Краткое описание

Изначально нам дана матрица . В обратном случае, мы можем транспонировать матрицу и найти SVD для нее, потому что таким образом мы найдём SVD и для изначальной матрицы. Вот доказательство того, что это можно сделать

Существует два варианта метода Якоби – односторонний и двусторонний. Двусторонний подходит только для симметричных квадратных матриц. Цель нашего проекта – алгоритмы получения сингулярного разложения **для матриц общего вида**, поэтому мы его рассматривать не будем, хотя он очень схож с односторонним.

Суть одностороннего метода Якоби состоит в том, чтобы с помощью последовательности поворотов сделать так, чтобы столбцы матрицы стали ортогональными. Некоторые столбцы матрицы могут стать нулевыми, но в этом нет ничего страшного

Поворотом мы называем матрицу поворота Якоби . Индексом поворота будем называть пару . Поворот с индексом приводит матрицу к матрице , у которой . Формулы, по которым высчитываются элементы матрицы , будут приведены в псевдокоде. Основная мысль – матрица поворота позволяет занулять элементы исходной матрицы, и мы пользуемся этим свойством.

Очевидно, что зануляя случайные элементы матрицы, мы не приведём её к нужному виду. Нужна стратегия выбора индекса следующего поворота. Изначально было доказано, что алгоритм остается корректным, если использовать циклическую стратегию выбора поворота: поочередно применяются повороты с индексами . Однако такой алгоритм требует очень много времени, поэтому мы будем использовать стратегию «с выбором цели» (Jacobi Target Selection). Она описана в псевдокоде. Такая стратегия среди всех известных обеспечивает наибыстрейшую сходимость алгоритма.

Допустим, мы привели матрицу к матрице , где – матрица -ого поворота, у которой все столбцы ортогональны. Найдём матрицы и Найдем норму каждого ненулевого столбца . Поменяем столбцы матрицы так, чтобы их нормы шли в порядке невозрастания, т.е. так, чтобы при . Если мы меняем и местами, то также нужно поменять местами строки матрицы . Матрица формируется следующим образом:

при

Нормируем столбцы матрицы , допишем к ним нулей, чтобы матрица стала . Теперь заменим нулевые столбцы матрицы столбцами, ортогональными ненулевым столбцам – первые компонент этих столбцов должны равняться 0, а одна из оставшихся компонент – 1, остальные также должны быть равными 0. Так мы получаем матрицу .

Получаем сингулярное разложение .

Матрицу будем считать ортогональной, когда , где – параметр сходимости, произвольное маленькое число, которое вводит пользователь.

Псевдокод

Вход: матрица

Выход: матрицы

пустой массив троек

Отсортировать элементы по скалярным произведениям в убывающем порядке

Вычислить как указано в кратком описании;

;