Алгоритм разложения по сингулярным значениям

Heesterman_ed_Handbook_of_linear_algebra_1990_Chapter_45_Computation

Алгоритм 5: DC_SVD($n, B, \sum, U, V$): Разделяй и властвуй бидиагональная SVD

Информация на входе:

- n – количество столбцов у рассматриваемой матрицы A
- B – нижняя бидиагональная матрица размера (n + 1) на n.

Информация на выходе:

- $\sum$ - диагональная матрица размера n на n
- U – ортогональная матрица размера (n+1) на (n+1)
- V – ортогональная матрица размера n на n, такая, что $B = U\sum V^T$

Опишем алгоритм пошагово

1. Если $n < n_0$, тогда вызываем алгоритм Голуб – Рейнш SVD с входными данными $n, n+1, B$, чтобы получить на выходе $\sum, U, V$. Иначе пусть $B = \begin{pmatrix} B_1 & \alpha_k \boldsymbol{e}_k & 0 \\ 0 & \beta_k \boldsymbol{e}_1 & B_2 \end{pmatrix}$, где $k = n/2$.

a. Вызываем DC_SVD($k-1, B_1, \sum_{1,} U_1, W_1$).
b. Вызываем DC_SVD($n-k, B_2, \sum_{2,} U_2, W_2$).
c. Разбиваем $U_i = (Q_i, \boldsymbol{q}_i)$, для i = 1,2, где $\boldsymbol{q}_i$ – вектор-столбец.
d. Извлекаем $l_1 = Q_1^T \boldsymbol{e}_k, \lambda_1 = \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{e}_k, l_2 = Q_2^T \boldsymbol{e}_1, \lambda_2 = \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{e}_1$.
e. Разбиваем B как

$$B = \begin{pmatrix} c_0 \boldsymbol{q}_1 & Q_1 & 0 & -s_0 \boldsymbol{q}_1 \\ s_0 \boldsymbol{q}_2 & 0 & Q_2 & c_0 \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ \alpha_k l_1 & \sum_1 & 0 \\ \beta_k l_2 & 0 & \sum_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= (Q \quad q) \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} W^T,$$

где $r_0 = \sqrt{(\alpha_k \lambda_1)^2 + (\beta_k \lambda_2)^2}, c_0 = \frac{\alpha_k \lambda_1}{r_0}, s_0 = \frac{\beta_k \lambda_2}{r_0}$.

f. Вычисляем сингулярные значения M, решая характеристическое уравнение $f(w) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^2}{d_k^2 - w^2} = 0$, обозначаем вычисленные сингулярные значения $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n$.
g. Для $i = 1, \dots, n$ вычислить $\check{z}_i = \sqrt{(\hat{w}_n^2 - d_i^2) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(\hat{w}_k^2 - d_i^2)}{(d_k^2 - d_i^2)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(\hat{w}_k^2 - d_i^2)}{(d_{k+1}^2 - d_i^2)}}$.
h. Для $i = 1, \dots, n$ вычислить сингулярные векторы

$$\boldsymbol{u}_i = \left(\frac{\check{z}_1}{d_1^2 - \hat{w}_i^2}, \dots, \frac{\check{z}_n}{d_n^2 - \hat{w}_i^2}\right) \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\check{z}_k^2}{(d_k^2 - \hat{w}_i^2)^2}}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \left(-1, \frac{d_2 \check{z}_2}{d_2^2 - \hat{w}_i^2}, \dots, \frac{d_n \check{z}_n}{d_n^2 - \hat{w}_i^2}\right) \Big/ \sqrt{1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(d_k \check{z}_k)^2}{(d_k^2 - \hat{w}_i^2)^2}}$$

Получим $U = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n], V = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$.

Возвращаем $\sum = \begin{pmatrix} diag(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) \\ 0 \end{pmatrix}, U \leftarrow (QU \quad q), V \leftarrow WV$.