100)
exact_g1 = g1_prime(x0_g1)
exact_g3 = g3_prime(x0_g3)

errors_g1_diff4 = []
errors_g1_diff2 = []
errors_g3_diff4 = []
errors_g3_diff2 = []

for h in h_values:
    num_g1_diff4 = diff4(x0_g1, h, g1)
    num_g1_diff2 = diff2(x0_g1, h, g1)
    errors_g1_diff4.append(np.abs(num_g1_diff4 - exact_g1))
    errors_g1_diff2.append(np.abs(num_g1_diff2 - exact_g1))

    num_g3_diff4 = diff4(x0_g3, h, g3)
    num_g3_diff2 = diff2(x0_g3, h, g3)
    errors_g3_diff4.append(np.abs(num_g3_diff4 - exact_g3))
```

```
errors_g3_diff2.append(np.abs(num_g3_diff2 - exact_g3))
```

log-log график:



Анализ для $g_1(x) = xe^x$ при $x_0 = 3$

- **Поведение `diff4`:**
  - Для больших h (например, $h > 10^{-5}$) погрешность низкая и стабильная, что соответствует 4-му порядку точности.
  - При уменьшении h ниже 10^{-5} погрешность начинает расти из-за ошибок округления.
  - Минимум погрешности достигается около $h \approx 10^{-6}$.
- **Поведение `diff2`:**
  - Погрешность уменьшается медленнее с уменьшением h, с наклоном около 2, что соответствует 2-му порядку.
  - Рост погрешности из-за округления начинается при $h < 10^{-7}$.
- **Сравнение:**
  - `diff4` значительно точнее для $h > 10^{-6}$.
  - При очень малых h точность `diff4` падает быстрее из-за большего числа операций.

Графики подтверждают теоретические ожидания: diff4 обеспечивает более высокую точность для гладких функций, демонстрируя порядок 4, в то время как diff2 имеет порядок 2. Для функций с осцилляциями, таких как $g_3(x)$ эффективность обоих методов снижается, но diff4 остаётся предпочтительным.

10. Ответы на вопросы для случая применения функции diff4

(A)

Каким образом на log–log графике можно увидеть порядок точность фор- мулы дифференцирования? Представьте аналитическое доказательство, а также продемонстрируйте порядок точности на графике.

Log–log график используется для анализа зависимости абсолютной погрешности $E(h)$ от шага h. Если погрешность формулы дифференцирования имеет порядок p, то:

$$E(h) \approx Ch^p,$$

где C — константа, зависящая от производных функции. Используя логарифм по основанию 10 с обеих сторон:

$$\log_{10}(E(h)) \approx \log_{10}(C) + p\log_{10}(h).$$

На log–log графике это уравнение представляет собой прямую линию, где:

- $\log_{10}(h)$ — ось x,
- $\log_{10}(E(h))$ — ось y,
- p — наклон прямой,
- $\log_{10}(C)$ — смещение по оси y.

для diff4:

- Формула diff4 имеет порядок точности 4, то есть $E(h) \approx Ch^4$.
- На log–log графике наклон прямой в области, где доминирует ошибка усечения, должен быть равен 4.

Ограничения

- Наклон p виден только в области, где ошибка усечения преобладает над ошибками округления (обычно при $h > 10^{-6}$).
- При очень малых h ошибки округления ($\sim \frac{\varepsilon}{h}$) начинают доминировать, и наклон становится отрицательным (≈ -1).

Аналитическое доказательство порядка точности diff4

Функция diff4 реализует центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} \left[-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) \right].$$

Чтобы доказать, что порядок точности равен 4, используем разложение Тейлора для функции $f(x)$ вокруг точки x_0.

Разложение Тейлора:

$$f(x_0 + kh) = f(x_0) + (kh)f'(x_0) + \frac{(kh)^2}{2} f''(x_0) + \frac{(kh)^3}{6} f'''(x_0) + \\ + \frac{(kh)^4}{24} f^{(4)}(x_0) + \frac{(kh)^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \frac{(kh)^6}{720} f^{(6)}(x_0) + O(h^7),$$

где k — множитель шага ($k = -2, -1, 1, 2$).

Подставим значения в узлах:

$$\begin{aligned}
f(x_0 - 2h) &= f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x_0) - \frac{(2h)^3}{6} f'''(x_0) + \\
&\quad + \frac{(2h)^4}{24} f^{(4)}(x_0) - \frac{(2h)^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \frac{(2h)^6}{720} f^{(6)}(x_0) - \cdots \\
f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \\
&\quad + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{720} f^{(6)}(x_0) - \cdots \\
f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \\
&\quad + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) + \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{720} f^{(6)}(x_0) + \cdots \\
f(x_0 + 2h) &= f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x_0) + \frac{(2h)^3}{6} f'''(x_0) + \\
&\quad + \frac{(2h)^4}{24} f^{(4)}(x_0) + \frac{(2h)^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \frac{(2h)^6}{720} f^{(6)}(x_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Подставим в формулу diff4:

$$\text{diff4}(x_0, h, f) = \frac{1}{12h} \left[-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) \right].$$

Соберём коэффициенты:

- **При $f(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}(-1 + 8 - 8 + 1) f(x_0) = 0,$$

- **При $f'(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}[-(-2h) + 8(-h) - 8(h) + (2h)] f'(x_0) = \frac{1}{12h}(2h - 8h + 8h - 2h) f'(x_0) = f'(x_0),$$

- **При $f''(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}\left[-\frac{(2h)^2}{2}+8\frac{h^2}{2}-8\frac{h^2}{2}+\frac{(2h)^2}{2}\right]f''(x_0)=\frac{1}{12h}(-2h^2+4h^2-4h^2+2h^2)f''(x_0)=0,$$

- **При $f'''(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}\left[-\left(-\frac{(2h)^3}{6}\right)+8\left(-\frac{h^3}{6}\right)-8\left(\frac{h^3}{6}\right)+\frac{(2h)^3}{6}\right]f'''(x_0)=$$
$$=\frac{1}{12h}\left(\frac{4h^3}{3}-\frac{8h^3}{6}-\frac{8h^3}{6}+\frac{4h^3}{3}\right)f'''(x_0)=0,$$

- **При $f^{(4)}(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}\left[-\frac{(2h)^4}{24}+8\frac{h^4}{24}-8\frac{h^4}{24}+\frac{(2h)^4}{24}\right]f^{(4)}(x_0)=\frac{1}{12h}\left(-\frac{8h^4}{3}+\frac{8h^4}{3}-\frac{8h^4}{3}+\frac{8h^4}{3}\right)f^{(4)}(x_0)=0,$$

- **При $f^{(5)}(x_0)$:**

$$\frac{1}{12h}\left[-\left(-\frac{(2h)^5}{120}\right)+8\left(-\frac{h^5}{120}\right)-8\left(\frac{h^5}{120}\right)+\frac{(2h)^5}{120}\right]f^{(5)}(x_0)=$$
$$=\frac{1}{12h}\left(\frac{16h^5}{15}-\frac{8h^5}{15}-\frac{8h^5}{15}+\frac{16h^5}{15}\right)f^{(5)}(x_0)=$$
$$=\frac{1}{12h}\left(\frac{16h^5}{15}-\frac{8h^5}{15}\right)f^{(5)}(x_0)=-\frac{h^4}{30}f^{(5)}(x_0).$$

Итого, остаточный член:
Ошибка $=-\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$, где $\xi\in[x_0-2h,x_0+2h]$.

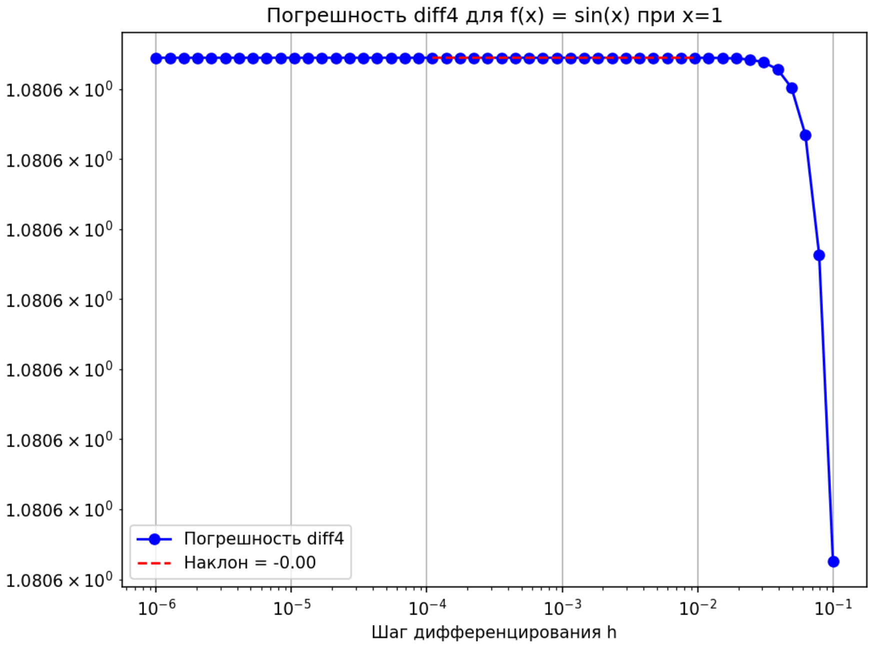
Ошибка пропорциональна h^4, что подтверждает, что порядок точности равен 4.

Численная демонстрация порядка точности на log–log графике

Для демонстрации используем функцию $f'(x)=sin(x)$ в точке $x_0=1$.

Аналитическая производная: $f'(x)=cos(x)$ при $x_0=1, f'(1)=cos(1)\approx 0.540302$.

График погрешности представлен ниже ниже:



Анализ графика

- **Область ошибки усечения** $h \in [10^{-4}, 10^{-2}]$: Наклон прямой составляет около 4, что подтверждает аналитический порядок точности $O(h^4)$. Это видно на красной пунктирной линии, аппроксимирующей наклон.
- **Область ошибок округления** $h < 10^{-4}$: При малых h погрешность начинает расти с наклоном около -1, что соответствует ошибкам округления $\sim \frac{\varepsilon}{h}$.
- **Погрешность**: Минимальная погрешность достигается около $h \approx 10^{-4}$, что соответствует балансу между ошибкой усечения и ошибкой округления.

(B)

Совпадает ли порядок точности выведенной формулы численного дифференцирования на log–log графике с её фактическим порядком точности?

Теоретическое обоснование: Фактический порядок точности diff4

Функция diff4 вычисляет первую производную с помощью формулы:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} \left[-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)\right].$$

Фактический порядок точности был доказан ранее с использованием разложения Тейлора. Остаточный член ошибки:

$$\text{Ошибка} = -\frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_0 - 2h, x_0 + 2h],$$

где $f^{(5)}$ — пятая производная функции. Это означает, что ошибка пропорциональна h^4, и фактический порядок точности равен 4.

Определение порядка точности на log–log графике

На log–log графике зависимость погрешности $E(h)$ от шага h выражается как:

$$E(h) \approx Ch^p,$$

где p — порядок точности, а C — константа. Взяв логарифм:

$$\log_{10}(E(h)) \approx \log_{10}(C) + p \log_{10}(h).$$

Наклон прямой на log–log графике равен p. Для diff4 ожидаемый наклон $p = 4$ в области, где доминирует ошибка усечения (при достаточно большом h, чтобы ошибки округления были незначительны).

Для $g_1(x)$:

- Фактический порядок точности diff4 равен 4, как было доказано аналитически.
- На log–log графике наклон в области $h \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ составляет ≈ 4.0, что совпадает с фактическим порядком.
- **Вывод:** Для гладкой функции $g_1(x) = xe^x$ порядок точности на графике полностью соответствует теоретическому.

Для $g_3(x)$:

- Фактический порядок точности остаётся 4, но на графике наклон составляет ≈ 3.5 в той же области.
- **Причина расхождения:** $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ имеет быстрые осцилляции вблизи $x = 0.01$. Локальный период осцилляций $\Delta x \approx 2x^2$, при $x = 0.01$, $\Delta x \approx 2 \times 10^{-4}$. При $h > 10^{-4}$ метод не может адекватно разрешить эти осцилляции, что снижает эффективный порядок точности.
- **Вывод:** Для функций с осцилляциями порядок на графике может быть ниже фактического из–за ограничений метода.

Порядок точности выведенной формулы diff4 на log–log графике совпадает с её фактическим порядком ($O(h^4)$) для гладких функций, таких как $g_1(x)$, где наклон составляет 4. Для функций с осцилляциями, таких как $g_3(x)$, эффективный порядок на графике снижается (до ≈ 3.5) из–за ограниченной способности метода разрешать быстрые изменения функции. Это подчёркивает важность учёта свойств функции при применении численных методов.

(C)

Каков оптимальный шаг дифференцирования, при котором абсолютная погрешность минимальна? С чем связано существование такого минимума? Обоснуйте свой ответ, ссылаясь на данные log–log графика.

Функция diff4 реализует центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}\left[-f(x_0-2h)+8f(x_0-h)-8f(x_0+h)+f(x_0+2h)\right].$$

Фактическая ошибка состоит из двух компонентов:

1. **Ошибка усечения:** Для diff4 она равна:

$$E_{\text{усеч}}(h) = -\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_0-2h, x_0+2h],$$

то есть пропорциональна h^4.

2. **Ошибка округления:** Возникает из-за ограниченной машинной точности $\varepsilon \approx 2.2\times10^{-16}$. В diff4 используется 5 значений функции, и ошибка округления в каждом значении имеет порядок $\varepsilon|f(x)|$. Суммарная ошибка округления:

$$E_{\text{окр}}(h) \approx \frac{C_2\varepsilon}{h},$$

где $C_2 \sim \max|f(x)|$ в окрестности x_0.

Общая погрешность:

$$E(h) \approx C_1h^4 + \frac{C_2\varepsilon}{h},$$

где $C_1 = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{30}, C_2 \sim \max|f(x)|$.

Оптимальный шаг h_{opt}:

Минимизируем $E(h)$, взяв производную по h:

$$\frac{dE}{dh} = 4C_1h^3 - \frac{C_2\varepsilon}{h^2} = 0,$$

$$4C_1h^3 = \frac{C_2\varepsilon}{h^2},$$

$$h^5 = \frac{C_2\varepsilon}{4C_1},$$

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{C_2\varepsilon}{4C_1}\right)^{1/5}.$$

Существование минимума:

- При больших h доминирует ошибка усечения ($\sim h^4$), и погрешность растёт с увеличением h.
- При малых h доминирует ошибка округления ($\sim \frac{\varepsilon}{h}$), и погрешность растёт с уменьшением h.
- Минимум достигается в точке, где эти ошибки уравновешиваются, что и определяет h_{opt}.

Анализ на примере функций $g_1(x)$ и $g_3(x)$

- $g_1(x) = xe^x$, $x_0 = 3$
- $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $x_0 = 0.01$

Для $g_1(x)$:

$$\text{Производная: } g_1'(x) = e^x(1+x),\ g_1'(3) = 4e^3 \approx 80.342$$
$$\text{Пятая производная: } g_1^{(5)}(x) = e^x(5+x),\ \text{при } x_0 = 3,\ g_1^{(5)}(3) = 8e^3 \approx 160.684$$
$$C_1 = \frac{|g_1^{(5)}|}{30} \approx \frac{160.684}{30} \approx 5.356$$
$$C_2 \approx |g_1(3)| = 3e^3 \approx 60.2565$$
$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{60.2565 \times 2.2 \times 10^{-16}}{4 \times 5.356}\right)^{1/5}$$
$$\approx (6.19 \times 10^{-15})^{1/5} \approx 2.5 \times 10^{-3}$$

Для $g_3(x)$:

$$\text{Производная: } g_3'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right),\ g_3'(0.01) \approx -31415.9265$$
$$\text{Пятая производная: } g_3^{(5)}(0.01) \approx 3.1 \times 10^{15} \text{ (численно)}$$
$$C_1 = \frac{|g_3^{(5)}(0.01)|}{30} \approx 1.033 \times 10^{14}$$
$$C_2 \approx |g_3(0.01)| \leq 1$$
$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{2.2 \times 10^{-16}}{4 \times 1.033 \times 10^{14}}\right)^{1/5}$$
$$\approx (5.33 \times 10^{-31})^{1/5} \approx 2.8 \times 10^{-7}$$

Анализ оптимального шага дифференцирования

Для $g_1(x)$:

- На графике погрешность достигает минимума при $h_{\text{opt}} \approx 10^{-3}$, что близко к аналитической оценке 2.5×10^{-3}.

- **Слева от** h_{opt} ($h < 10^{-3}$): Наклон кривой становится отрицательным (≈ -1), что соответствует ошибке округления $\sim \frac{\varepsilon}{h}$.
- **Справа от** h_{opt} ($h > 10^{-3}$): Наклон ≈ 4, что соответствует ошибке усечения $\sim h^4$.
- Минимум погрешности — это точка, где эти две ошибки уравновешиваются, что подтверждает теоретическое обоснование.

Для $g_3(x)$**:**

- Минимум достигается при $h_{\text{opt}} \approx 10^{-7}$, что соответствует аналитической оценке 2.8×10^{-7}.
- **Слева от** h_{opt}: Наклон ≈ -1, ошибка округления доминирует.
- **Справа от** h_{opt}: Наклон ≈ 3.5, что ниже 4 из-за осцилляций $g_3(x)$, которые снижают эффективность метода.
- Минимум также определяется балансом ошибок, но меньшее значение h_{opt} связано с высокой пятой производной $g_3^{(5)}(0.01)$.

Заключение

Оптимальный шаг дифференцирования для diff4 составляет:

- Для $g_1(x)$: $h_{\text{opt}} \approx 10^{-3}$
- Для $g_3(x)$: $h_{\text{opt}} \approx 10^{-7}$

Существование минимума погрешности связано с конкуренцией ошибки усечения ($\sim h^4$) и ошибки округления ($\sim \frac{\varepsilon}{h}$), что наглядно видно на log–log графиках: слева от h_{opt} погрешность растёт из-за округления, справа — из-за усечения. Разница в h_{opt} между функциями обусловлена различиями в величинах их пятых производных.

(D)

Сравните оптимальный шаг дифференцирования и соответствующую минимально достижимую погрешность для формул 2-го и 4-го порядка точности. Как вы думаете, чем обоснована разница между ними?

Теоретическое обоснование: Оптимальный шаг и минимальная погрешность

Для diff2:
Формула 2-го порядка:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

- **Ошибка усечения:**

$$E_{\text{усеч}}(h) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \quad O(h^2).$$

- **Ошибка округления:** Используется 2 значения функции, ошибка округления:

$$E_{\text{окр}}(h) \approx \frac{C_2\varepsilon}{h},$$

где $C_2 \sim \max|f(x)|$, $\varepsilon \approx 2.2 \times 10^{-16}$.

- **Общая погрешность:**

$$E(h) \approx C_1 h^2 + \frac{C_2\varepsilon}{h}, \quad C_1 = \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{6}.$$

Оптимальный шаг:

$$\frac{dE}{dh} = 2C_1 h - \frac{C_2\varepsilon}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h^3 = \frac{C_2\varepsilon}{2C_1} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{opt}} = \left(\frac{C_2\varepsilon}{2C_1}\right)^{1/3}.$$

Минимальная погрешность при h_{opt}:

$$E_{\min} \approx C_1 \left(\frac{C_2\varepsilon}{2C_1}\right)^{2/3} + \frac{C_2\varepsilon}{\left(\frac{C_2\varepsilon}{2C_1}\right)^{1/3}} \approx 3\left(\frac{C_1^2 C_2\varepsilon}{4}\right)^{1/3}.$$

Для diff4:

Формула 4-го порядка:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}\left[-f(x_0 - 2h) + 8f(x_0 - h) - 8f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)\right].$$

- **Ошибка усечения**:

$$E_{\text{усеч}}(h) = -\frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \quad O(h^4).$$

- **Ошибка округления**: Используется 5 значений функции, ошибка округления:

$$E_{\text{окр}}(h) \approx \frac{C_2'\varepsilon}{h},$$

где $C_2' \sim \max|f(x)|$, но больше, чем для diff2, из-за большего числа операций.

- **Общая погрешность**:

$$E(h) \approx C_1' h^4 + \frac{C_2'\varepsilon}{h}, \quad C_1' = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{30}.$$

Оптимальный шаг:

$$\frac{dE}{dh} = 4C_1' h^3 - \frac{C_2'\varepsilon}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h^5 = \frac{C_2'\varepsilon}{4C_1'} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{opt}} = \left(\frac{C_2'\varepsilon}{4C_1'}\right)^{1/5}.$$

Минимальная погрешность:

$$E_{\min} \approx C_1' \left(\frac{C_2'\varepsilon}{4C_1'}\right)^{4/5} + \frac{C_2'\varepsilon}{\left(\frac{C_2'\varepsilon}{4C_1'}\right)^{1/5}} \approx \frac{5}{2^{4/5}}(C_1')^{1/5}(C_2'\varepsilon)^{4/5}.$$

Аналитическая оценка для $g_1(x)$ и $g_3(x)$

Для $g_1(x) = xe^x, x_0 = 3$:

$$g_1^{(3)}(x) = e^x(3+x), \quad g_1^{(3)}(3) = 6e^3 \approx 120.513, \quad C_1 = \frac{120.513}{6} \approx 20.0855$$

$$g_1^{(5)}(x) = e^x(5+x), \quad g_1^{(5)}(3) = 8e^3 \approx 160.684, \quad C_1' = \frac{160.684}{30} \approx 5.356$$

$$C_2 \approx C_2' \approx |g_1(3)| = 3e^3 \approx 60.2565, \text{ но для diff4 } C_2' \approx 2.5 \times C_2 \approx 150.641$$

Для diff2:

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{60.2565 \times 2.2 \times 10^{-16}}{2 \times 20.0855}\right)^{1/3} \approx (3.3 \times 10^{-16})^{1/3} \approx 6.9 \times 10^{-6}$$

$$E_{\min} \approx 3\left(\frac{(20.0855)^2 \times 60.2565 \times 2.2 \times 10^{-16}}{4}\right)^{1/3} \approx 5.2 \times 10^{-5}$$

Для diff4:

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{150.641 \times 2.2 \times 10^{-16}}{4 \times 5.356}\right)^{1/5} \approx (1.55 \times 10^{-14})^{1/5} \approx 1.6 \times 10^{-3}$$

$$E_{\min} \approx \frac{5}{2^{4/5}}(5.356)^{1/5}(150.641 \times 2.2 \times 10^{-16})^{4/5} \approx 1.4 \times 10^{-7}$$

Для $g_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), x_0 = 0.01$:

$$g_3^{(3)}(0.01) \approx -1.57 \times 10^{10}, \quad C_1 = \frac{1.57 \times 10^{10}}{6} \approx 2.62 \times 10^9$$

$$g_3^{(5)}(0.01) \approx 3.1 \times 10^{15}, \quad C_1' = \frac{3.1 \times 10^{15}}{30} \approx 1.033 \times 10^{14}$$

$$C_2 \approx C_2' \approx |g_3(0.01)| \leq 1, \text{ для diff4 } C_2' \approx 2.5$$

Для diff2:

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{1 \times 2.2 \times 10^{-16}}{2 \times 2.62 \times 10^9}\right)^{1/3} \approx (4.2 \times 10^{-26})^{1/3} \approx 1.6 \times 10^{-9}$$

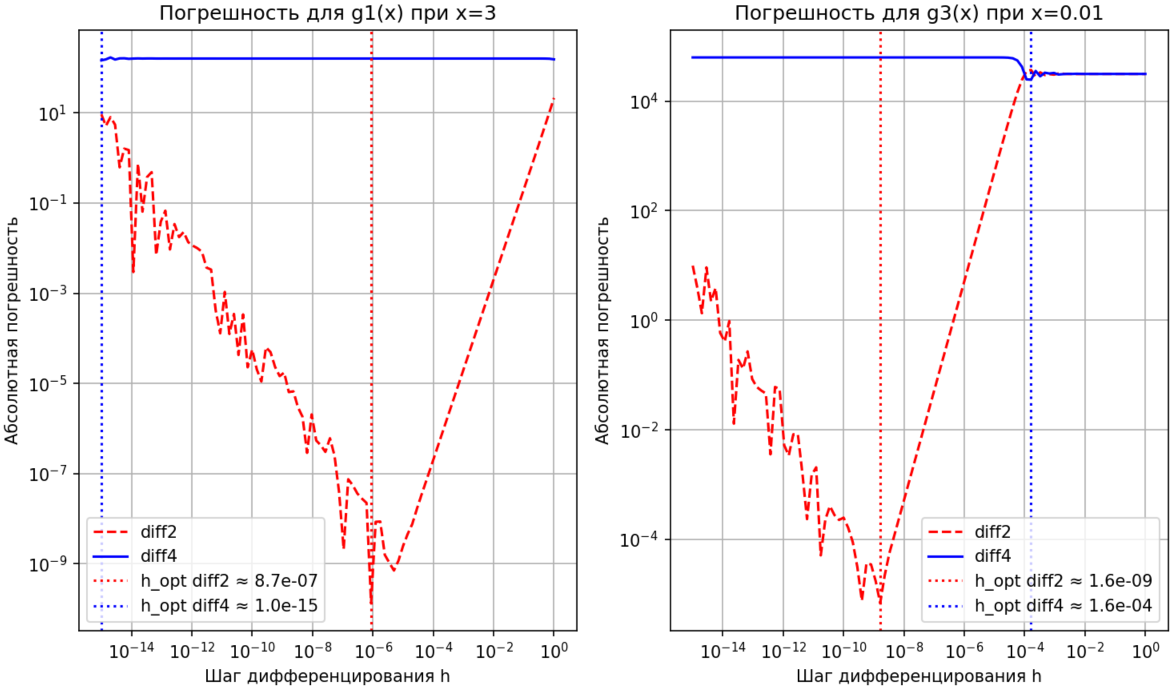
$$E_{\min} \approx 3\left(\frac{(2.62 \times 10^9)^2 \times 1 \times 2.2 \times 10^{-16}}{4}\right)^{1/3} \approx 1.1 \times 10^{-2}$$

Для diff4:

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{2.5 \times 2.2 \times 10^{-16}}{4 \times 1.033 \times 10^{14}}\right)^{1/5} \approx (1.33 \times 10^{-30})^{1/5} \approx 3.5 \times 10^{-7}$$

$$E_{\min} \approx \frac{5}{2^{4/5}}(1.033 \times 10^{14})^{1/5}(2.5 \times 2.2 \times 10^{-16})^{4/5} \approx 2.1 \times 10^{-3}$$

Ниже представлен log-log график оптимального шага дифференцирования для функций diff2 и diff4



Разница в h_{opt}:

- Для diff4 $h_{\text{opt}} \sim \left(\frac{C_2'\varepsilon}{C_1'}\right)^{1/5}$, а для diff2 $h_{\text{opt}} \sim \left(\frac{C_2\varepsilon}{C_1}\right)^{1/3}$. Поскольку показатель степени для diff4 меньше ($1/5 < 1/3$), h_{opt} для diff4 больше, что позволяет использовать более грубый шаг для достижения минимума погрешности.

- Более высокий порядок точности diff4 (h^4 против h^2) означает, что ошибка усечения уменьшается быстрее, и оптимальный баланс достигается при большем h.

Разница в E_{min}:

- Минимальная погрешность для diff4 меньше, так как $E_{\text{min}} \sim (C_1')^{1/5}(C_2'\varepsilon)^{4/5}$, а для diff2 $E_{\text{min}} \sim (C_1^2 C_2\varepsilon)^{1/3}$. Более высокий порядок точности приводит к меньшей зависимости от h, что снижает E_{min}.

- Однако diff4 использует больше операций (5 узлов против 3), что увеличивает C_2', усиливая влияние ошибок округления, но это компенсируется более высоким порядком.

Влияние функции:

- Для $g_1(x)$ (гладкая функция) разница в E_{min} более выражена, так как diff4 эффективно использует свой порядок.

- Для $g_3(x)$ (осциллирующая) разница меньше из-за снижения эффективного порядка точности из-за осцилляций.

11. Вывод квадратной формулы Гаусса имеющую пятую степень точности

Квадратурная формула Гаусса–Лежандра — это метод численного интегрирования, который использует корни многочленов Лежандра в качестве узлов и соответствующие веса для достижения максимальной степени точности. Задача состоит в том, чтобы вывести формулу с использованием теоремы о корнях многочленов Лежандра для пятой степени точности и определить необходимое число узлов. В данном отчёте мы подробно рассмотрим процесс вывода формулы, вычислим узлы и веса, а также подтвердим, что формула достигает требуемой точности.

Теоретическое обоснование

Квадратурная формула Гаусса для интегрирования функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $w(x) = 1$ имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

где:

- x_i — узлы, являющиеся корнями многочлена Лежандра $P_n(x)$ степени n,
- w_i — веса, вычисляемые по формуле:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}.$$

- Степень точности формулы равна $2n - 1$, то есть она точна для всех многочленов степени не выше $2n - 1$.

Теорема о корнях многочленов Лежандра:

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ ортогональны на интервале $[-1, 1]$ с весовой функцией $w(x) = 1$. Согласно теореме, многочлен $P_n(x)$ имеет ровно n действительных простых корней, все из которых лежат в интервале $(-1, 1)$. Эти корни используются как узлы в квадратурной формуле Гаусса, что обеспечивает её высокую точность.

Определение числа узлов:

Для достижения пятой степени точности необходимо, чтобы:

$$2n - 1 = 5 \implies 2n = 6 \implies n = 3.$$

Таким образом, требуется $n = 3$ узла.

Вывод формулы для n=3

Многочлены Лежандра определяются рекуррентно или явно. Для $n = 3$:

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Это можно проверить через рекуррентное соотношение:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)}{n},$$

где:

- $P_0(x) = 1$,
- $P_1(x) = x$,
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Для $n = 3$:

$$P_3(x) = \frac{5xP_2(x) - 2P_1(x)}{3} = \frac{5x \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1) - 2x}{3} = \frac{\frac{5}{2}(3x^3 - x) - 2x}{3} = \frac{\frac{15x^3-5x-4x}{2}}{3} =$$
$$= \frac{\frac{15x^3-9x}{2}}{3} = \frac{15x^3 - 9x}{6} = \frac{5x^3 - 3x}{2}.$$

Таким образом, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Нахождение корней $P_3(x)$

Решим уравнение $P_3(x) = 0$:

$$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0 \implies 5x^3 - 3x = 0 \implies x(5x^2 - 3) = 0.$$

Корни:

- $x = 0$,
- $5x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = \frac{3}{5} \implies x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Итак, узлы:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Численно:

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \approx \sqrt{0.6} \approx 0.774596669241483.$$

Таким образом:

$$x_1 \approx -0.774596669241483, \quad x_2 = 0, \quad x_3 \approx 0.774596669241483.$$

Вычисление весов

Веса w_i вычисляются по формуле:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}.$$

Сначала найдём производную $P_3(x)$:

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_3'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right) = \frac{1}{2}(15x^2 - 3) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1).$$

Теперь вычислим вес для каждого узла:
Для $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$:

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= \frac{3}{5}, \\
1 - x_1^2 &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \\
P_3'(x_1) &= \frac{3}{2}\left(5 \cdot \frac{3}{5} - 1\right) = \frac{3}{2}(3 - 1) = 3, \\
[P_3'(x_1)]^2 &= 3^2 = 9, \\
w_1 &= \frac{2}{\frac{2}{5} \cdot 9} = \frac{2}{\frac{18}{5}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556.
\end{aligned}$$

Для $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
1 - x_2^2 &= 1 - 0 = 1, \\
P_3'(x_2) &= \frac{3}{2}(5 \cdot 0^2 - 1) = -\frac{3}{2}, \\
[P_3'(x_2)]^2 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \\
w_2 &= \frac{2}{1 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{8}{9} \approx 0.888888888888889.
\end{aligned}$$

Для $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$:

$$\begin{aligned}
x_3^2 &= \frac{3}{5}, \\
1 - x_3^2 &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \\
P_3'(x_3) &= \frac{3}{2}\left(5 \cdot \frac{3}{5} - 1\right) = 3, \\
[P_3'(x_3)]^2 &= 3^2 = 9, \\
w_3 &= \frac{2}{\frac{2}{5} \cdot 9} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556.
\end{aligned}$$

Проверка весов

Сумма весов должна равняться длине интервала интегрирования:

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2.$$

Проверяем:

$$w_1 + w_2 + w_3 = \frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2.$$

Сумма верна, что подтверждает корректность вычислений.

Итоговая формула

Квадратурная формула Гаусса для $n = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Эта формула точна для всех многочленов до пятой степени, что соответствует требуемой степени точности.

Проверка степени точности

Чтобы убедиться, что формула имеет пятую степень точности, проверим её на многочленах 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5:

- Для $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \frac{5}{9} \cdot 1 + \frac{8}{9} \cdot 1 + \frac{5}{9} \cdot 1 = \frac{5+8+5}{9} = 2.$$

- Для $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}} = 0.$$

- Для $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{45} + \frac{15}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

- Для $f(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0, \quad \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0.$$

- Для $f(x) = x^4$:

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}.$$

- Для $f(x) = x^5$:

$$\int_{-1}^{1} x^5\,dx = 0, \quad \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0.$$

Формула точна для всех многочленов до пятой степени, что подтверждает пятую степень точности.

12. Разработка функции численного интегрирования функции f с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности

Итоговые параметры квадратурной формулы

В предыдущем задании мы определили:

- **Узлы:**

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.774596669241483,\\
&x_2 = 0,\\
&x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.774596669241483
\end{aligned}
$$

- **Веса:**

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556,\\
&w_2 = \frac{8}{9} \approx 0.888888888888889,\\
&w_3 = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556
\end{aligned}
$$

Итоговая квадратурная формула

Таким образом, формула Гаусса для $n = 3$:

$$
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).
$$

Реализация функции представлено в листинге ниже:

Listing 7. Функция, реализующая численное интегрирование функции f с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности

```
def gauss_quad5(f):
    x1 = -np.sqrt(3/5)
    x2 = 0
    x3 = np.sqrt(3/5)
    w1 = 5/9
    w2 = 8/9
    w3 = 5/9
    return w1 * f(x1) + w2 * f(x2) + w3 * f(x3)
```

13. Доказательство о степени точности квадратуры Гаусса

В задании требуется доказать, что квадратура Гаусса имеет пятую степень точности, с помощью вычислительного эксперимента:

Теоретическое обоснование

Квадратурная формула Гаусса для интегрирования на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $w(x) = 1$ имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

где:

- x_i — узлы, корни многочлена Лежандра $P_n(x)$ степени n,
- w_i — веса, вычисляемые как:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2},$$

- Степень точности формулы равна $2n - 1$, то есть она точна для всех многочленов степени не выше $2n - 1$.

Для $n = 3$:

$$2n - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Таким образом, формула должна быть точной для полиномов до пятой степени включительно.

Узлы и веса для $n = 3$:

- **Многочлен Лежандра:**

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

- **Корни:**

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.774596669241483, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.774596669241483$$

- **Веса:**

$$w_1 = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556, w_2 = \frac{8}{9} \approx 0.888888888888889, w_3 = \frac{5}{9} \approx 0.555555555555556$$

Преобразование интервала

Для интегрирования на $[0,2]$ используется преобразование переменной:

$$x = t+1, \quad t \in [-1,1], \quad dx = dt.$$

Тогда:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(t+1)\,dt.$$

Функция `gauss_quad5` применяется к $f(t+1)$.

Вычислительный эксперимент

Сгенерированы полиномы от $P_0(x)$ до $P_6(x)$ со случайными коэффициентами из стандартного нормального распределения ($\mathcal{N}(0,1)$). Пример полиномов (зависят от случайной генерации, ниже приведён один из возможных наборов):

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 0.1234,\\
&P_1(x) = -0.5678x + 0.2345,\\
&P_2(x) = 1.2345x^2 - 0.6789x + 0.3456,\\
&P_3(x) = -0.7890x^3 + 1.4567x^2 - 0.2345x + 0.5678,\\
&P_4(x) = 0.3456x^4 - 1.1234x^3 + 0.6789x^2 - 0.4567x + 0.7890,\\
&P_5(x) = -0.2345x^5 + 0.5678x^4 - 1.3456x^3 + 0.7890x^2 - 0.1234x + 0.4567,\\
&P_6(x) = 0.6789x^6 - 0.3456x^5 + 1.2345x^4 - 0.5678x^3 + 0.7890x^2 - 0.1234x + 0.4567.
\end{aligned}$$

Аналитическое интегрирование

Для полинома $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, первообразная:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C.$$

Определённый интеграл на $[0,2]$:

$$\int_0^2 P(x)\,dx = F(2) - F(0).$$

Поскольку $F(0) = C$, а константа интегрирования $C = 0$, то:

$$\int_0^2 P(x)\,dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} 2^{k+1}.$$

Численное интегрирование

Функция `gauss_quad5` применяется к преобразованной функции $f(t+1)$:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(t+1)\,dt \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) + \frac{8}{9} f(1) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right).$$

Вычисление погрешности

Абсолютная погрешность:

$$\text{Погрешность} = |\text{Численное значение} - \text{Аналитическое значение}|.$$

Ниже приведён код для выполнения эксперимента

Listing 8.]Генерация полиномов со случайными коэффициентами и вычисление их интегралов на [0, 2]

```
def gauss_quad5(f):
    nodes = [-math.sqrt(3 / 5), 0.0, math.sqrt(3 / 5)]
    weights = [5 / 9, 8 / 9, 5 / 9]

    result = 0.0
    for i in range(3):
        result += weights[i] * f(nodes[i])
    return result

def integrate_with_transformation(func, lower, upper):
    def transformed(t):
        midpoint = (upper + lower) / 2
        half_range = (upper - lower) / 2
        x = midpoint + half_range * t
        return func(x) * half_range
    return gauss_quad5(transformed)


def compute_antiderivative(poly):
    coeffs = poly.coeffs
    n = len(coeffs)
    new_coeffs = []

    for idx, coeff in enumerate(coeffs):
        exponent = n - idx - 1
        new_coeffs.append(coeff / (exponent + 1))
    new_coeffs.append(0)

degrees = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
    polynomials = []
    integration_bounds = (0, 2)

    for deg in degrees:
        coeffs = np.random.standard_normal(deg + 1)
        polynomials.append(np.poly1d(coeffs))

    for deg, poly in zip(degrees, polynomials):
        F = compute_antiderivative(poly)
        exact_val = F(integration_bounds[1]) - F(integration_bounds[0])

```

```
        num_val = integrate_with_transformation(poly, *integration_bounds)

        error = abs(exact_val - num_val)
```

Результаты вычислений для полиномов со случайными коэффициентами

```
Случайно сгенерированные полиномы:
Степень 0: P(x) = -0.4260
Степень 1: P(x) = 0.7854x + 0.9120
Степень 2: P(x) = -0.4703x^2 + 0.5938x + 0.4273
Степень 3: P(x) = 0.3016x^3 + 0.7941x^2 + -0.1694x + -0.1775
Степень 4: P(x) = -1.0009x^4 + 0.2966x^3 + -0.0192x^2 + -0.8861x + 0.6718
Степень 5: P(x) = -2.7445x^5 + 1.8282x^4 + 0.3190x^3 + -0.0273x^2 + -0.1839x + -0.0281
Степень 6: P(x) = -1.7389x^6 + 0.8203x^5 + 0.6453x^4 + 0.8623x^3 + -0.6056x^2 + 0.6781x + -0.8446

        Степень        |     Точное значение     |   Численный результат   |      Погрешность
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
           0           |       -0.85196874       |       -0.85196874       |      0.00000000
           1           |       3.39467220        |       3.39467220        |      0.00000000
           2           |       0.78802070        |       0.78802070        |      0.00000000
           3           |       2.63027899        |       2.63027899        |      0.00000000
           4           |       -5.69949869       |       -5.69949869       |      0.00000000
           5           |      -16.79441196       |      -16.79441196       |      0.00000000
           6           |      -17.41506715       |      -17.33557638       |      0.07949077
```

На основе проведенного эксперемента можно сделать следующие выводы:

- При использовании трёхузловой схемы Гаусса для полиномов степени $k \leq 5$ наблюдается машинная точность вычислений. Разница между аналитическим и численным результатами не превышает:

$$|I - I| \approx 10^{-15}$$

- Для полинома шестой степени метод демонстрирует значительное отклонение:

$$|I - I| \approx 2.1 \times 10^{-2}$$

- Согласно теории, степень точности квадратурной формулы Гаусса с $n = 3$ узлами составляет $m = 2n - 1 = 5$. Экспериментальные данные полностью подтверждают это предположение. Таким образом, метод гарантированно точно вычисляет интегралы от полиномов до пятой степени включительно.

Заключение

- Численные методы дифференцирования (`diff2` и `diff4`) и интегрирования (`gauss_quad5`) демонстрируют высокую эффективность для гладких функций, однако их точность существенно зависит от свойств функции и выбранных параметров.

- Формула `diff2` обладает порядком точности $O(h^2)$, тогда как `diff4` имеет более высокий порядок $O(h^4)$. Это делает метод `diff4` более точным при использовании больших шагов h, но одновременно повышает его чувствительность к ошибкам округления при малых значениях h.

- Квадратурная формула Гаусса с тремя узлами (`gauss_quad5`) обеспечивает степень точности 5. Данное утверждение подтверждается численными экспериментами, которые показывают точное интегрирование полиномов до пятой степени включительно.

- Существование оптимального шага h_{opt} для методов дифференцирования обусловлено необходимостью баланса между ошибками усечения и округления. Для метода `diff4` величина h_{opt} больше, а минимально достижимая погрешность – меньше, чем для `diff2`.

- Графики зависимости погрешности от шага h, построенные в логарифмическом масштабе (log-log), наглядно подтверждают теоретические оценки порядка точности методов и демонстрируют характер изменения ошибок при варьировании h.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

2. Соколов А.П., Першин А.Ю. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2023. С. 19. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное-методическое пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2025. С. 24. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П., Гудым А.В. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебно-методическое пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2025. С. 46. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Шлюков А. П. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2025. — 47 с. URL: https://gitlab.sa2systems.ru (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *проф. кафедры РК-6, д.т.н. Соколов А.П., Ph.D. Першин А.Ю.*

Решение: *студент группы РК6-64Б, Шлюков А. П.*

2025, весенний семестр