

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

Учебная программа дисциплины



Конспект лекций

Методические указания по практическим занятиям

Методические указания по самостоятельной работе

Банк тестовых заданий в системе UniTest



УДК 535
ББК 22.343
С47

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Нелинейная оптика» подготовлен в рамках инновационной образовательной программы «Микро-, наноструктурированные материалы и нанофотоника», реализованной в ФГОУ ВПО СФУ в 2007 г.

Рецензенты:

Красноярский краевой фонд науки;

Экспертная комиссия СФУ по подготовке учебно-методических комплексов дисциплин

Слабко, В. В.

С47 Нелинейная оптика. Версия 1.0 [Электронный ресурс] : конспект лекций / В. В. Слабко, А. В. Закарлюка, Н. Э. Лямкина. – Электрон. дан. (2 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. – (Нелинейная оптика : УМКД № 94-2007 / рук. творч. коллектива В. В. Слабко). – 1 электрон. опт. диск (DVD). – Систем. требования : *Intel Pentium* (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 2 Мб свободного дискового пространства ; привод *DVD* ; операционная система *Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista* (32 бит) ; *Adobe Reader 7.0* (или аналогичный продукт для чтения файлов формата *pdf*).

ISBN 978-5-7638-1273-2 (комплекса)

ISBN 978-5-7638-1452-1 (конспекта лекций)

Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320802571 от 06.12.2008 г. (комплекса)

Настоящее издание является частью электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Нелинейная оптика», включающего учебную программу, методические указания по практическим занятиям, методические указания по самостоятельной работе, контрольно-измерительные материалы «Нелинейная оптика. Банк тестовых заданий», наглядное пособие «Нелинейная оптика. Презентационные материалы».

Дано систематизированное представление физики нелинейно-оптических преобразователей частоты с использованием сегнетоэлектрических кристаллов. Изложены методы их расчета. Рассмотрены процессы параметрического взаимодействия волн на нелинейностях нечетных порядков в атомных и молекулярных газовых средах с учетом резонансов и в материалах с отрицательным показателем преломления, а также процессы, ограничивающие эффективность преобразования.

Предназначен для студентов направления подготовки магистров 140400.68 «Техническая физика» укрупненной группы 140000 «Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника».

© Сибирский федеральный университет, 2008

Рекомендовано к изданию
Инновационно-методическим управлением СФУ

Редактор Л. И. Вейсова

Разработка и оформление электронного образовательного ресурса: Центр технологий электронного обучения информационно-аналитического департамента СФУ; лаборатория по разработке мультимедийных электронных образовательных ресурсов при КрЦНИТ

Содержимое ресурса охраняется законом об авторском праве. Несанкционированное копирование и использование данного продукта запрещается. Встречающиеся названия программного обеспечения, изделий, устройств или систем могут являться зарегистрированными товарными знаками тех или иных фирм.

Подп. к использованию 01.10.2008

Объем 2 Мб

Красноярск: СФУ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

Оглавление

Введение	5
Лекция № 1. Предмет нелинейной оптики, история ее развития	6
Лекция № 2. Когерентные нелинейно-оптические эффекты	11
Лекция № 3. Нелинейный отклик среды.....	15
Лекция № 4. Феноменологическое описание восприимчивостей	21
Лекция № 5. Метод медленно меняющихся амплитуд	27
Лекция № 6. Генерация второй гармоники	32
Лекция № 7. Точное решение для генерации второй гармоники.....	37
Лекция № 8. Параметрическое усиление	43
Лекция № 9. Нестационарные укороченные уравнения.....	49
Лекция № 10. Нестационарная генерация второй гармоники.....	54
Лекция № 11. Пространственно-временная аналогия.....	59
лекция № 12. взаимодействие волн в средах с отрицательной дисперсией.....	65
Лекция № 13. Особенности газовых нелинейно- оптических сред.....	76
Лекция № 14. Ограничивающие процессы	82
Лекция № 15. Вынужденное комбинационное рассеяние	88
Лекция № 16. Антистоксовы компоненты вынужденного комбинационного рассеяния	93
Лекция № 17. Обращение волнового фронта	97

Библиографический список	103
---------------------------------------	------------

ВВЕДЕНИЕ

Появление лазеров в самом начале 60-х прошлого столетия годов дало мощный импульс развитию нелинейной оптики, что привело, в свою очередь, к новым достижениям в лазерной технике, заключающимся в создании высокоэффективных генераторов оптических гармоник и параметрических генераторов света, позволивших существенно расширить диапазон частот генерируемого когерентного излучения и найти перспективные пути плавной перестройки частоты.

В курсе лекций, в основном базирующемся на книге В. Г. Дмитриева и Л. В. Тарасова «Прикладная нелинейная оптика», рассматриваются физика процессов, происходящих в генераторах второй оптической гармоники и параметрических генераторах света, процессы вынужденного комбинационного рассеяния и вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна. Авторы стремились дать систематизированное представление физики нелинейно-оптических преобразователей частоты, изложить используемые методы расчета, учесть совокупность различных факторов, реально влияющих на работу рассматриваемых приборов и устройств. В курсе лекций отражены многие направления в развитии генераторов второй гармоники; рассмотрены угловой и диафрагменный апертурные эффекты, групповое запаздывание при накачке пико-, и фемтосекундными импульсами и другие вопросы. При изложении вопросов параметрической генерации отдельно выделены случаи непрерывной и импульсной накачки; учтены эффекты, связанные с накачкой ультракороткими импульсами. Кроме того, рассмотрены процессы параметрического взаимодействия волн на нелинейностях нечетных порядков в атомных и молекулярных газовых средах с учетом резонансов и материалах с отрицательным показателем преломления; процессы, ограничивающие эффективность преобразования.

В основу анализируемых в дисциплине методов положены соответствующие модификации систем укороченных уравнений; изложены различные подходы и приближения, проанализированы некоторые физические модели, адекватно отражающие реальные ситуации.

Курс лекций «Нелинейная оптика» является составной частью программы «Оптическая физика и квантовая электроника» по направлению магистерской подготовки «Техническая физика», и авторы надеются, что он будет полезен студентам и аспирантам, а также преподавателям вузов специализирующимся в области нелинейной оптики и лазерной физики.

ЛЕКЦИЯ № 1. ПРЕДМЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ, ИСТОРИЯ ЕЕ РАЗВИТИЯ

Предмет нелинейной оптики, история ее развития. Классификация нелинейно-оптических эффектов. Некогерентные нелинейно-оптические эффекты.

Предмет нелинейной оптики, история ее развития. Когда говорят о распространении света в веществе, предполагается, что характеристики среды не изменяются под его воздействием. Из этого следует, в частности, принцип суперпозиции, позволяющий рассматривать любое волновое поле как сумму полей (компонент) более простой пространственной конфигурации (например, в виде плоских монохроматических волн). При этом каждая из компонент может рассматриваться независимо от других. Физической причиной, обосновывающей принцип суперпозиции, является следующее. Электрические поля в атомах и молекулах, которые являются основными определяющими структуру и оптические свойства элементами их конструкции, велики. Существовавшие в долазерную эпоху источники света даже с использованием всех мыслимых оптических систем могли обеспечить электрические поля в световой электромагнитной волне на много порядков меньше, чем внутриатомные. Это означает, что влияние электромагнитного поля волны на свойства среды пренебрежимо мало и не проявлялось в реальных условиях. Отклик среды на внешнее оптическое воздействие в этом случае пропорционален (линеен) величине электрического поля в волне и принцип линейной суперпозиции выполняется. Поэтому систему теоретического описания таких явлений, возникающих при взаимодействии света с веществом, называют линейной оптикой.

Открытие принципа квантового усиления и создание на этой базе оптических квантовых генераторов (лазеров) позволило генерировать оптические поля с напряженностью, сравнимой с напряженностью внутриатомного поля. Воздействие такого оптического излучения на среду приводит к изменению ее оптических свойств. Это означает, что волна в среде испытывает как самовоздействие, так и может оказывать влияние на процессы распространения в среде других волн (и не только электромагнитных). Естественно, в этом случае принцип суперпозиции уже не работает, что ведет к возникновению новых, не наблюдавшихся ранее явлений и требует развития новых теоретических подходов. Это область уже новой науки, называемой нелинейной оптикой. Термин «нелинейная оптика» впервые был введен российским ученым С. И. Вавиловым в 1925 г., которому удалось наблюдать уменьшение поглощения света

Графика формул и символов в тексте приводится в авторской редакции.



урановыми стеклами при прохождении через них оптического излучения с высокой интенсивностью. С начала 60-х годов этого же столетия, после создания лазеров, нелинейно-оптические явления стали доступны не только наблюдению, но и превратились в серьезный инструмент изучения вещества, стали основой для создания совершенно новых устройств лазерной техники.

Таким образом, предметом нелинейной оптики являются процессы взаимодействия света и вещества, характер протекания которых зависит от его интенсивности. К таким процессам относятся явления резонансного просветления среды, двухфотонного или многофотонного поглощения света, оптический пробой среды генерация оптических гармоник, «выпрямление» света, вынужденное рассеяние света, самофокусировка световых пучков, самомодуляция импульсов и ряд других эффектов, проявляющихся в полях лазерного излучения.

Классификация нелинейно-оптических эффектов. Некогерентные нелинейно-оптические эффекты.

Такие оптические характеристики среды, как показатель преломления и коэффициент поглощения, не зависят от интенсивности света, если реакция среды на электрическое поле световой волны описывается линейным материальным уравнением $P = \chi E$, т. е. поляризованность пропорциональна напряженности поля, а коэффициент пропорциональности – восприимчивость χ – зависит только от свойств среды. Но это материальное уравнение приближенно: оно справедливо лишь при напряженностях E электрического поля световой волны, малых по сравнению с напряженностями E_a , внутриатомных электрических полей. Для оценки E_a можно считать, что по порядку величины $E_a \sim e/a^2$, где a – размер атома, e – заряд электрона. Так как $a \sim 10^{-8}$ см, то $E \sim 10^8$ – 10^9 В/см.

В пучках света от нелазерных источников достижимые значения напряженности поля не превосходят 0,1–10 В/см и линейное материальное уравнение выполняется с большой точностью. Однако в интенсивных лазерных пучках напряженность E поля достигает 10^6 – 10^7 В/см. В таких полях модель гармонического осциллятора для описания поведения оптического электрона атома уже неприменима и связь поляризованности среды с напряженностью поля световой волны становится нелинейной. В результате возникает зависимость оптических характеристик среды от интенсивности излучения, которая приводит не к каким-либо малым поправкам, а к принципиально новым эффектам, не существующим

в линейной оптике. Нелинейная оптика существенно расширяет наши представления о взаимодействии света с веществом.

Первый нелинейный эффект был открыт С. И. Вавиловым и В. Л. Левшиным еще в 1925 г. Несмотря на трудности опытов с нелазерными источни-

ками им удалось наблюдать небольшое уменьшение (до 1,5 %) коэффициента поглощения уранового стекла с увеличением интенсивности света. Возникновение этого нелинейного *эффекта насыщения* обусловлено выравниванием населенностей двух уровней энергии, между которыми происходят квантовые переходы с поглощением и испусканием света. При большой интенсивности падающего света вероятность вынужденных переходов может приблизиться к вероятности релаксационных спонтанных переходов, посредством которых возбужденные атомы или молекулы избавляются от избытка энергии и возвращаются в основное состояние. С увеличением интенсивности рост поглощаемой мощности замедляется и она приближается к некоторому пределу, определяемому скоростью, с которой возбужденные атомы отдают избыток энергии окружающей среде (скоростью релаксации). Уменьшение доли поглощаемой мощности с увеличением интенсивности света, т. е. *просветление* нелинейной поглощающей среды при прохождении сильных световых пучков, нашло применение в лазерной технике, где оно используется для модуляции добротности оптических резонаторов с целью генерации сверхкоротких мощных импульсов. Ячейка с нелинейной поглощающей средой представляет собой автоматический затвор, открывающийся под воздействием мощного светового пучка. Очень важно, что такой затвор обладает малой инерционностью, так как после прохождения мощного светового импульса среда быстро становится снова непрозрачной для слабого света.

В активной среде с инверсией населенностей эффект насыщения приводит к уменьшению коэффициента усиления при увеличении интенсивности света и тем самым к установлению стационарного режима генерации в лазерах. Если непрозрачная для слабого света среда за счет эффекта насыщения становится прозрачной в сильных световых пучках, то прямо противоположная ситуация наблюдается в области оптической прозрачности среды. Здесь в результате **многофотонного поглощения** интенсивный свет может поглощаться гораздо сильнее, чем слабый. При больших плотностях излучения система с уровнями энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ может поглотить в элементарном акте два фотона с частотами ω_1 и ω_2 , такими, что $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ (в частном случае $\omega_1 = \omega_2 = 1/2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1/\hbar)$). Вероятность поглощения двух фотонов пропорциональна произведению интенсивностей пучков с частотами ω_1 и ω_2 (или квадрату интенсивности при $\omega_1 = \omega_2$). Возможно также одновременное поглощение трех фотонов и более. Многофотонное поглощение находит применение в нелинейной лазерной спектроскопии и позволяет получать информацию об энергетических уровнях квантовых систем.

К нелинейным некогерентным эффектам поглощения примыкает и **многофотонный фотоэффект**. В экспериментах с фокусируемыми лазер-

ными пучками достигаются столь высокие интенсивности светового поля, что становятся доступными наблюдению процессы, в которых атом поглощает восемь и более фотонов. В результате может произойти фотоионизация атома светом малой частоты, т. е. в интенсивных световых полях исчезает красная граница фотоэффекта.

Одним из ярких примеров нелинейных некогерентных эффектов является **самофокусировка света**. Эффект состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда приобретает фокусирующие (линзовые) свойства. В результате световой пучок «охлопывается», превращаясь в тонкую светящуюся нить, или распадается на несколько таких нитей. Механизм самофокусировки связан с изменением показателя преломления среды под действием мощной световой волны. Причины этого могут быть разными. Например, электрострикция в световом поле приводит к появлению давления, изменяющего плотность среды в области, занятой световым пучком, а следовательно, и показатель преломления среды. В жидкости сильное световое поле приводит к ориентации анизотропно поляризующихся молекул за счет взаимодействия света с наведенным дипольным моментом, при этом среда становится анизотропной, а средний показатель преломления для ориентирующего поля возрастает. Этот эффект принято называть высокочастотным эффектом Керра; изменение показателя преломления здесь, как и в хорошо известном статическом эффекте Керра, происходит за счет «выстраивания» молекул по полю. Зависящая от интенсивности световой волны добавка к показателю преломления может быть связана также с нелинейностью электронной поляризации. Наконец, изменение плотности, а следовательно, и показателя преломления может быть связано с нагревом среды, вызванным диссипацией энергии мощной световой волны.

Самофокусировка света была теоретически предсказана Аскарьяном в 1962 г., а экспериментально впервые наблюдалась Пилипецким и Рустамовым в 1965 г. В их опытах были фотографически зарегистрированы узкие светящиеся нити в органических жидкостях, облучаемых сфокусированным пучком рубинового лазера.

Обратным по отношению к самофокусировке является эффект **самодефокусировки**. Под действием мощного лазерного излучения в среде появляется нелинейная добавка к показателю поглощения. В том случае если эта добавка положительна, происходит самофокусировка (формируется нелинейная положительная квазилинза). При отрицательной добавке показатель преломления на оси пучка уменьшается и формируется нелинейная отрицательная квазилинза, что приводит к самодефокусировке. Так, при прохождении лазерного излучения через жидкость даже слабое его поглощение приводит

к тепловому расширению жидкости, уменьшению ее плотности и показателя

преломления и, в конечном счете, формирует тепловую дефокусирующую линзу, увеличивающую угловую расходимость лазерного пучка.

Те же самые механизмы обуславливают и другой эффект нелинейного самовоздействия света – **самомодуляцию** светового импульса. При самомодуляции импульса, которая может происходить, например, в оптическом волокне, резко расширяется частотный спектр импульса, что дает возможность путем последующей компрессии получать предельно короткие световые импульсы. Данный эффект используется в системах генерации фемтосекундных лазерных импульсов.

Итак, главной особенностью некогерентных нелинейно-оптических эффектов является их независимость от фазы лазерного излучения. Очевидно, что помимо большой интенсивности лазерное излучение отличается высокой степенью когерентности. Последнее проявляется в нелинейно-оптических эффектах, в которых фазовые соотношения играют определяющую роль. Эти эффекты будут рассмотрены на следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ № 2. КОГЕРЕНТНЫЕ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Генерация гармоник. Смещение частот. Вынужденное комбинационное рассеяние света. Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде.

Рассмотрим отдельные явления, в которых когерентность лазерного излучения играет определяющую роль.

Генерация гармоник. Смещение частот.

Это явление состоит в удвоении частоты света при распространении мощного лазерного пучка в кристалле. Механизм процесса связан с нелинейностью элементарного атомного осциллятора. Удвоение частоты света в кристалле было первым когерентным нелинейно-оптическим эффектом, обнаруженным вскоре после создания лазера в 1961 г. Схема опыта Франкена, в котором наблюдался этот эффект, показана на [рис. 2.1](#). Излучение рубинового лазера, имеющего длину волны $\lambda = 6943 \text{ А}$, фокусировалось в кристалл кварца. Излучение, выходящее из кристалла, разворачивалось в спектр с помощью дисперсионной призмы и фокусировалось на фотопластинку. Опыт показал, что помимо света на частоте лазера из кристалла выходит свет на удвоенной частоте (вторая гармоника), имеющий длину волны $\lambda/2 = \lambda_2, (\omega_2 = 2\omega) = 3471,5 \text{ А}$. Несмотря на то, что излучение второй гармоники в опыте Франкена было чрезвычайно слабым, этот опыт сыграл принципиальную роль, положив начало развитию нелинейной оптики.

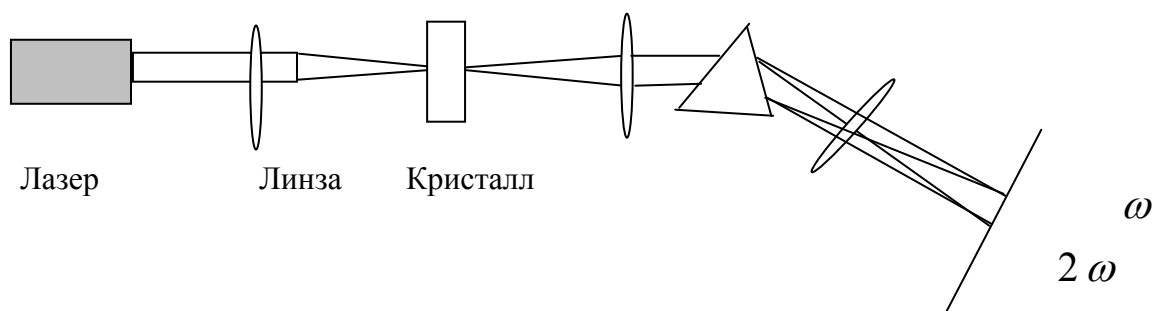


Рис. 2.1. Схема опыта Франкена по генерации второй оптической гармоники

Последующие опыты показали, что при использовании других кристаллов эффективность генерации второй гармоники может быть резко повышена. К настоящему времени разработаны методы, позволяющие преобразовывать в гармонику значительную долю лазерного излучения; в некоторых случаях удастся получить КПД генерации, близкий к 100 %. Так, группе Т. Б. Усманова (Ташкент) удалось осуществить генерацию второй гармоники излучения неодимового лазера в кристалле дигидрофосфата калия с рекордной эффек-

тивностью 96 %. Как правило, в простых схемах эффективность генерации гармоники не превышает 50 %. Поворот кристалла относительно этого положения резко уменьшает эффективность генерации. Следует отметить также, что гармоника генерируется лишь при достаточно высокой интенсивности лазерного излучения, достигаемой за счет фокусировки лазерного пучка в кристалл.

Кроме генерации второй гармоники, возможна генерация **суммарных и разностных частот** излучения двух или более лазеров по схеме $\omega_s = \omega_1 \pm \omega_2$, а также высших гармоник и **суммарных и разностных частот в процессах высших порядков** $\omega_s = n\omega_1 \pm m\omega_2$ (n, m – целые числа). В настоящее время этот эффект широко применяется для преобразования частоты лазерного излучения и освоения спектральных диапазонов, в которых создание лазеров затруднено.

Вынужденное комбинационное рассеяние света.

Этот эффект (сокращенно ВКР) состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда генерирует интенсивное излучение, сдвинутое по частоте относительно лазера на величину, равную частоте молекулярных колебаний. Механизм процесса тот же, что при спонтанном рассеянии – модуляции света молекулярными колебаниями. Однако в отличие от спонтанного рассеяния, которое является очень слабым и направлено во все стороны, вынужденное рассеяние напоминает лазерную генерацию. Мощность и направленность вынужденного рассеяния соизмеримы с аналогичными параметрами лазерного пучка. Причина этого состоит в том, что вынужденное рассеяние происходит не на хаотических тепловых молекулярных колебаниях, а на колебаниях, возбужденных и сфазированных светом в большом объеме среды. Переход спонтанного рассеяния в вынужденное происходит при превышении интенсивностью возбуждающего света некоторой определенной величины, называемой **порогом ВКР**.

Впервые вынужденное комбинационное рассеяние наблюдали Вудбери и другие ученые (1962) при изучении режима модуляции добротности рубинового лазера с помощью керровской ячейки с нитробензолом. Они обнаружили появление в излучении лазера инфракрасной компоненты, частота которой была на 1345 см^{-1} меньше частоты основного излучения лазера. Поскольку частотный сдвиг совпадал с одной из собственных частот колебаний молекулы нитробензола, было высказано предположение, что появление инфракрасной компоненты связано с комбинационным рассеянием света в нитробензоле, а большая интенсивность излучения обусловлена вынужденным характером процесса, при котором молекулярные колебания сильно раскачиваются светом. Это предположение было подтверждено в последующих опытах с различными жидкостями, а также с газами и твердыми телами.

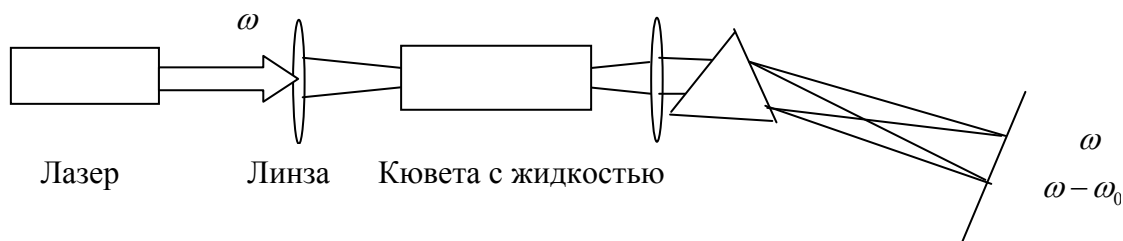


Рис. 2.2. Демонстрация вынужденного комбинационного рассеяния света в жидком азоте

Опыт показывает, что вынужденное комбинационное рассеяние наблюдается лишь при достаточно высокой интенсивности света, достигаемой с помощью фокусировки пучка в кювету. В отличие от процесса спонтанного комбинационного рассеяния, характеризуемого очень малой интенсивностью, вынужденное рассеяние имеет высокую интенсивность, соизмеримую с интенсивностью лазерного луча. Это обстоятельство позволяет создавать эффективные преобразователи лазерного излучения на основе процесса ВКР. В настоящее время такие преобразователи используются как для преобразования частоты излучения, так и для улучшения пространственной когерентности света, а также для компрессии (сокращения длительности и увеличения мощности) лазерных импульсов. Кроме того, на основе процесса ВКР можно осуществлять когерентное суммирование излучений нескольких лазерных модулей. Возбуждение когерентных молекулярных колебаний с помощью пары световых волн (**метод бигармонической накачки**) используется в спектроскопии когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС).

Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде.

При всем многообразии нелинейно-оптических явлений можно выделить некоторые общие характеристики, присущие каждому из них. Во-первых, это сильная зависимость от интенсивности света. Как правило, нелинейно-оптический эффект становится заметным лишь при достаточно большой интенсивности света. Не случайно, что нелинейная оптика появилась лишь после создания лазера. Нелинейная оптика – это оптика сильных световых полей, оптика мощных лазерных пучков. Во-вторых, для нелинейных эффектов характерно нарушение принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции состоит в том, что различные световые волны, отличающиеся частотой, направлением распространения, поляризацией, распространяются и взаимодействуют со средой независимо друг от друга. В нелинейной оптике это не так. Как мы видели, в нелинейно-оптических процессах возникают новые спектральные компоненты поля, различные световые волны сильно взаимодействуют между собой, происходит энергообмен между ними вплоть до полного преобразования одной волны в другую. Типичный пример такого рода – генерация второй оптической гармоники. Итак, в нелинейно-

оптических процессах мы сталкиваемся с нарушением принципа суперпозиции. Можно сделать и обратное утверждение: нарушение принципа суперпозиции так или иначе связано с нелинейным эффектом

Отметим, что нелинейная оптика, прошедшая уже почти 40-летний путь развития, продолжает прогрессировать, а область ее приложений непрерывно растет. Краткая сводка основных эффектов нелинейной оптики и их применений дана в [табл. 2.1](#).

Таблица 2.1

Основные эффекты нелинейной оптики и их применение

Эффект	Материал	Механизм	Область применения
Генерация оптических гармоник	Кристаллы, полупроводники, инертные газы, пары металлов	Нелинейность атомного осциллятора	Преобразование частоты лазерного излучения
Параметрическая генерация света	Кристаллы, полупроводники, инертные газы, пары металлов	Нелинейность атомного осциллятора	Плавная перестройка частоты лазера. Генерация когерентного излучения в ИК, УФ и рентгеновском диапазонах. Визуализация ИК-изображения. Диагностика поверхности полупроводников
Вынужденное рассеяние света	Газы, жидкости, кристаллы, пары металлов, оптическое волокно	Нелинейность атомного осциллятора. Рассеяние света на электронных, молекулярных, звуковых или других колебаниях	Преобразование частоты лазерного излучения. Компрессия лазерных импульсов. Обращение волнового фронта излучения. Коррекция волнового фронта. Улучшение пространственной когерентности лазеров. Нелинейная спектроскопия
Самовоздействие света	Жидкости, газы, кристаллы, жидкие кристаллы, оптическое волокно	Нелинейность атомного осциллятора. Рассеяние света на электронных, молекулярных, звуковых или других колебаниях. Ориентация анизотропных молекул световой волной. Электрострикция. Нагрев среды	Самомодуляция световых импульсов. Генерация фемтосекундных лазерных импульсов. Бистабильные оптические элементы. Элементы оптического компьютера. Моделирование нейронных сетей.

Рассмотренные качественно процессы, являющиеся примером нелинейно-оптических явлений, зависят как от интенсивности (некогерентные) так, и от фазы (когерентные) взаимодействующих волн. В следующей лекции будет дан количественный анализ нелинейно-оптических процессов.

ЛЕКЦИЯ № 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК СРЕДЫ

Уравнения Максвелла – Лоренца в среде. Нелинейный отклик среды. Разложение поляризации по степеням поля. Классификация нелинейно-оптических эффектов. Нелинейная поляризация. Генерация второй гармоники на основе интегрального подхода. Длина когерентности.

Уравнения Максвелла – Лоренца.

Теория нелинейно-оптических явлений строится на основе материальных уравнений и уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для диэлектрической нейтральной немагнитной среды имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь вектор электрической индукции

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (3.2)$$

где \vec{P} – вектор поляризации среды под действием электрического поля волны. Из уравнений Максвелла вытекает волновое уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

которое в случае изотропной среды принимает вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.1), (3.2) E – напряженность электрического и H магнитного полей световой волны; P – поляризация среды. Уравнения (3.1)–(3.4) справедливы в равной мере как для линейных, так и для нелинейных сред. Согласно этим уравнениям, поляризация среды есть источник светового поля. Поляризация среды, в свою очередь, возникает под действием падающей световой волны. Наведение поляризации световым полем описывается **материальным уравнением**

$$P = P(\ddot{E}), \quad (3.5)$$

которое отражает структуру и свойства среды.

Нелинейный отклик среды. Разложение поляризации по степеням поля.

Несмотря на то, что напряженность электрического поля сфокусиро-

ванного лазерного излучения может быть и значительно больше внутриатомного поля, в данном курсе будут рассматриваться ситуации, при которых $E \ll E_a$. В этом случае нелинейно-оптическая среда не разрушается под действием лазерного излучения. При этих условиях простейшее *материальное уравнение* нелинейной среды (3.5) может быть представлено в виде ряда разложения поляризации по степеням поля. Ограничиваясь на этом этапе скалярной формой, запишем **материальное уравнение** нелинейной среды в виде

$$P = P(E) = \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \chi^{(4)} E^4 + \dots \quad (3.6)$$

Согласно этому уравнению поляризация среды есть **нелинейная** функция напряженности светового поля. С математической точки зрения именно это обстоятельство (нелинейность материального уравнения) является причиной нарушения принципа суперпозиции для световых волн в нелинейной среде.

Коэффициенты $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, $\chi^{(4)}$ зависят от свойств среды и называются **оптическими восприимчивостями**. В частности, $\chi^{(1)}$ – линейная оптическая восприимчивость, $\chi^{(2)}$ – нелинейная восприимчивость второго порядка, $\chi^{(3)}$ – нелинейная восприимчивость третьего порядка и т. д.

Классификация нелинейно-оптических эффектов.

Из уравнений (3.1)–(3.6) непосредственно вытекает возможность генерации оптических гармоник и других нелинейно-оптических эффектов. Пусть лазерное излучение представляет собой гармоническую волну

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz) = E_0 \frac{1}{2} (e^{i(\omega t - kz)} + e^{-i(\omega t - kz)}). \quad (3.7)$$

Тогда первый член разложения (3.6) описывает линейную поляризацию с частотой, равной частоте лазерного излучения. Второй член разложения

$$P = \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \chi^{(2)} E_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t - 2kz)) \quad (3.8)$$

описывает два нелинейно-оптических эффекта: нелинейно-оптическое выпрямление – не зависящая от времени часть поляризации $P_c = \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2$ и генерацию излучения на удвоенной частоте $P_{2\omega} = \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2 \cos 2\omega t$ в каждой точке Z .

Третий член разложения (3.6) описывает также два нелинейно-оптических эффекта. Легко показать, подставив уравнение (3.7) в формулу (3.6), что он содержит поляризацию на утроенной частоте и, кроме того, нелинейную добавку к показателю преломления. Обычно в изотропных нелинейных средах низшей нелинейностью, отличной от нуля, является кубическая

нелинейность. В приближении безынерционного отклика материальное уравнение такой среды имеет вид

$$P = \chi^{(1)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 . \quad (3.9)$$

В этом же приближении показатель преломления среды n определяется формулами $D = E + 4\pi P = \varepsilon E = n^2 E$, откуда

$$n = \sqrt{1 + 4\pi P/E} . \quad (3.10)$$

Подставив уравнение (3.9) в формулу (3.10) и учтя относительную малость нелинейного слагаемого, получим

$$n = n_0 + \frac{2\pi}{n_0} \chi^{(3)} E^2 , \quad (3.11)$$

$$\text{где } n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\chi^{(1)}} . \quad (3.12)$$

Выразим квадрат напряженности электрического поля через интенсивность I световой волны. Используя формулу $I = cE^2/8n$, получим

$$n = n_0 + n_2 , \quad (3.13)$$

где n_0 – линейный показатель преломления среды; c – скорость света;

$$n_2 = \frac{16\pi^2}{n_0 c} \chi^{(3)} . \quad (3.14)$$

Формула (3.13) показывает, что в средах с кубичной нелинейностью показатель преломления зависит от интенсивности света. Этот эффект приводит к самовоздействию световых волн, в частности, к таким эффектам, как самофокусировка светового пучка, фазовая самомодуляция импульса, бистабильность резонатора, заполненного нелинейной средой, и т. п. Величина n_2 , имеющая размерность обратной интенсивности света, является удобной характеристикой кубичной нелинейности среды. Например, для кристалла кварца $n_2 = 3 \times 10^{16} \text{ см}^2/\text{Вт}$.

Конкретный механизм, приводящий к нелинейности типа (3.13), может быть связан, например, с поворотом анизотропных молекул жидкости в поле мощной поляризованной световой волны. Поскольку такой же механизм лежит в основе двойного лучепреломления света, наведенного постоянным электрическим полем (эффект Керра), зависимость показателя преломления от интенсивности света называют **высокочастотным эффектом Керра**, а

нелинейность (3.13) – нелинейностью керровского типа.

Заметим, что относительная величина нелинейных слагаемых в уравнении (3.6) возрастает при увеличении напряженности светового поля, т. е. при увеличении интенсивности световой волны. Это объясняет тот факт, что нелинейные эффекты наблюдаются прежде всего в сильных световых полях.

Нелинейная поляризация.

Часть поляризации среды, нелинейно зависящая от напряженности светового поля, называется *нелинейной поляризацией*. Выделив в поляризации среды линейную и нелинейную компоненты, можно записать

$$\vec{P} = \vec{P}_l + \vec{P}_{nl}. \quad (3.15)$$

Подставив формулу (3.15) в выражения (3.3), (3.4), получим волновые уравнения в форме

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_l}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{nl}}{\partial t^2}, \quad (3.16)$$

которое в случае изотропной среды принимает вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_l}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{nl}}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

Из (3.16)–(3.17) видно, что нелинейная поляризация среды является источником новых спектральных компонент поля (оптических гармоник, комбинационных частот и т. п.).

Генерация второй гармоники на основе интегрального подхода.

Пусть в квадратично-нелинейной среде по оси z с фазовой скоростью v распространяется световая волна на частоте ω . Волна будет наводить в среде локальные дипольные моменты; это означает, что с той же самой скоростью v в среде будет распространяться волна квадратичной поляризации на частоте 2ω – см. формулу (3.8).

Возникающие при распространении волны поляризации локальные диполи переизлучают на частоте 2ω (на частоте волны поляризации). Переизлученные в разных точках среды световые волны распространяются вдоль оси z и **интерferируют** друг с другом. Интерференция этих волн может, в принципе, привести к формированию волны второй гармоники; иными словами, возможно **пространственное накопление** нелинейного эффекта.

Выберем ось z перпендикулярно к границе квадратично-нелинейной среды; $z = 0$ соответствует границе среды (рис. 3.1, а). Пусть в среде вдоль оси z распространяется плоская волна квадратичной поляризации, частота которой равна 2ω , а фазовая скорость $v = c/n(\omega) = \omega/k$; $k = n(\omega)(\omega/c)$. Тогда фа-

за этой волны в некоторой точке z' есть

$$\Phi(z') = 2\omega t - 2kz'. \quad (3.18)$$

Рассматриваемая в точке z фаза переизлученной световой волны, возникшей в точке z' , будет отличаться от $\Phi(z')$ на величину $K(z - z')$. Здесь $K = n(2\omega)(2\omega/c)$ – **волновой вектор и фазовая скорость** $v(2\omega) = c/n(2\omega)$ переизлученной световой волны на частоте 2ω .

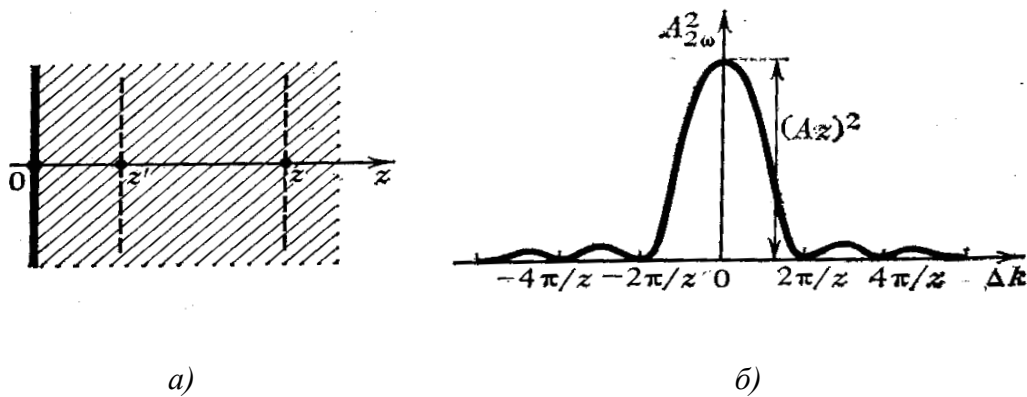


Рис. 3.1

Иначе говоря, рассматриваемая в точке z **фаза** световой волны, переизлученной в точке z' , может быть представлена в виде

$$\varphi(z') = 2\omega t - 2kz' - K(z - z') = 2\omega t - Kz + \Delta kz' E(2\omega). \quad (3.19)$$

где $\Delta k = K - 2k$ – **волновая расстройка**, которая из-за дисперсии не равна нулю.

Результирующая волна второй гармоники, рассматриваемая на расстоянии z от границы среды, есть результат интерференции волн, переизлученных в различных точках z' на промежутке от $z' = 0$ до $z' = z$:

$$E(2\omega) = A \int_0^z \cos \varphi(z') dz' = A \int_0^z \cos \varphi(2\omega t - Kz + \Delta kz') dz', \quad (3.20)$$

где A – некоторый множитель, не зависящий ни от z , ни от Δk . Из выражения (3.20) следует

$$E(2\omega) = \frac{2A}{\Delta k} \sin\left(\frac{\Delta k}{2}\right) \cos\left(2\omega t - Kz + \frac{\Delta kz}{2}\right). \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) находим выражение для амплитуды второй гармоники в точке z :

$$A(2\omega) = \frac{2A}{\Delta k} \sin\left(\frac{\Delta kz}{2}\right). \quad (3.22)$$

На рис. [3.1, б](#) показана для фиксированного z зависимость $A(2\omega)$ от Δk , определяемая соотношением (3.22), – так называемая **кривая синхронизма**. Это есть типичная интерференционная кривая. Наибольший позитивный интерференционный эффект (наибольшая интенсивность второй гармоники) достигается при выполнении условия

$$\Delta k = 0 \text{ или, иначе, } K = 2k \text{ а } n(\omega) = n(2\omega). \quad (3.23)$$

Это и есть условие **волнового, или фазового, синхронизма**. Условие фазового синхронизма есть условие равенства нулю **волновой расстройки**. Оно эквивалентно в данном случае условию **равенства фазовых скоростей** волны второй гармоники и волны квадратичной поляризации. Из изложенного выше следует, что условие фазового синхронизма есть не что иное, как условие, обеспечивающее наиболее благоприятный эффект интерференции световых волн, переизлученных в разных точках нелинейной среды. Как правило, большинство прозрачных сред обладают положительной дисперсией, т. е. показатель преломления растет при увеличении частоты волны, и условие **волнового, или фазового, синхронизма (3.23), не выполняется** в изотропной среде. Поэтому в дальнейшем рассмотрении основное внимание будет уделено исследованию нелинейно-оптических эффектов **в анизотропных кристаллических средах**.

Длина когерентности.

Вернемся к соотношению (3.22) и рассмотрим зависимость $A(2\omega)$ от z при $\Delta k = 0$ и при $\Delta k \neq 0$. Из выражения (3.22) следует, что при наличии синхронизма ($\Delta k = 0$) амплитуда второй гармоники **линейно растет** с расстоянием Z , пройденным излучением в нелинейной среде: $A(2\omega) = Az$. При наличии **волновой расстройки** ($\Delta k \neq 0$) амплитуда второй *гармоники периодически изменяется* с расстоянием Z . Период изменения составляет

$$Z = 4\pi/\Delta k. \quad (3.24)$$

Максимальное значение амплитуды второй гармоники достигается на длине нелинейного кристалла

$$l_{\text{ког}} = \pi/\Delta k_{\text{ког}}. \quad (3.25)$$

На этой же длине происходит уменьшение амплитуды гармоники от максимального значения до нуля. Длину $l_{\text{ког}}$ называют **длиной когерентности**.

Рассмотренный в этой лекции интегральный подход при интеграции второй гармоники имеет методологическое значение, поскольку позволяет ввести основные понятия, такие как фазовый синхронизм, длина когерентности и волновая расстройка. Однако использование данного подхода при исследовании более сложных явлений нелинейной оптики вызывает ряд затруднений. В последующих лекциях будет изложен универсальный метод, называемый методом медленно меняющихся амплитуд.

ЛЕКЦИЯ № 4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОСПРИИМЧИВОСТЕЙ

Феноменологическое описание оптических восприимчивостей кристаллических сред. Вектор поляризации; материальное уравнение в кристаллических анизотропных средах. Тензоры нелинейно-оптических восприимчивостей. Общие свойства тензора квадратичной восприимчивости.

Феноменологическое описание оптических восприимчивостей кристаллических сред.

Как отмечалось ранее, пространственное накопление нелинейных эффектов в слабо нелинейной оптической среде возможно при выполнении условий фазового синхронизма. Это возможно, как будет показано ниже, в **кристаллических анизотропных средах**, обладающих двулучепреломлением. Рассмотрим особенности таких сред.

Под действием внешнего электрического поля диэлектрик **поляризуется**. Поле вызывает смещение электронных оболочек атомов относительно ядер; в результате атомы приобретают электрический дипольный момент. Это есть **электронная** поляризация диэлектрика. Наряду с электронной возможны и другие виды поляризации, наведенной внешним полем. Так, относительные смещения положительных и отрицательных ионов под действием поля приводят к **ионной** поляризации. Если в среде имеются постоянные диполи (дипольные молекулы), то может наблюдаться **ориентационная (вращательная)** поляризация, обусловленная поворотом диполей по направлению поля.

Наиболее быстро устанавливается электронная поляризация; смещение электронной оболочки атома происходит за время порядка 10^{-16} – 10^{-14} с. Для установления ионной поляризации необходимо большее время, поскольку процесс смещения более массивных микрообъектов (ионов) является более инерционным. Ионная поляризация устанавливается за время порядка 10^{-13} – 10^{-11} с. Еще более медленным является процесс поворота дипольных молекул; ориентационная поляризация характеризуется временами порядка и выше 10^{-10} с.

В качестве поляризующего поля рассмотрим электрическое поле световой волны, распространяющейся через кристаллический (анизотропный) диэлектрик. В этом случае ориентационная поляризация незначительна, поскольку время ее установления много больше периода колебаний поля в световой волне. Основную роль в **оптическом** диапазоне (точнее, в УФ, видимой и ближней ИК-областях спектра) играет электронная поляризация. При длинах волн излучения порядка 10 мкм и выше наряду с электронной становится существенной также ионная поляризация.

Вектор поляризации; материальное уравнение в кристаллических анизотропных средах.

Количественно поляризация диэлектрика описывается **вектором поляризации P** , представляющим собой электрический дипольный момент

единицы объема среды, наведенный внешним полем. Поляризация есть «отклик» среды на внешнее воздействие. Последнее описывается вектором электрической напряженности E внешнего поля (в данном случае поля световой волны). Соотношение, связывающее P и E , относится к так называемым **материальным уравнениям**. В линейной оптике рассматривается линейное материальное уравнение $\vec{P} = (\chi^{(1)}_{ik})\vec{E}$ и проекция поляризации на ось i есть

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \chi^{(1)}_{ik} E_k \quad (k=1,2,3), \quad (4.1)$$

где α_{ik} – компоненты тензора диэлектрической восприимчивости среды. Этот тензор симметричен; выбором соответствующей системы координатных осей он может быть приведен к диагональному виду:

$$(\chi^{(1)}_{ik}) = \begin{pmatrix} \chi^{(1)}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi^{(1)}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(1)}_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Для изотропных сред и кристаллов, относящихся к кубической системе, $\chi^{(1)}_{11} = \chi^{(1)}_{22} = \chi^{(1)}_{33} = \chi^{(1)}$. В этом случае соотношение (4.2) принимает вид $\vec{P} = \chi^{(1)}\vec{E}$.

Случай, когда $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$, соответствует **одноосным** кристаллам (с оптической осью вдоль оси z). Сюда относятся кристаллы тетрагональной, гексагональной и тригональной систем. Случай, когда $\chi^{(1)}_{11} \neq \chi^{(1)}_{22} \neq \chi^{(1)}_{33}$, соответствует **двуосным** кристаллам (кристаллам ромбической, моноклинной и триклинной систем). При изучении нелинейных явлений имеют дело преимущественно с одноосными кристаллами.

Тензоры нелинейно-оптических восприимчивостей.

Зависимость диэлектрической восприимчивости среды от напряженности внешнего постоянного электрического поля рассматривалась задолго до появления лазеров в рамках электрооптических эффектов. С появлением источников интенсивного когерентного света (лазеров) начались широкие исследования нелинейно-оптических эффектов-эффектов, основанных на зависимости диэлектрической восприимчивости от напряженности поля световой волны, распространяющейся в среде.

Учет зависимости тензора восприимчивости от напряженности поля превращает линейное материальное уравнение (4.1) в **нелинейное**:

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \chi^{(1)}_{ki}(E) E_k. \quad (4.3)$$

Таким образом, совершается переход от линейной оптики к **нелиней-**

ной. Разложим $\chi^{(1)}(E)$ в ряд по степеням напряженности E :

$$\chi^{(1)}_{ik}(E) = \chi^{(1)}_{jk} + \sum_{j=1}^3 \chi^{(2)}_{ikj} E_j + \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \chi^{(3)}_{ikjm} E_j E_m, \quad (4.4)$$

где $\chi^{(1)}_{ik}$; $\chi^{(2)}_{ikj}$; $\chi^{(3)}_{ikjm}$ – **линейная** восприимчивость (тензор 2-го ранга); **квадратичная нелинейная** восприимчивость (тензор 3-го ранга) и **кубичная нелинейная** восприимчивость (тензор 4-го ранга). В принципе, в разложении (4.4) могут быть учтены также члены с нелинейными восприимчивостями более высоких порядков.

Характерные численные значения восприимчивостей диэлектриков следующие:

$$\chi^{(1)}_{ik} \approx 1; \quad \chi^{(1)}_{ikj} \approx 10^{-11} - 10^{-12} \text{ л/В}; \quad \chi^{(1)}_{ikjm} \approx 10^{-21} - 10^{-22} (\text{м/В})^2. \quad (4.4a)$$

Учитывая, что напряженность поля лазерного излучения не превышает 10^{-9} (В/м), заключаем, что члены разложения (4.4) быстро уменьшаются по мере возрастания порядка.

Подставляя уравнение (4.4) в выражение (4.3), приходим к следующему нелинейному материальному уравнению:

$$P_i = P_{li} + P_{nli} = \sum_k \chi^{(1)}_{jk} E_k + \sum_j \sum_k \chi^{(2)}_{ikj} E_j E_k + \sum_k \sum_j \sum_m \chi^{(3)}_{ikjm} E_k E_j E_m. \quad (4.5)$$

Кубично- и квадратично-нелинейные среды. Для кристаллов, обладающих центром симметрии, а также для жидкостей и газов тензор $\chi^{(2)}_{ikj}$ равен нулю. Напомним, что при преобразованиях координат компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Например, $\chi^{(2)}_{122}$ преобразуется как произведение xu , а $\chi^{(2)}_{223}$ – как uuz . Выполним операцию инверсии относительно центра симметрии кристалла: $x+ \rightarrow x-, y+ \rightarrow y-, z+ \rightarrow z-$. В этом случае все компоненты тензора $\chi^{(2)}_{ikj}$ должны изменить знак (поскольку им соответствуют произведения нечетного числа координат). Однако в силу центросимметричности кристалла тензор $\chi^{(2)}_{ikj}$ должен остаться неизменным. Следовательно, $\chi^{(2)}_{ikj} = -\chi^{(2)}_{ikj}$ или, иначе говоря, $\chi^{(2)}_{ikj} = 0$.

Итак, в случае центросимметричных кристаллов, жидкостей, газов квадратичная поляризация отсутствует вследствие симметрии. Поэтому нелинейность указанных сред определяется в первом порядке кубичной восприимчивостью; такие среды называют **кубично-нелинейными**. Для изотропных кубично-нелинейных сред материальное уравнение принимает вид

$$P_i = P_{li} + P_{nli} = \sum_k \chi^{(1)}_{jk} E_k + \sum_k \sum_j \sum_m \chi^{(3)}_{ikjm} E_k E_j E_m. \quad (4.6)$$

Необходимо отметить, что нелинейная поляризация, обусловленная **кубичной нелинейностью**, как в centrosимметричных, так и в неcentrosимметричных средах, при величинах поля лазерного излучения, меньших атомного, значительно меньше нелинейной поляризации, обусловленной **квадратичной нелинейностью**. Однако реализуемые в газах **резонансные** нелинейные восприимчивости нечетных порядков оказываются относительно большими, как будет оказано в дальнейшем.

Таблица 4.1

Кристаллы	Сингонии (системы)
Двуосные	Триклинная. Моноклинная. Ромбическая
Одноосные	Тригональная. Гексагональная. Тетрагональная

Если кристалл обладает квадратичной восприимчивостью, то основной вклад в его нелинейную поляризацию будет вносить квадратичная поляризация. Поэтому кристаллы с квадратичной восприимчивостью относят к **квадратично-нелинейным** средам. Из 32 кристаллических классов квадратичной восприимчивостью обладают 20 классов.

Общие свойства тензора квадратичной восприимчивости.

Временная дисперсия линейной и нелинейной восприимчивости. Процесс установления поляризации среды требует некоторого времени. Следовательно, отклик среды на внешнее воздействие должен отставать во времени от воздействия. Точнее говоря, поляризация среды в данный момент должна определяться значениями напряженности поля в предшествующие моменты времени. Это означает, что надо учитывать **временную дисперсию** диэлектрической восприимчивости. Учет временной дисперсии приводит к зависимости **тензора линейной и нелинейной** восприимчивости от частоты световой волны, т. е. нелинейная поляризация среды связана с явлениями взаимодействия световых волн. Волна квадратичной поляризации есть результат взаимодействия двух световых волн, в результате которого рождается волна на третьей частоте: $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$. Такие взаимодействия называют **трехчастотными**, а обусловленные ими процессы – трехфотонными. Поэтому при трехчастотном взаимодействии компоненты тензора нелинейной восприимчивости зависят от частот всех волн, участвующих в процессе: $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2, \omega_3)$.

С учетом предыдущего соотношения на частоты возможна более краткая запись: $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2)$, а также еще более краткая – $\chi_{ijk}^{(2)}$, которая однако же предполагает частотную зависимость. В общем виде тензор третьего ранга, каковым является **тензор квадратичной нелинейной восприимчивости** $\chi_{ijk}^{(2)}$, имеет $9 \times 3 = 27$ компонент. Однако в отсутствии резонансов тензор $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2, \omega_3)$ всегда симметричен относительно перестановки двух последних индексов:

$$\chi^{(2)}_{ikj} \equiv \chi^{(2)}_{ijk}. \quad (4.7)$$

Согласно выражению (4.7) число независимых компонентов тензора $\chi^{(2)}_{ikj}$ не должно превышать 18. В действительности же для многих структур это число значительно меньше; оно определяется симметрией кристалла. Так, в случае кристаллов группы дигидрофосфата калия тензор χ имеет лишь два независимых компонента:

$$\chi^{(2)}_{123} = \chi^{(2)}_{132} = \chi^{(2)}_{213} = \chi^{(2)}_{131}; \quad \chi^{(2)}_{312} = \chi^{(2)}_{321}. \quad (4.8)$$

Соотношение (4.7) позволяет при рассмотрении тензора $\chi^{(2)}_{ijk}$ перейти от системы трех индексов (от индексов i, j, k , каждый из которых принимает три значения) к системе двух индексов (к индексам i, l , где $i = 1, 2, 3; l = 1, 2, \dots, 6$). Выражение (4.3) принимает теперь следующий вид. В операторном виде $\vec{P}^{(2)} = \hat{D}\vec{F}^{(2)}$ и по компонентам вектора

$$P_{(nl)i} = P_i^{(nl)} = \sum_{l=1}^6 d_{il} F_l \quad (4.9)$$

или в развернутой записи

$$\begin{pmatrix} \frac{P_x^{(2)}}{P_y^{(2)}} \\ \frac{P_y^{(2)}}{P_z^{(2)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}}{d_{21}} & \frac{d_{12}}{d_{22}} & \frac{d_{13}}{d_{23}} & \frac{d_{14}}{d_{24}} & \frac{d_{15}}{d_{25}} & \frac{d_{16}}{d_{26}} \\ \frac{d_{31}}{d_{32}} & \frac{d_{33}}{d_{33}} & \frac{d_{34}}{d_{34}} & \frac{d_{35}}{d_{35}} & \frac{d_{36}}{d_{36}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{F_2} \\ \frac{F_3}{F_4} \\ \frac{F_5}{F_6} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Здесь $d_{i1} = \chi_{i11}; d_{i2} = \chi_{i22}; d_{i3} = \chi_{i33}; d_{i4} = \chi_{i23}; d_{i5} = \chi_{i13} = \chi_{i31}; d_{i6} = \chi_{i12} = \chi_{i21}$.

Вектор F шестимерен:

$$F_1 \rightarrow E_x E_x; F_2 \rightarrow E_y E_y; F_3 \rightarrow E_z E_z; F_4 \rightarrow E_y E_z + E_z E_y; F_5 \rightarrow E_x E_z + E_z E_x; F_6 \rightarrow E_x E_y + E_y E_x.$$

Используя выражение (4.10), можно представить матрицу для кристаллов группы дигидрофосфата калия в виде

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Рассматривая различные спектральные составляющие тензора χ_{ii} , можно установить дополнительное соотношение симметрии:

$$\chi^{(2)}_{ikj}(\omega_1 + \omega_2) = \chi^{(2)}_{ikj}[(\omega_1 + \omega_2) - \omega_1]. \quad (4.12)$$

Оно означает, что тензор симметричен относительно перестановки первых двух индексов с одновременным соответствующим изменением комбинации частот, определяющей спектральную составляющую тензора. Соотношение (4.12) называют **частотно-перестановочным** соотношением. При $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ из соотношения (4.12) следует важный результат:

$$\chi^{(2)}_{ikj}(2\omega) = \chi^{(2)}_{kij}(2\omega - \omega). \quad (4.13)$$

В частотных диапазонах, где временная дисперсия восприимчивости выражена достаточно слабо, тензор $\chi^{(2)}_{ikj}$ оказывается симметричным относительно перестановок всех трех индексов. В этом случае имеет место как бы объединение предыдущих результатов. В итоге приходим к так называемым соотношениям Клейнмана:

$$\chi^{(2)}_{ikj} = \chi^{(2)}_{kij} = \chi^{(2)}_{jki} = \chi^{(2)}_{ijk} = \chi^{(2)}_{kji} = \chi^{(2)}_{jik}. \quad (4.14)$$

Таким образом, рассмотренная феноменологическая теория нелинейно-оптических свойств материалов позволяет вычислить значения нелинейной поляризации на основе экспериментального измеренных значений тензоров нелинейных восприимчивостей.

ЛЕКЦИЯ № 5. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД

Метод медленно меняющихся амплитуд. Стационарные укороченные уравнения. Трехфотонные взаимодействия. Система стационарных укороченных уравнений. Соотношения Мэнли – Роу.

Метод медленно меняющихся амплитуд.

Теперь, рассмотрев всевозможные упрощения, мы готовы к выводу выражений для электромагнитного излучения, генерируемого нелинейной поляризацией. Ясно, что в любом случае возрастание или убывание амплитуды волны одной частоты зависит от амплитуд двух других волн. Поэтому в случае трех взаимодействующих волн мы должны найти три уравнения, связывающие амплитуды взаимодействующих волн, каждое из которых дает скорость роста или убывания поля одной частоты в зависимости от величин полей на двух других частотах. Кроме того, в каждом из этих уравнений должен быть некий член, учитывающий разность фаз между волной поляризации и электромагнитной волной.

Метод, изложенный ниже, в основан на использовании волнового уравнения (3.16), (3.17), приведенному в [лекции № 3](#). Введем член, учитывающий нелинейную поляризацию, в уравнения Максвелла следующим образом:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Здесь линейная поляризация включена в ε , а $P_{\text{нл}}$ описывает только нелинейную поляризацию.

Предположим опять, что среда является непроводящей и немагнитной и ограничимся рассмотрением одномерной задачи, т. е. положим $\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0$; считаем, что все волны распространяются в направлении z . Определим три распространяющиеся взаимодействующие волны следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= A_1(z) e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}, \\ E_2(z, t) &= A_2(z) e^{i(\omega_2 t - k_2 z)}, \\ E_3(z, t) &= A_3(z) e^{i(\omega_3 t - k_3 z)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

где индексы 1, 2 и 3 относятся к частотам; $A_i(z)$ – комплексная амплитуда поля на частоте ω_i . Кроме того, конечно, имеются три аналогичных выражения для отрицательных частот. Это определение подразумевает, что здесь **комплексная амплитуда** A_i меняется из-за взаимодействия с волнами других частот только вдоль оси z , оставаясь неизменной во времени. Другими словами, мы рассматриваем (здесь) стационарный режим.

Из выражения (5.1) видим, что любое из полей уравнения (5.2) является решением уравнения (5.1) с неменяющейся вдоль z амплитудой A при нулевой правой части (т. е. в линейном случае, так как $k = \frac{\omega}{c}n(\omega)$, $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon}$).

В нелинейном случае амплитуда поля зависит от z , поскольку существует нелинейная поляризация (правая часть выражения (5.1) отлична от 0). Однако при этом нелинейная поляризация должна иметь также частоту ω_i . Тогда чтобы записать уравнения типа (5.1) для трех полей, участвующих в процессе на частотах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, необходимо иметь нелинейную поляризацию на этих же частотах. Это возможно только в случае

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (5.3)$$

Соотношение (5.3) носит характер закона сохранения энергии в **трехфотонных взаимодействиях**, характерных для сред с квадратичной нелинейностью, и допускает достаточно простую квантовую интерпретацию чисто классического варианта. Действительно, из этого соотношения следует, что при трехфотонных взаимодействиях два фотона с энергией $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$, сливаясь, рожают фотон с энергией $\hbar\omega_3$.

В рассматриваемом случае нелинейная поляризация второго порядка в соответствии с формулой (4.5) на соответствующих частотах будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\omega_1) &= \chi^{(2)} A_3 A_2^* e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]}, \\ P^{(2)}(\omega_2) &= \chi^{(2)} A_3 A_1^* e^{i[(\omega_3 - \omega_1)t - (k_3 - k_1)z]}, \\ P^{(2)}(\omega_3) &= \chi^{(2)} A_2 A_1 e^{i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь опущены индексы у $\chi^{(2)}$ в соответствии с перестановочными соотношениями (4.14).

Уравнения (5.1)–(5.4) являются **уравнениями для амплитуд связанных A_i волн**. Это система связанных дифференциальных уравнений в частных производных не имеет аналитических решений и сложна для анализа. Однако, учитывая малость оптической нелинейности и стационарность, она может быть значительно упрощена.

Стационарные укороченные уравнения. Трехфотонные взаимодействия.

Подставим выражения для полей в формулу (5.1) и, рассматривая стационарный случай, когда амплитуда от времени не зависит, для поля на частоте ω_1 , получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} &= - \left[k_1^2 A_1(z) - 2ik_1 \frac{\partial A_1(z)}{\partial z} - k_1^2 \frac{\partial^2 A_1(z)}{\partial z^2} \right] e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}, \\ \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} &= - [\omega_1^2 A_1(z)] e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}, \\ \frac{\partial^2 P^{(2)}(\omega_1)}{\partial z^2} &= -(\omega_3 - \omega_2)^2 \chi^{(2)} A_3 A_2^* e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Аналогичные соотношения могут быть найдены и для амплитуд других полей.

Учитывая, что $k^2 = \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right)^2$ и $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon}$, и предполагая, что комплексная амплитуда поля медленно меняется с расстоянием, вследствие малости нелинейного отклика $k \frac{dA}{dz} \gg \frac{d^2 A}{dz^2}$, а также полагая что уравнение (5.5) удовлетворяется для каждой частотной компоненты отдельно, получаем из (5.1), выражений (5.3), (5.5) следующее:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -i \frac{2\pi\omega_1^2}{k_1 c^2} \chi^{(2)} A_3 A_2^* e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i \frac{2\pi\omega_2^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)} A_3 A_1^* e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z}, \\ \frac{dA_3}{dz} &= -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{-i(k_3 - k_2 - k_1)z}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Это и есть искомые уравнения для амплитуд трех взаимодействующих волн. Мы видим, что каждое уравнение описывает изменение с расстоянием амплитуды поля на одной частоте в зависимости от амплитуд на двух других частотах и от разности фаз между волной поляризации и электромагнитной волной. Введем обозначение, которым часто будем пользоваться в дальнейшем и которое характеризует фазовое рассогласование взаимодействующих волн в среде, благодаря дисперсии (зависимости фазовой скорости, или показателя преломления от частоты волны:

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1\tag{5.7}$$

Таким образом, основными отличиями исследования процессов нелинейно-оптического взаимодействия волн от нелинейной теории волн являются:

малость нелинейного отклика, что позволяет свести волновое уравнение второго порядка к уравнениям первого порядка;

наличие дисперсии показателей преломления на частотах взаимодействующих волн.

Как видим, все три амплитуды связаны друг с другом. В результате общее решение системы (5.6) нельзя выразить в элементарных функциях. Однако если мы предположим, что мощность генерируемой волны настолько мала, что амплитуды двух падающих волн можно считать постоянными по всей длине нелинейной среды, то тогда три уравнения сводятся к одному, которое можно легко проинтегрировать. Такое приближение называется **при-**

ближением заданного поля и часто используется в нелинейной оптике для анализа взаимодействия волн при слабом энергообмене.

Рассмотрим, например, взаимодействие $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Если предположить, что A_1 и A_2 постоянны, то можно из системы (5.6) исследовать только последнее уравнение

$$\frac{dA_3}{dz} = -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{-i\Delta k z},$$

из которого следует

$$A_3 = -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi^{(2)} A_1 A_2 \int_0^L e^{-i\Delta k z} dz,$$

где L – длина кристалла, что после интегрирования дает

$$A_3 = -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2 \Delta k} \chi^{(2)} A_1 A_2 (e^{-i\Delta k L} - 1).$$

Более подробный анализ соотношений (5.8), (5.9) будет приведен в следующей лекции. Здесь же уместно обсудить следствия из системы (5.6), носящие общий характер.

Соотношения Мэнли – Роу.

Дальнейший анализ системы (5.6) показывает, что второе уравнение её может быть получено из первого путем взаимной перестановки полей A_1 и A_2 , в то время как третье уравнение не может быть получено с помощью подобной перестановки. Значение этого утверждения становится ясным, если рассмотреть поток энергии в процессе взаимодействия волн. Полагая $\Delta k = 0$, из уравнений (5.6) получаем

$$\frac{n_1 c}{\omega_1} \frac{dA_1}{dz} = -i 2\pi \chi^{(2)} A_3 A_2^*,$$

$$\frac{n_2 c}{\omega_2} \frac{dA_2}{dz} = -i 2\pi \chi^{(2)} A_3 A_1^*,$$

$$\frac{n_3 c}{\omega_3} \frac{dA_3}{dz} = -i 2\pi \chi^{(2)} A_1 A_2^*,$$

и, поскольку правые части уравнений (5.10) и (5.11) равны комплексно сопряженной правой части уравнения (5.12), получим

$$\frac{n_1 c}{\omega_1} \frac{d(A_1 A_1^*)}{dz} = \frac{n_2 c}{\omega_2} \frac{d(A_2 A_2^*)}{dz} = -\frac{n_3 c}{\omega_3} \frac{d(A_3 A_3^*)}{dz}.$$

Теперь, используя выражения для вектора Пойтинга

$$S = \frac{cn}{8\pi} |AA^*|^2$$

и соотношения (5.13), найдем, что

$$\frac{\text{изменение мощности на } \omega_1}{\omega_1} = \frac{\text{изменение мощности на } \omega_2}{\omega_2} = \frac{\text{изменение мощности на } \omega_3}{\omega_3}.$$

Из этого соотношения также как и соотношения (5.13) носящего название **соотношений Мэнли и Роу**, впервые ими сформулированного, вытекают весьма важные следствия. Отметим, что мы получили эти соотношения, не имея в виду какое-либо конкретное взаимодействие, следовательно, оно справедливо как для процесса генерации суммарной частоты, так и для генерации разностной частоты. В случае генерации суммарной частоты (например, при сложении частот излучения двух лазеров: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$) соотношение Мэнли – Роу утверждает, что мощности обеих входных волн будут уменьшаться, вследствие чего будет усиливаться волна суммарной частоты. Однако для случая генерации разностной частоты $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ из того же соотношения следует, что мощность входной волны на частоте ω_3 переходит не только к генерируемой волне ω_1 , но также и к входной волне ω_2 . Другими словами, если генерируется разностная частота двух входных частот, то усиливается не только генерируемая волна, но и волна накачки с меньшей частотой.

Так как величина $|AA^*|$ есть мера плотности фотонов, можно также говорить, что фотон с частотой ω_3 расщепляется на два фотона с частотами ω_1 и ω_2 или, в случае генерации суммарной частоты, что два фотона с частотами ω_1 и ω_2 сливаются в один фотон с частотой ω_3 .

Поскольку излучение с частотой ω_2 в процессе генерации разностной частоты усиливается, открывается возможность получения разностной частоты двух сигналов: сильного (накачка) с частотой ω_3 и очень слабого с частотой ω_2 . Если слабый сигнал частоты ω_2 проходит через нелинейный кристалл несколько раз, то на каждом проходе мощность его будет все более и более возрастать. Одновременно будет нарастать и сигнал на частоте ω_1 . Однако слабый сигнал ω_2 совсем не обязательно должен подаваться на кристалл извне; соответствующая спектральная компонента может возникать за счет собственных шумов среды. Большое число проходов такого сигнала по кристаллу можно обеспечить, поместив его в резонатор, образованный двумя зеркалами, отражающими на частоте ω_2 . Если при этом величина усиления за один проход излучения по резонатору превышает потери за один проход, такая система самовозбуждается. Речь идет фактически о принципе действия так называемого **параметрического генератора** света, детально описанного в лекции 8.

Итак, отметим, что полученные уравнения для медленно меняющихся амплитуд являются основными уравнениями, позволяющими анализировать большинство нелинейно-оптических процессов.

ЛЕКЦИЯ № 6. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Генерация второй гармоники в приближении заданного поля. Фазовый синхронизм и методы его реализации. Виды фазового синхронизма.

Генерация второй гармоники в приближении заданного поля.

Задача генерации второй гармоники (ГВГ) в процессе второго порядка является такой же важной и демонстрационной, в силу сравнительной простоты, задачей нелинейной оптики, как задача гармонического осциллятора для квантовой механики, и имеет большое значение для анализа нелинейно-оптических процессов. Как будет видно в дальнейшем, она имеет также и точное решение для случая сильного энергообмена. Наиболее просто ее решение выглядит в приближении заданного поля. Оно имеет важное значение, поскольку позволяет наиболее просто понять основные особенности нелинейно-оптических процессов.

Рассмотрим случай равенства частот накачки $\omega_1 = \omega_2$, что соответствует ГВГ: $2\omega_1 = \omega_3$. Тогда уравнение (5.8) имеет вид

$$\frac{dA_3}{dz} = -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi^{(2)} A_1^2 e^{-i\Delta k z}. \quad (6.1)$$

При нулевых граничных условиях $A_3(z=0) = 0$ зависимость амплитуды второй гармоники от координаты z после интегрирования (6.1) имеет вид

$$A_3 = -i \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2 \Delta k} \chi^{(2)} A_1^2 (e^{-i\Delta k z} - 1). \quad (6.2)$$

Поток мощности второй гармоники (5.14) пропорционален $|A_3|^2$, и тогда

$$S_3 = \frac{cn_3}{8\pi} \left| \frac{2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi^{(2)} A_1^2 \right|^2 z^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad (6.3)$$

где $x = \Delta k z / 2$.

Из выражения (6.3) следуют некоторые свойства, характерные для процесса смешения частот в распределенных системах:

1. При $\Delta k \neq 0$ выходная мощность изменяется как $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$. Выражение (6.2) соответствует выражению (3.22), полученному при рассмотрении на основе интегрального подхода, и демонстрируется рис 3.1.

2. При $\Delta k = 0$ выходная мощность пропорциональна квадрату длины кристалла ($z = L$). Это утверждение, разумеется, справедливо лишь в приближении заданного поля, которое здесь использовалось.

3. Выходная мощность пропорциональна произведению мощностей падающих волн.

Итак, видим, что основную роль в процессах нелинейно-оптического смешения частот играют условия фазового синхронизма $\Delta k = 0$. Только при выполнении этих условий процесс генерации ГВГ, как и процессы генерации суммарных и разностных частот, носят накапливающийся с расстоянием характер, при котором выходная мощность пропорциональна квадрату длины кристалла. Реализация условий фазового синхронизма в силу дисперсии показателей преломления возможна при выполнении определенных условий, изложенных ниже.

Фазовый синхронизм и методы его реализации.

Как известно, распространение света внутри оптически анизотропной среды имеет особенности. В выбранном направлении в среде распространяются две линейно-поляризованные волны на одной и той же частоте с различными скоростями (различными показателями преломления); векторы поляризации волн взаимно перпендикулярны. С существованием в кристалле двух световых волн, распространяющихся с разными скоростями, связано явление **двойного лучепреломления**. Каждой из волн соответствует своя поверхность значений показателя преломления (индикатриса показателя преломления), наглядно демонстрирующая, как зависит от направления волнового вектора показатель преломления для данной волны. В *одноосных* кристаллах одна из индикатрис показателя преломления есть сфера, а другая – эллипсоид вращения вокруг оптической оси кристалла. Первая индикатриса соответствует *обыкновенной* (ordinary) световой волне; ее показатель преломления не зависит от направления волнового вектора. Вторая индикатриса соответствует **необыкновенной** (extraordinary) волне; ее показатель преломления зависит от угла θ между направлением волнового вектора и оптической осью кристалла. Вектор E обыкновенной волны перпендикулярен к плоскости угла θ ; вектор E необыкновенной волны лежит в указанной плоскости.

На [рис. 6.1](#) показаны сечения индикатрис показателя преломления плоскостью, проходящей через оптическую ось: a – в отрицательном одноосном кристалле, b – в положительном одноосном кристалле. Кристалл характеризуется двумя параметрами, зависящими от частоты, – **главными значениями** показателя преломления n_o и n_e ; смысл этих параметров ясен из рисунка. Параметр n_o определяет скорость обыкновенной волны в любом направлении ($v_o = c/n_o$). Параметр n_e определяет скорость необыкновенной волны в направлении, перпендикулярном к оптической оси. В направлении оптической оси скорости обеих волн совпадают. Если $n_e < n_o$ то имеем **отрицательный** одноосный кристалл, а если $n_e > n_o$, то – **положительный**. Поскольку используемые в нелинейной оптике одноосные кристаллы являются, как правило, отрицательными, ограничимся рассмотрением отрицательных одноосных кристаллов. Зависимость показателя преломления n^e необыкновенной волны от угла θ выводится из уравнения эллипса $(n_z^2/n_o^2) + (n_x^2/n_e^2) = 1$.

Представим это уравнение в виде (см. [рис. 6.1](#))

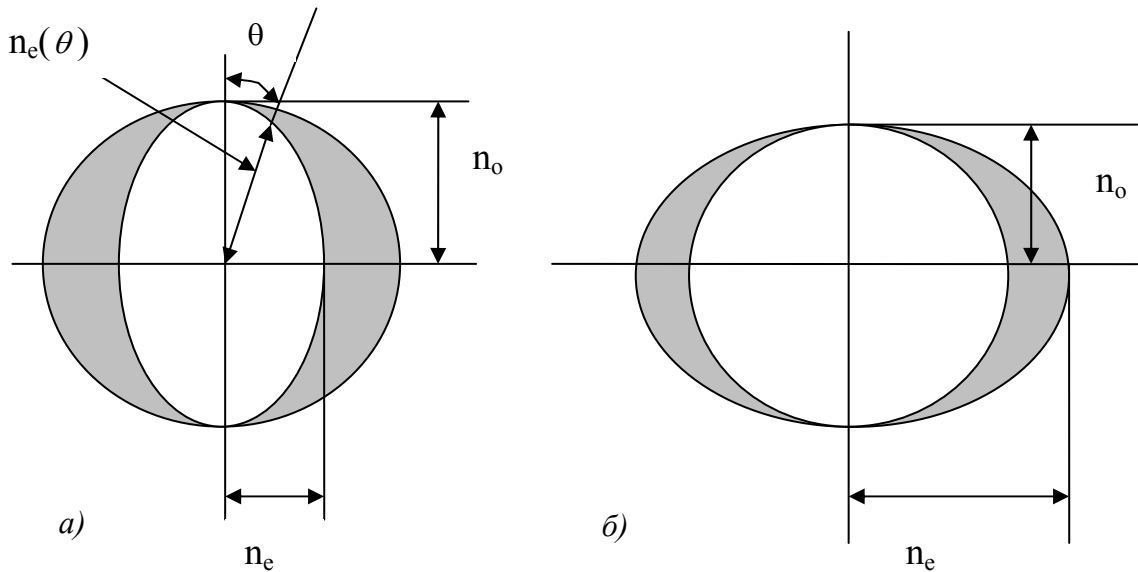


Рис. 6.1. Сечение индикатрис показателей преломления плоскостью проходящей через оптическую ось

$$(n^e)^2 \cos^2 \theta / n_o^2 + (n^e)^2 \sin^2 \theta / n_e^2 = 1 \quad (6.4)$$

Отсюда находим искомую зависимость

$$n^e(\theta) = n_o n_e / \sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \theta}. \quad (6.5)$$

Из уравнения (6.5) следует, что скорость необыкновенной волны, распространяющейся под углом θ к оптической оси, равна

$$v_e(\theta) = c / n^e(\theta) = c \sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \theta} / n_o n_e. \quad (6.6)$$

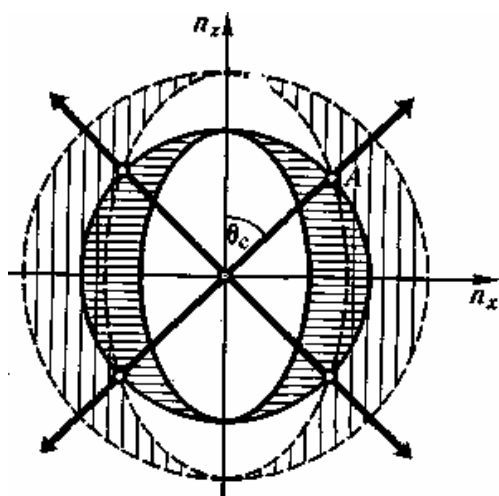


Рис. 6.2

Виды фазового синхронизма.

В области прозрачности диэлектрика дисперсия показателя преломления является нормальной: с ростом частоты показатель преломления увеличивается. На [рис. 6.2](#) показаны сечения индикатрис показателя преломления отрицательного одноосного кристалла для основной частоты (непрерывные кривые) и второй гармоники (штриховые кривые).

Из рисунка видим, что в направлениях, образующих угол θ_c с оптической осью, выполняется равенство показателей преломления обыкновенной волны на основной частоте и необыкновенной волны на частоте второй гармоники:

$$n_o(\omega) = n^e(2\omega). \quad (6.7)$$

Соотношение (6.7) может рассматриваться как условие **фазового синхронизма** для генерации второй гармоники в случае, когда волновые векторы взаимодействующих волн коллинеарны и при этом основные волны являются обыкновенными, а волна второй гармоники – необыкновенной. Для выполнения синхронизма волновые векторы должны быть ориентированы под углом θ к оптической оси. Это направление называют **направлением синхронизма**, а угол θ_c – **углом синхронизма**. В пространстве эти направления образуют конус синхронизма. Приведенный пример соответствует одной из разновидностей фазового синхронизма. Виды синхронизма делятся на две группы (два типа). При синхронизме **первого типа** обе волны на основной частоте имеют одну и ту же линейную поляризацию, а волна на частоте второй гармоники имеет перпендикулярную поляризацию. При синхронизме **второго типа** волны на основной частоте имеют взаимно перпендикулярные поляризации. Если одноосный кристалл отрицателен, то синхронизм первого типа может быть реализован в том случае, когда обе волны на основной частоте являются обыкновенными, а волна второй гармоники – необыкновенной; это есть случай так называемого *оо-е-синхронизма* или, иначе, *оо-е-взаимодействия*. В положительном одноосном кристалле синхронизм первого типа может быть реализован, когда волны на основной частоте являются необыкновенными, а волна второй гармоники – обыкновенной (*ее-о-взаимодействие*). Синхронизм второго типа в отрицательном кристалле соответствует *ое-е-взаимодействию*, а в положительном *ео-о-взаимодействию* (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Тип синхронизма	Отрицательные кристаллы	Положительные кристаллы
Первый	<i>оо-е</i>	<i>ее-о</i>
Второй	<i>ое-е</i>	<i>ео-о</i>

Кроме того, следует различать **скалярный и векторный синхронизмы**. При скалярном синхронизме волновые векторы взаимодействующих световых волн коллинеарны, а при векторном – не коллинеарны. Таким образом, если ограничиться отрицательными одноосными кристаллами, то следует рассмотреть четыре вида синхронизма: скалярные *оо-е* и *ое-е*, векторные *оо-е* и *ое-е*. Приведенный выше пример соответствовал скалярному.

Прежде чем начать обсуждение различных видов синхронизма, заметим, что условие синхронизма накладывается на волновые векторы. Поэтому надо перейти от поверхностных значений показателя преломления к **поверхностям волновых векторов**, используя известное соотношение $k = n\omega/c$. В дальнейшем будем рассматривать сечения именно поверхностей волновых векторов.

Скалярный оо-е-синхронизм. В случае *оо-е-взаимодействия* представим условие синхронизма в виде

$$\hat{e}_1^i + \hat{e}_2^i = \hat{E}^a. \quad (6.8)$$

Поскольку $I |\hat{e}_1^i| = |\hat{e}_2^i|$, то для скалярного (коллинеарного) варианта

данного типа синхронизма соотношение (6.8) можно упростить:

$$2\hat{e}_1^i = K^e. \quad (6.9)$$

Переходя от волновых векторов к показателям преломления, получаем

$$2n_0(\omega)\frac{\omega}{c} = n^e(2\omega)\frac{2\omega}{c}. \quad (6.10)$$

Используя уравнение (6.5), получим выражение для косинуса угла синхронизма:

$$\cos \theta_c = \frac{n_o(2\omega)}{n_o(\omega)} \sqrt{\frac{n_o^2(\omega) - n_e^2(2\omega)}{n_o^2(2\omega) - n_e^2(2\omega)}}. \quad (6.11)$$

Угол θ_c называют углом первого синхронизма. Необходимым и достаточным условием его существования является условие

$$n_o(\omega) \leq n_e(2\omega). \quad (6.12)$$

Если $\theta_c = 90^\circ$, то такой синхронизм называют 90-градусным. Он обладает рядом преимуществ, которые выяснятся дальнейшем. Вывод выражения для угла θ_c в случае скалярного *oe-e-синхронизма* аналогичен и здесь не воспроизводится, однако само выражение из которого угол синхронизма может быть рассчитан, имеет следующий вид:

$$n_o(\omega) + \frac{n_o(\omega)n_e(\omega)}{\sqrt{[n_o^2(\omega) - (n_o^2(\omega) - n_e^2(\omega))\cos^2 \theta_c]}} = \frac{2n_o(2\omega)n_e(2\omega)}{\sqrt{[n_o^2(2\omega) - (n_o^2(2\omega) - n_e^2(2\omega))\cos^2 \theta_c]}}. \quad (6.13)$$

Решив это уравнение относительно $\cos \theta_c$, получим аналогичное (6.11) соотношение для расчета угла синхронизма.

Дополнительные вопросы, которые следует изучить самостоятельно.

1. Ширина синхронизма. Углы и угловые ширины θ и $\Delta\theta$, φ и $\Delta\varphi$.
2. 90-градусный синхронизм. Температурная зависимость θ_c .
3. Другие способы фазового согласования: периодическая пространственная модуляция $\chi^{(2)}$. Неколлениарный синхронизм.

ЛЕКЦИЯ № 7. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Точное решение для генерации второй гармоники уравнение для медленно меняющихся амплитуд и фаз. Решение при точном синхронизме. Случай отсутствия второй гармоники на входе нелинейной среды. Захват и срыв захвата обобщенной фазы. ГВГ в отсутствии синхронизма.

Уравнения для медленно меняющихся действительных амплитуд и фаз.

Система стационарных связанных уравнений для комплексных амплитуд A_j взаимодействующих полей (5.6), дополненная граничными условиями на эти амплитуды, представляет собой систему нелинейных (произведение $A_j A_k$) обыкновенных (производные только по одной координате) уравнений, аналитическое решение которых представляется достаточно сложной задачей. Однако такое решение, во всяком случае для ГВГ (см. лекцию 6), существует и имеет важное значение, поскольку позволяет получить ряд принципиальных результатов, полезных при рассмотрении других нелинейно-оптических задач. Наиболее просто оно выглядит при представлении комплексной амплитуды поля в виде

$$A_j(z) = a_j(z) \exp i\varphi_j(z), \quad (7.1)$$

где $a_j(z)$ и $\varphi_j(z)$ – амплитуда и фаза соответственно являются действительными функциями. Перепишем систему (5.6), вводя следующие обозначения:

$$\sigma_j = (2\pi\omega_j^2 \chi^{(2)} / k_j c^2) \quad (7.2)$$

коэффициент нелинейной связи для j -й волны, и $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$ – см. (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_3 A_2^* \exp(-i\Delta kz), \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\sigma_2 A_3 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \\ \frac{dA_3}{dz} &= -i\sigma_3 A_1 A_2 \exp(i\Delta kz). \end{aligned} \quad (7.3)$$

В случае ГВГ (рассмотрим простейший пример $oo-e$ либо $ee-o$ типов синхронизма, при которых $A_1(z) = A_2(z)$, и переопределим $A_3(z) \rightarrow A_2(z)$) система (7.3) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dA_1(z)}{dz} &= -i\sigma_1 A_1^*(z) A_2(z) \exp(-i\Delta kz), \\ \frac{dA_2(z)}{dz} &= -i\sigma_2 A_1^2(z) \exp(i\Delta kz).\end{aligned}\tag{7.4}$$

Перейдем от комплексных амплитуд $A_j(z)$ к вещественным амплитудам $a_j(z)$ и фазам $\varphi_j(z)$, тогда система примет вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{d\varphi_1}{dz}\right) &= -i\sigma_1 a_1 a_2 \exp[-i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)], \\ \left(\frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz}\right) &= -i\sigma_2 a_1^2 \exp[i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)],\end{aligned}\tag{7.4a}$$

в которой обозначим величину $2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k \cdot z = \Psi$, называемой обобщенной фазой, и, воспользовавшись соотношением $\exp(\pm i\Psi) = \cos(\Psi) \pm i\sin(\Psi)$ получим

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{d\varphi_1}{dz} &= -i\sigma_1 a_1 a_2 (\cos \Psi - i \sin \Psi), \\ \frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} &= -i\sigma_2 a_1^2 (\cos \Psi + i \sin \Psi).\end{aligned}$$

Разделив вещественную и мнимую части уравнений и учитывая при этом, что $2d\varphi_1/dz - d\varphi_2/dz = d\Psi/dz - \Delta k \cdot z$, окончательно получим для трех неизвестных действительных функций a_1, a_2, Ψ -амплитуд взаимодействующих полей и обобщенной фазы соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dz} + \sigma_1 a_1 a_2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{da_2}{dz} - \sigma_2 a_1^2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{d\Psi}{dz} - \Delta k + (2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1^2 / a_2) \cos \Psi &= 0.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Полученная система, при заданных граничных условиях и без дополнительных условий, имеет единственное решение, которое, во всяком случае, может быть получено численно. Однако для получения аналитического решения необходимо сделать дополнительные допущения и привести ряд соображений, позволяющих упростить эту систему уравнений.

Решение уравнений при точном синхронизме. При выполнении условий синхронизма (5.7) $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$ производная обобщенной фазы $d\Psi/dz =$
 $= 2d\varphi_1/dz - d\varphi_2/dz$ и система (7.5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dz} + \sigma_1 a_1 a_2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{da_2}{dz} - \sigma_2 a_1^2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{d\Psi}{dz} + (2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1^2 / a_2) \cos \Psi &= 0.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Полученная система уравнений имеет интеграл движения. Покажем это. Умножая первое уравнение в системе (7.6) на a_1 , второе – на a_2 и складывая, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_2 a_1^2(z) + \sigma_1 a_2^2(z)) = 0.\tag{7.7}$$

Отсюда видно, что при любом z сумма, стоящая в скобках, **постоянна**. Обозначив эту постоянную через $\sigma_1 U^2$, запишем

$$\sigma_2 a_1^2(z) + \sigma_1 a_2^2(z) = \sigma_1 U^2\tag{7.8}$$

Постоянную $\sigma_1 U^2$ можно выразить через значения амплитуд на границе нелинейной среды (при $z = 0$):

$$\sigma_2 a_1^2(0) + \sigma_1 a_2^2(0) = \sigma_1 U^2.\tag{7.9}$$

Последнее позволяет в системе уравнений (7.6) исключить одну из неизвестных амплитуд a_1 или a_2 , и перейти к системе двух уравнений. Поскольку нас в первую очередь интересует поле на частоте второй гармоники, то, исключив a_1 , получим

$$\begin{aligned}\frac{da_2}{dz} &= \sigma_1 (U^2 - a_2^2) \sin \Psi, \\ \frac{d\Psi}{dz} &= \sigma_1 \left(\frac{U^2}{a_2} - 3a_2 \right) \cos \Psi.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Случай отсутствия второй гармоники на входе нелинейной среды. Рассмотрим второе уравнение (7.10), описывающее изменение обобщенной фазы вдоль оси z , в идеальной, но характерной для процесса ГВГ ситуации: поле на частоте второй гармоники отсутствует либо амплитуда его много меньше амплитуды первой гармоники. Тогда $\sigma_1 U^2 \approx \sigma_2 a_1^2(0)$ и производная велика при отличных от нуля значений $\cos \Psi$. Это означает, что обобщенная фаза быстро меняется, стремясь к значению $\Psi = \pi/2$, при котором $\cos \Psi = 0$, а $d\Psi/dz = 0$. Это значение фазы является устойчивым на достаточно большом протяжении z , во всяком случае, пока величина амплитуды второй гармоники не достигнет значений, сравнимых с амплитудой первой гармоники, и явля-

ется решением второго уравнения (7.10). Такое поведение обобщенной фазы получило название захвата фазы, и будет рассмотрено подробно ниже.

Таким образом, система (7.10) переходит в отдельное дифференциальное уравнение относительно амплитуды второй гармоники при значении $\Psi = \pi/2$:

$$\frac{da_2}{dz} = \sigma_1(U^2 - a_2^2), \quad (7.11)$$

Решение которого не представляет труда: $z = \int da_2 / \sigma_1(U^2 - a_2^2)$, поскольку выражается через табличный интеграл, а решение для значений $a_2(z)$, удовлетворяющее граничному условию $a_2(0) = 0$, можно выразить через гиперболический тангенс $th\alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha}) / (e^\alpha - e^{-\alpha})$; $th\alpha = (ch\alpha)^{-1}$:

$$a_2(z) = U th(\sigma_1 U z). \quad (7.12)$$

Поскольку $U = a_1(0)\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, то перепишем уравнение (7.12) в виде

$$a_2(z) = a_1(0)\sqrt{\sigma_2/\sigma_1} th\left(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} a_1(0) z\right). \quad (7.13)$$

Используя выражение (7.8), находим отсюда выражение для амплитуды основной волны $a_1(z)$:

$$a_1(z) = \frac{a_1(0)}{ch\left(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} a_1(0) z\right)}. \quad (7.14)$$

На рис. 7.1. показана зависимость нормированных значений амплитуд $a_1(z)$ и $a_2(z)$, при $\left(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} a_1(0) z\right)$

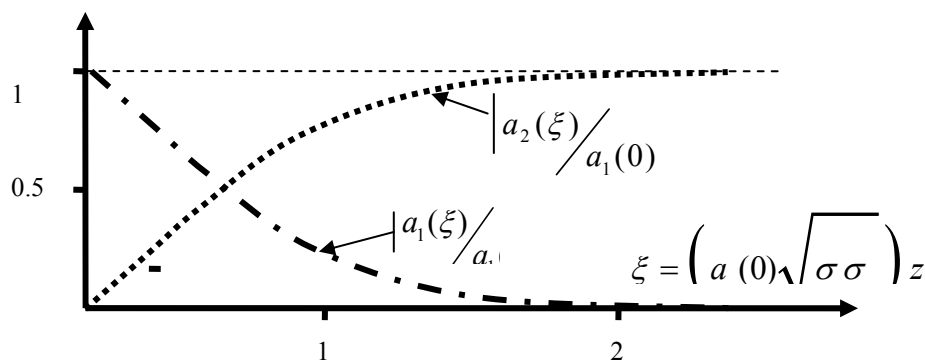


Рис. 7.1.

Как видно из выражений (7.13), (7.14), возможно полное преобразование излучения накачки в излучения второй гармоники. При этом эффектив-

ная перекачка энергии происходит на длине порядка

$$L = \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_1(0) \right)^{-1}, \quad (7.15)$$

называемой длиной нелинейного взаимодействия, которая на практике составляет несколько сантиметров.

Полученные соотношения показывают, что процесс преобразования необратим. Однако решение было получено в предположении $\Psi = \pi/2 - \text{const}$. Как уже упоминалось выше, фаза остается захваченной до тех пор, пока величина амплитуды второй гармоники не достигнет значений, сравнимых с амплитудой первой гармоники, т. е. на длинах меньших L , определяющихся соотношением (7.15). Для того чтобы проследить за решением уравнения (7.10) на длинах, больших, порядка L , необходимо иметь решение этой системы

с учетом срыва захвата фазы, т. е. учесть изменение обобщенной фазы. Такое решение может быть получено численно.

Захват и срыв захвата обобщенной фазы.

Численное решение системы (7.10) в условиях точного фазового синхронизма ($\Delta k = 0$) было получено магистрантом КГТУ А. Вьюношевым. Результаты полученных зависимостей a_1 (pump mode), a_2 (second harmonic) и обобщенной фазы ψ (phase) от z (на [рис.7.2](#) $L_m = 0.03$ соответствует $z = \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_1(0) \right)^{-1}$), представлены на [рис. 7.2](#). Как видно из рисунка при малой амплитуде второй гармоники на входе в среду ($z = 0$), при любом значении обобщенной фазы $\psi(0)$, ее значение быстро стремится к оптимальному для генерации второй гармоники значению $\psi = \pi/2$ и происходит «захват фазы». Далее фаза остается почти постоянной на расстоянии порядка $z = \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_1(0) \right)^{-1}$ и амплитуда второй гармоники растет, а первой – уменьшается так как и показано на [рис 7.1](#), что соответствует выражениям (7.13), (7.14).

По мере приближения z к $L = \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_1(0) \right)^{-1}$ обобщенная фаза начинает меняться с соответствующим уменьшением скорости роста a_2 и скорости падения a_1 . Происходит срыв захвата фазы. При полной перекачки энергии из a_1 в a_2 значение ψ становится отрицательным, что приводит к обратной перекачке энергии из второй гармоники в первую, которая идет при оптимальном для этого процесса значении фазы $\psi = -\pi/2$.

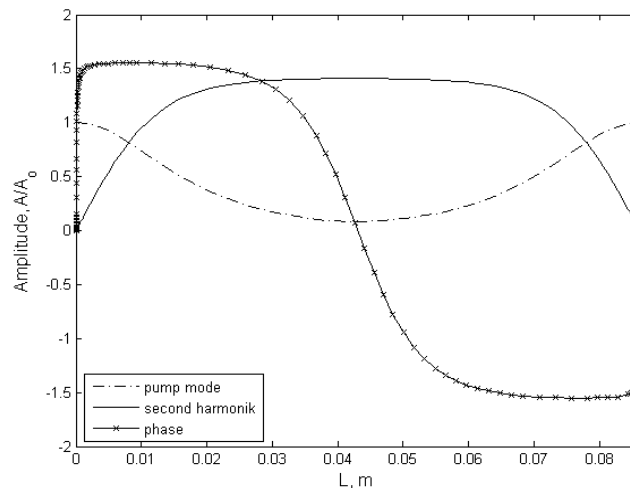


Рис. 7.2

ГВГ в отсутствии синхронизма. В этом случае важным параметром является соотношение длины когерентности $l_{\text{ког}} = \pi/\Delta k$ — см. (3.25) и длины нелинейного взаимодействия $L = \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_1(0)\right)^{-1}$. На рис. 7.3 качественно представлена зависимость $a_2(z)$ для различных соотношениях этих величин:

Кривая $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ соответствует } l_{\text{ког}} \gg L, \\ 3) \text{ соответствует } l_{\text{ког}} \simeq L, \\ 4) \text{ соответствует } l_{\text{ког}} \prec L, \\ 5) \text{ и } 2) \text{ соответствуют } l_{\text{ког}} \ll L. \end{array} \right\}$

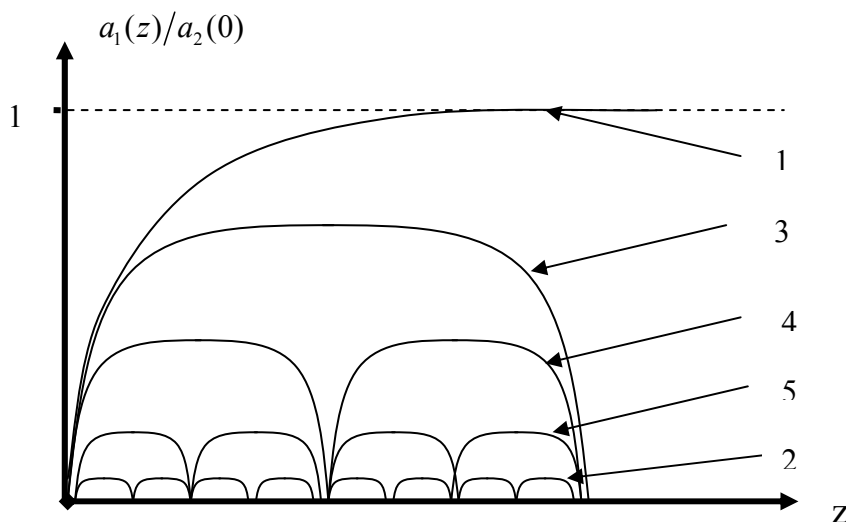


Рис. 7.3

Таким образом, в результате рассмотрения процесса генерации второй гармоники показано следующее:

1. Возможно полное преобразование излучения накачки в излучение второй гармоники в условиях точного синхронизма.

2. Малая амплитуда излучения генерируемого поля на входе в среду приводит к захвату обобщенной фазы, устойчивое положение которой соответствует $\pi/2$.

ЛЕКЦИЯ № 8. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ

Параметрическое усиление. Коэффициенты усиления усилителя. Параметрический генератор света. Однорезонаторный и двухрезонаторный параметрический генератор света. Фазовый синхронизм. Перестроенные характеристики и способы перестройки частоты в параметрических генераторах света.

Параметрическое усиление.

Говоря о генераторах когерентного света с плавной перестройкой частоты, можно выделить три типа лазеров. *К первому типу* отнесем лазеры, в которых осуществляется целенаправленное изменение частоты рабочего перехода в результате внешних воздействий. Примером могут служить полупроводниковые лазеры, частота генерации которых меняется под действием внешнего электрического поля при изменении температуры или химического состава активного элемента. *Ко второму типу* отнесем лазеры с широкой линией рабочего перехода. Перестройка частоты осуществляется в пределах этой линии. Для реализации перестройки внутрь резонатора лазера вводят спектрально-селективный элемент, например, дисперсионную призму или дифракционную решетку. Такой метод перестройки частоты применяют в лазерах на красителях и сжатых газах. Отметим в этой связи также перестраиваемые лазеры на центрах окраски в ионных кристаллах. Наконец, *к третьему типу* отнесем параметрические генераторы света (ПГС). В [лекциях 6, 7](#) мы подчеркивали, что ГВГ является частным случаем процесса генерации излучения суммарной частоты. Подобно этому параметрические усилители и генераторы являются частными случаями генераторов разностной частоты. Из соотношений (5.14) Мэнли – Роу мы знаем, что в процессе генерации разностной частоты фотон наибольшей частоты распадается на два фотона с меньшими частотами: энергия, черпаемая из пучка с большей частотой, распределяется между двумя пучками с меньшими частотами. Следовательно, этот процесс можно использовать для усиления волн: слабый сигнал заставляют взаимодействовать с мощной волной накачки, имеющей более высокую частоту, тогда обе волны – возникающая в процессе взаимодействия волна разностной частоты (известная под названием «**холостой волны**») и первоначальный сигнал – усиливаются. Если **холостая волна** и усиленный сигнал снова проходят, имея нужную фазу, через тот же самый нелинейный кристалл, то обе волны снова усиливаются. Более того, даже если только одна из волн повторно и в нужной фазе пропускается через кристалл, то в результате снова получается усиление обеих волн. Таким образом, усилитель может быть превращен в генератор путем введения соответствующей **обратной связи** (т. е. резонатора) либо для обеих волн, либо только для одной из них. Если усиление за один проход превысит потери за тот же проход, самовозбуждение генератора может возникнуть с «затравкой» из шумов. Если и для **сигнальной, и для холостой** волн имеются резонаторы, то порог генерации, естественно, ниже,

нежели в том случае, когда резонанс существует только для одной из них. Однако по другим соображениям этот так называемый **двухрезонаторный** вариант параметрического генератора может быть менее предпочтительным.

Отметим, что термины «**сигнальная волна**» и «**холостая волна**» имеют вполне определенный смысл только при рассмотрении усилителя. В генераторе любая из двух низкочастотных волн может быть названа холостой или сигнальной.

Коэффициенты усиления усилителя.

На практике в параметрических генераторах в качестве излучения накачки часто используются одномодовые пучки, поэтому, вообще говоря, требуется учет поперечной ограниченности. Однако уже несложный анализ, основанный на рассмотрении взаимодействия плоских волн, который использовался нами ранее для описания ГВГ и преобразования частоты вверх, позволяет выявить большинство характерных особенностей поведения параметрических усилителя и генератора. Вследствие простоты мы воспользуемся им в качестве исходного пункта.

Поскольку мы считаем, что пучок накачки с частотой ω_3 является весьма интенсивным, а поля на частотах ω_1 и ω_2 слабыми, то изменением поля накачки можно пренебречь, считая его постоянным (приближение заданного поля), и тогда уравнения (7.5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_3 A_2^* \exp(-i\Delta kz), \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\sigma_2 A_3 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \\ \frac{dA_3}{dz} &= 0.\end{aligned}\tag{8.1}$$

В таком виде мы имеем дело с однородной системой двух линейных уравнений, в которых поле накачки постоянно. Примем, как и в предыдущих случаях, что выполняются условия фазового синхронизма $\Delta k = 0$, которые совместно с соотношением на частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ представляют собой законы сохранения энергии и импульса при трехфотонных взаимодействиях. Для того чтобы иметь дело только с двумя неизвестными функциями, возьмем комплексное сопряжение от второго уравнения (8.1) и получим

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} + i\sigma_1 A_3 A_2^* &= 0, \\ \frac{dA_2^*}{dz} - i\sigma_2 A_3^* A_1 &= 0.\end{aligned}\tag{8.2}$$

В соответствии с общим методом решения таких систем уравнений, решение ищем в виде $A_j = e^{\alpha z}$. После подстановки его в уравнение (8.2) получим относительно α алгебраическую систему

$$\begin{aligned}\alpha + i\sigma_1 A_3 &= 0, \\ -i\sigma_1 A_3 + \alpha &= 0,\end{aligned}$$

которая имеет решение в том случае, если ее детерминант равен 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha + i\sigma_1 A_3 \\ -i\sigma_2 A_3^* + \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \sigma_1 \sigma_2 |A_3|^2 = 0. \quad (8.3)$$

Тогда

$$\alpha = \pm \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 |A_3|^2}, \quad (8.4)$$

а общее решение уравнения (8.2) примет вид

$$\begin{aligned}A_1(z) &= c_1 e^{\alpha z} + c_2 e^{-\alpha z}, \\ A_2^*(z) &= c_1 e^{\alpha z} - c_2 e^{-\alpha z},\end{aligned} \quad (8.5)$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются граничными условиями $A_1(0) = A_{10} = c_1 + c_2$ и $A_2^*(0) = A_{20} = c_1 - c_2$, что позволяет получить частное решение

$$\begin{aligned}A_1(z) &= \left(\frac{A_{10} + A_{20}}{2} \right) e^{\alpha z} + \left(\frac{A_{10} - A_{20}}{2} \right) e^{-\alpha z}, \\ A_2^*(z) &= \left(\frac{A_{10} + A_{20}}{2} \right) e^{\alpha z} - \left(\frac{A_{10} - A_{20}}{2} \right) e^{-\alpha z}.\end{aligned} \quad (8.6)$$

Отсюда видим, что процесс генерации разностных частот идет с экспоненциальным усилением обеих волн. При этом показатель экспоненты определяется соотношением (8.4), что позволяет ввести характерную обратную длину, на которой амплитуда увеличивается в e раз:

$$g = \alpha = \pm \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 |A_3|^2} = \frac{2\pi}{c\sqrt{n_1 n_2}} \chi^{(2)} \sqrt{\omega_1 \omega_2} |A_3|, \quad (8.7)$$

где $n_1, n_2, \omega_1, \omega_2, |A_3|$ показатели преломления и частоты усиливаемых волн, а также модуль амплитуды поля накачки.

Параметрический генератор света.

Условие самовозбуждения усилителя, как известно, эквивалентно требованию, чтобы усиление превышало потери. Если для создания обратной связи используется высокодобротный резонатор с зеркалами, имеющими коэффициент отражения $R(R \approx 1)$, то условие самовозбуждения имеет вид $gL \geq 1 - R$, где L – длина кристалла. Однако, если не приняты специальные меры, потери обычно превышают величину $1 - R$ вследствие несовершенства кристалла и т. п.

Впервые оптическая параметрическая генерация была получена Джордмейном и Миллером, которые использовали в качестве источника накачки вторую гармонику лазера на $\text{CaWO}_4:\text{Nd}^{+3}$ с модуляцией добротности: $\lambda = 0,529$ мкм. Отражающие покрытия, которые образовывали резонатор для сигнальной и холостой волн, были напылены непосредственно на плоскопараллельные грани кристалла ниобада лития. Пропускание $(1 - R)$ этих покрытий имело величину, меньшую 0,4 %. Однако эффективные потери, определенные путем измере-

ния добротности резонатора Фабри – Перо, образованного кристаллом, были около 20 %. Причина различия была приписана поглощению в кристалле и рассеянию.

Генерация наблюдалась при мощности накачки, равной 6,7 кВт; накачка имела вид импульсов с длительностью от 15 до 50 нс. Было вычислено, что это соответствует интенсивности излучения накачки внутри резонатора 4×10^5 Вт/см². Ширина спектральной линии генератора была довольно узкой. Частота генерации могла перестраиваться при температурной перестройке условия фазового синхронизма. Область перестройки, полученная с данной комбинацией накачки и нелинейного кристалла, показана на [рис. 8.1](#), откуда видно, что был перекрыт широкий диапазон от 0,7 до 2,0 мкм.

В этих первых экспериментах порог генерации был настолько высок, что для его превышения требовались мощные импульсные источники накачки. Между прочим, эти эксперименты впервые выявили некоторые из трудностей получения высокой стабильности частоты выходного излучения.

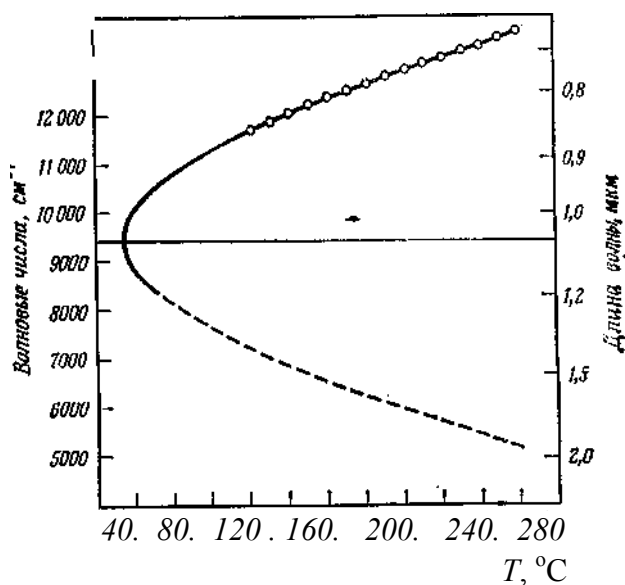


Рис. 8.1

Позже Смит с соавторами получили непрерывную параметрическую генерацию. Они смогли осуществить ее в результате технического усовершенствования схемы Джордмейна и Миллера. Одно из основных усовершенствований состояло в использовании нового нелинейного материала $Ba_2NaNb_5O_{15}$. Поскольку нелинейные коэффициенты ниобата бария-натрия больше таковых для ниобата лития, порог генерации понизился. Смит также заменил плоскопараллельный резонатор, примененный в первой работе, конфокальным резонатором с большей добротностью. Пучки фокусировались внутрь резонатора, параметры которого были тщательно оптимизированы.

Однорезонаторный и двухрезонаторный параметрический генератор света.

Если резонатор высокодобротен на частотах ω_1 и ω_2 , то говорят о **двухрезонаторном** ПГС. Если же добротность резонатора высока только на

одной из двух частот, например, ω_1 , а на другой частоте резонатор фактически отсутствует, то говорят об *однорезонаторном* ПГС. Наиболее распространенные схемы построения *однорезонаторных и двухрезонаторных* ПГС изображены на [рис. 8.2](#) и [рис. 8.3](#) соответственно с неколлинеарным (а) и коллинеарным распространением генерируемого излучения на частотах ω_1 и ω_2 при накачке излучением с частотой ω_3 . Здесь НК – нелинейный кристалл, R – коэффициенты отражения зеркал. При этом в неколлинеарном (а) ПГС условия фазового согласования имеют вид векторного равенства $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$.

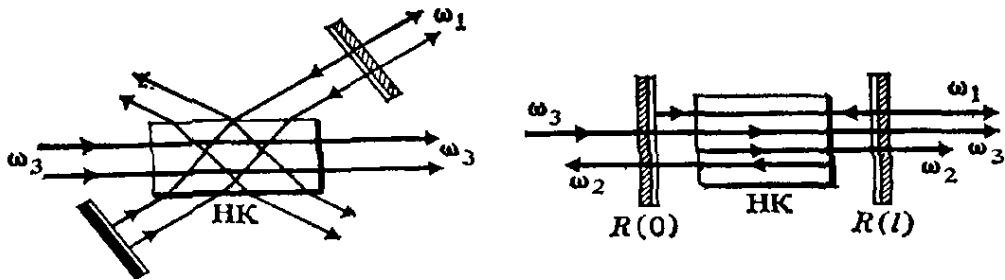


Рис. 8.2

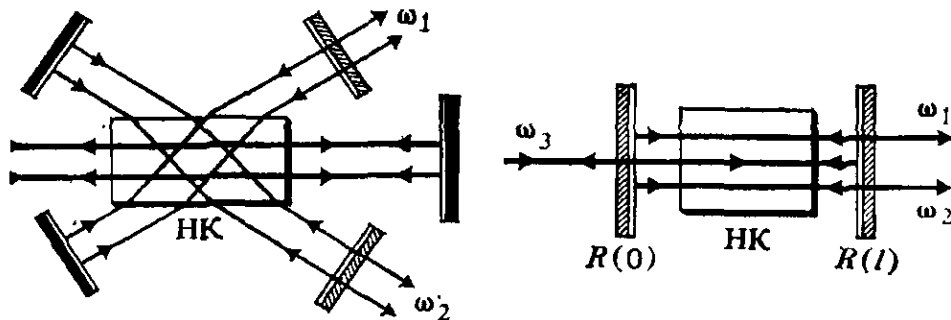


Рис. 8.3

Отметим, что именно резонатор позволяет *выделить* всякий раз те конкретные частоты ω_1 и ω_2 , на которые «расщепляется» частота ω_3 волны накачки. Число пар волн, сумма частот которых равна ω_3 , может быть, очевидно, сколь угодно большим. Однако генерируется всякий раз именно та пара волн, для которой направление синхронизма совпадает с осью резонатора (рассматривая синхронизм, надо, очевидно, принимать во внимание все три волны, т. е. учитывать также волну накачки).

Подчеркивая принципиальное обстоятельство, связанное со спецификой оптических параметрических явлений, Ахманов и Хохлов писали: «В оптике параметрическое взаимодействие носит волновой характер, поэтому его протекание существенно определяется не только временными (частотными), но и пространственными соотношениями: для самовозбуждения параметрических колебаний в оптическом диапазоне необходима не только «частотная» настройка, но и выполнение определенного соотношения между волновыми векторами («волновая» настройка), накладывающего весьма жесткие требо-

вания на дисперсионные свойства среды». Заметим в этой связи, что резонатор в ПГС как раз и осуществляет обе указанных настройки – частотную и волновую.

Фазовый синхронизм. Перестроечные характеристики и способы перестройки частоты в параметрических генераторах света.

Выше отмечалось, что в ПГС генерируются именно те волны (те частоты), для которых выполняются условия синхронизма и, в частности для **однорезонаторных** ПГС направление синхронизма совпадает с осью резонатора. Ясно, что за счет воздействия тем или иным образом на оптическую индикатрису кристалла (иначе говоря, за счет изменения дисперсионных свойств кристалла) можно плавно менять частоты генерируемых волн. Можно, например, плавно поворачивать кристалл внутри резонатора, изменяя тем самым угол между оптической осью кристалла и направлением пучка накачки (направлением оси резонатора). Если при данной ориентации кристалла резонатор «выделяет» направление синхронизма для волн с частотами ω_1 и ω_2 , ω_3 ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$), то при иной ориентации окажется «выделенным» направление синхронизма для волн с иным набором частот: ω_2^* , ω_1^* и ω_3^* ($\omega_3^* = \omega_1^* + \omega_2^*$). Перестройка частот поворотом кристалла относительно пучка накачки называется **угловой перестройкой**. **Перестроечные угловые кривые** аналогичны **температурным** (см. рис 8.1), и изменение угла в пределах 10 градусов позволяет перекрыть всю область перестройки.

Для перестройки частоты можно также менять температуру нелинейного кристалла (см. рис 8.1, на котором изображена характерная перестроечная кривая – **температурная перестройка**). Это связано с тем, что при изменении температуры поверхности волновых векторов несколько изменяются; угол синхронизма зависит от температуры. Можно также использовать изменение оптической индикатрисы кристалла под воздействием внешнего электрического поля (**электрооптическая перестройка частоты**). Наконец, можно перестраивать частоты генерации ПГС за счет изменения частоты волны накачки.

Значит, применяя различные нелинейные кристаллы и различные частоты накачки, изменяя ориентацию кристалла относительно пучка накачки, используя зависимость оптической индикатрисы кристалла от температуры и внешнего поля, можно, в принципе, осуществить с помощью ПГС перестройку частоты в широком диапазоне оптических частот.

Итак, отметим, что как сам процесс параметрического усиления в средах, размеры которых значительно больше длины волны, так и основанный на нем параметрический генератор света является принципиальным достижением, вносящим существенный вклад в представление о взаимодействии света с веществом.

ЛЕКЦИЯ № 9. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УКРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метод медленно меняющихся амплитуд в теории распространения волн. Нестационарные укороченные уравнения. Второе приближение теории дисперсии. Уравнения для пучков и импульсов. Дифракционные эффекты и дисперсионное распывание импульсов. Общее уравнение для модулированных в пространстве и во времени амплитуд.

Метод медленно меняющихся амплитуд в теории распространения волн.

В [лекции № 5](#) мы рассмотрели метод медленно меняющихся амплитуд, позволяющий значительно упростить процессы параметрического взаимодействия волн в стационарном случае. Постоянство во времени амплитуд полей позволяет рассматривать взаимодействие только монохроматических волн. При взаимодействии импульсных полей использовавшаяся методика получения укороченных уравнений неприменима, поскольку необходимо рассматривать изменение амплитуд во времени, а значит, и немонохроматических полей. Однако анализ задач о нелинейном взаимодействии требует решения связанных волновых уравнений – см. (5.1). В такой постановке аналитические результаты удастся получить лишь в сравнительно простых случаях, поэтому большое значение, даже для линейных задач, приобретает разработка приближенных методов, базирующихся на упрощении исходных уравнений.

Рассмотрим распространение одного из наиболее эффективных приближенных методов упрощения волновых уравнений – метода медленно меняющихся амплитуд на нестационарные процессы как в линейном, так и в нелинейном случаях. В физике волновых процессов метод медленно меняющихся амплитуд впервые был применен Леонтовичем в задачах распространения радиоволн. Для решения линейных и нелинейных волновых задач метод медленно меняющихся амплитуд детально разработал Р. В. Хохлов. В теории волн, в основе метода медленно меняющихся амплитуд, лежит естественное предположение о том, что комплексная амплитуда A волны изменяется медленно в масштабе средней длины волны λ и среднего периода колебания, т. е. $|\partial^2 A / \partial t^2| \ll |A|$ и $|\partial^2 A / \partial z^2| \ll |A|$.

Нестационарные укороченные уравнения.

Для описания процесса распространения квазиплоских и квазимонохроматических волн в линейном случае можно использовать приближенные уравнения, получаемые из уравнений Максвелла (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), и в дальнейшем распространить на нелинейное взаимодействие волн.

В случае линейных сред эти уравнения также линейны и для их решений выполняется принцип суперпозиции. Поэтому, хотя реальные поля, разумеется, всегда вещественны, при рассмотрении волн в линейных средах

удобно использовать комплексную запись поля в виде

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (9.1)$$

В стационарном случае поля монохроматичны и связь между поляризацией и полем локальна во времени: $P = \chi^{(1)} E$ – см. (3.6). Если амплитуда поля меняется со временем, то отклик среды (поляризация) зависит от поля в предыдущие моменты времени (зависит от предыстории). Тогда линейная часть поляризации среды $P(z, t)$ с учетом временной нелокальности отклика представима в следующем виде

$$P(z, t) = \int_0^\infty H(t') E(t - t') dt'. \quad (9.2)$$

Здесь $H(t')$ – тензор линейной восприимчивости.

Очевидно, что в этом случае волновое дифференциальное уравнение – см. (3.4) – превращается в интегродифференциальное, трудно анализируемое. Условие медленности позволяет записать для амплитуды A дифференциальное уравнение и одновременно понизить его порядок. Записывая поле E в виде (9.1) и полагая амплитуду поля $A(z, t - t')$ медленно меняющейся функцией временной и пространственной переменных, разложим ее в степенной ряд по t' вблизи t :

$$A(z, t - t') = A(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(-t')^n \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial t^n} \right]. \quad (9.3)$$

Подставим (9.1) и (9.3) в (9.2) и после простых преобразований получим выражение для $P(z, t)$:

$$P(z, t) = \left\{ \chi(\omega) A(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[(-1)^n \frac{\partial^n \chi(\omega)}{\partial \omega^n} \frac{\partial^n A}{\partial t^n} \right] \right\} \exp i(\omega t - kz). \quad (9.4)$$

Здесь линейная восприимчивость среды $\chi(\omega)$ для волны на частоте ω дается выражением

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty H(z, t') \exp -i(\omega t' - kz) dt'. \quad (9.5)$$

В первом приближении теории дисперсии (слабой дисперсии) для поляризации из уравнения (9.4) (первый член в разложении) имеем

$$P(z, t) = \left[\chi(\omega) A(z, t) - i \frac{\partial \chi(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} \right] \exp i(\omega t - kz). \quad (9.6)$$

Подставим в волновое уравнение (3.4) выражение (9.1). Учитывая (9.6) и в приближении медленно меняющихся амплитуд, удерживая только члены с производной по временной и пространственной координатам не выше первой, получим укороченное волновое уравнение для амплитуды поля

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (9.7)$$

и дисперсионное уравнение, дающее связь между частотой ω и волновым вектором k :

$$\omega^2 (1 + 4\pi\chi(\omega)) - k^2 c^2 = 0. \quad (9.8)$$

При этом групповая скорость, как следует из (9.6),

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.7) и является тем самым укороченным уравнением для описания процесса распространения квазимонохроматических волн *в линейном случае*, полученным в приближении медленно меняющихся амплитуд. Оно является приближенным, поскольку при его выводе был учтен только первый член разложения (9.4) в форме (9.6), и учитывает только первое приближение теории дисперсии ($\partial\chi(\omega)/\partial\omega$). Таким образом, уравнение (9.7) справедливо в той области, где дисперсию среды можно считать линейной. Это соответствует первому приближению теории дисперсии.

Общим решением этого уравнения (9.10) является любая функция вида

$$A(z,t) = A(z-ut), \quad (9.10)$$

где вид функции $A(z-ut)$ определяется условиями на границе среды $A(z=0,t) = A_0(t)$. Последнее означает, что любое зависящее от времени возмущение поля $A(t)$, возникшее на границе среды, распространяется по среде с групповой скоростью u , сохраняя первоначальную форму. Групповая скорость, в соответствии с определением (9.9), определяется дисперсией среды и, следовательно, ее учитывает:

$$u = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \left(n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (9.11)$$

Учет нелинейности можно осуществлять, добавив в правую часть член $\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{нл}}{\partial t^2}$, что позволяет ему оставаться в рамках дифференциального уравне-

ния и избавиться от интегрального представления поляризации вида (9.2).

Второе приближение теории дисперсии.

В тех случаях, когда линейной аппроксимации дисперсионного уравнения недостаточно, следует учесть старшие производные в разложении поляризации. Во втором приближении для поляризации – см. (9.4) – при $n = 2$ имеем

$$P(z, t) = \left[\chi(\omega) A(z, t) - i \frac{\partial \chi(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi(\omega)}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} \right] \exp i(\omega t - kz). \quad (9.12)$$

Тогда уравнение (9.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (9.13)$$

где параметр $g = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} (u^{-1})$ характеризует дисперсию групповой скорости.

Наличие этого параметра ведет к качественно новым эффектам. Действительно, дисперсия групповой скорости означает, что различные спектральные компоненты имеют не только разные фазовые, но и групповые скорости. Последнее ведет к трансформации импульса со временем или к его **дисперсионному расплыванию**. Изложенным выше способом можно получить уравнения и в более высоком приближении. Однако с увеличением точности получаемое уравнение для комплексной амплитуды A усложняется.

Уравнения для пучков и импульсов. Дифракционные эффекты и дисперсионное расплывание импульсов.

До сих пор мы имели дело с одномерным волновым уравнением, т. е. предполагалось, что взаимодействуют плоские волны с бесконечно широким волновым фронтом. Реальные волновые пучки имеют ограниченную апертуру и модулированы в поперечном сечении как по амплитуде, так и по фазе. Очевидно, что в этом случае необходимо рассматривать трехмерное волновое уравнение, что значительно затрудняет анализ. В случае квазиплоских волн, т. е. при распространении в среде вдоль оси z волновых пучков вида

$$E(x, y, z) = A(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \quad (9.14)$$

с узким угловым спектром, изменения комплексной амплитуды поперек пучка происходят быстрее, чем вдоль, поскольку происходит переход в область тени. Быстрые изменения волны вдоль направления распространения учитываются экспоненциальным множителем в уравнении (9.14). В этом случае можно также воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд, условием которого является

$$k \frac{\partial A}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}. \quad (9.15)$$

Получим следующее приближенное уравнение параболического типа

$$k \frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} A = 0, \quad (9.16)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – поперечный лапласиан.

Параболическое уравнение (9.15) учитывает дифракционные эффекты, или диффузию излучения, в поперечном вектору k направлении – так называемом квазиоптическом приближении. Из соотношений (9.15) и (9.16) следует, что в квазиоптическом приближении сферическая поверхность заменяется параболоидом. Аппроксимация поверхности волновых векторов параболоидом, ось которого совпадает с направлением среднего волнового вектора k , очевидно, оправдана лишь для относительно узких угловых спектров. Параболическое уравнение вида (9.16), обобщенное на неоднородные и нелинейные среды, используется для описания распространения волн в случайных средах и нелинейного взаимодействия квазиплоских пучков.

Общее уравнение для модулированных в пространстве и во времени амплитуд.

Выше получены приближенные уравнения, описывающие распространение в линейной среде волн, модулированных только во времени или только в пространстве. Хотя на практике обычно приходится иметь дело с волнами, модулированными одновременно в пространстве и времени, отдельное рассмотрение эффектов частичной пространственной и временной когерентности очень часто вполне оправдано. Как будет видно из дальнейшего анализа, это связано с существенным различием в темпе проявления эффектов, связанных с временной и пространственной модуляциями. Вместе с тем для целого ряда задач оказывается необходимым одновременный учет обоих видов модуляций. Уравнение в этом случае можно записать, пользуясь уравнениями (9.13) и (9.16). Полагая, что производные в них одного порядка, имеем

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} A = 0. \quad (9.17)$$

Общее уравнение (9.17) записано в квазиоптическом приближении и во втором приближении теории дисперсии.

ЛЕКЦИЯ № 10. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Трехфотонные процессы. Система нелинейных нестационарных уравнений. Нестационарная генерация второй гармоники. Эффект группового запаздывания импульсов; групповой синхронизм. Эффект дисперсионного расплывания импульсов.

Трехфотонные процессы. Система нелинейных нестационарных уравнений.

Рассмотрим трехфотонные процессы. Уравнение (9.17) является наиболее общим уравнением, на основе которого можно рассматривать нелинейное взаимодействие квазимонохроматических квазиплоских волн в среде с дисперсией. Для упрощения запишем его в операторном виде с учетом частоты и волнового вектора i -й волны, участвующей в процессе:

$$(\hat{L}_j A_j) e^{i(\omega_j t - k_j z)} = 0, \quad (10.1)$$

где $\hat{L}_j = \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{1}{2} g_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} + i \frac{1}{2k_j} \Delta_{\perp} \right]$ – дифференциальный оператор.

При трехфотонном взаимодействии должно выполняться соотношение на частоты $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ взаимодействующих волн – см. (5.3). Тогда, поступая так же как, при выводе системы стационарных укороченных уравнений, можно для рассматриваемого здесь случая записать систему связанных нелинейных уравнений для амплитуд, участвующих в процессе полей – см. (7.3), (7.4):

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 A_1 &= -i \sigma_1 A_3 A_2^* \exp(-i \Delta k z), \\ \hat{L}_2 A_2 &= -i \sigma_2 A_3 A_1^* \exp(-i \Delta k z), \\ \hat{L}_3 A_3 &= -i \sigma_3 A_1 A_2 \exp(i \Delta k z). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Система имеет аналитические решения в частных случаях, разбирать которые в рамках данной дисциплины не целесообразно. Здесь рассмотрим качественно несколько часто встречающихся ситуаций.

Нестационарная генерация второй гармоники.

Как отмечалось ранее, при использовании **сверхкоротких** лазерных импульсов длительностью меньше 10^{-11} с квазистатическое приближение оказывается непригодным. В этом случае необходимо рассматривать **нестационарный** режим генерации второй гармоники. При этом будем считать волновые фронты участвующих в процессе полей плоскими, что, как прави-

ло, достаточно строго выполняется (в этом случае оператор имеет вид

$$\hat{L}_j = \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{1}{2} g_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right].$$

Тогда в нестационарном режиме проявляются два специфических эффекта: групповое **запаздывание** взаимодействующих световых импульсов и **дисперсионное** расплывание. Рассмотрим физическую природу этих эффектов.

Эффект группового запаздывания импульсов; групповой синхронизм.

Также, как и в стационарном режиме, условием эффективного взаимодействия является фазовый синхронизм ($\Delta k = 0$). Однако существуют и особенности, присущие нестационарному режиму. Зависимость групповой скорости от частоты приводит к тому, что импульс второй гармоники смещается относительно импульса основной частоты по мере распространения излучения в нелинейном кристалле (**эффект группового запаздывания импульсов**).

На [рис. 10.1, а](#) схематически показано для *оо-е-взаимодействия*, как изменяются форма и взаимное положение импульсов основного излучения (импульс 1) и второй гармоники (импульс 2) по мере распространения вдоль оси z . Групповые скорости импульсов удовлетворяют здесь неравенству $u_0(\omega) < u_e(2\omega)$. Заметим, что при *оо-е-взаимодействии* вторая гармоника генерируется внутри импульса основного излучения в течение **всего времени** прохождения импульса через кристалл; поэтому выходной импульс второй гармоники оказывается несимметрично уширенным. При *ое-е-взаимодействии* картина качественно изменяется ([см. рис. 10.1, б](#)).

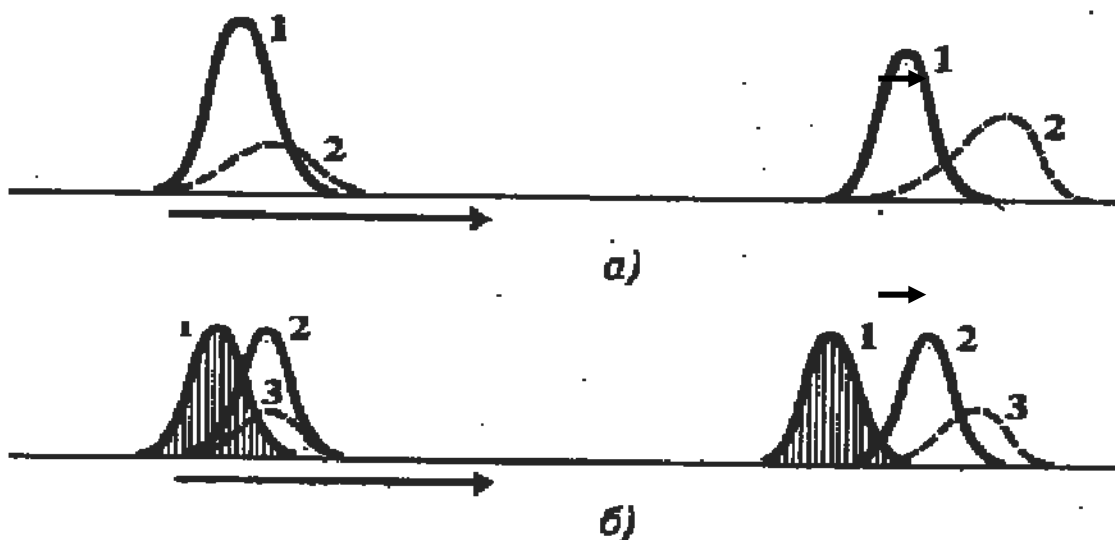


Рис.10.1

Вследствие различия групповых скоростей обыкновенного и необык-

новенного импульсов основной частоты обыкновенный импульс (**импульс 1**) начинает по мере распространения по кристаллу смещаться относительно необыкновенного (**импульс 2**). Оба эти импульса относятся к основному излучению, поэтому указанное смещение приводит к *прекращению* процесса преобразования во вторую гармонику. В результате выходной импульс второй гармоники имеет меньшую энергию и пиковую мощность, чем при *оо-е-взаимодействии*. Ситуация, изображенная на [рис.10.1,б](#), отвечает следующему соотношению групповых скоростей взаимодействующих импульсов: $u_a(\omega) < u_e(\omega) < u_e(2\omega)$.

Существует аналогия между эффектом группового запаздывания импульсов и пространственным сносом энергии необыкновенного светового пучка относительно обыкновенного (**диафрагменным апертурным эффектом**). В обоих случаях происходит разнесение в пространстве взаимодействующих излучений и, как следствие, уменьшение эффективности преобразования. При этом уменьшение эффективности преобразования оказывается более существенным при *оо-е-взаимодействии* (по сравнению с *оо-е-взаимодействием*); сравните [рис. 10.1,а](#) с [рис. 10.1,б](#). Отмеченная аналогия есть проявление **пространственно-временной аналогии**, которую обсудим ниже:

Рассматривая *оо-е-взаимодействие*, введем обозначения: $u_1, \tau_1, l_1 = c\tau_1/n_1$ (групповая скорость, эффективная длительность, эффективная длина импульса основного излучения); $u_2, \tau_2, l_2 = c\tau_2/n_2$ (то же для импульса второй гармоники). Величину

$$\nu = (1/u_1) - (1/u_2) \quad (10.3)$$

называют расстройкой групповых скоростей импульсов. Условия проявления эффекта группового запаздывания:

$$l_1, l_2 < l, \quad (10.4)$$

$$\nu \neq 0. \quad (10.5)$$

Условие ([10.4](#)) означает, что длины импульсов должны быть меньше длины l нелинейного кристалла. Это условие является необходимым, но недостаточным. Его надо рассматривать в сочетании с условием ([10.4](#)), отражающим различие групповых скоростей импульсов. Возможна ситуация, когда

$$u_1 = u_2. \quad (10.6)$$

В этом случае говорят о **групповом синхронизме** (не путать с рассматривавшимся до сих пор волновым (фазовым) синхронизмом!). Условие группового синхронизма может выполняться лишь для некоторой определенной частоты ω обыкновенного излучения (и соответственно частоты 2ω

необыкновенного излучения). При выполнении (10.6) условия (10.4), очевидно, не приводят к эффекту запаздывания импульсов.

Для оценки влияния рассматриваемого эффекта на генерацию второй гармоники вводят характерное время запаздывания

$$\tau_v = \nu l \quad (10.7)$$

и характерную длину дисперсии групповых скоростей (ее называют также квазистатической длиной взаимодействия):

$$L_v = \tau_1 / \nu. \quad (10.8)$$

Величина $\tau_v = \nu l$ определяет временной интервал, на какой расходятся на выходе кристалла импульсы, характеризующиеся групповой расстройкой ν . Квазистатическая длина взаимодействия есть длина, на которой импульсы расходятся во времени на τ_1 . Пространственным аналогом квазистатической длины является апертурная длина. Процесс преобразования во вторую гармонику должен исследоваться как нестационарный, если

$$\tau_1 < \tau_v \text{ или, иначе, } l > L_v. \quad (10.9)$$

При $\lambda_1 = 1,06$ мкм и $\tau_1 = 2 \times 10^{-12}$ с имеем $L_v = 15$ см для кристалла KDP ($K_2 PO_4 \times 2(H_2 O)$) и $L_v = 1$ см – для кристалла LiNbO₃. Отсюда следует, что эффектом группового запаздывания можно пренебрегать в кристалле KDP, поскольку практически используемые длины кристаллов обычно не превосходят 5 см. Однако этот эффект необходимо учитывать в кристалле LiNbO₃.

Эффект дисперсионного распывания импульсов.

Поскольку в диспергирующей среде различные частотные составляющие (фурье-составляющие) импульса распространяются с разными скоростями, происходит искажение формы импульса (импульс расплывается) по мере прохождения через кристалл. В этом и заключается эффект дисперсионного расплывания. Пространственным аналогом данного эффекта является дифракция пучков конечной апертуры. Оценки показывают, что дисперсионное расплывание начинает играть роль при длительностях импульсов порядка 10^{-13} с и ниже.

Для оценки влияния рассматриваемого эффекта на генерацию второй гармоники вводят длину дисперсионного расплывания

$$L_d = \tau_1^2 / 2 \frac{d^2 k}{d\omega^2} \quad (10.10)$$

и характерное время дисперсионного расплывания

$$\tau_d = \left[2ld^2k/d\omega^2 \right]^2. \quad (10.11)$$

Эффект должен учитываться, если выполняется условие

$$\tau_1 < \tau_d \text{ или, иначе, } l > L_d. \quad (10.12)$$

Используя характерное значение $[d^2k/d\omega^2] \approx 10^{-27} \text{ с}^2/\text{см}$, получаем $L_d = 5 \text{ м}$ для $\tau_1 = 10^{-12} \text{ с}$ и $L_d = 5 \text{ см}$ — для $\tau_1 = 10^{-13} \text{ с}$. Таким образом, для пикосекундных лазерных импульсов (не говоря уже об импульсах большей длительности) эффектом дисперсионного расплывания можно пренебрегать. Он становится заметным лишь при $\tau_1 < 10^{-13} \text{ с}$. В связи с этим при рассмотрении нестационарной генерации второй гармоники будем учитывать только эффект группового запаздывания импульсов.

Приведенные в этой лекции соотношения позволяют выбрать необходимое приближение для анализа параметрических процессов взаимодействия электромагнитных волн. При этом следует учитывать как длительность импульса, так и экспеременные свойства среды.

ЛЕКЦИЯ № 11. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ АНАЛОГИЯ

Диафрагменные апертурные эффекты (оо-е-синхронизм) Пространственно-временная аналогия. Параметрический генератор бегущей волны. Общие требования, предъявляемые к нелинейным кристаллам.

Диафрагменные апертурные эффекты (оо-е-синхронизм).

В предыдущей лекции мы рассмотрели эффекты, связанные с первыми и вторыми производными по времени в общем уравнении (9.17), записанном в квазиоптическом и втором приближении теории дисперсии. Физически эти эффекты связаны с явлениями **группового запаздывания импульсов (первая производная)** и **дисперсионного расплывания импульсов (вторая производная)**. Существует нетривиальная **пространственная аналогия** этих явлений, описываемая первой и второй производными по пространственным координатам в этом уравнении.

Учет угла анизотропии позволяет рассмотреть влияние **двойного лучепреломления** в нелинейном кристалле на эффективность генерации второй гармоники. Это влияние может оказаться существенным для световых пучков малой апертурой. Предположим, что рассматривается **скалярный оо-е-синхронизм**. Волновой вектор k и лучевой вектор S_1 обыкновенной волны основной частоты и волновой вектор k необыкновенной волны второй гармоники имеют одинаковое направление – вдоль оси z (вдоль направления синхронизма). Что же касается лучевого вектора S_2 волны второй гармоники, то он направлен под углом анизотропии β к оси (см. [рис. 11.1](#), где OA – оптическая ось кристалла; θ_c – угол синхронизма, l – длина кристалла; d_0 – апертура пучка основного излучения).

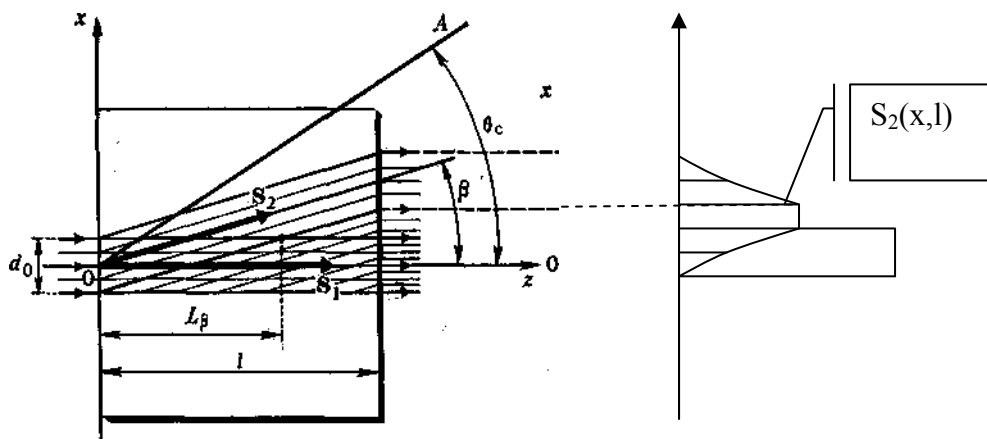


Рис. 11.1

Угол анизотропии β выражен соотношением

$$|\operatorname{tg} \beta| = \sin 2\theta_c (n_{o2} - n_{e2}) / n_{o2}. \quad (11.1)$$

где главные значения показателя преломления относятся к волне второй гармоники.

Из [рис. 11.1](#) видно, что двойное лучепреломление приводит к пространственному **сносу энергии** волны второй гармоники относительно основного излучения. Этот эффект уменьшает эффективность генерации второй гармоники; его называют **диафрагменным апертурным эффектом (ДАЭ)**. В результате сноса энергии волны второй гармоники увеличивается апертура излучения второй гармоники на выходе кристалла в направлении сноса (в направлении оси x). На [рис. 11.1](#) показано распределение по x плотности мощности выходного излучения второй гармоники $S_2(x, l)$; при этом предполагается, что плотность мощности входного излучения основной частоты $S_1(x, l)$ имеет прямоугольный профиль.

При рассмотрении ДАЭ вводят параметр, называемый **апертурной длиной**:

$$L_\beta = d_o / \beta. \quad (11.2)$$

Если **характерная длина нелинейного взаимодействия L** – см. соотношение (7.15) – меньше, чем **апертурная длина**, то ДАЭ можно не учитывать.

Кроме того, за счет дифракции основного излучения и второй гармоники на апертуре d_o излучение представляет собой расходящуюся волну. *Эффекты дифракции* описываются членом $i \frac{1}{2k} \Delta_\perp A = 0$ в уравнении (9.17).

Таким образом, временной эффект **группового запаздывания импульсов** имеет пространственный аналог – **диафрагменный апертурный эффект**, а эффект дисперсионного расплывания импульсов – **эффекты дифракции**.

Пространственно-временная аналогия.

При приближенном описании распространения волн, модулированных только в пространстве, и волн, модулированных только во времени, удастся выделить важные частные случаи, которые описываются сходными уравнениями. Действительно, в квазиоптическом приближении распространение пространственно-модулированных волн подчиняется параболическому уравнению. Уравнением такого же типа во втором приближении теории дисперсии описывается распространение волн, модулированных во времени. Дисперсионному расплыванию волнового пакета можно уподобить дифракционное расширение пучка. Сказанное означает, что результаты решения временных задач могут быть в определенной мере перенесены на пространственные задачи и наоборот.

Ценность аналогии состоит в том, что она позволяет предсказать качественную картину поведения модулированной волны, если известны результаты, относящиеся к волне-аналогу. Вместе с тем следует ясно представлять ограниченность этой пространственно-временной аналогии. Так, в случае распространения модулированных волн в линейных средах возможно отли-

чие временных задач от пространственных. Причины этого заключаются в следующем:

1. Прежде всего следует иметь в виду различие в числе измерений: временные задачи – одномерные, а пространственные задачи – трехмерные, причем направления, перпендикулярные направлению распространения волн, могут быть неравноправными.

2. Если во временных задачах во многих случаях процесс можно считать стационарным, то в пространственных задачах принципиальное значение для большинства случаев имеют конечные пространственные размеры случайных пучков.

Параметрический генератор бегущей волны.

Прогресс в разработках источников накачки, нелинейных сред и оптических элементов ПГС позволил к настоящему времени получить параметрическую генерацию с широко варьируемыми временными, спектральными и пространственными параметрами излучения. Исследование ПГС с импульсной накачкой показало, что длительность импульсов излучения ПГС близка к длительности импульсов накачки. Это, в частности, обусловлено тем, что процессы накачки и излучения в ПГС протекают безынерционно вследствие квадратичной электронной нелинейности. Простейшая возможность получить с помощью ПГС перестраиваемые по длине волны пикосекундные импульсы состоит в использовании в качестве источника накачки лазера с синхронизацией мод. Были предложены методы активной и пассивной синхронизации мод ПГС при накачке непрерывным излучением или достаточно длинными (микросекундными) импульсами. Однако ввиду технических трудностей, возникающих при запуске ПГС с непрерывной (или квазинепрерывной) накачкой, такие схемы ПГС практически не реализованы. Таким образом, во всех практических схемах ПГС, формирующих пикосекундные плавно перестраиваемые импульсы, накачка осуществляется пикосекундными импульсами лазеров с синхронизацией мод.

Кроме того, существенным преимуществом накачки ПГС пикосекундными импульсами лазеров с синхронизацией мод является следующее. Лучевая прочность кристаллов сильно зависит от длительности импульса лазерного излучения, возрастает при ее уменьшении. Так, лучевая прочность большинства используемых в нелинейной оптике кристаллов при облучении пикосекундными импульсами примерно на два порядка выше их лучевой прочности при облучении импульсами наносекундной длительности. Это позволяет значительно поднять интенсивность накачки $g \sim |A_3|$, при которой усиления за один проход достаточно для того, чтобы амплитуда генерируемого излучения была по величине сравнима с амплитудой поля накачки. При этом очевидно, что в результате будет генерироваться излучение на двух частотах, удовлетворяющих равенству $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, для которых выполняется условие фазового синхронизма $\Delta k = 0$ ([см. лекцию № 8](#)).

Хотя к настоящему времени используется большое число различных

схемных вариантов ПГС, в целом они могут быть сведены к двум типам: ПГС бегущей волны и ПГС с синхронной накачкой. Пикосекундные ПГС бегущей волны могут быть реализованы в нескольких вариантах. **Первый вариант** отличается исключительной простотой технического исполнения: на нелинейный кристалл, вырезанный таким образом, чтобы выполнялось условие синхронизма, подается пикосекундный импульс накачки. Для повышения его интенсивности перед кристаллом устанавливается фокусирующая линза или сжимающий телескоп. Если интенсивность накачки и длина нелинейного кристалла достаточно велики, то на выходе кристалла возникает импульс излучения, длина волны которого может перестраиваться в широких пределах согласно частотному и фазовому условиям трехчастотного параметрического взаимодействия. Чаще всего перестройка осуществляется поворотом кристалла или изменением его температуры. За кристаллом помещается оптический фильтр, отсекающий неиспользованную часть излучения накачки. Хотя схема достаточно проста, она обладает рядом недостатков. Так как длина реальных кристаллов не превышает 4–5 см, требуется накачка большой интенсивности, что может привести к разрушению кристалла. С другой стороны, наряду с коллинеарным параметрическим взаимодействием в канале накачки, возникает неколлинеарное взаимодействие, которое существенно расширяет спектр и пространственную расходимость излучения ПГС.

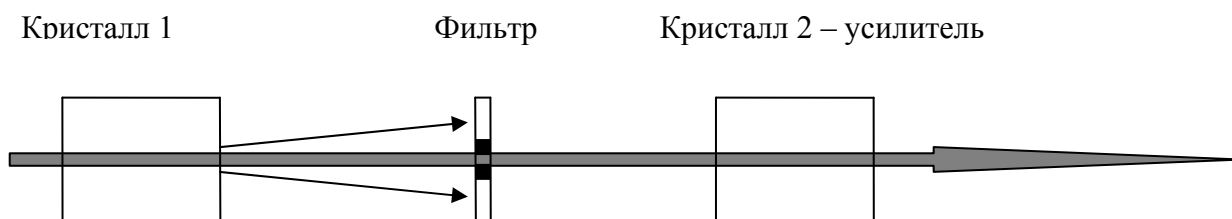


Рис. 11.2

Отмеченные недостатки в меньшей мере проявляются во втором и третьем вариантах ПГС. **Во втором варианте** используется двухкристальная схема: первый кристалл играет роль источника затравочного сверхлюминесцентного сигнала, а второй используется в качестве усилителя. За счет разнесения кристаллов на определенное расстояние в канал усиления попадает лишь коллинеарная часть сверхлюминесценции и таким образом происходят монохроматизация спектра и уменьшение пространственной расходимости. Накачка второго кристалла производится либо независимо, либо частью излучения накачки, которая не использовалась в первом кристалле. Следует отметить, что в данной схеме возможна генерация импульсов с пространственной и временной когерентностью, близкой к предельной.

Третий вариант ПГС бегущей волны фактически является модификацией второго. Действительно, размещение кристалла между призмами пол-

ного внутреннего отражения как бы позволяет каскадировать ПГС и увеличить длину области нелинейного взаимодействия, что приводит к монохроматизации сигнала. Однако при расчете и построении таких ПГС необходимо учитывать дисперсию как нелинейного кристалла, так и материала призм.

Оценивая в целом ПГС, построенные по схеме бегущей волны, в первую очередь следует отметить простоту их технического исполнения в сочетании с возможностью генерации мощных пикосекундных импульсов с перестройкой длины волны излучения практически во всем диапазоне прозрачности кристалла. С другой стороны, для обеспечения надежной работы ПГС бегущей волны требуются весьма мощные импульсы накачки (как правило, превышающие по интенсивности 1 ГВт/см^2) с близкой к предельной пространственной и временной когерентностью.

Как уже упоминалось, второй тип – ПГС с синхронной накачкой. В данном случае кристалл, в котором происходит параметрическое усиление, помещается в резонатор, обеспечивающий положительную обратную связь, а накачка производится цугом пикосекундных импульсов, которые следуют с периодом, равным времени двойного прохода сигнала по резонатору. Для построения резонатора ПГС обычно используются широкодиапазонные диэлектрические зеркала. Одно с коэффициентом отражения, близким к 90 %, в области перестройки излучения ПГС и порядка 15 % на длине волны накачки. Коэффициент отражения второго зеркала для излучения на длине волны ПГС подбирается в пределах 4–80 %. Излучение накачки поступает в резонатор через первое («глухое») зеркало. Иногда предпочтительнее неколлинеарные схемы ПГС, в которых излучение накачки распространяется под небольшим углом к оси резонатора. Использование неколлинеарных схем позволяет осуществлять накачку, минуя входное зеркало резонатора. Основными преимуществами ПГС с синхронной накачкой являются: низкий порог возбуждения (интенсивность накачки порядка 100 МВт/см^2) и близкие к предельным пространственная и временная когерентность импульсов. Недостатком резонаторных ПГС является необходимость использования широкодиапазонных зеркал.

Общие требования, предъявляемые к нелинейным кристаллам.

В настоящее время известно большое количество нелинейных кристаллов, в которых возможны трёхволновые нелинейные взаимодействия. Однако требования, предъявляемые к кристаллам с точки зрения получения необходимых характеристик нелинейных оптических устройств (генераторов гармоник и параметрических генераторов света), существенно сокращают число пригодных для практического использования материалов.

Прежде всего отметим два основных требования: наличие квадратичной нелинейности (отсутствие центра симметрии) и наличие двулучепреломления, достаточного для обеспечения условий фазового синхронизма. Если первому требованию удовлетворяет достаточно большое (~ 100) число кристаллов и органических соединений, то второму требованию – лишь относительно небольшое число материалов. Отметим также требование высокого оптического каче-

ства кристаллов, предопределяемое интерференционной природой квадратично-нелинейных эффектов. При этом важно, чтобы высоким оптическим качеством обладали кристаллические образцы достаточно больших размеров.

Дополнительные требования, традиционно предъявляемые к кристаллам с первых же шагов нелинейной оптики: стойкость поверхности и объема образца к лазерному излучению, устойчивость и сохраняемость свойств материала во внешней среде (негигроскопичность, твердость, устойчивость к резким изменениям температуры и т. п.). В процессе развития нелинейной оптики выявился еще целый ряд требований, очень важных с точки зрения достижения высоких коэффициентов преобразования. Сюда следует отнести требования больших значений угловой, температурной и спектральной ширины синхронизма, малых потерь, отсутствия фоторефрактивного эффекта и нелинейного поглощения, слабого влияния конкурирующих процессов (например, вынужденного комбинационного рассеяния), специальной ориентации и специальной геометрической формы кристаллического образца, неподверженности к появлению центров окраски под действием УФ и более коротковолнового излучений и т. д.

Поскольку современная техника не позволяет синтезировать нелинейные материалы с полным набором требуемых свойств, то необходимо оптимально выбирать нелинейные кристаллы применительно к конкретному нелинейному оптическому устройству с учетом его режимов и характеристик излучения накачки.

ЛЕКЦИЯ № 12. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Параметрическое взаимодействие волн в средах с отрицательным показателем преломления. Укороченное волновое уравнение с учетом временной и пространственной дисперсии. Параметрическое взаимодействие волн с учетом пространственной дисперсии. Параметрическое трехволновое взаимодействие в средах с отрицательной рефракцией.

Параметрическое взаимодействие волн в средах с отрицательным показателем преломления.

В последние годы возрос интерес к исследованию процессов распространения электромагнитных волн (В. Г. Веселаго) в изотропных средах с отрицательными значениями диэлектрической и магнитной восприимчивостей. Последнее означает, что показатель преломления в таких средах становится отрицательным, направления распространения фазы (волнового вектора k) и энергии (вектор Пойнтинга S) противоположны, а векторы магнитного и электрического полей образуют с волновым вектором левую ортогональную тройку векторов. Такие среды получили название left handed materials (LHM). Появившиеся в последние годы ряд работ теоретического и экспериментального характера показывают реальную возможность создания такого рода сред в микроволновом и, что особенно важно, оптическом диапазоне электромагнитных волн. Интерес к такого рода средам вызван как возможностью наблюдения ряда чрезвычайно интересных особенностей, включая отрицательную рефракцию на границе раздела сред с положительным и отрицательным показателями преломления, обратный эффект Доплера и Вавилова – Черенкова, так и с возможностью решения ряда практических задач.

В связи с этим представляют интерес исследования нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в LHM. Это касается как нелинейно-оптических характеристик конкретных, реализованных на практике LHM, во всяком случае в СВЧ-диапазоне частот, так распространения и взаимодействия электромагнитных волн в такого типа еще несозданных материалах. В работах ряда авторов был рассмотрен процесс генерации второй гармоники магнитной компоненты электромагнитного поля с учетом истощения накачки в LHM-среде для частного случая. Определенные сомнения вызывает использованный в этой работе способ введения групповой скорости. В работах В. М. Аграновича развит предложенный Л. Д. Ландау подход, позволяющий свести электродинамические, в том числе и нелинейно-оптические задачи в существенно магнитной среде, примером которой являются LHM (μ – магнитная проницаемость, отличная от единицы), к задачам в среде немагнитной ($\mu = 1$), введением обобщенной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}$, что позволяет рассматривать, не теряя общности, только электрическую компоненту поля. Исследование в этой работе процессов генерации второй гармоники (SHG) и распространения генерируемого излучения через границу раздела

сред с положительной и отрицательной дисперсией, а также стимулированного комбинационного рассеяния в ЛНМ ограничено приближением заданного поля. Однако при таком подходе вне исследования остаются нетривиальные вопросы, связанные с обменом энергии при параметрическом взаимодействии волн с положительной и отрицательной дисперсией. Действительно, как будет показано ниже, попытка использовать для анализа энергообмена между взаимодействующими волнами аппарата укороченных уравнений в традиционной форме ([см. лекцию № 9](#)) и полученных на его основе соотношений типа Мэнли – Роу приводит к очевидному противоречию, связанному с нарушением закона сохранения энергии, что требует детального рассмотрения, позволяющего устранить это противоречие.

Детально обоснованный в работе Аграновича подход, позволяющий рассматривать среды с отрицательной рефракцией, характеризующиеся значениями диэлектрической $\varepsilon(\omega) < 0$, и магнитной $\mu(\omega) < 0$ проницаемости, обладающие временной дисперсией, как среды с $\mu(\omega)=1$ и обобщенной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon}(\omega, k)$, зависящей как от частоты, так и от волнового вектора, и, следовательно, временной и пространственной дисперсией. Это позволяет перейти от описания полей в формализме $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ (напряженность электрического поля E , электрическая индукция D , напряженность магнитного поля H и магнитная индукция B) с $D = \varepsilon(\omega)E$, и $B = \mu(\omega)H$ к описанию в формализме $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ и $D = \tilde{\varepsilon}(\omega, k)E$, при котором среда может рассматриваться как немагнитная. Следовательно, для описания поведения электромагнитной волны в такой среде достаточно рассмотреть поведение только электрической компоненты E . В этом случае отличие среды с отрицательным от среды с положительным показателем преломления заключается в том, что в первом случае групповая v_g и фазовая v_p скорости направлены в противоположные стороны (вектор Пойнтинга и волновой вектор противоположны), а во втором направление распространения энергии и фазы совпадают. Очевидно, что в этом случае для анализа нелинейного взаимодействия волн в ЛНМ необходимо учитывать пространственную дисперсию, которая также, как и временная, определяет значение групповой скорости и ее знак по отношению к фазовой скорости. Подобный подход позволяет рассматривать нелинейно-оптические задачи и для немагнитных сред, но обладающих пространственной дисперсией, например фотонных кристаллов.

Укороченное волновое уравнение с учетом временной и пространственной дисперсии.

Использование формализма $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$, при котором как электрическая, так и магнитная проницаемость зависят только от частоты, для анализа процессов нелинейного взаимодействия волн, в которых их амплитуды изменяются во времени и пространстве, приводит к ряду трудностей. Действительно, уравнения Максвелла с использованием этого формализма имеют вид

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\nabla \cdot \vec{A} = 0$; $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, в котором электрическая D и магнитная H индукция связаны с электрической P и магнитной M поляризацией соотношениями: $D = E + 4\pi P$ и $B = H + 4\pi M$ соответственно. Тогда в волновых уравнениях для электрической (магнитной) компоненты поля в однородной и изотропной среде электрическая и магнитная составляющие оказываются связанными:

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times M) = 0$$

и для корректного анализа необходимо рассматривать совместно волновые уравнения для электрического и магнитного полей. Вместе с тем, наличие в волновом уравнении для электрической компоненты излучения члена $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times M)$, содержащего как временную, так и пространственную производные, говорит о пространственной нелокальности отклика среды на воздействие электромагнитного поля и, следовательно, о необходимости учета пространственной дисперсии при попытке развязать волновые уравнения для электрического и магнитного полей. При этом необходимость введения обобщенной диэлектрической проницаемости, обладающей как временной, так и пространственной дисперсией, диктуется не только формально математической возможностью упрощения анализа процессов нелинейного взаимодействия электромагнитных волн, но, как будет показано, имеет принципиально физический смысл, связанный с пространственной нелокальностью линейного отклика в магнитных средах.

Подобный подход, получивший название $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ -формализма, обоснован в работах Л. Д. Ландау и В. М. Аграновича. Уравнения Максвелла в формализме $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ и $D = \tilde{\varepsilon}(\omega, k)$ имеют вид

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (12.1)$$

Здесь тензор обобщенной диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}(\omega, k)$ дается выражением

$$\tilde{\varepsilon}_l = \varepsilon, \quad \tilde{\varepsilon}_r(\omega, k) = \varepsilon(\omega) + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{1}{\mu(\omega)} \right], \quad (12.2)$$

где $\tilde{\varepsilon}_l$ – продольная, а $\tilde{\varepsilon}_r(\omega, k)$ – поперечная компоненты обобщенной диэлектрической проницаемости соответственно. В дальнейшем продольную компоненту будем полагать равной нулю. При этом для электромагнитной волны волновой вектор k связан с частотой ω соотношением $k = n\omega/c$ и показатель преломления определяется известным соотношением

$$n^2 = \tilde{\varepsilon}_{tr} = \varepsilon(\omega)\mu(\omega). \quad (12.3)$$

Обобщенная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}(\omega, k)$ может быть выражена через обобщенную линейную восприимчивость $\chi(\omega, k)$, зависящую как от частоты, так и от волнового вектора, и представлена в виде

$$\tilde{\varepsilon}(\omega, k) = 1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega, k). \quad (12.4)$$

Связь вектора электрической индукции \vec{D} с электрическим полем \vec{E} и вектором линейной поляризации $P(\omega, k)$ имеет вид

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon}(\omega, k)\vec{E} = (1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega, k))\vec{E} = \vec{E} + \vec{P}(\omega, k). \quad (12.5)$$

Для получения укороченного волнового уравнения с учетом временной и пространственной дисперсии воспользуемся методикой, применяемой для учета только временной дисперсии в [лекции № 9](#).

Рассмотрим распространение плоской квазимонохроматической волны вдоль оси Z в среде с пространственной и временной дисперсией, описываемой соотношениями [\(12.2\)–\(12.5\)](#). Тогда электрическая компонента поля E в соответствии с [\(12.1\)](#) описывается волновым уравнением в скалярной форме:

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{P}(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (12.6)$$

Здесь $\hat{P}(z, t) = P(z, t) + P^{nl}(z, t)$ – линейная и нелинейная поляризация среды, возбуждаемая полем волны соответственно, которая с учетом временной и пространственной нелокальности отклика может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \hat{P}_\alpha(z, t) = & \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty dz' \tilde{\chi}_{\alpha\beta}(z', t') E_\beta(z - z', t - t') + \\ & + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \int_{-\infty}^\infty dz' \int_{-\infty}^\infty dz'' \tilde{\chi}_{\alpha\beta\delta}^{(2)}(z', t', z'', t'') E_\beta(z - z', t - t') E_\delta(z - z'', t - t'') + \\ & + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \int_0^\infty dt''' \int_{-\infty}^\infty dz' \int_{-\infty}^\infty dz'' \int_{-\infty}^\infty dz''' \tilde{\chi}_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(3)}(z', t', z'', t'', z''', t''') \times \\ & \times E_\beta(z - z', t - t') E_\delta(z - z'', t - t'') E_\gamma(z - z''', t - t'''). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Здесь индексы $\alpha, \beta, \delta \dots$ пробегает значения, нумерующие декартовы оси координат, и по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Функции $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(z', t')$, $\tilde{\chi}_{\alpha\beta\delta}^{(2)}(z', t', z'', t'')$, $\tilde{\chi}_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(3)}(z', t', z'', t'', z''', t''')$ имеют смысл тензорных функций Грина, характеризующих линейный и нелинейный отклик среды на воздействие волнового пакета. Для упрощения в дальнейшем будем рассматривать изотропную среду, опустив индексы, соответствующие декартовым координатам, и записывая уравнения в скалярной форме. Получим укороченное волновое уравнение

для электрической компоненты поля с учетом временной и пространственной дисперсии. Для этого необходимо найти выражение для линейной части поляризации $P(z, t)$ (первое слагаемое в уравнении (12.7)). Представляя поле E в виде

$$E(z, t) = A(z, t) \exp i(\omega t - kz) \quad (12.8)$$

и полагая амплитуду поля $A(z - z', t - t')$ медленно меняющейся функцией временной и пространственной переменных, разложим ее в степенной ряд по z' и t' вблизи z и t .

$$A(z - z', t - t') = A(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(-t')^n \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial t^n} + (-z')^n \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial z^n} \right]. \quad (12.9)$$

Подставим уравнение (12.8) и (12.9) в соотношение (12.7) и после простых преобразований получим выражение для $P(z, t)$:

$$P(z, t) = \left\{ \tilde{\chi}(\omega, k) A(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[(-1)^n \frac{\partial^n \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial \omega^n} \frac{\partial^n A}{\partial t^n} + \frac{\partial^n \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial k^n} \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial z^n} \right] \right\} \exp i(\omega t - kz). \quad (12.10)$$

Обобщенная линейная восприимчивость среды $\tilde{\chi}(\omega, k)$ для волны на частоте ω с волновым вектором k дается выражением

$$\tilde{\chi}(\omega, k) = \int_0^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \tilde{\chi}(z', t') \exp -i(\omega t' - kz'). \quad (12.11)$$

В первом приближении теории дисперсии для поляризации из уравнения (12.10) имеем

$$P(z, t) = \left[\tilde{\chi}(\omega, k) A(z, t) - i \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial \omega} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + i \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial k} \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \right] \exp i(\omega t - kz). \quad (12.12)$$

Подставим в волновое уравнение (12.6) выражения (12.8) и (12.12) и в приближении медленно меняющихся амплитуд, удерживая только члены с производной по временной и пространственной координатам не выше первой, получим укороченное волновое уравнение для амплитуды поля

$$2i\alpha \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + 2i\beta \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (12.13)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \left(k - \frac{2\pi}{c^2} \omega^2 \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial k} \right); \quad \beta = \frac{\omega}{c^2} \left[(1 + 4\pi \tilde{\chi}(\omega, k)) + 2\pi \omega \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial \omega} \right], \quad (12.14)$$

и дисперсионное уравнение, дающее связь между частотой ω и волновым вектором k , который может быть комплексным в случае поглощающей среды ($\tilde{\chi}(\omega, k)$ комплексная):

$$\omega^2 (1 + 4\pi \tilde{\chi}(\omega, k)) - k^2 c^2 = 0. \quad (12.15)$$

При этом групповая скорость, вычисленная на основе дисперсионного уравнения (12.15)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c^2 \left(k - \frac{2\pi}{c^2} \omega^2 \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial k} \right)}{\omega \left[(1 + 4\pi \tilde{\chi}(\omega, k)) + 2\pi \omega \frac{\partial \tilde{\chi}(\omega, k)}{\partial \omega} \right]}. \quad (12.16)$$

Из соотношений (12.2), (12.4) и (12.16) следует, что групповая скорость, выраженная через значения диэлектрической и магнитной проницаемости и временной дисперсии этих величин, определяется равенством

$$v_g = \frac{c^2 \frac{k}{\mu(\omega)}}{\omega \left[\frac{\partial(\omega \tilde{\varepsilon}(\omega, k))}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \omega \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\omega, k)}{\partial \omega} \right]} = \frac{c^2 \frac{k}{\mu(\omega)}}{\omega \left[\varepsilon(\omega) \mu(\omega) + \frac{1}{2} \omega \frac{\partial(\varepsilon(\omega) \mu(\omega))}{\partial \omega} \right]} \quad (12.17)$$

и имеет знак, противоположный знаку волнового вектора при одновременно отрицательных $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Действительно, величина $\frac{\partial(\omega \tilde{\varepsilon}(\omega, k))}{\partial \omega}$ пропорциональна объемной плотности энергии электромагнитного поля в среде и должна быть положительной, что возможно при одинаковом знаке $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Тогда знаменатель в выражении (12.17) положителен и знак групповой скорости по отношению к фазовой определяется знаком числителя, а следовательно, знаком $\mu(\omega)$. В том случае когда знак $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ отрицателен, среда будет являться средой с отрицательной рефракцией, в которой групповая и фазовая скорости направлены в разные стороны.

Для дальнейшего изложения целесообразно записать выражения для α и β через значения электрической и магнитной проницаемостей и их временной дисперсии, воспользовавшись соотношениями (12.5) и (12.14):

$$\alpha = \frac{k}{\mu(\omega)} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}; \quad \beta = \frac{\omega}{c^2} \left[\varepsilon(\omega) \mu(\omega) + \frac{1}{2} \omega \frac{\partial[\varepsilon(\omega) \mu(\omega)]}{\partial \omega} \right]. \quad (12.18)$$

При этом для среды с положительным показателем преломления параметр α положителен, для среды с отрицательным показателем – отрицателен.

Параметрическое взаимодействие волн с учетом пространственной дисперсии.

Среды с отрицательной рефракцией являются принципиально магнитными средами, и анализ нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в таких средах делает необходимым учет не только электрической, но также и магнитной компоненты. Развитый в предыдущем разделе подход, основанный на введении обобщенной диэлектрической проницаемости, позволяет рассматривать только электрическую компоненту электромагнитной волны.

В этом случае среду, обладающую временной дисперсией электрической и магнитной проницаемости, необходимо рассматривать как среду с временной и пространственной дисперсией. Полученные в предыдущем разделе соотношения позволяют уточнить систему уравнений, описывающих процессы взаимодействия электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией и, в частности, в средах с отрицательной рефракцией.

Рассмотрим процесс параметрического взаимодействия трех ($j=1,2,3$) распространяющихся вдоль оси z в среде с квадратичной нелинейностью в приближении медленно меняющихся амплитуд $A_j(z)$ для электрических компонент полей $E_j = A_j \exp i(\omega_j t - k_j z)$. (Здесь считаем вектор k комплексным $k = k' + ik''$). При этом предполагается, что частоты удовлетворяют условию сохранения энергии в трехфотонных процессах:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (12.19)$$

В этом случае нелинейная поляризация на частотах взаимодействующих волн в выражении (12.6) при ее разложении в ряд по степеням поля и удержании только низшего члена разложения будет иметь вид

$$\begin{aligned} P_1^{nl} &= \chi_1^{(2)}(\omega_2, \omega_3) A_3 A_2^* \exp i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z], \\ P_2^{nl} &= \chi_2^{(2)}(\omega_1, \omega_3) A_3 A_1^* \exp i[(\omega_3 - \omega_1)t - (k_3 - k_1)z], \\ P_3^{nl} &= \chi_3^{(2)}(\omega_1, \omega_2) A_1 A_2 \exp i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z], \end{aligned} \quad (12.20)$$

где $\chi_1^{(2)}(\omega_2, \omega_3)$, $\chi_2^{(2)}(\omega_1, \omega_3)$, $\chi_3^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ – компоненты тензора нелинейной восприимчивости второго порядка, определяющиеся соотношениями типа

$$\chi_3^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \int_{-\infty}^\infty dz' \int_{-\infty}^\infty dz'' \tilde{\chi}^{(2)}_{\alpha\beta\delta}(z', t', z'', t'') \exp -i[\omega_1 t' + \omega_2 t'' - k_1 z' - k_2 z''] .$$

В дальнейшем будем предполагать, что среда прозрачна и все компоненты тензора нелинейной восприимчивости равны между собой в соответствии с перестановочными соотношениями Клеймана $\chi_j^{(2)} = \chi^{(2)}$.

Для рассматриваемой здесь изотропной среды волновые и лучевые векторы коллинеарны, и тогда система уравнений для амплитуд полей $A_j(z)$ в скалярной форме, в соответствии с уравнением (12.13) и (12.20), имеет вид

$$\begin{aligned} i2\alpha_1 \frac{\partial A_1(z,t)}{\partial z} + i2\beta_1 \frac{\partial A_1(z,t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{\tilde{n}^2} \omega_1^2 \chi^{(2)} A_3 A_2^* \exp -i\Delta kz, \\ i2\alpha_2 \frac{\partial A_2(z,t)}{\partial z} + i2\beta_2 \frac{\partial A_2(z,t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{\tilde{n}^2} \omega_2^2 \chi^{(2)} A_3 A_1^* \exp -i\Delta kz, \\ i2\alpha_3 \frac{\partial A_3(z,t)}{\partial z} + i2\beta_3 \frac{\partial A_3(z,t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{\tilde{n}^2} \omega_3^2 \chi^{(2)} A_1 A_2 \exp i\Delta kz. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Здесь $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$, α_j и β_j – величины, ответственные за пространственную и временную дисперсию соответственно показателей преломления на частотах взаимодействующих волн, определяющие групповые скорости распространения их волновых пакетов в среде – см. уравнение (12.13).

Отличие системы (12.21) от принятой в литературе (см. лекцию № 9) состоит в том, что величина α отлична от волнового вектора в средах с пространственной дисперсией. Ее принципиальное значение можно продемонстрировать на простом примере взаимодействия монохроматических стационарных во времени оптических волн. Предположим для простоты анализа, что взаимодействие осуществляется в условиях точного фазового согласования в прозрачной для всех волн среде

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (12.22)$$

В этом случае производной по времени можно пренебречь и тогда система (12.21) превращается в систему обыкновенных уравнений с только одной пространственной переменной:

$$\begin{aligned} i2\alpha_1 \frac{dA_1(z)}{dz} &= \sigma_1 A_2^*(z) A_3, \\ i2\alpha_2 \frac{dA_2(z)}{dz} &= \sigma_2 A_1^*(z) A_3, \\ i2\alpha_3 \frac{dA_3(z)}{dz} &= \sigma_3 A_1(z) A_2(z), \end{aligned} \quad (12.23)$$

в которой введены коэффициенты нелинейной связи

$$\sigma_j = \frac{4\pi\omega_j^2}{c^2} \chi^{(2)}. \quad (12.24)$$

Наличие в системе (12.23) в качестве сомножителей перед производной по пространственной координате α_j , отличных от волнового вектора в средах с пространственной дисперсией, даже для стационарного случая очевид-

но. Действительно, в средах с только временной дисперсией введение групповой скорости вместо фазовой для нестационарного случая обусловлено тем, что изменение со временем амплитуд взаимодействующих полей приводит к изменению частотного спектра взаимодействующих волн ([см. лекцию № 10](#)). При этом благодаря дисперсии фазовые скорости спектральных компонент различны и соотношение (12.22) не выполняется во всей области спектра взаимодействующих волновых пакетов. Тогда, в первом приближении теории дисперсии, учет этого фактора осуществляется благодаря введению групповой скорости. В средах с временной и пространственной дисперсией для стационарного случая временная дисперсия не играет никакой роли, поскольку изменения со временем амплитуд взаимодействующих полей не происходит. Изменение амплитуд вдоль оси Z приводит к изменению пространственного спектра, а наличие пространственной дисперсии обуславливает различие фазовых скоростей отдельных компонент этого спектра, что учитывается коэффициентами α_j , отличными от величины волнового вектора. Из системы уравнений (12.23), с учетом равенства компонент тензора нелинейной восприимчивости, следуют соотношения типа Мэнли – Роу:

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \frac{d}{dz} |A_1(z)|^2 = \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \frac{d}{dz} |A_2(z)|^2 = -\frac{\alpha_3}{\omega_3^2} \frac{d}{dz} |A_3(z)|^2. \quad (12.25)$$

В среде без пространственной дисперсии показателя преломления ($\alpha = k$) эти соотношения имеют достаточно ясный физический смысл и представляют собой закон сохранения числа фотонов в процессе параметрического взаимодействия волн ([см. лекцию № 5](#)). В этом случае направление волнового вектора j -го пучка совпадает с направлением вектора Пойтинга $\vec{S}_j \propto \vec{E}_j \times \vec{B}_j$, равного потоку мощности излучения, проходящего через единичную площадку поперечного сечения среды. Отношение потока мощности к частоте пропорционально потоку фотонов в данной волне N_j , и из выражения (12.23) следует

$$\frac{dN_1}{dz} = \frac{dN_2}{dz} = -\frac{dN_3}{dz}. \quad (12.26)$$

Так, при генерации излучения с суммарной частотой, в условиях точного синхронизма два фотона на частотах ω_1 и ω_2 , сливаясь, рожают фотон на частоте ω_3 . Амплитуда A_3 растет, а амплитуды полей на частотах уменьшаются в направлении распространения энергии этих волн. При параметрическом распаде фотона с частотой ω_3 на два фотона с частотами ω_1 и ω_2 амплитуды A_1 , A_2 одновременно растут вдоль направления распространения энергии, а A_3 уменьшается.

При наличии пространственной дисперсии ($\alpha \neq k$) возможна аналогич-

ная интерпретация. Воспользовавшись выражением для вектора Пойнтинга

$$\vec{S}(\omega, k) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times E) - \frac{\omega}{16\pi} \nabla_k \tilde{\varepsilon}(\omega, k) \vec{E}^* \vec{E}$$

легко показать, что

$$\frac{\tilde{\alpha}_j(\omega, k) |A|^2}{\omega_j^2} = \frac{8\pi}{c^2} \left(\frac{\tilde{S}_j}{\omega_j} \right) \propto (N_j)$$

и соотношение (12.24) становится полностью аналогичным соотношению (12.5), выражающему закон сохранения числа фотонов. Таким образом, как в средах с только временной, так и в средах с временной и пространственной дисперсией, закон сохранения числа фотонов выполняется.

Параметрическое трехволновое взаимодействие в средах с отрицательной рефракцией.

При рассмотрении нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в средах с отрицательной рефракцией ($\tilde{\alpha}$ и \vec{k} имеют разный знак) принципиальная необходимость учета пространственной дисперсии становится очевидной. Так же, как и в предыдущем разделе, будем исследовать процесс трехволнового взаимодействия, предполагая, что выполняются соотношения на частоты (12.19) и волновые векторы (12.22) взаимодействующих волн. Для определенности полагаем, что волновые векторы всех участвующих в процессе волн имеют одинаковое направление, совпадающее с положительным направлением оси Z . Рассмотрим этот процесс на основе соотношений (12.25) и (12.26). Пусть для одной из участвующих в процессе волн (для определенности волна с частотой ω_1) средой будет ЛНМ, что означает отрицательность соответствующего коэффициента $\alpha_1 < 0$. Тогда вдоль положительного направления оси Z синхронно растут (уменьшаются) квадраты модуля амплитуды полей на большей ω_3 и той из меньших частот ω_1 , для которой средой является ЛНМ, поскольку их производные имеют один знак. Поле на другой из меньших частот ω_2 убывает (растет). Однако, если учесть, что направление вектора Пойнтинга (перенос энергии) в волне, для которой средой является ЛНМ, совпадает с отрицательным направлением оси Z , то это означает, что вдоль направления распространения энергии синхронно растут (убывают) амплитуды волн с меньшими частотами ω_1, ω_2 и убывает (растет) амплитуда волны с наибольшей частотой ω_3 . Аналогичное исследование можно провести и для случая, когда средой является ЛНМ для любой из участвующих в процессе волн либо их комбинаций. Последнее означает, с учетом результатов предыдущего раздела, что выполняется закон сохранения

числа фотонов – соотношение ([12.26](#)), а соотношение Мэнло – Роу в средах с пространственной дисперсией и, в частности, в LHM, имеет вид ([12.25](#)). Отсюда следует принципиальная важность учета пространственной дисперсии, определяющей как величину и направление вектора Пойнтинга, так и групповой скорости, даже для стационарного случая.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что наличие пространственной дисперсии вносит существенные изменения в приведенную ранее систему уравнений нелинейной оптики, учитывающую только временную дисперсию. При этом изменения касаются не только граничных условий, но и таких фундаментальных для параметрических процессов соотношений, как соотношения Мэнло – Роу.

ЛЕКЦИЯ № 13. ОСОБЕННОСТИ ГАЗОВЫХ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИХ СРЕД

Особенности газовых атомно-молекулярных нелинейно-оптических сред. Четырехфотонные взаимодействия. Укороченные уравнения. Резонансные четырехфотонные процессы. Оценка расчет и интерпретация нелинейных восприимчивостей.

Особенности газовых атомно-молекулярных нелинейно-оптических сред.

Нелинейная оптика к настоящему времени превратилась в прикладную науку. На ее основе удалось создать достаточно эффективные устройства по преобразованию частот и корректировке пространственных характеристик лазерного излучения, решить ряд других прикладных задач техники и физики лазеров. Сказанное выше относится в основном к нерезонансной нелинейной оптике, объектом исследования которой является взаимодействие лазерных излучений в прозрачных кристаллических средах на нелинейности в основном второго порядка, в которых частоты всех взаимодействующих волн далеки от частот переходов между энергетическими состояниями среды. Однако ряд задач, имеющих важное прикладное значение, не может быть решен с использованием твердотельных кристаллических сред. К таким задачам, в частности, относятся: а) генерация лазерного коротковолнового вакуумного ультрафиолетового (ВУФ) и мягкого рентгеновского излучения (МР); б) преобразование инфракрасного излучения (ИК) в видимый диапазон с целью его визуализации либо улучшения характеристик приема. Эти, а также ряд других прикладных проблем, позволяет решать резонансная нелинейная оптика газообразных сред. Необходимо отметить, что процессы резонансного взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом представляют значительный интерес с точки зрения фундаментальной науки.

Газы, обладая широкими областями прозрачности, за исключением узких полос, соответствующих переходам с основного в возбужденные состояния, могут быть использованы в качестве нелинейно-оптической среды. Однако существует ряд сомнений в такой возможности. Действительно, концентрация атомов или молекул в газе на несколько порядков меньше концентрации частиц в твердом теле. Поскольку эффективность преобразования пропорциональна квадрату концентрации, то очень трудно надеяться на получение излучения в ВУФ-и МР-области достаточно большой мощности. Тем не менее, эти трудности можно преодолеть.

Поскольку газовые среды имеют более высокие значения интенсивности излучения, при которых происходит их пробой, по сравнению с кристаллами, то значение интенсивности накачки можно значительно повысить, выбирая более мощный лазер либо фокусируя его излучение в среду. Кроме того, характеристики газа после пробоя восстанавливаются, чего нельзя сказать о кристалле, который после пробоя просто нельзя больше использовать. Это

позволяет поднять значение величины поля E лазерного излучения на несколько порядков, что соответственно приводит к увеличению эффективности преобразователя. Также фактором, поддерживающим надежду на успех, является возможность использования резонансного увеличения эффективности преобразования. Ниже будет приведено выражение для величины нелинейной восприимчивости в зависимости от частоты лазерных полей, частот переходов и других характеристик атомарной среды.

Кроме того, размеры газовой среды могут быть сколь угодно большими, что позволяет увеличить эффективность преобразования за счет выполнения условий фазового синхронизма, достигаемого добавлением буферного газа – см. уравнение (6.3).

Четырехфотонные взаимодействия.

В изотропных средах, примером которых являются газы, возможны только процессы на нелинейностях нечетных порядков ($\chi^{(3)}, \chi^{(5)}, \chi^{(7)} \dots$), т. е. нечетные гармоники $3\omega, 5\omega$ и т. д. Нас будут интересовать в дальнейшем именно эти процессы. Здесь мы сознательно не останавливаемся на исследовании твердотельных нерезонансных нелинейных сред, поскольку на них не удастся получить достаточных для практического применения коэффициентов преобразования вследствие более высокого порядка нелинейности. Кроме того, более значительная разница между частотой накачки и генерируемой волны ($\omega, 3\omega$) только в исключительных случаях, в кристаллах с очень большим двулучепреломлением, позволяет осуществлять взаимодействие в условиях фазового синхронизма.

В случае, если излучение накачки не монохроматично, а содержит компоненты на частотах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то в процессах третьего порядка ($\chi^{(3)} n = 3$) отклик среды будет содержать как утроенные частоты каждого излучения

$$3\omega_1 = \omega_1 + \omega_1 + \omega_1; 3\omega_2 = \omega_2 + \omega_2 + \omega_2; 3\omega_3 = \omega_3 + \omega_3 + \omega_3, \quad (13.1)$$

так и различные их комбинации

$$\omega_s = \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3. \quad (13.2)$$

Соотношение (13.1) имеет достаточно простой физический смысл и носит характер закона сохранения энергии. На рис. 13.1 изображены схемы процессов третьего порядка, из которых видно, что рождение фотона на частоте ω_s обусловлено уничтожением трех фотонов на частотах падающего излучения ω_i . Правая схема характеризует процесс $\omega_3 - \omega_1 + \omega_2 = \omega_s$, соответствует уничтожению фотонов на частотах ω_3 и ω_2 и рождению фотонов на частотах ω_1 и ω_s . При этом общая энергия всех фотонов сохраняется. В процессах третьего порядка участвуют четыре фотона ($\omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_s$), поэтому такие процессы называются четырехфотонными.

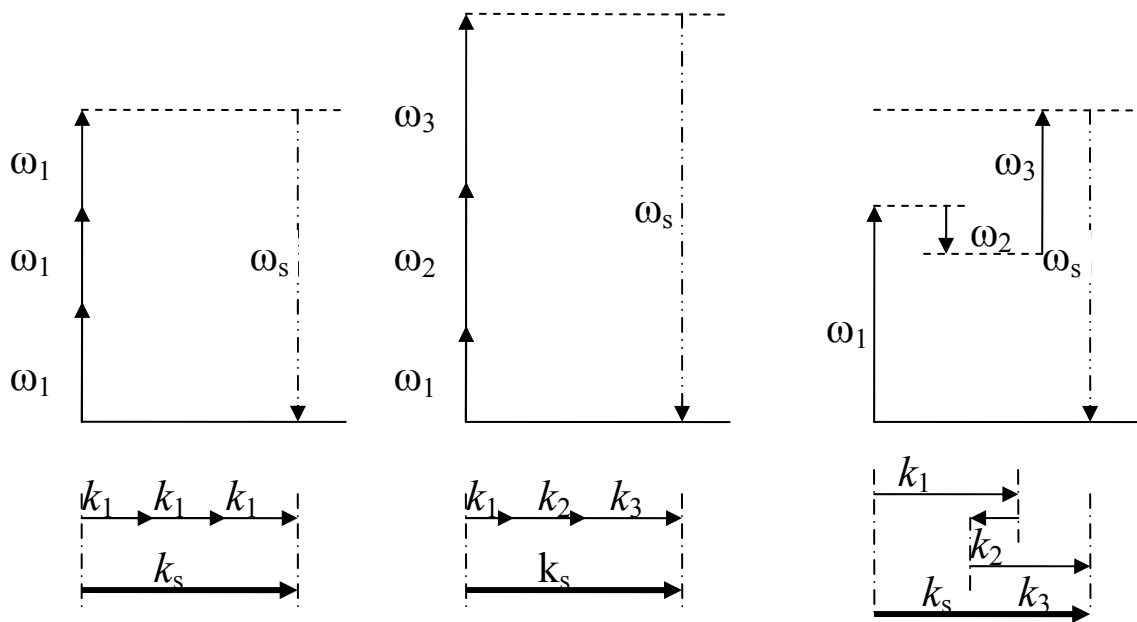


Рис. 13.1

Кроме того, необходимо выполнение условий фазового синхронизма

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = \vec{k}_s; \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = \vec{k}_s; \quad \vec{k}_3 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_s. \quad (13.3)$$

Укороченные уравнения.

Рассмотрим уравнения для медленно меняющихся амплитуд полей, участвующих в четырехфотонных процессах. По аналогии с выражением (7.3) для j -го поля

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_s A_3^* A_2^* \exp(-i\Delta kz) + F_1 A_1, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\sigma_2 A_s A_3^* A_1^* \exp(-i\Delta kz) + F_2 A_2, \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_3}{dz} &= -i\sigma_3 A_s A_2^* A_1^* \exp(-i\Delta kz) + F_3 A_3, \\ \frac{dA_s}{dz} &= -i\sigma_s A_3 A_2 A_1 \exp(i\Delta kz) + F_s A_s. \end{aligned}$$

Здесь
$$\sigma_j = (2\pi\omega_j^2 N \chi_{Tj}^{(3)} / k_j c^2) \quad (13.5)$$

– коэффициент нелинейной связи для j -й волны (7.2); $\chi_{Tj}^{(3)}$ – приходящаяся на один атом (молекулу) среды генерационная нелинейная восприимчивость третьего порядка, ответственная за процессы типа (13.2); N – количество

атомов (молекул) в единице объема среды (плотность). Добавочный член, так называемая керровская добавка к комплексному показателю преломления $F_j A_j$, описывает существенное и принципиальное отличие процессов третьего от процессов второго порядка нелинейности – см. (7.3). Для упрощения дальнейшего рассмотрения запишем в развернутом виде систему (13.4) для процесса генерации третьей гармоники $\omega_s = 3\omega_1$:

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\sigma_1 A_s (A_1^*)^2 \exp(-i\Delta kz) - i\sigma_{Cs1} (A_s A_s^*) A_1 - i\sigma_{C11} (A_1 A_1^*) A_1, \quad (13.6)$$

$$\frac{dA_s}{dz} = -i\sigma_s (A_1)^3 \exp(i\Delta kz) - i\sigma_{C1s} (A_1 A_1^*) A_s - i\sigma_{Css} (A_s A_s^*) A_s.$$

Здесь $\sigma_{C11}, \sigma_{Cs1}, \sigma_{Css}, \sigma_{C1s}$ – коэффициент нелинейной связи для вида (13.5), в которых $\chi_{Njk}^{(3)}$ – керровские нелинейные восприимчивости, аналог генерационным нелинейным восприимчивостям $\chi_{Tj}^{(3)}$ (13.5). Прежде чем давать физическую интерпретацию полученной системы уравнений, обратимся к выражениям, описывающим нелинейные восприимчивости $\chi_{Tj}^{(3)}, \chi_{Njk}^{(3)}$.

Как отмечалось ранее, газовые среды привлекают внимание возможностью использования резонансного увеличения эффективности преобразования. Немаловажным является также и тот факт, что значения нелинейных восприимчивостей атомных сред могут быть рассчитаны из «первых принципов» с какой угодно точностью. В рамках данного курса мы не будем подробно рассматривать методы расчета и громоздкие выражения, полученные на их основе, ограничившись исследованием только квазирезонансных схем, вносящих основной вклад в процесс преобразования. При этом будем давать, как правило, качественную интерпретацию процессов.

Приведем выражение для величины нелинейной восприимчивости в зависимости от частоты лазерных полей, частот переходов и других характеристик атомарной среды и постараемся изложить суть процессов, пользуясь рис. 13.2. Для определенности рассмотрим процесс генерации суммарной частоты $\omega_3 + \omega_1 + \omega_2 = \omega_s$.

На рис. 13.2 на энергетическую схему процесса третьего порядка – см. рис. (12.1) – наложена схема уровней атома с энергиями $W_g = 0$; $W_1 = \hbar\omega_{1g}$; $W_2 = \hbar\omega_{2g}$ и $W_3 = \hbar\omega_{3g}$, где ω_{ig} – частота атомного перехода.

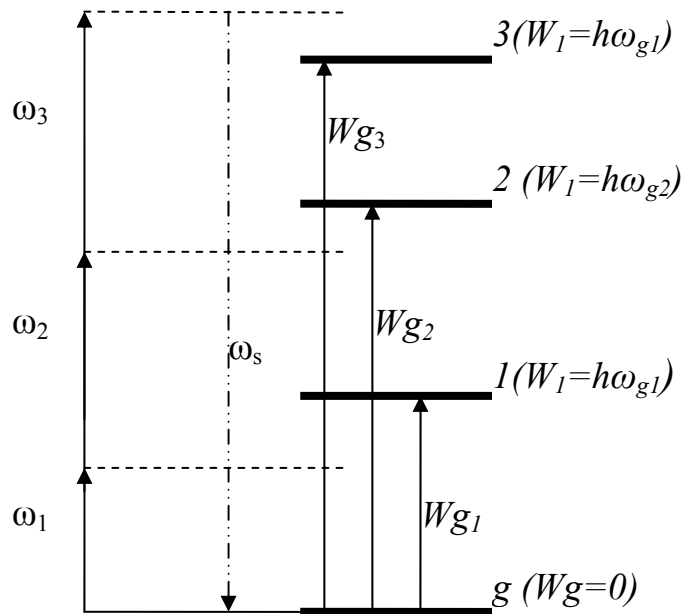


Рис. 13.2

В этом случае $\chi_{Tj}^{(3)}$ приходящаяся на один атом (молекулу) среды генерационная нелинейная восприимчивость третьего порядка будет иметь вид

$$\chi_{Tj}^{(3)} = D \frac{d_{g1}d_{12}d_{23}d_{3g}}{\hbar^3(\omega_1 - \omega_{1g} + i\gamma_1)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{2g} + i\gamma_2)((\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_3))} \quad (13.7)$$

где \hbar – постоянная Планка, $d_{g1}d_{12}d_{23}d_{3g}$ – произведение электродипольных моментов переходов атома между уровнями см. [рис. 13.2](#): основной – 1-й, 1–2-й, 2–3-й, 3-й – основной соответственно; γ_k – ширины соответствующих переходов; $D =$. Величины электродипольных моментов переходов атома между уровнями могут быть рассчитаны из первых принципов либо через силы осцилляторов конкретных атомных переходов, взятых из соответствующих справочников.

Из выражения (13.7) видно, что при приближении одной из частот взаимодействующих волн к частоте перехода возрастает степень воздействия излучения на характеристики атома, как и в любом резонансном процессе. Соответственно увеличивается и эффективность генерации поля на суммарной частоте. При этом, однако, резонанс по любой из частот полей накачки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ так же, как и по генерируемой частоте ω_s , приводит к поглощению соответствующего излучения. Поэтому, как правило, полезным оказывается двухфотонный резонанс, при котором выполняются условия

$$\omega_{2g} = \omega_1 + \omega_2, \quad (13.8)$$

и суммарная энергия двух фотонов накачки близка к энергии атомного перехода. В этих условиях вероятность поглощения атомами двух фотонов хотя

и возрастает, однако при сравнительно низкой интенсивности полей накачки может оставаться приемлемой.

Выражение (13.7) позволяет сравнить величины нелинейных восприимчивостей для твердотельных и газовых сред. Как правило, в качестве твердотельных выбираются прозрачные на всех частотах взаимодействующих волн ω_k среды, т. е. $\omega_{ng} \succ \omega_k$. Поэтому при оценке $\chi_{Tj}^{(3)}$, приходящую на один атом (молекулу) такой среды, в уравнении (13.7) выражения, стоящие в скобках, в знаменателе будут порядка ω_{ng} . В атомных же средах, даже в отсутствии точного резонанса по любой из частот полей накачки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, выражения, стоящие в скобках в знаменателе, будут на порядок меньше ω_{ng} . Таким образом, даже если точный двухфотонный резонанс отсутствует, то выигрыш в $\chi_{Tj}^{(3)}$, приходящейся на один атом (молекулу) газовой среды, составит как минимум три порядка по сравнению с твердотельной. При точном двухфотонном резонансе в (13.7) $\omega_1 + \omega_2 - \omega_{2g} + i\gamma_2 = i\gamma_2$. Для атомов ширины переходов γ_k имеют порядок 10^{-9} с^{-1} , т. е. в 10^6 раз меньше всех частот. Значит, общий выигрыш в $\chi_{Tj}^{(3)}$, приходящийся на один атом (молекулу) газовой среды, составит 8 порядков по сравнению с твердотельной. Поэтому даже при соотношении концентраций N в твердых телах и газе порядка 10^7 величины $\chi_{Tj}^{(3)}$ единицы объема этих сред соизмеримы.

Отметим важные особенности рассматриваемых процессов от процессов спонтанного испускания. В процессах нелинейно-оптического смешения частот не изменяется энергия среды и все атомы среды испускают когерентное коррелированное по фазе излучение под действием лазерного поля накачки. Спонтанное же излучение обязательно связано с переходами электронов между энергетическими состояниями атомов и происходит в каждом атоме независимо. Получаемое при этом излучение не когерентно.

Таким образом, несмотря на более высокий порядок нелинейности и низкую концентрацию частиц в газах по сравнению с традиционными нелинейно-оптическими кристаллами, эффективность параметрических процессов в этих средах может быть достаточно высокой. Последнее достигается за счет использования резонансных свойств среды и более высокой пробойной интенсивности излучения накачки.

ЛЕКЦИЯ № 14. ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ

Ограничивающие процессы: насыщение резонансного перехода. Параметрическое просветление. Высоочастотный эффект Керра. Условия фазового согласования и методы его реализации в газовых средах.

Ограничивающие процессы: насыщение резонансного перехода. Параметрическое просветление.

В условиях точного двухфотонного резонанса вероятность поглощения атомами двух фотонов хотя и возрастает, однако при сравнительно низкой интенсивности полей накачки может оставаться приемлемой. Повышение же интенсивности полей, частоты которых резонансны двухфотонному переходу, может привести к ситуации, когда число возбужденных на двухфотонном переходе и невозбужденных атомов может сравняться. В этом случае процесс генерации излучения на частоте ω_s прекращается. Кроме того, изменение населенностей уровней может приводить к нарушению условий фазового синхронизма. Таким образом, наличие двухфотонного резонанса, с одной стороны, приводит к возрастанию нелинейной восприимчивости среды, и с другой – ограничивает значение величины полей накачки.

Воздействие сильных резонансных лазерных полей на атомную среду приводит также и к изменению значений энергии уровней атомных состояний. Этот эффект, получивший название ДЭШ, приводит к сдвигу частоты двухфотонного перехода, и система выходит из резонанса.

Таким образом, нами рассмотрены примеры процессов, сопутствующих процессам резонансной нелинейно-оптической генерации суммарной частоты. Все они, как правило, вносят деструктивный (отрицательный) вклад в процесс преобразования и ограничивают его эффективность. Тем не менее, влияние их можно хотя бы частично устранить, уменьшая значение полей накачки либо увеличивая выход из двухфотонного резонанса. Существуют, однако, в средах с центром симметрии, которыми являются газы, принципиально не устранимые процессы, ограничивающие эффективность преобразования, к которым относится параметрическое просветление.

В предыдущей лекции упоминалось о необходимости дать физическую интерпретацию системы (13.6) и входящих в нее восприимчивостей $\chi_{Tj}^{(3)}$, $\chi_{Cjk}^{(3)}$. Наиболее просто это можно сделать для процесса третьего порядка на примере генерации третьей гармоники (ГТГ) как в резонансных, так и в нерезонансных условиях. Рассмотрим вначале резонансную схему, изображенную на [рис. 14.1](#), в которой величина $2\omega_l$ варьируется вблизи двухфотонного резонанса.

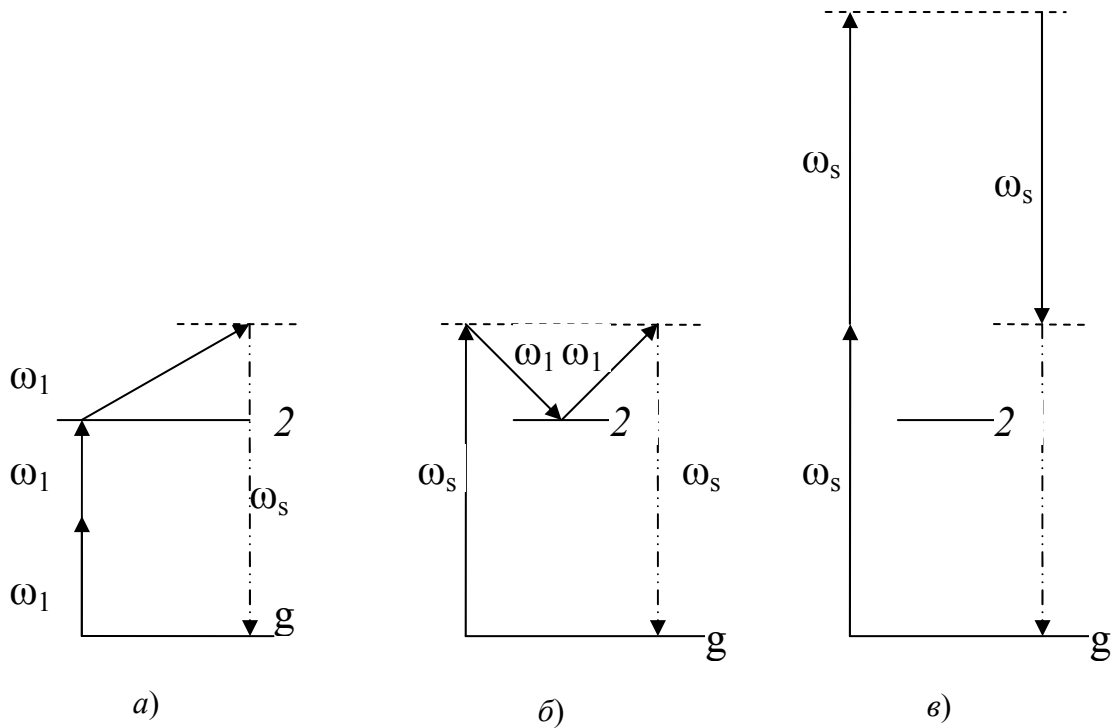


Рис. 14.1

Излучение на частоте ω_s может генерироваться в процессе третьего порядка как типа $\omega_s = 2\omega_1 + \omega_l$ (а), так и типа $\omega_s = \omega_s - \omega_l + \omega_l$ (б), так что $\omega_s - \omega_l$ лежит также вблизи двухфотонного перехода ω_{mg} . Кроме того, возможен и нерезонансный процесс $\omega_s = \omega_s - \omega_s + \omega_s$ (в). При этом во втором выражении (13.4)

$$\frac{dA_s}{dz} = -i\sigma_s(A_1)^3 \exp(i\Delta kz) - i\sigma_{Cs1}(A_1 A_1^*) A_s - i\sigma_{Css}(A_s A_s^*) A_s. \quad (14.1)$$

Первое, второе и третье слагаемые правой части описывают процессы (а), (б) и (в) соответственно. В процессе (а), рождается фотон с частотой ω_s за счет слияния трех фотонов на частоте ω_1 . В процессе (б) фотоны на частотах ω_1 ω_s исчезают и рождаются одновременно. В этом процессе число фотонов с частотой ω_1 и ω_s сохраняется, но исчезающий фотон и рождающийся отличаются по фазе. В нерезонансном процессе (в) фотоны на частоте ω_s исчезают и рождаются одновременно с также отличающейся фазой.

В рассматриваемых схемах за процесс (а) отвечает генерационная нелинейная восприимчивость, описываемая выражением (13.7). Аналогичные выражения могут быть записаны и для резонансного процесса (б):

$$\chi_{Cs1}^{(3)} \sim \frac{d_{g3} d_{32} d_{23} d_{3g}}{\hbar^3 (\omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_1)^2 (\omega_3 - \omega_1 - \omega_{2g} + i\gamma_2)}, \quad (14.2)$$

который при двухфотонном резонансе ($\omega_3 - \omega_1 - \omega_{2g} = 2\omega_1 - \omega_{2g} = 0$) переходит в

$$\chi_{Cs1}^{(3)} \sim d_{g3}d_{32}d_{23}d_{3g}/\hbar^3(\omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_1)^2(i\gamma_2), \quad (14.3)$$

и нерезонансного (в)

$$\chi_{Css}^{(3)} \sim \frac{d_{g3}d_{32}d_{23}d_{3g}}{\hbar^3(\omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_1)^3}, \quad (14.4)$$

значение которого мало по сравнению с (14.3) в силу отсутствия резонанса и им можно пренебречь. Эффекты, связанные с вкладом этого процесса, мы учтем позднее, при анализе нерезонансных схем.

Интересно, что в случае точного резонанса фаза рожденного в процессе (а) фотона противоположна фазе генерируемого. Естественно, что два этих фотона взаимно уничтожаются вследствие их интерференции. Действительно, подставив (14.3) в (13.5), с учетом (13.7), преобразуем (14.1) к виду

$$\frac{dA_s}{dz} = -i\sigma_s(A_1)^3 \exp(i\Delta kz)_s - D \frac{d_{g3}d_{32}d_{23}d_{3g}}{\hbar^3(\omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_1)^2\gamma_2} \left(\frac{2\pi\omega_j^2 N}{k_j c^2} \right) (A_1 A_1^*) A_s. \quad (14.5)$$

Обозначив за $\alpha = D \frac{d_{g3}d_{32}d_{23}d_{3g}}{\hbar^3(\omega_3 - \omega_{3g} + i\gamma_1)^2\gamma_2} \left(\frac{2\pi\omega_j^2 N}{k_j c^2} \right) (A_1 A_1^*)$ и при $\Delta k = 0$, в приближении заданного поля накачки (A_1 – постоянна), из (14.5) получим уравнение, решением которого при нулевых значениях A_s на входе в среду является следующее уравнение:

$$A_s(z) = \frac{i\sigma_s(A_1)^3}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha z)). \quad (14.6)$$

Отсюда видим, что даже при неизменной A_1 предельное значение амплитуды третьей гармоники равно $\lim_{z \rightarrow \infty} A_s(z) = \frac{i\sigma_s(A_1)^3}{\alpha}$. Другими словами, существует предельное значение генерируемого в резонансных процессах третьего порядка поля. Физически это означает, что количество фотонов, рожденных в процессе (а), не зависит от их количества и определяется интенсивностью поля на частоте ω_1 . Количество изменивших фазу в процессе (б) фотонов пропорционально их количеству. Поэтому рост числа фотонов на частоте ω_s за счет процесса (а) приводит к увеличению числа изменивших фазу фотонов в процессе (б) и возможен только до уровня, при котором число рожденных фотонов на частоте ω_3 равно числу исчезнувших в результате интерференции. Таким образом, начиная с некоторой интенсивности генерируемого поля его рост прекращается и в дальнейшем волны распространяются по среде без взаимодействия. Это явление получило название *параметрического просветления*.

Далее атом под действием двух фотонов на частоте $2\omega_1$ может перейти из основного в возбужденное состояние (рис. 14.2). Такой же процесс возможен и под действием фотонов с частотами ω_s и ω_2 , которые удовлетворяют условию резонанса. $2\omega_1 = \omega_s - \omega_2$. Таким образом, электрон в атоме может перейти в возбужденное состояние двумя путями. В соответствии с принципами квантовой механики амплитуды вероятности перехода по этим путям интерферируют и в зависимости от разности их фаз возможно как сложение вероятностей, так и их вычитание.

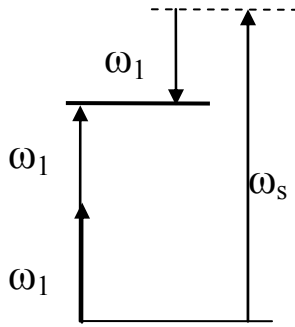


Рис. 14.2

Поскольку фазы взаимодействующих волн жестко связаны в такого типа процессах, то и фазы амплитуд вероятности переходов по первому и второму каналам оказываются также связанными. Более того, в условиях точного резонанса их фазы отличаются на π , что приводит к вычитанию вероятностей перехода по этим каналам и в условиях параметрического просветления вероятность двухфотонного перехода равна нулю. Последнее означает, что атом остается в основном состоянии, и волны не взаимодействуют как между собой, так и со средой. Эффект параметрического просветления является проявлением нелинейной интерференции атомных переходов.

Высокочастотный эффект Керра.

Теперь рассмотрим нерезонансные процессы, описываемые выражением (14.4). Схемы таких процессов приведены на рис. 14.3. В отсутствии резонансов σ_{cs1} и σ_{css} действительны. Тогда, в приближении заданного поля накачки из (13.4) имеем уравнение

$$\frac{dA_s}{dz} = -i\sigma_s(A_1)^3 \exp(i\Delta kz) - i\sigma_{cs1}(A_1 A_1^*) A_s, \quad (14.7)$$

решением которого является, сравнить с аналогом (6.2),

$$A_s(z) = -i\sigma_s(A_1)^3 \left[\frac{\exp(i\Delta kz) - 1}{i\Delta k} \right], \quad (14.8)$$

где $\Delta k = [\Delta k - \sigma_{cs1}(A_1 A_1^*)]$. Так же, как и в уравнении (6.2), $A_s(z) \sim z$ при $\Delta k = 0$ (условие фазового согласования с учетом нелинейной добавки), т. е. растет линейно вдоль среды. Здесь $\Delta k = 0$ в случае $\Delta k = \sigma_{cs1}(A_1 A_1^*)$, т. е. линейное фазовое рассогласование может быть компенсировано нелинейной (керровской) добавкой к показателю преломления на генерируемой частоте $\Delta k_K = \sigma_{cs1}(A_1 A_1^*) \sim |A_1|^2$. Однако в случае сильного энергообмена между волнами $|A_1|^2$ уменьшается, что приводит к нарушению предыдущего равенства и, следовательно, к на-

рушению условий фазового согласования. Последнее означает, что полное преобразование излучения накачки в излучение третьей гармоники невозможно.

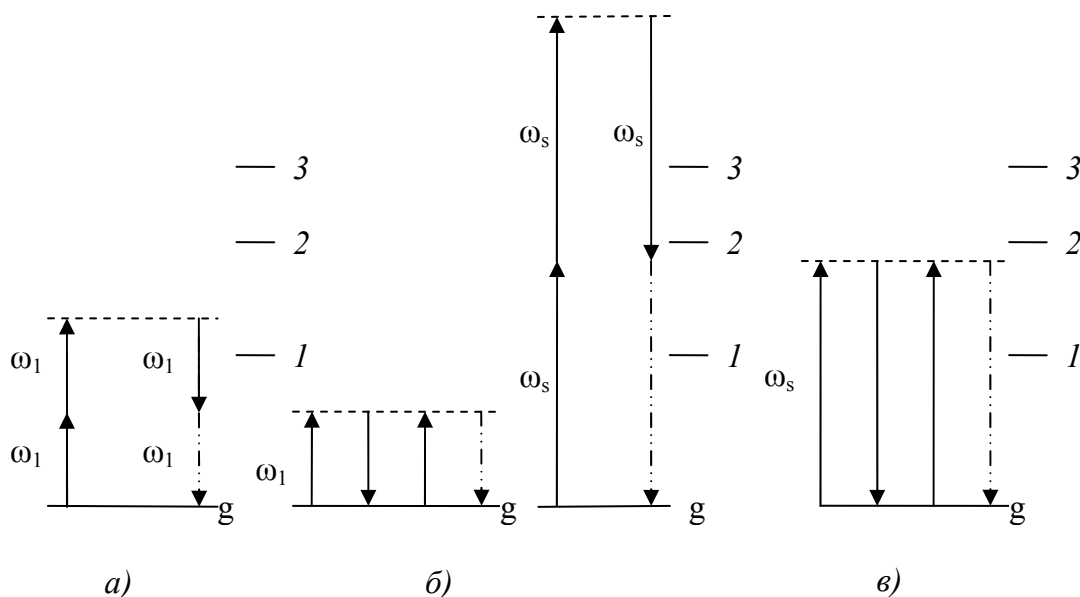


Рис. 14.3

Таким образом, в нелинейных процессах нечетных порядков (в нашем случае третьего) невозможно полное преобразование излучения накачки в генерируемое как в резонансных, так и нерезонансных условиях. В процессах же второго порядка, характерных для кристаллических сред, возможно 100%-ное преобразование ([см. лекцию № 7](#)).

Условия фазового согласования и методы его реализации в газовых средах.

Как известно, зависящий от частоты показатель преломления среды определяется ее линейной восприимчивостью $n(\omega) = \sqrt{1 + 4\pi N \chi^{(1)}(\omega)}$. Для случая газовых сред $N \chi^{(1)}(\omega) \ll 1$, тогда можно записать для однокомпонентной среды с концентрацией атомов нелинейной среды N_α

$$n(\omega) \approx 1 + 2\pi N_\alpha \chi^{(1)}(\omega). \quad (14.9)$$

Для процесса ГТГ

$$\Delta k = (3\omega/c_1)[n(3\omega_1) - n(\omega_1)]. \quad (14.10)$$

Выражение для нерезонансной линейной восприимчивости можно записать

в виде

$$\chi^{(1)}(\lambda_j) = \frac{r_c}{4\pi^2} \sum_k \frac{f_k}{1/\lambda_k^2 - 1/\lambda_j^2}, \quad (14.11)$$

где $r_c = 2/818 \times 10^{-13}$ см; λ_k — длина волны, выраженная в сантиметрах, и f_k — сила осциллятора, соответствующая k -му переходу атома; λ_j — длина волны излучения, выраженная в сантиметрах. Величина Δk , равная нулю, может быть достигнута, если использовать буферный газ с концентрацией и линейной восприимчивостью N_b и $\chi_b^{(1)}(\omega)$ соответственно. Тогда

$$n(\omega) \approx 1 + 2\pi N_a \chi_a^{(1)}(\omega) + 2\pi N_b \chi_b^{(1)}(\omega) \quad (14.12)$$

и соответствующим подбором концентраций $n(\omega) \approx N_a$ и N_b величина Δk может быть сведена к нулю, т. е. могут быть реализованы условия фазового согласования.

В результате анализа ограничивающих процессов показано следующее:

1. Движение населенности и динамический эффект Штарка на резонансном переходе могут быть устранены при уменьшении интенсивности накачки.
2. Параметрическое просветление и высокочастотный эффект Керра являются неустраняемыми факторами, приводящими к ограничению эффективности преобразования в газовых средах.

ЛЕКЦИЯ № 15. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Комбинационное (рамановское) рассеяние света. Физический механизм рассеяния. Основные уравнения и параметры.

Комбинационное (рамановское) рассеяние света.

В этой лекции мы обратимся к анализу эффектов вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), пожалуй, одного из важнейших нелинейных волновых процессов. Суть спонтанного комбинационного (рамановского) рассеяния (КР) заключается в следующем. При прохождении квазимонохроматического излучения через гомогенную среду в спектре рассеянного излучения возникают спектральные компоненты на частотах ω_s , являющихся комбинацией частоты излучения накачки ω_n и частоты собственных колебаний среды ω_0 :

$$\omega_s = \omega_n \pm n\omega_0 \quad . \quad (15.1)$$

Здесь n – целое число. При этом рассеянное излучение практически изотропно и интенсивность его составляет величину порядка 10^{-6} – 10^{-8} от интенсивности накачки. В настоящее время это явление широко используется для качественного и количественного анализа смесей жидкостей, газов, поскольку позволяет по соотношению интенсивностей на частотах $\omega_{s,i}$ судить о составе смеси, в которой содержатся молекулярные компоненты i , имеющие соответствующие частоты $\omega_{0,i}$.

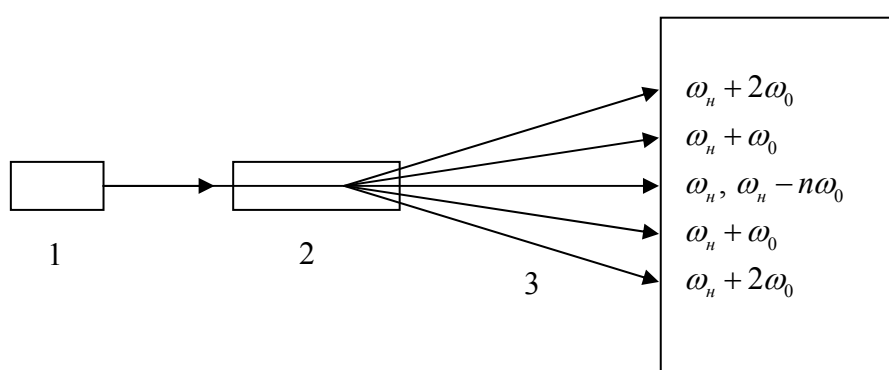


Рис. 15.1

Уже в первых экспериментах, ([рис. 15.1](#)) с использованием лазеров 1 с модулированной добротностью процесс комбинационного рассеяния в среде 2 качественно отличался от процесса, в котором использовалось излучение с низкой интенсивностью. Пучок излучения накачки содержал спектральные компоненты с частотами $\omega_s = \omega_n - n\omega_0$ с n достигающих значений 3 и выше

(стоксовы компоненты), а интенсивность этих компонент была соизмерима с интенсивностью накачки. Кроме того, при наблюдении на перпендикулярном оси пучке накачки на экране наблюдался ряд колец. При этом кольца содержали спектральные компоненты, удовлетворяющие условию $\omega_a = \omega_n + n\omega_0$ (антистоксовы компоненты). Это явление получило название вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР).

Физический механизм рассеяния.

Физику этого явления можно пояснить, пользуясь простой классической моделью взаимодействия света с молекулами, предложенной Плачеком. Эффект комбинационного рассеяния связан с зависимостью электронной поляризуемости молекулы α от ядерной конфигурации, задаваемой координатами ядер в молекуле q :

$$\alpha(q) = \alpha_0 + \alpha'_0 q + \dots \quad \alpha'_0 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)_{q=0}. \quad (15.2)$$

Член с $\partial \alpha / \partial q|_{q=0}$ описывает модуляцию света молекулярными колебаниями; при этом в спектре поляризации молекулы появляются новые частотные компоненты, сдвинутые на частоту ω_0 колебаний ядер:

$$p = \alpha(q)E = \alpha_0 E + \alpha'_0 q E. \quad (15.3)$$

В условиях, когда смещение координат ядер в молекуле q определяется тепловыми движениями в среде, уравнение (15.3) описывает спонтанное комбинационное рассеяние. Если падающее световое поле имеет частоту ω_n , а молекулярные колебания совершаются со средней частотой ω_0 в силу (15.1), то в рассеянном молекулой световом поле возникают стоксова ($\omega_c = \omega_n - \omega_0$) и антистоксова ($\omega_a = \omega_n + \omega_0$) компоненты.

Спонтанное комбинационное рассеяние имеет достаточно простую квантовую интерпретацию (рис. 15.2). При прохождении светового излучения через среду возможен двухфотонный процесс, при котором квант света с частотой накачки ω_n поглощается с одновременным излучением кванта света на частоте стоксовой компоненты ω_s , а молекула переходит в возбужденное состояние. В том случае, когда свет взаимодействует с молекулой в возбужденном состоянии, то происходит также двухфотонный процесс, при котором квант на частоте ω_n исчезает, излучается квант на частоте ω_a , а молекула переходит в основное состояние.

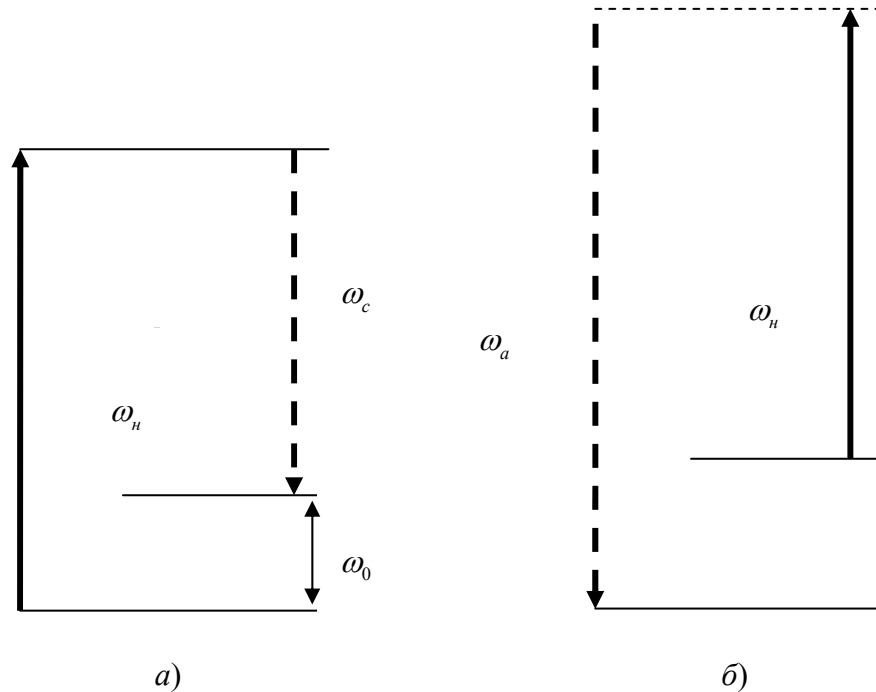


Рис. 15.2

Зависимость электронной поляризуемости молекулы α от ядерной конфигурации приводит не только к модуляции света молекулярными колебаниями, но одновременно оказывается и причиной обратного воздействия световых волн на молекулярные колебания. Действительно, энергия взаимодействия молекулы со световой волной выражается с помощью уравнения (15.3) в виде

$$W = -pE = -\alpha(q)E^2. \quad (15.4)$$

Следовательно, при $\alpha'_0 \neq 0$ в световом поле возникает сила, действующая на молекулярные колебания:

$$f = -\frac{\partial W}{\partial q} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)_{q=0} E^2 = \alpha'_0 E^2. \quad (15.5)$$

Эта сила может привести к их резонансной раскатке, если поле содержит две спектральные компоненты с частотами ω_1 и ω_2 , разница между которыми $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$ приблизительно равна частоте молекулярных колебаний. В этих условиях на хаотические внутримолекулярные колебания, имеющие флуктуационный характер, накладываются регулярные вынужденные колебания, фазы которых определяются фазами световых полей.

Вынужденное комбинационное рассеяние – процесс, возникающий за счет оптического возбуждения внутримолекулярных колебаний; резонансный дублет возникает за счет стоксова рассеяния мощной лазерной волны

(волны накачки). Если внутримолекулярные колебания возбуждены светом, качественно меняется и картина рассеяния. На смену слабому нарастанию компонент рассеянного света в спонтанном рассеянии приходит носящее характер неустойчивости экспоненциальное нарастание рассеянных компонент в вынужденном рассеянии. В нелинейной оптике этим обстоятельством пользуются для эффективного преобразования частоты.

Основные уравнения и параметры.

Приведем простую теоретическую модель, описывающую процесс ВКР. Пользуясь соотношением (15.5), уравнение для молекулярных колебаний (эффектами изменения разности населенностей пренебрегаем) запишем в виде

$$\ddot{q} + \frac{2}{T} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{2m} \alpha' E^2, \quad (15.6)$$

где m – эффективная масса молекулы; T – время релаксации.

Рассмотрим взаимодействие волны накачки E_n и стоксовой волны E_c в среде, описываемой уравнением (15.6). В этом случае

$$E = E_n + E_c, \quad \dot{A}_i = \dot{A}_i(t, z) \exp i(\omega_i t - k_i z) + k_c. \quad (15.7)$$

$$\dot{A}_c = \dot{A}_c(t, z) \exp i(\omega_c t - k_c z) + k_c, \quad (15.8)$$

где n_n и n_c – показатели преломления на частотах ω_n и $\omega_c = \omega_n - \omega_0$. Уравнение (15.6) описывает действие поля на молекулярные колебания. В свою очередь, колебания q создают в среде нелинейную поляризацию $P_{nl} = N \alpha' q E$ и, таким образом, оказывают обратное влияние на поле, что выражается уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{nl}}{\partial t^2}. \quad (15.9)$$

Согласно выражению (15.6), резонансная кривая молекулярного осциллятора характеризуется шириной $\delta\omega_0 = 2/T$. Эту величину называют также шириной линии спонтанного комбинационного рассеяния и обычно выражают в см^{-1} $\delta\nu_0 = \delta\omega_0/2\pi c = 1/\pi c T$.

Рассматривая взаимодействие волн, близких к монохроматическим, запишем q в виде, аналогичном (15.7)–(15.8):

$$q = Q(t, z) \exp i(\omega_0 t - k_0 z) + k_c. \quad (15.10)$$

Тогда в стационарном случае решение уравнения (15.6), с учетом (15.7)–(15.8), при $\omega_0 = \omega_n - \omega_c$ имеет вид

$$q(z) = Q(z) \exp i(\omega_0 t) + kc; \quad Q(z) = \frac{\alpha' \pi T}{2\omega_0 m c \sqrt{n_i n_{\bar{n}}}} A_i(z) \dot{A}_{\bar{n}}^*(z). \quad (15.11)$$

Отметим здесь, что волновой вектор k_0 молекулярных возбуждений определяется волновыми векторами накачки k_n и стоксова излучения k_c : $k_0 = k_n - k_c$ и является «фиктивным» волновым вектором, поскольку колебания каждой молекулы происходят независимо, а фаза этих колебаний определяется разностью фаз накачки и стоксовой компоненты, которые, в свою очередь, зависят от дисперсии среды. Считая амплитуды A_c , A_n , и Q меняющимися относительно медленно в пространстве, из уравнения (15.9) получим для медленно меняющейся амплитуды систему укороченных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{A}_{\bar{n}}}{\partial z} &= \frac{1}{2} g A_i \dot{A}_i^*, \\ \frac{\partial \dot{A}_i}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\omega_i}{\omega_{\bar{n}}} g A_{\bar{n}} \dot{A}_{\bar{n}}^*. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Параметрами этих уравнений являются: время релаксации T , частоты взаимодействующих волн, а также определяющая оптическую нелинейность среды постоянная

$$g' = \frac{4\pi T N \alpha' \omega_c}{c \omega_0 \sqrt{2 m n_c n_n}}. \quad (15.13)$$

Считая A_n сильным и заданным, из уравнения (15.12) для A_c получим решение в виде

$$A_c = A_{0c} \exp g z. \quad (15.14)$$

Здесь A_{0c} – амплитуда стоксовой компоненты на входе в среду, представляющая собой тепловое и очень слабое излучение; $g = g' |A_n|^2$.

Отсюда видим, что амплитуда стоксовой компоненты нарастает экспоненциально вдоль распространения пучка накачки. Также экспоненциально растет с расстоянием и амплитуда молекулярных колебаний, что на квантовом языке означает рост населенности возбужденного состояния молекул. Последнее должно приводить к росту и антистоксовой компоненты. Характерные особенности этого процесса будут рассмотрены ниже.

Таким образом, с использованием классической модели Плачека показано, что поле стоксовой компоненты может экспоненциально расти вдоль направления луча накачки.

ЛЕКЦИЯ № 16. АНТИСТОКСОВЫ КОМПОНЕНТЫ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЙЯНИЯ

Порог вынужденного комбинационного рассеяния. Антистоксовы компоненты вынужденного комбинационного рассеяния. Антистоксово вынужденное комбинационное рассеяние на переходах с инверсией населенности.

Порог вынужденного комбинационного рассеяния.

Принято считать, что **порог вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР)** достигается при показателе экспоненты $gz = 30$. При таких значениях интенсивность стоксовой компоненты становится соизмеримой с интенсивностью накачки, и для количественного анализа процесса необходимо рассматривать систему (5.13) с учетом изменения поля накачки. Качественно же процесс ВКР на длинах среды, больших $l_g = 30/g$, имеет характер насыщения и рост A_c прекращается.

При превышении порога интенсивность стоксовой компоненты достигает порога, при котором возможно и ВКР; при этом частота генерируемого излучения соответствует частоте второй стоксовой компоненты:

$$\omega_{2c} = \omega_c - \omega_0 = \omega_n - 2\omega_0. \quad (16.1)$$

Достижение интенсивности второй стоксовой компоненты порогового значения приводит к ее ВКР и может наблюдаться третья и более высокие стоксовы компоненты:

$$\omega_{nc} = \omega_n - n\omega_0. \quad (16.2)$$

Таблица 16.1

Вещество	Агрегатное состояние	$\omega_0/2\pi c$, см ⁻¹	$\delta\nu_0$, см ⁻¹	T , с	g , см/МВт
Водород	Газ $p = 1$ атм	4161	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$0,05 \cdot 10^{-2}$
Сероуглерод	Жидкость	656	$50 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-9}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$
Азот	Жидкость	2326	$67 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-9}$	10^{-2}
Кальцит	Твердое тело	1086	1,1	$0,01 \cdot 10^{-9}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$

Достижение порога ВКР зависит как от интенсивности излучения накачки, так от параметров среды и ее агрегатного состояния. В [табл. 16.1](#) приведены характерные параметры сред в разных агрегатных состояниях, на которых процесс ВКР идет наиболее эффективно.

Антистоксовы компоненты вынужденного комбинационного рассеяния.

Как отмечалось ранее, процесс ВКР сопровождается возникновением излучения, распространяющегося по концентрическим коническим поверхностям, вершина которых находится в среде, в которой этот процесс происходит. При этом коническим поверхностям с номером n соответствуют частоты антистоксова излучения, удовлетворяющие равенствам

$$\omega_a = \omega_n + n\omega_0 \quad (16.3)$$

Характерная направленность антистоксовой компоненты свидетельствует о том, что процесс имеет параметрический характер и направление генерируемого излучения определяется фазовым синхронизмом. Процесс ВКР наблюдается, как правило, в средах, обладающих центром симметрии (см. [табл. 16.1](#)), в которых возможны параметрические процессы третьего порядка. Рассмотрим процесс, схема которого приведена на [рис. 16.1](#):

$$\omega_a = \omega_n + \omega_n - \omega_c = \omega_n + \omega_0 \quad (16.4)$$

На [рис. 16.1](#) показано: *а* – схематическое изображение закона сохранения энергии; *б* – схематическое изображение закона сохранения импульса в ВКР-процессе возбуждения антистоксовой компоненты.

Процессу соответствуют условия синхронизма в векторном виде:

$$\vec{k}_a = \vec{k}_n + \vec{k}_n - \vec{k}_c = 2\vec{k}_n - \vec{k}_c \quad (16.5)$$

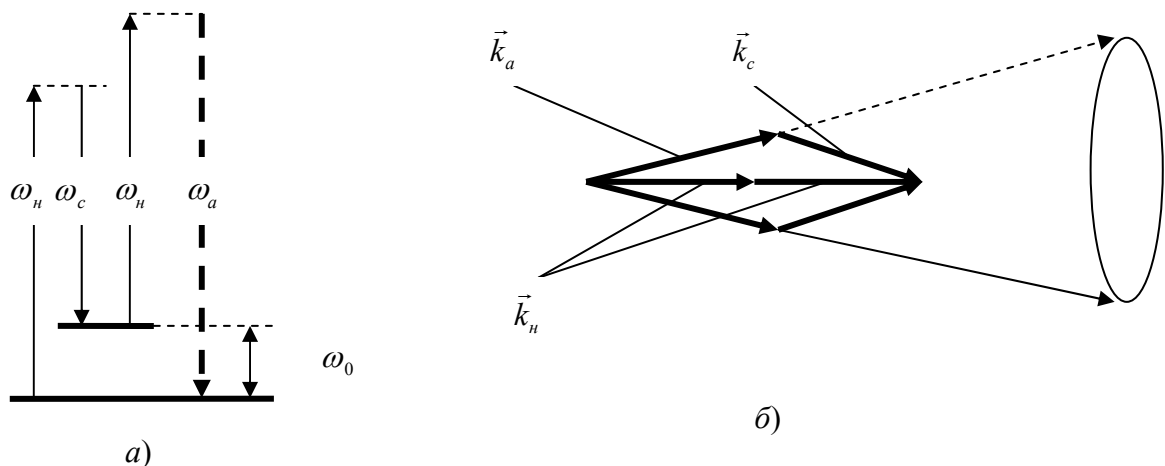


Рис. 16.1

Как видно из соотношения (16.5) волновые векторы стоксовой и антистоксовой компонент не коллинеарны как между собой, так и между волновым вектором накачки и вектором стоксовой компоненты, возникшей в процессе ВКР. Возникновение «затравочной» для параметрического процесса

стоксовой компоненты неколлинеарной накачки обусловлено либо рассеянием ее на неоднородностях среды, либо тепловым излучением, всегда существующем при отличной от нуля температуре. Тогда параметрический процесс идет

с сохранением энергии и импульса по следующей из соотношений (16.2), (16.3) схеме:

$$\omega_a + \omega_c = \omega_n + \omega_n, \quad \vec{k}_a + \vec{k}_c = \vec{k}_n + \vec{k}_n, \quad (16.6)$$

в которой два фотона накачки исчезают с одновременным рождением двух фотонов на частоте стоксовой и антистоксовой компонент. Система уравнений, описывающая данный процесс антистоксова ВКР, аналогична системе (12.4), из которой, полагая поле накачки заданным, а также пренебрегая эффектами самовоздействия и рассматривая взаимодействие только по оси z , получим

$$\begin{aligned} \frac{dA_c}{dz} &= -i\sigma_c A_i A_i A_a^*, \\ \frac{dA_a}{dz} &= -i\sigma_a A_i A_i A_n^*. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Отсюда видим, что амплитуды стоксовой и антистоксовой компонент экспоненциально растут вдоль оси z .

Антистоксово вынужденное комбинационное рассеяние на переходах с инверсией населенности.

До сих пор мы негласно предполагали, что в основном населено нижнее колебательное состояние молекулы. Естественно, что заселение верхнего состояния приведет лишь к ухудшению условий возникновения ВКР с генерацией стоксовой компоненты. Иная ситуация возникает в том случае, когда заселенность верхнего состояния превышает заселенность нижнего, т. е. реализована инверсия заселенностей. Тогда в процессе ВКР генерируется антистоксова компонента. Эта идея была продемонстрирована экспериментально на колебательных переходах молекул, однако наибольший интерес вызывает ВКР с инверсией заселенностей на атомарных электронных переходах в связи с проблемой генерации коротковолнового ультрафиолетового, вакуумного ультрафиолетового и мягкого

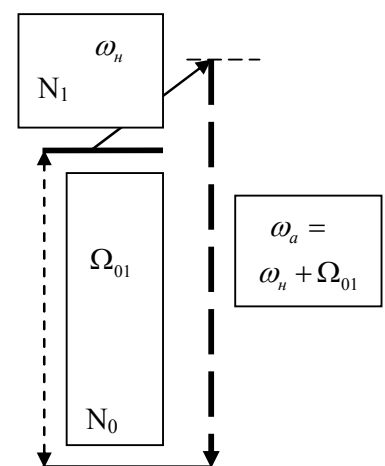


Рис. 16.2

ультрафиолетового излучения. Действительно, при инверсии заселенностей между уровнями 0–1 ($N_1 \succ N_0$) в процессе ВКР рождается антистоксова компонента – [см. рис. \(16.2\)](#). При этом необходимость в резонаторе, создать который в названных выше диапазонах принципиально сложно, отпадает. Излучение накачки в данном случае играет роль «спускового механизма», пускающего процесс генерации когерентного коротковолнового излучения с частотой $\omega_a = \omega_n + \Omega_{01}$, равной сумме частот накачки и перехода, которая может лежать в ультрафиолетовом, вакуумном ультрафиолетовом и даже мягком ультрафиолетовом диапазонах. Очевидно, что антистоксова компонента излучается в том же направлении, что и излучение накачки.

Приведенное в лекции исследование показывает, что появление антистоксового компонента при вынужденном комбинационном рассеянии обусловлено резонансным параметрическим процессом третьего порядка. Условия синхронизма выполняются при неколлинеарном направлении волновых векторов взаимодействующих волн, что обуславливает направление антистоксовой компоненты по конической поверхности.

ЛЕКЦИЯ № 17. ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна. Обращение волнового фронта. Комбинационные лазеры.

Вынужденное рассеяние Мандельштама – Бриллюэна.

При исследовании процессов ВКР, считалось, что молекулярные колебания осуществляются независимо, а их фаза определяется фазами полей накачки и стоксовой компоненты. Это означало автоматическое выполнение условий фазового синхронизма. Несколько иная ситуация возникает в том случае, когда электромагнитные волны взаимодействуют с различными типами реальных волн, распространяющимися в нелинейной среде. Примером нелинейного взаимодействия света с волнами различной природы является процесс **вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна**, при котором осуществляется нелинейное взаимодействие оптического излучения с акустическими волнами.

При температуре вещества, отличной от нуля, в нем существуют акустические волны с широким набором частот. Отличное от среднего давление $U(z,t)$ (или плотность $\rho(z,t)$) в такой волне может быть представлено в виде простой бегущей акустической волны с частотой ω_s и волновым вектором k_s , являющимся решением волнового уравнения – см. выражение (15.9):

$$U(z,t) = U_0 e^{-\eta z} \exp i(\omega_s t - k_s z) + kc. \quad (17.1)$$

Здесь $k_s = \omega_s / v_s$, $v_s = T/\rho$ – фазовая скорость акустической волны, характерное значение которой составляет величину, близкую к 10^5 см/с.; T – упругость; ρ – средняя по пространству и времени плотность среды; η – коэффициент затухания. С учетом этих значений k_s достигает величины волнового вектора оптических волн видимого диапазона при частотах $\omega_s \approx 5 \cdot 10^9$ герц, что значительно ниже оптических частот, составляющих величину порядка 10^{15} Гц.

Рассмотрим акустическую волну (16.6), распространяющуюся в оптически прозрачной среде, для простоты считая ее незатухающей. Наличие акустической волны приводит к модуляции как показателя преломления, так и диэлектрической проницаемости, которые зависят от плотности среды $\rho(z,t)$ или от давления $U(z,t)$. В первом приближении добавка к этим величинам

$$n^2 = \varepsilon = \varepsilon_0 + \gamma U_0 \exp i(\omega_s t - k_s z) + kc. \quad (17.2)$$

Тогда для двух оптических волн с частотами ω_n (накачка) и ω_m (генерируемая), удовлетворяющими соотношению

$$\omega_m = \omega_n - \omega_s, \quad (17.3)$$

на основе волнового уравнения (15.9), по аналогии с (15.12), получим систе-

му двух связанных уравнений относительно амплитуд волн накачки A_n и генерируемой волны A_m в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_i}{\partial z} &= -i\sigma_i A_i U^* e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s - \vec{k}_i)}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial z} &= -i\sigma_i A_i U e^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_s - \vec{k}_i)},\end{aligned}\quad (17.4)$$

которая при равенстве волновых векторов

$$\vec{k}_n = \vec{k}_m - \vec{k}_s \quad (17.5)$$

имеет решение, при котором амплитуда генерируемой волны монотонно растет, а амплитуда волны накачки также монотонно уменьшается. Здесь \vec{k}_n , \vec{k}_m и \vec{k}_s – волновые векторы волн накачки, генерируемой и акустической волн соответственно. Очевидно, что полная система уравнений тоже должна включать и уравнение для акустического поля. Причиной его роста является эффект электрострикции, т. е. эффект изменения линейных размеров среды, пропорциональный квадрату электрического поля. Последнее означает, что в объеме среды возникает давление, пропорциональное также квадрату поля. При этом наличие электромагнитного поля на двух частотах ω_i и ω_i приводит к возникновению волны давления, амплитуда которой пропорциональна произведению амплитуд этих полей $A_m A_n$ со спектральной компонентой на частоте ω_s (17.1) и с волновым вектором \vec{k}_s , удовлетворяющим соотношению (17.5). Тогда стационарное укороченное уравнение для амплитуды акустической волны (без учета затухания) будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\sigma_u A_n A_m^* e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_s - \vec{k}_m)}. \quad (17.6)$$

Полученное уравнение вместе с (17.2) образует систему связанных уравнений для амплитуд электромагнитной и акустической волн. Легко показать, что решение этой системы в приближении заданного поля накачки для амплитуд генерируемой электромагнитной и акустической волн представляет собой экспоненциально растущие функции. Учет ослабления поля накачки так же, как и при параметрическом процессе взаимодействия электромагнитных волн, приводит к полной перекачке ее энергии в энергию электромагнитной и акустической волн. Порог вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна (ВРМБ), как правило, достигается при интенсивности поля накачки порядка $10^7 - 10^8$ Вт/см².

Обращение волнового фронта.

Выполнение условий фазового согласования (17.3) при условии, что

абсолютное значение волнового вектора акустической волны, близкое к значению этой величины для волны электромагнитной, достигается при частоте звука порядка 10^9 . При этом условия фазового согласования могут быть выполнены как при распространении генерируемой волны в направлении распространения накачки (рассеяние вперед [рис. 17.1, а](#)) так и в противоположном направлении (рассеяние назад [рис. 17.1, б](#))

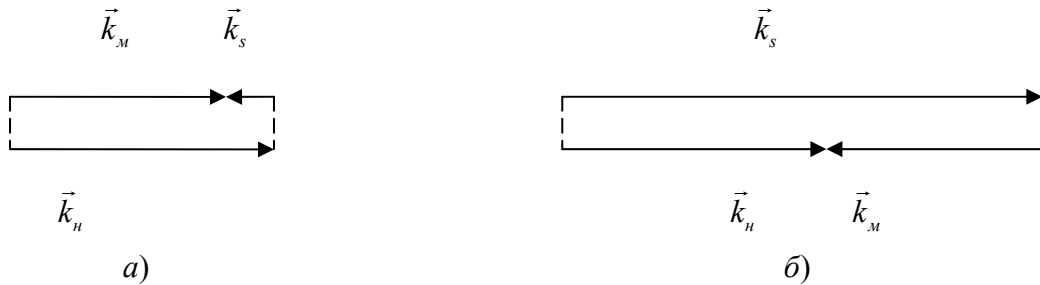


Рис. 17.1

Наибольший интерес для практического использования представляет эффект ВРМБ при рассеянии назад ([рис. 17.1, б](#)). Поскольку частота фона при условии выполнения (16.1) составляет величину порядка 10^9 , а частота оптического излучения 10^{14} – 10^{15} , то частоты излучения накачки и генерируемого поля различаются незначительно. Последнее означает, что $\vec{k}_i \approx -\vec{k}_i$ ($|k| = n(\omega)\omega/c$) и волновой вектор генерируемого поля направлен в противоположную сторону по отношению к волновому вектору поля накачки (комплексно сопряжен). Поэтому любые искажения волнового фронта волны накачки, при ее прохождении через неоднородную среду в генерируемом поле, будут иметь комплексно сопряженный вид (изменяют знак). При обратном прохождении генерируемого поля через эту же среду искажения компенсируются и волновой фронт падающей волны восстановится в волне обратного рассеяния ВРМБ. Это явление широко используется при создании мощных лазерных систем с многокаскадными усилителями ([рис. 17.2](#)). Действительно, при прохождении излучения с гладким волновым фронтом 2, сформированного в задающем генераторе малой мощности 1, через систему усилителей 3 волновой фронт волны испытывает значительные искажения. Если на выходе системы установить ВРМБ зеркало 4, возвращающее излучение с обращенным волновым фронтом в систему, то на ее выходе мы получим еще раз усиленный лазерный пучок с восстановленным гладким волновым фронтом 5.

Схемы обращения волнового фронта могут быть реализованы и в четырехфотонных параметрических процессах по схеме $\omega = \omega + \omega - \omega$ при выполнении условий фазового согласования – [см. рис. 17.3](#):

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4. \quad (17.8)$$

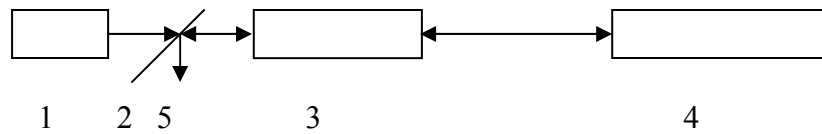


Рис. 17.2

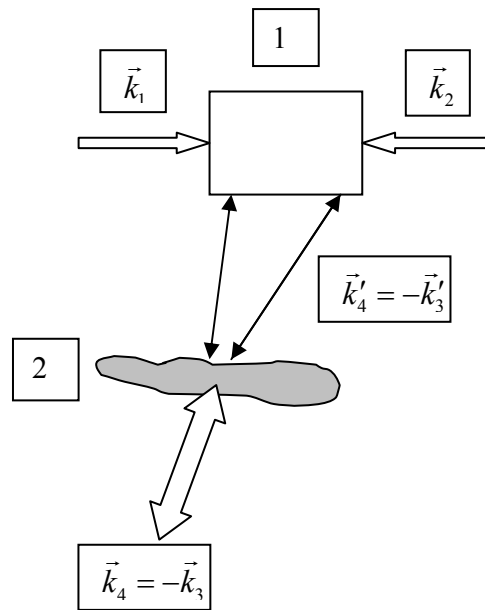


Рис. 17.3

Пусть в нелинейной среде с кубической нелинейностью 1 распространяются два лазерных пучка с равными частотами и амплитудами A_1 и A_2 , волновые векторы которых \vec{k}_1 и \vec{k}_2 направлены в противоположные стороны, а волновой фронт плоский. Кроме того, в искажающую волновой фронт среду 2 попадает излучение на той же частоте с амплитудой A_3 , волновым вектором \vec{k}_3 и изначально плоским волновым фронтом, который после среды 2 искажается и его угловой спектр теперь характеризуется амплитудой $A_3(\vec{k}_3')$. Это излучение попадает также в нелинейную среду 1. Тогда в соответствии с соотношениями (13.4) для амплитуды генерируемого поля $A_4(\vec{k}_4')$ можно записать уравнение

$$\frac{\partial A_4(\vec{k}_4')}{\partial z} = -i\sigma A_1 A_2 A_3^*(\vec{k}_3') \exp i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3' - \vec{k}_4'). \quad (17.9)$$

Далее, с учетом направления волновых векторов $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ и в соответствии с (17.9), получим $\vec{k}_4' = -\vec{k}_3'$. Последнее означает, что пространственный спектр амплитуд генерируемого поля пропорционален комплексно сопряженному пространственному спектру поля накачки $A_4(\vec{k}_4') \propto A_3^*(\vec{k}_3')$, а волновой вектор направлен в противоположную сторону относительно накачки. Таким образом, мы получим волну $A_4(\vec{k}_4')$, комплексно сопряженную волне накачки, которая при прохождении через искажающую среду 2 в обратном направлении

восстановит плоский волновой фронт.

В рассматриваемом случае очевидна также и голографическая интерпретация. Действительно, описанный выше процесс может рассматриваться как динамическая (в реальном масштабе времени) запись голограммы (информации об амплитуде и фазе) волны $A_3(\vec{k}_3')$ (предметный пучок) с опорным пучком A_1 (или A_2) и одновременным считыванием пучком A_2 (или A_1). При такой конфигурации записи голограммы восстанавливается комплексно сопряженное изображение.

Комбинационные лазеры.

Мы рассмотрели эффекты вынужденного рассеяния света на двух объектах, в которых колебательные процессы имеют не электромагнитную природу: объект с сосредоточенными механическими колебаниями (атомы, молекулы) – ВКР и волновыми (акустические волны) – ВРМБ. Подобные процессы могут иметь место и при взаимодействии оптического излучения с колебательными возбуждениями и другой природы, и они широко используются для простых схем получения лазерного излучения на смещенных по отношению к накачке частотах. При этом не всегда необходимо превышать порог вынужденного рассеяния. Поскольку в таких процессах есть усиление излучения на смещенной по отношению к излучению накачки частоте, то получить на выходе излучение, по интенсивности сравнимое с накачкой, можно, используя обратную связь в виде резонатора. Построив дисперсионный резонатор с возможностью перестройки генерируемой частоты, можно осуществлять генерацию на различных частотах колебаний одной и той же среды.

Перечислим основные возможности комбинационных лазеров:

1. Путем изменения молекулярных сред (в т. ч. газовых, жидких и твердотельных) можно получить излучение на дискретных, но близких частотах в области, отстоящей от частоты накачки ω_n на величину до $0,1 \omega_n$.

2. Комбинационные лазеры с переворотом спина, позволяют получить и перестраиваемое по частоте (правда, в не очень больших пределах) излучение варьирования величины магнитного поля H ($\Delta\omega \propto H$).

3. Комбинационные лазеры на электронных переходах атомов дают возможность получить сдвинутое по частоте излучение на величину, сравнимую с частотой накачки. Кроме того, антистоксово излучение в средах с инверсией заселенности имеет частоту, большую, чем частота накачки.

Основным преимуществом комбинационных лазеров является простота их исполнения. Основным недостатком, как правило, дискретность генерируемых частот.

Эффекты вынужденного комбинационного и Мандельштама – Бриллюэна являются примером нелинейного взаимодействия электромагнитных волн и волн другой природы, в частности, акустических. Сравнительно низкий по интенсивности накачки порог возникновения этих эффектов, а также простота экспериментальной реализации делают эти эффекты простым и на-

дежным методом расширения области генерации конкретного излучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Дмитриев, В. Г. Прикладная нелинейная оптика. – 2-е перераб. и доп. изд. / В. Г. Дмитриев, Л. В. Тарасов. – М. : Физматлит, 2004. – 512 с.
2. Скалли, М. О. Квантовая оптика / М. О. Скалли, М. С. Зибайри. – М. : Физматлит, 2003. – 512 с.
3. Ахманов, С. А. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов / С. А. Ахманов, В. А. Вислоух, А. С. Чиркин. – М. : Наука, 1988. – 326 с.

Дополнительный

1. Ахманов, С. А. Физическая оптика / С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. – М. : Изд-во МГУ, 1998. – 655 с.
2. Ахманов, С. А. Введение в статическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. – М. : Наука, 1981. – 400 с.
3. Ярив, А. Квантовая электроника / А. Ярив. – М. : Сов. радио, 1980.
4. Виноградова, М. В. Теория волн / М. В. Виноградова, О. В. Руденко, А. Т. Сухоруков. – М. : Наука, 1979.
5. Цернике, Ф. Прикладная нелинейная оптика / Ф. Цернике, Дж. Медвинтер. – М. : Мир, 1976.
6. Делоне, Н. Б. Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением / Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов. – М. : Физматлит, 2001. – 311 с.
7. Современное естествознание энциклопедия: в 7 т. Т. 7. Физика волновых процессов. – М. : Магистр-пресс, 2001 (статьи: 1) Делоне Н. Б. Нелинейная оптика; 2) Кудряшов Н. А. Нелинейные волны и солитоны; 3) Сухоруков А. П. Дифракция световых пучков в нелинейных средах; 4) Попов А. К. Когерентность и интерференция квантовых переходов; 5) Горелик В. С. Комбинационное рассеяние света; 6) Слабко В. В. Рентгеновский лазер; 7) Слабко В. В. Принципы голографии).
8. Карпов, С. В. Оптические и фотофизические свойства фрактально-структурированных золей металлов / С. В. Карпов, В. В. Слабко. – Новосибирск : Изд-во СО РАН. – 2003. – 265 с.
9. Блюх, К. Ю. Что такое левые среды и чем они интересны / К. Ю. Блюх, Ю. П. Блюх // УФН. – 2004. – Т.174 (4). – С. 439–447.
10. Веселаго, В. Г. О формулировке принципа Ферма для света, распространяющегося в веществах с отрицательным показателем преломления / В. Г. Веселаго // УФН. – 2002. – Т.172 (10). – С. 1215–1218.
11. Agranovich, V. M. Linear and nonlinear wave propagation in negative refraction materials / V. M. Agranovich, Y. R. Shen, Baughman R. H., and Zakharov. – Phys. Rev. B, v.69, 165112 (2004).
12. Ilya V. Shadrinov, A. A. Zharov, Yuri S. Kivshar Second-harmonic generation in left-handed metamaterials. arXiv: physics/0506092 v1. 10 jun 2005.
13. A. K. Popov, V. V. Slabko and V.M. Shalaev. Second harmonic generation in non linear left-handed materials Las. Phys. Lett. 1–5 (2006)/ DOI 10.1002/lapl. 200610008.