Алгоритм «приведение матрицы Хаусхолдера к двудиагональной форме».

В советской математической литературе метод приведения матрицы Хаусхолдера к двудиагональной форме чаще называется методом отражений. Сама же двудиагональная форма называется так же «бидиагональной».

На вход алгоритма поступает матрица A, числа m и n, такие, что матрица A размера $m \times n$.

На выходе ожидаются матрицы B, V и U такие, что матрица B – верхняя бидиагональная, U и V являются результатом матрицы Хаусхолдера, где $A = UBV^T$.

Опишем пошагово алгоритм:

1. $B \leftarrow A$ (Пропустим этот шаг, если A должно быть перезаписано на B)
2. $U = I_{m\times n}$. (Создадим матрицу U размера $m\times n$)
3. $V = I_{n\times n}$. (Создадим матрицу V размера $n\times n$)
4. Определим матрицу Хаусхолдера Q_k (для $k = 1, \dots, n$) со следующим свойством: умножение слева столбца на матрицу Q_k оставляет компоненты $1, \dots, k-1$ неизменными, причём
$$Q_k \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1,k} \\ b_{k,k} \\ b_{k+1,k} \\ \vdots \\ b_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1,k} \\ s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ где } s = \pm\sqrt{\sum_{i=k}^{m} b_{i,k}^2}.$$
5. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу B
$B \leftarrow Q_k B$.
6. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу U
$U \leftarrow U Q_k$.
7. Если $k \le n-2$, то определим матрицу Хаусхолдера (для $k = 1, \dots, n$) P_{k+1} со следующим свойством: умножение справа строки на матрицу P_{k+1} оставляет компоненты $1, \dots, k$ неизменными, причём
$$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{k,k} \quad b_{k,k+1} \quad b_{k,k+2} \quad \cdots \quad b_{k,n}]\, P_{k+1} =$$
$$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{k,k} \quad s \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \text{ где } s = \pm\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} b_{k,j}^2}.$$
8. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу B
$B \leftarrow B P_{k+1}$.
9. Переопределим (для $k = 1, \dots, n$) матрицу V

$V \leftarrow P_{k+1} V$.

Алгоритм «шаг алгоритма Голуба-Кахана».

На вход алгоритма поступают, числа n, p, q, матрицы B, Q, P такие, что матрица B размера $n \times n$ является верхней бидиагональной, Q и P имеют ортогональные столбцы, а матрица $A = QBP^T$.

На выходе ожидаются матрицы B, Q и P такие, что матрица B – верхняя бидиагональная, Q и P имеют ортогональные столбцы, а недиагональные элементы выходной матрицы B меньше, чем недиагональные элементы входной матрицы. (Матрицы B, Q и P перезаписываются в хранилище)

Опишем пошагово алгоритм:

1. Введём матрицу $B_{2,2}$, которая является диагональным блоком матрицы B с номерами строки и столбца $p + 1, \ldots, n - q$.
2. Найдём матрицу $B_{2,2}^T$.
3. Введём C такой, что C – нижняя правая подматрица размером 2×2 матрицы $B_{2,2}^T B_{2,2}$.
4. Найдём собственные значения λ_1, λ_2 подматрицы C.
5. Из чисел λ_1, λ_2 найдём то, что ближе к элементу $c_{2,2}$ матрицы C.
6. Введём μ = найденному числу п.5.
7. Введём $k = p + 1$.
8. Введём $\alpha = b_{k,k}^2 - \mu$.
9. Введём $\beta = b_{k,k} b_{k,k+1}$.
   Все последующие шаги выполнять при $k = p + 1, \ldots, n - q - 1$.
10. Введём $c = \cos(\theta)$ и $s = \sin(\theta)$ такие, что $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 \end{bmatrix}$.
11. Введём матрицу $R_{k,k+1}(c,s)$ – матрица вращение Гивенса, действующая на столбцы k и $k + 1$ во время умножения справа.
12. Переопределим $B \leftarrow B\, R_{k,k+1}(c,s)$.
13. Переопределим $P \leftarrow P\, R_{k,k+1}(c,s)$.
14. Приравняем $\alpha = b_{k,k}$, $\beta = b_{k+1,k}$.
15. Приравняем $c = \cos(\theta)$ и $s = \sin(\theta)$ так, что $\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 0 \end{bmatrix}$.
16. Введём матрицу $R_{k,k+1}(c,-s)$ – матрица вращение Гивенса, действующая на столбцы k и $k + 1$ во время умножения слева.
17. Переопределим $B \leftarrow R_{k,k+1}(c,-s)\, B$.
18. Переопределим $Q \leftarrow Q\, R_{k,k+1}(c,s)$.
19. Если $k \leq n - q - 1$, то приравняем
    $\alpha = b_{k,k+1}$, $\beta = b_{k,k+2}$.