МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Лабораторная работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнил:
Гисич Арсений
Б03-102

Долгопрудный
2022

1 Аннотация

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью цифрового осциллографа и сравниваются с рассчитанными теоретически.

2 Теоретические сведения

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\dfrac{a_0}{2}$ — среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1) с амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0\frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(n\Omega_1 t)dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\frac{\tau}{2})}{n\Omega_1\frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \backsimeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \backsimeq 1$$

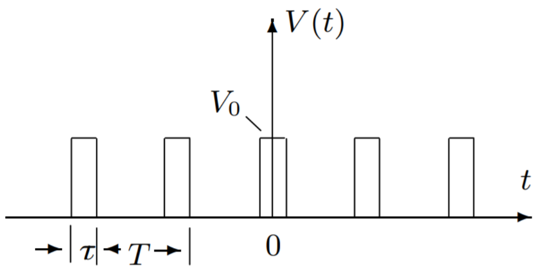

Рис. 1: Прямоугольные импульсы

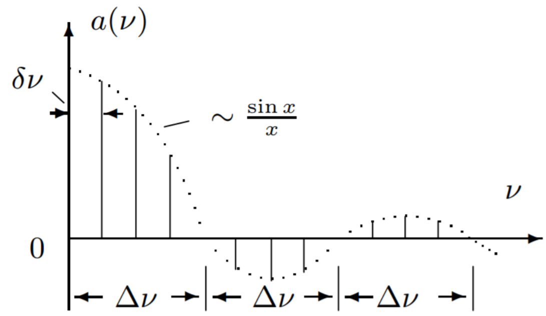

Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(\omega_0 t)\cos(n\Omega_1 t)dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0.

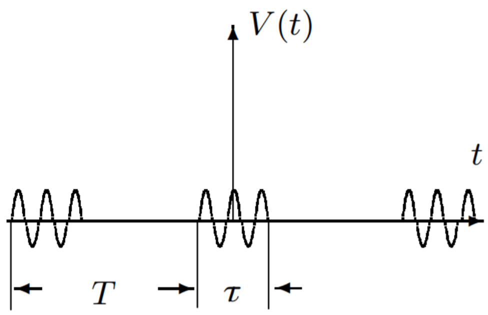

Рис. 3: Последовательность цугов

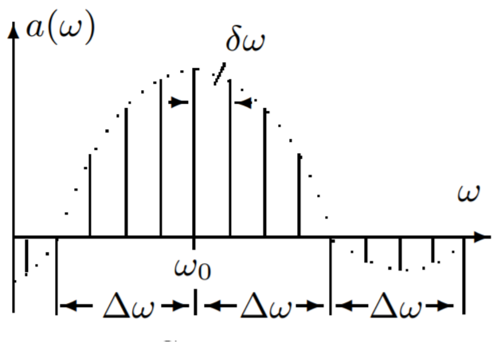

Рис. 4: Спектр последовательности цугов

Амплитудно-модулированные колебания. Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos\Omega t]\cos\omega_0 t.$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированны колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

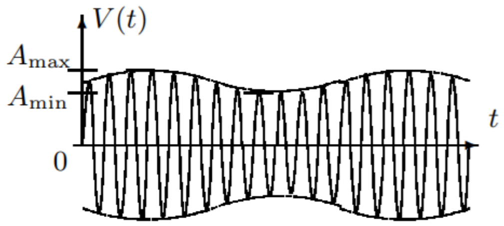

Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

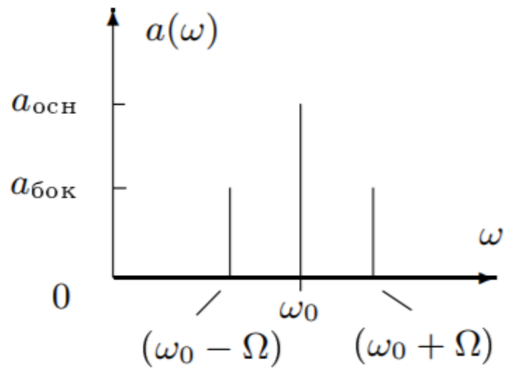

Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих: основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{осн} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a_{бок} = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

3 Методика измерений

Экспериментальная установка состоит из цифрового генератора сигнала и цифрового осциллографа (рис. 7), соединённых между собой.

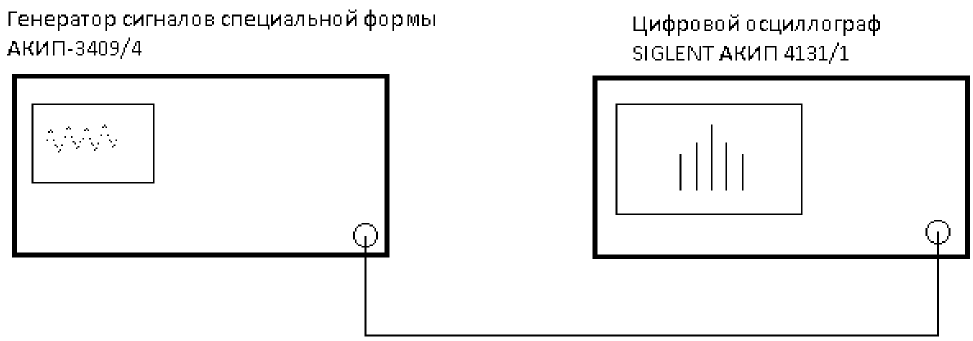

Рис. 7: Схема для исследования спектра сигналов

4 Используемое оборудование

1. генератор сигналов произвольной формы;
2. цифровой осциллограф;

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Спектры сигналов при различных $\nu_{повт}$ и τ представлены на рис. 11-18.

При фиксированных $\nu_{повт} = 1$ *кГц* и $\tau = 150$ *мкс* были измерены амплитуды a_n и частоты ν_n для первых 6 гармоник спектра. Рассчитанные и измеренные значения представлены в таб. 1. Для сравнения теоретически рассчитанной и измеренной амплитуд сделана нормировка по наименьшему значению.

n	ν_m, *кГц*	a_m	*норм*(a_m)	$\nu_{изм}$, *кГц*	$\delta_{\nu_{изм}}$, *кГц*	$a_{изм}$, *мВ*	$\delta_{a_{изм}}$, *мВ*	*норм*$(a_{изм})$
1	1	144,51	8,81	1,00	0,02	820	2	8,54
2	2	128,76	7,85	2,00	0,02	736	2	7,67
3	3	104,80	6,39	3,00	0,02	600	2	6,25
4	4	75,68	4,62	4,00	0,02	432	2	4,50
5	5	45,02	2,75	5,00	0,02	264	2	2,75
6	6	16,39	1	6,00	0,02	96	2	1

Таблица 1: Результаты теоретического расчёта и измерений амплитуд и частот первых 6 гармоник спектра

Результаты измерений зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от времени импульса τ в диапазоне от 20 до 200 мкс при фиксированной $\nu_{повт} = 1$ *кГц* представлены в таб. 2.

τ, *мкс*	$1/\tau, 1/c$	$\Delta\nu$, *кГц*	$\delta_{\Delta\nu}$, *кГц*
20	50000	50,20	0,02
70	14286	14,00	0,02
120	8333	8,00	0,02
170	5882	6,00	0,02
200	5000	5,00	0,02

Таблица 2: Результаты измерений зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от длительности импульса τ

График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$ представлен на рис. 8.

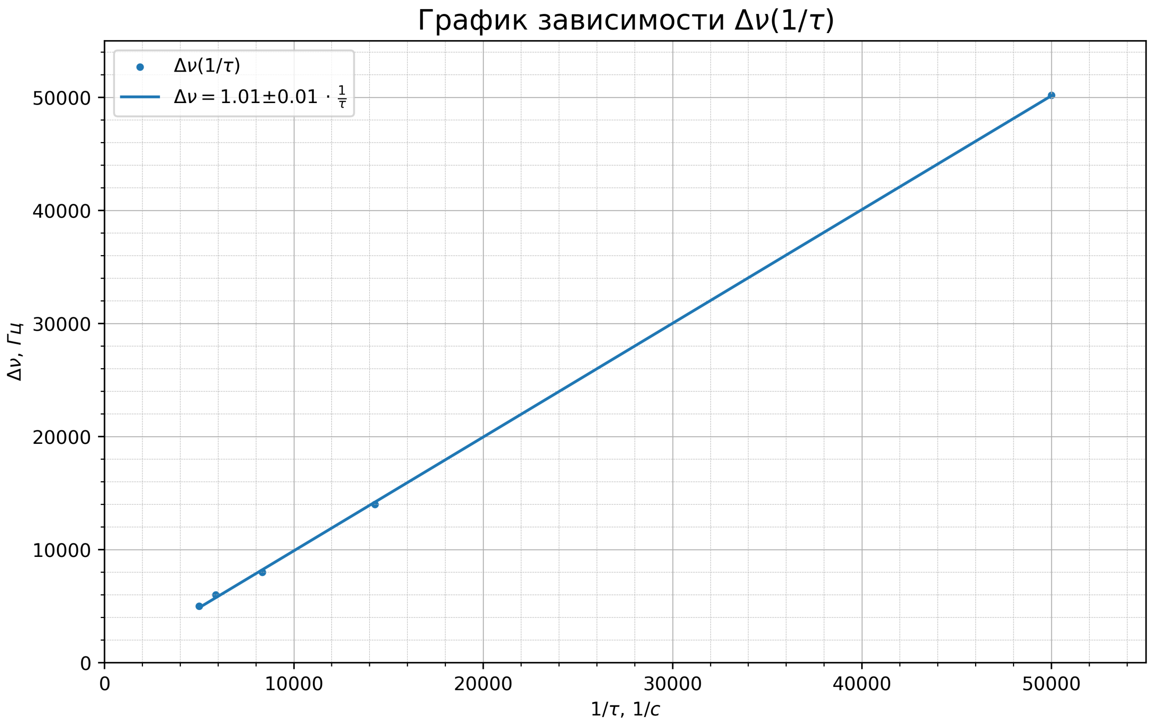

Рис. 8: График зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от обратной величины длительности импульса $1/\tau$

5.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов

Спектры сигналов при различных ν_0, T и N представлены на рис. 19-23.

При фиксированных параметрах $\nu_0 = 50$ *кГц* и $N = 5$ была измерена зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами сигнала от периода T повторения импульсов в диапазоне $T = 0,2 - 5$ *мс*. Измеренные значения представлены в таб. 3.

T, *мс*	$\delta\nu$, *Гц*	$\delta_{\delta\nu}$, *Гц*
0,2	10000	10
1,2	800	10
2,2	440	10
3,2	300	10
4,2	240	10
5	200	10

Таблица 3: Результаты измерений зависимости $\delta\nu(T)$

Значение $\delta\nu$ при $T = 0,2$ *мс* существенно отличается от общей зависимости и является ошибкой. Полученный график зависимости $\delta\nu(1/T)$ представлен на рис. 9.

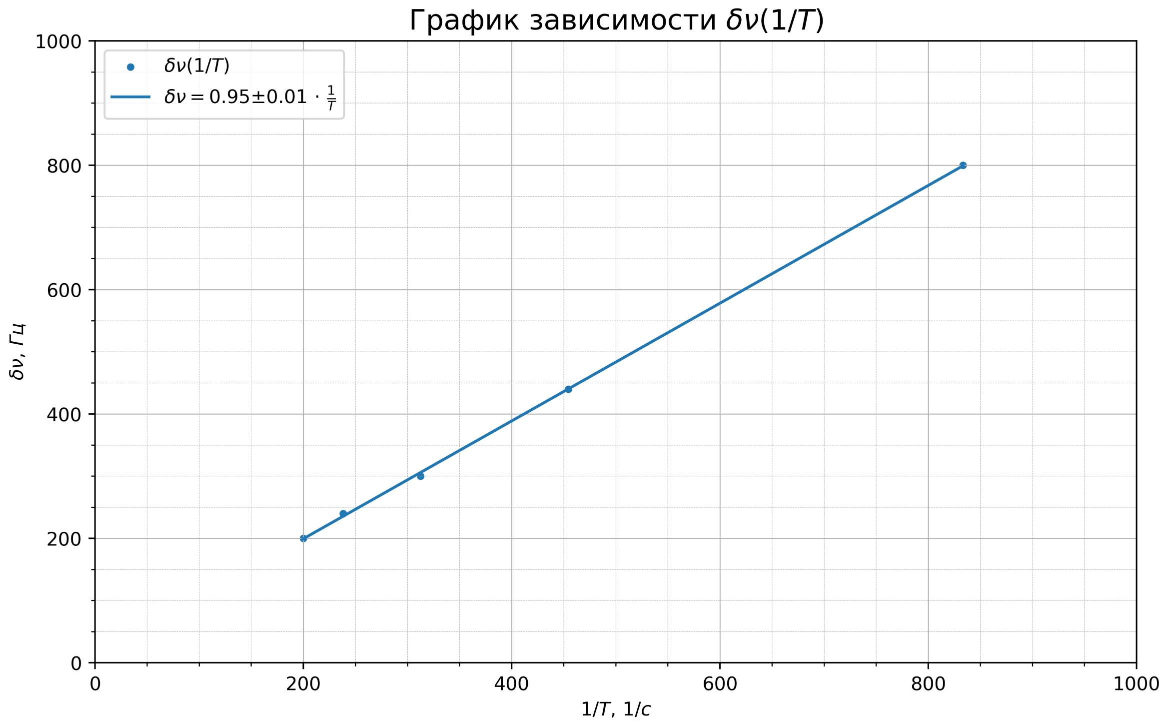

Рис. 9: График зависимости расстояния между соседними спектральными компонентами сигнала $\delta\nu$ от обратной величины периода повторения $1/T$

5.3 Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

Картина сигнала представлена на рис. 24. Измеренные значения: $A_{max} = 1,62\ B$, $A_{min} = 0,56\ B$, $m = \frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}} = 0,49 \approx 0,5$, а значит равенство справедливо. Спектры сигналов при различных ν_0 и $\nu_{мод}$ представлены на рис. 25-27.

При фиксированных параметрах $\nu_0 = 60$ $кГц$ и $\nu_{мод} = 5$ $кГц$ была измерена зависимость отношения $a_{бок}/a_{осн}$ амплитуд боковой и основной спектральных линий от глубины модуляции m в диапазоне от 10% до 100%. Измеренные значения представлены в таб. 4.

m	$a_{бок}$, $мB$	$\delta_{a_{бок}}$, $мB$	$a_{осн}$, $мB$	$\delta_{a_{осн}}$, $мB$	$a_{бок}/a_{осн}$	$\delta_{a_{бок}/a_{осн}}$
0,1	32	2	728	2	0,044	0,003
0,3	104	2	728	2	0,143	0,003
0,5	176	2	728	2	0,242	0,003
0,7	256	2	728	2	0,352	0,003
0,9	328	2	728	2	0,451	0,003
1	364	2	728	2	0,500	0,003

Таблица 4: Результаты измерений зависимости $a_{бок}/a_{осн}$ от m

Полученный график зависимости $a_{бок}/a_{осн}$ от m представлен на рис. 10.

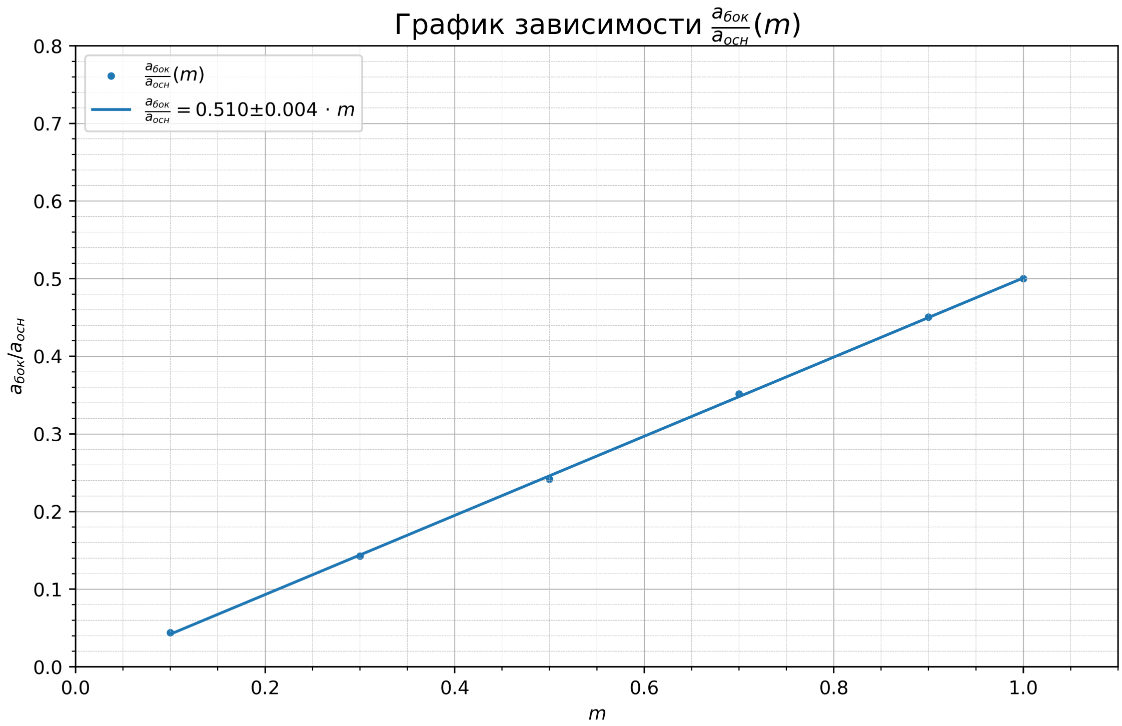

Рис. 10: График зависимости отношения $a_{бок}/a_{осн}$ амплитуд боковой и основной спектральных линий от глубины модуляции m

5.4 Исследование спектра сигнала, модулированного по фазе

Спектры сигналов представлены на рис. 28-29.

6 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе был исследован спектральный состав периодических электрических сигналов.

При исследовании спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов при фиксированных параметрах $\nu_{повт}$ и τ были измерены амплитуды и частоты первых 6 гармоник (таб. 1). Измеренные значения соответствуют рассчитанным теоретически. Также была измерена зависимость ширины спектра $\Delta\nu$ от времени импульса τ. Из полученной зависимости (рис. 8) следует:

$$\Delta\nu \cdot \tau \backsimeq 1,01 \pm 0,01,$$

что соответствует соотношению неопределённостей в рамках погрешности. Основной вклад в погрешность вносит определение коэффициента зависимости, так как благодаря использованию цифровых приборов другие источники погрешности отсутствуют или их влияние несущественно.

При исследовании спектра периодической последовательности цугов была измерена зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами сигнала от периода T повторения импульсов. Из полученной зависимости (рис. 9) следует:

$$\delta\nu \cdot \tau \backsimeq 0,95 \pm 0,01,$$

что близко к соотношению неопределённостей. Здесь основной вклад в погрешность также вносит определение коэффициента зависимости.

При исследовании спектра амплитудно-модулированного сигнала была измерена зависимость отношения $a_{бок}/a_{осн}$ амплитуд боковой и основной спектральных линий от глубины модуляции m. Из полученной зависимости (рис. 10) следует:

$$\frac{a_{бок}}{a_{осн}} = 0,510 \pm 0,004 \cdot m,$$

что соответствует теоретической зависимости $\frac{a_{бок}}{a_{осн}} = \frac{m}{2}$. Аналогично здесь основной вклад в погрешность вносит определение коэффициента зависимости.

Также в данной работе был изучен спектр сигнала, модулированного по фазе. Спектры сигналов при различном максимальном отклонении φ_m приведены на рис. 28-29.

7 Приложение

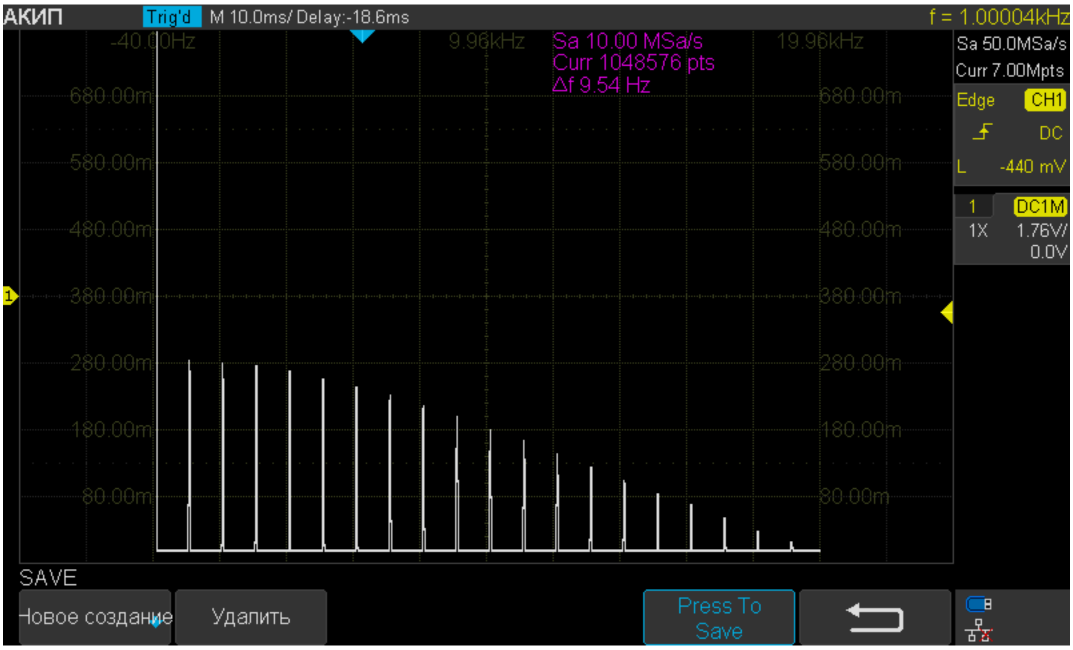

Рис. 11: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1$ *кГц*, $\tau = 50$ *мкс*

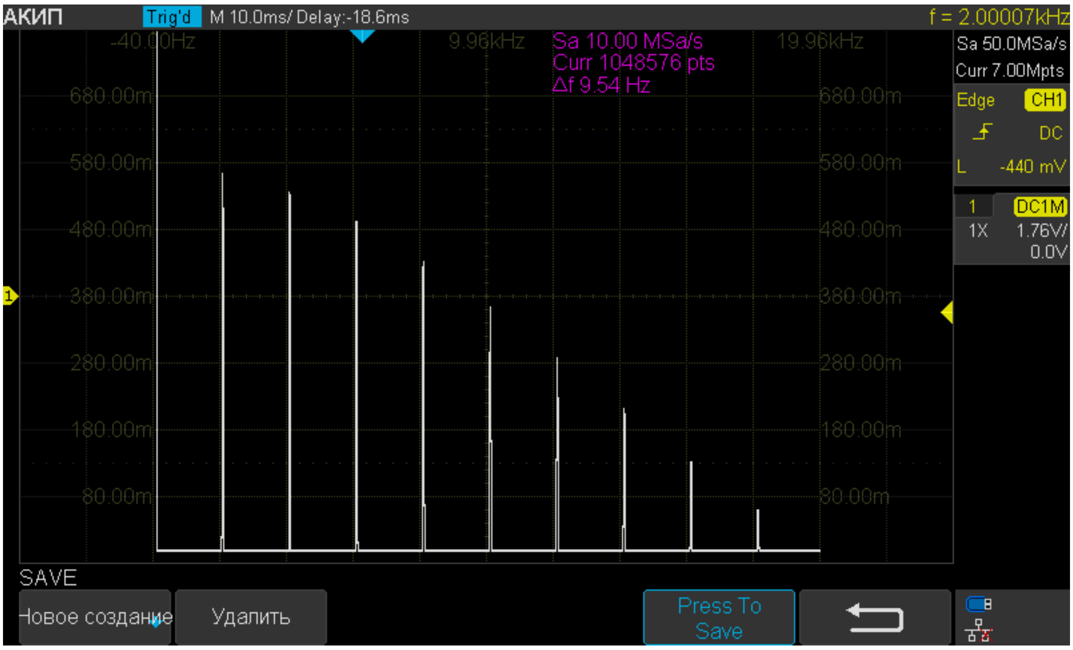

Рис. 12: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 2$ *кГц*, $\tau = 50$ *мкс*

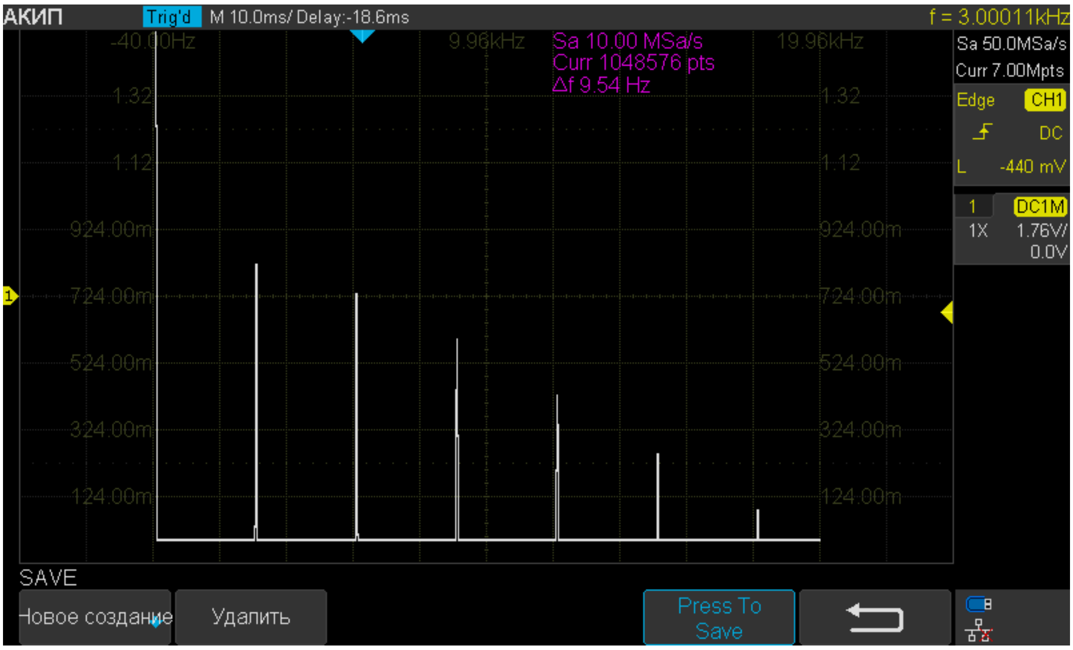

Рис. 13: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 3$ *кГц*, $\tau = 50$ *мкс*

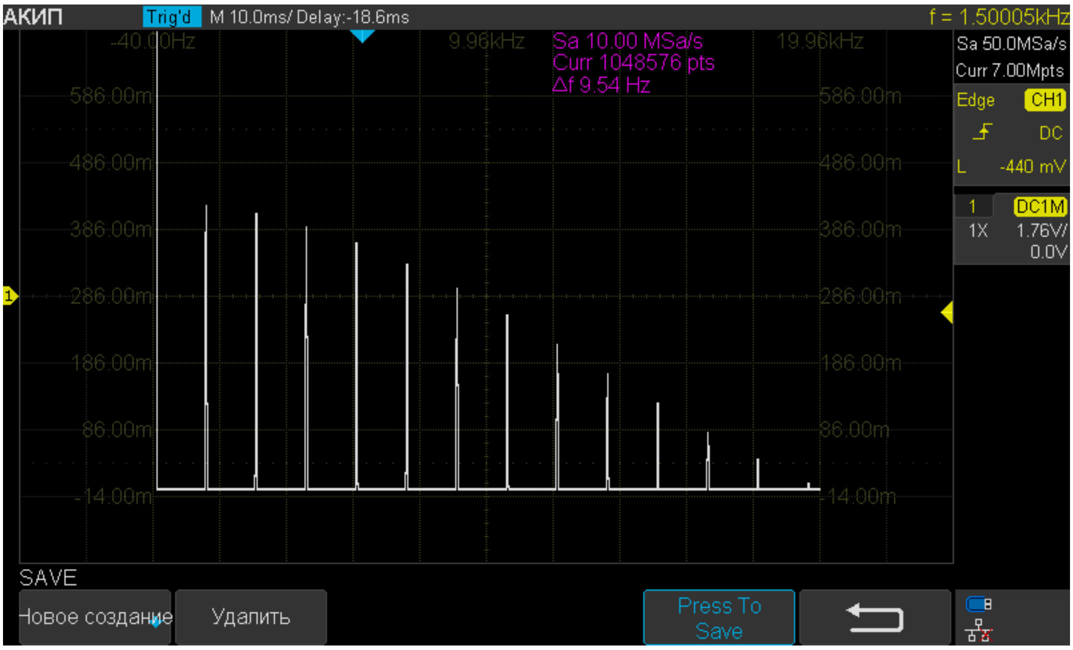

Рис. 14: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1,5$ *кГц*, $\tau = 50$ *мкс*

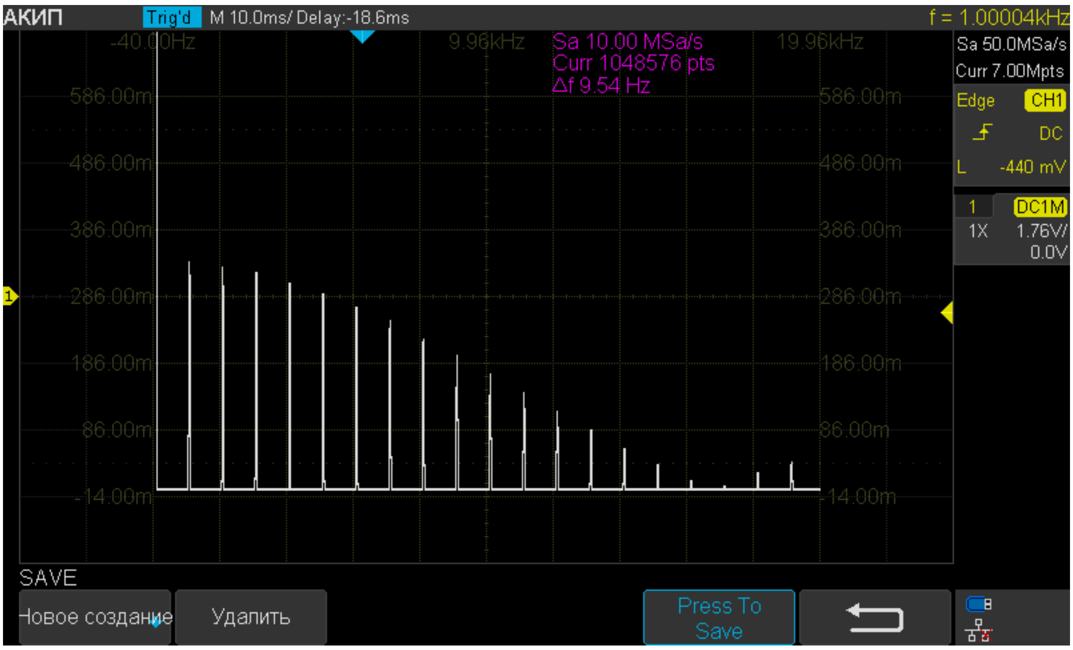

Рис. 15: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1$ *кГц*, $\tau = 60$ *мкс*

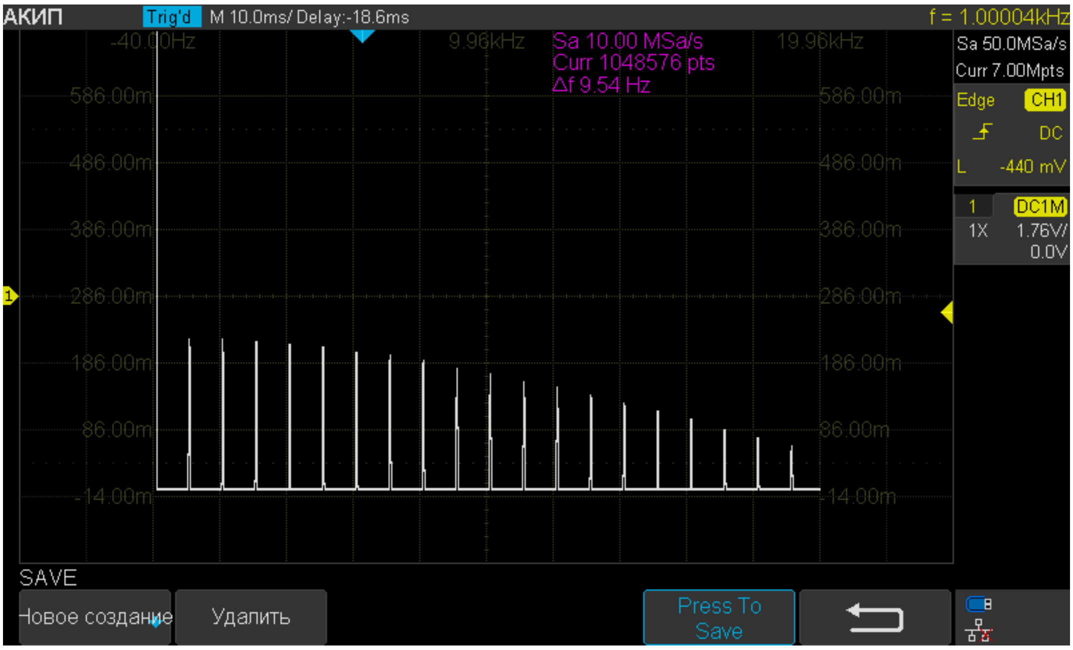

Рис. 16: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1$ *кГц*, $\tau = 40$ *мкс*

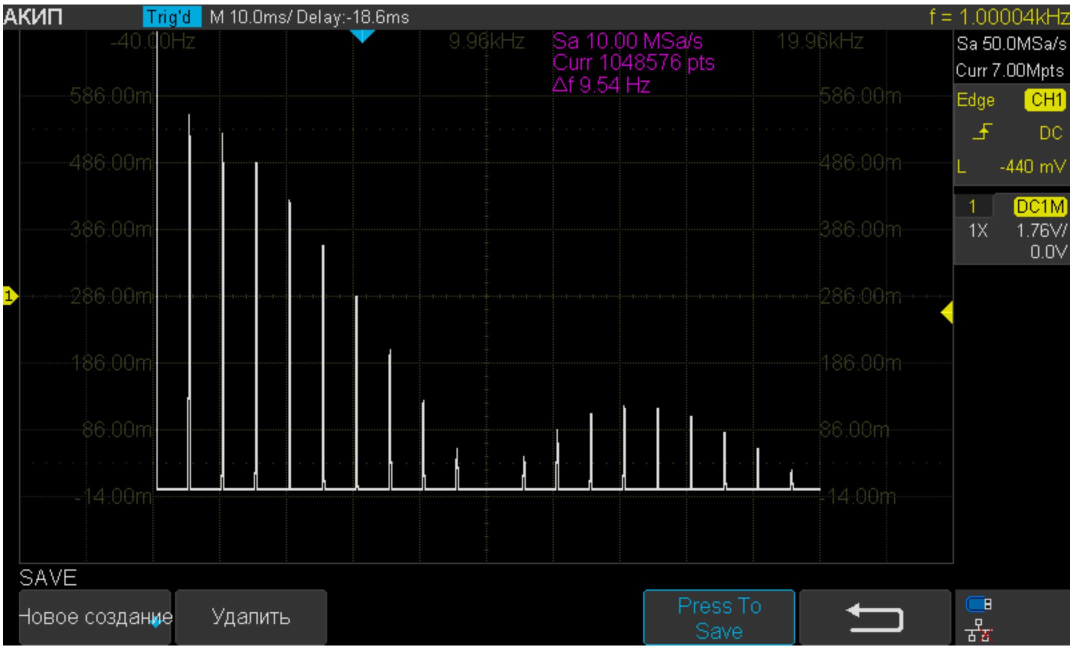

Рис. 17: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1$ *кГц*, $\tau = 100$ *мкс*

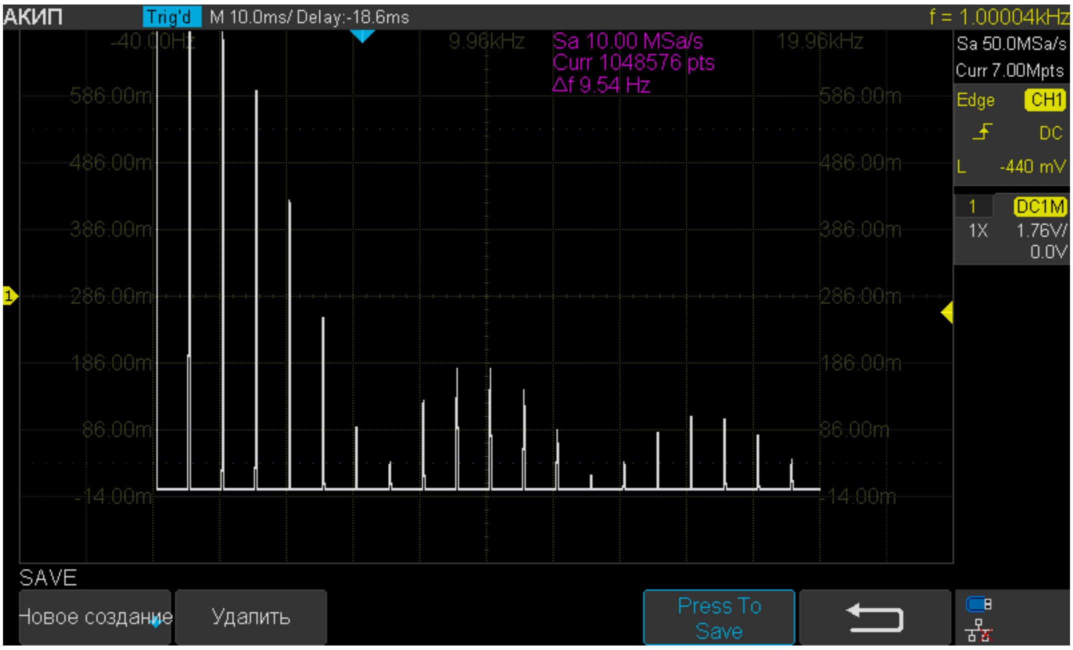

Рис. 18: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\nu_{повт} = 1$ *кГц*, $\tau = 150$ *мкс*

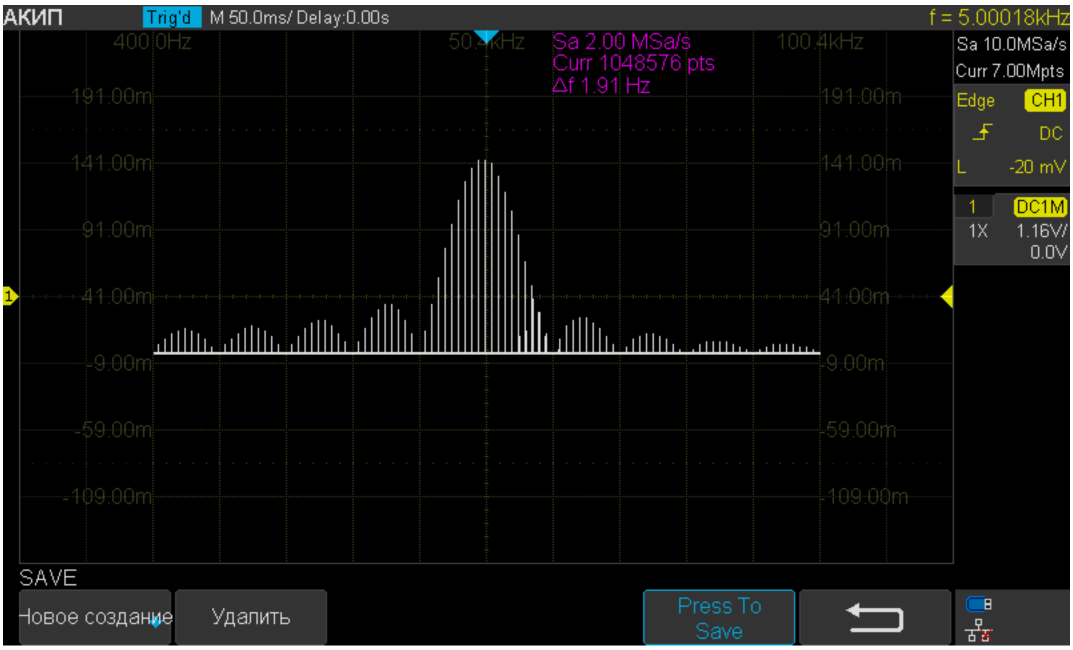

Рис. 19: Спектр периодической последовательности цугов при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $T = 1$ *мс*, $N = 5$

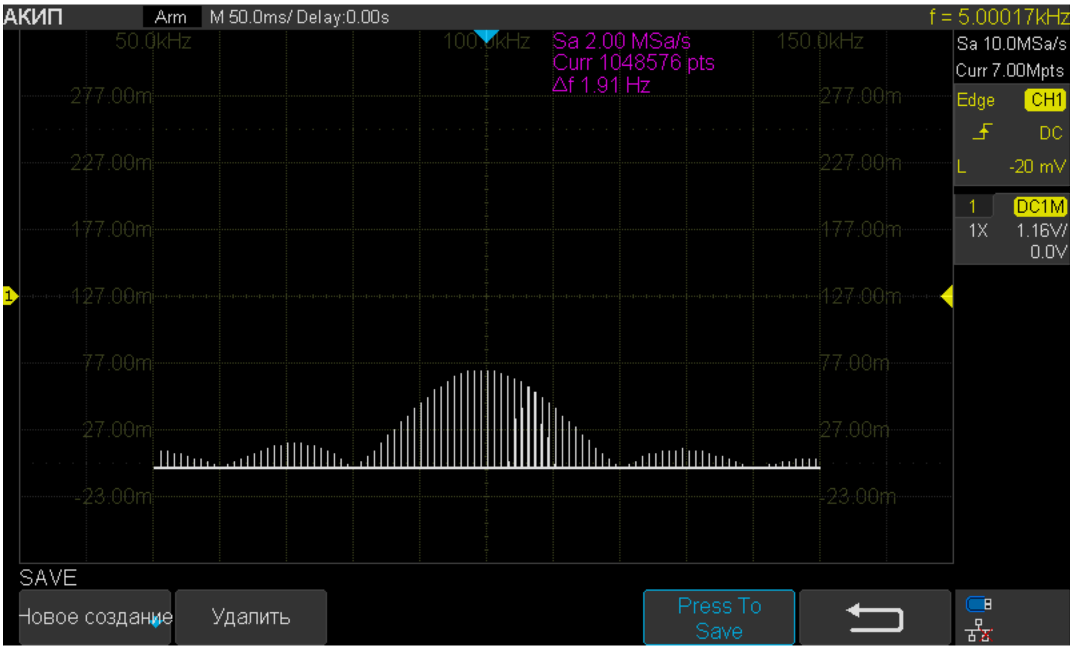

Рис. 20: Спектр периодической последовательности цугов при $\nu_0 = 100$ *кГц*, $T = 1$ *мс*, $N = 5$

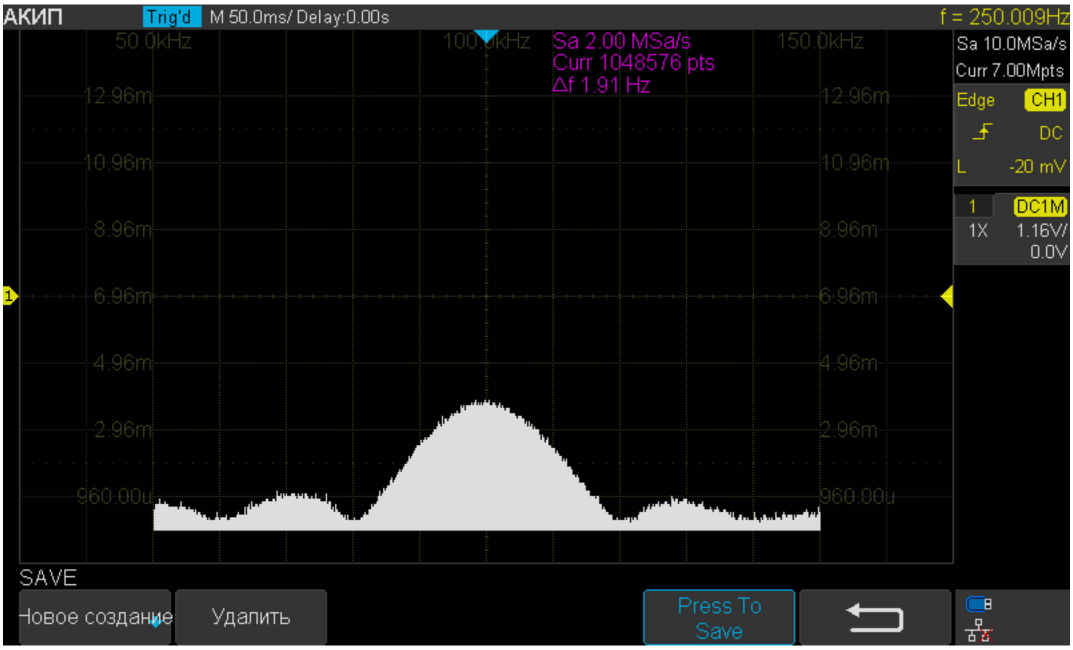

Рис. 21: Спектр периодической последовательности цугов при $\nu_0 = 100$ *кГц*, $T = 20$ *мс*, $N = 5$

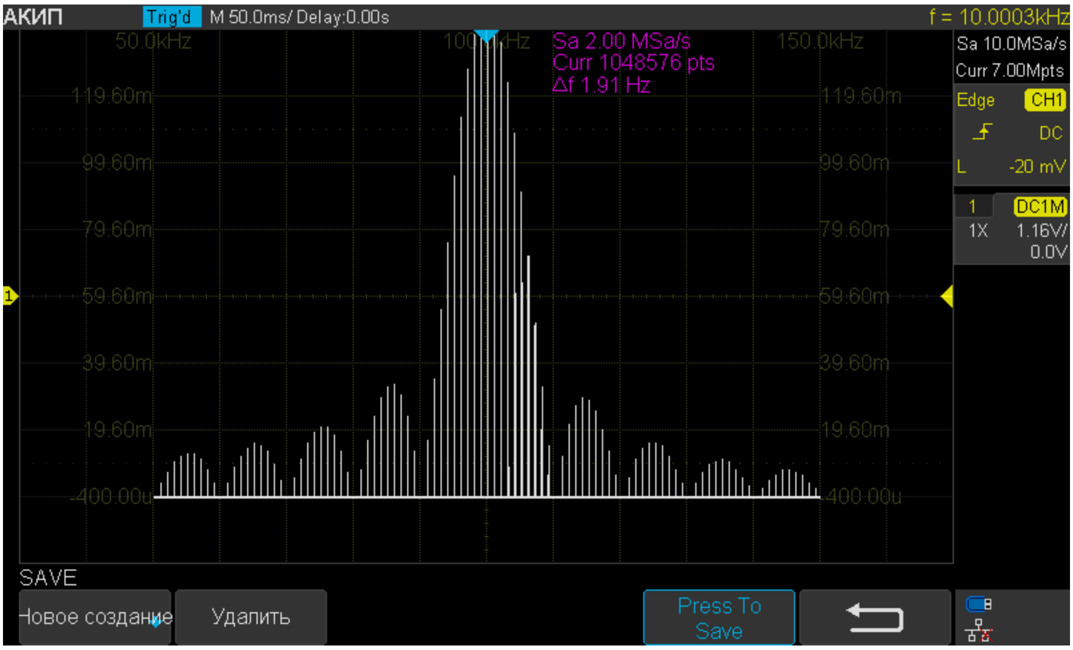

Рис. 22: Спектр периодической последовательности цугов при $\nu_0 = 100$ *кГц*, $T = 1$ *мс*, $N = 10$

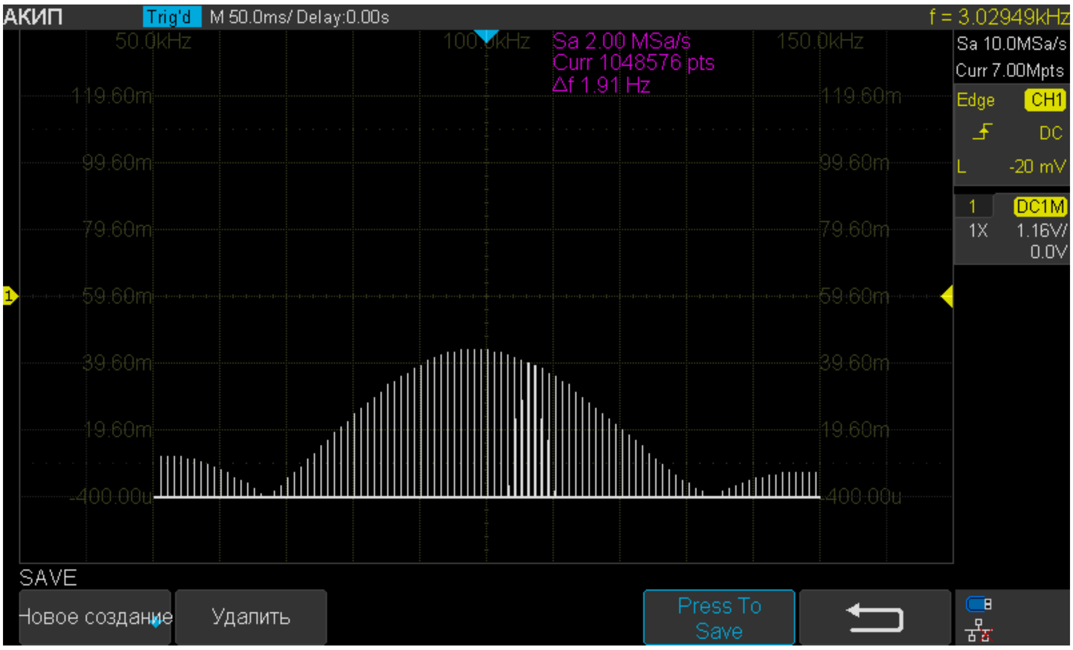

Рис. 23: Спектр периодической последовательности цугов при $\nu_0 = 100$ *кГц*, $T = 1$ *мс*, $N = 3$

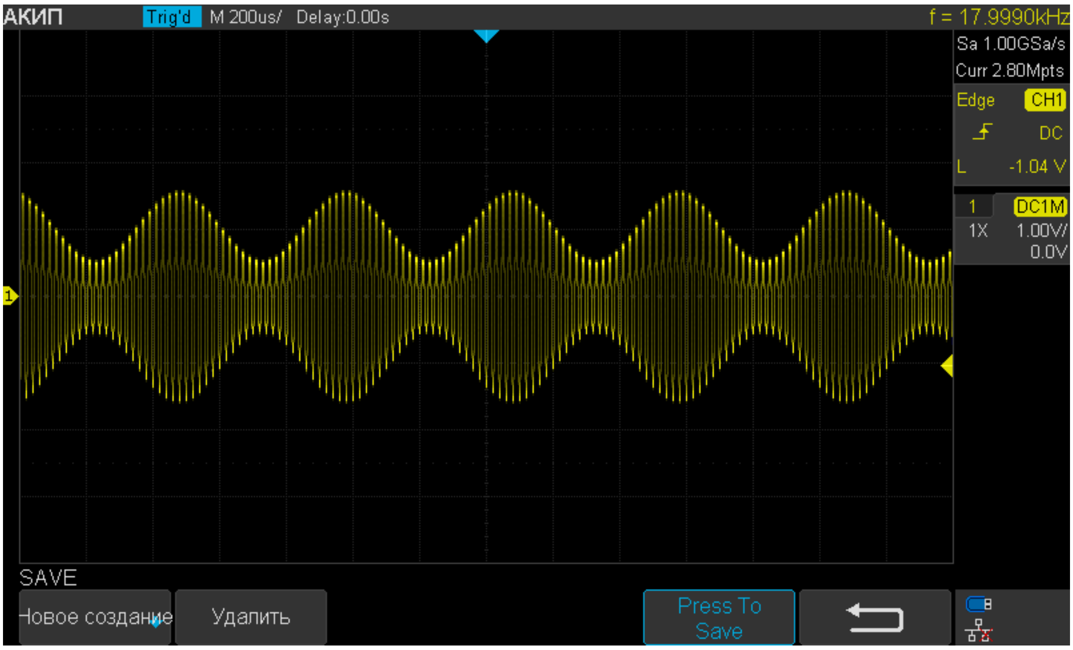

Рис. 24: Амплитудно-модулированный сигнал при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $\nu_{мод} = 2$ *кГц* и $m = 0,5$

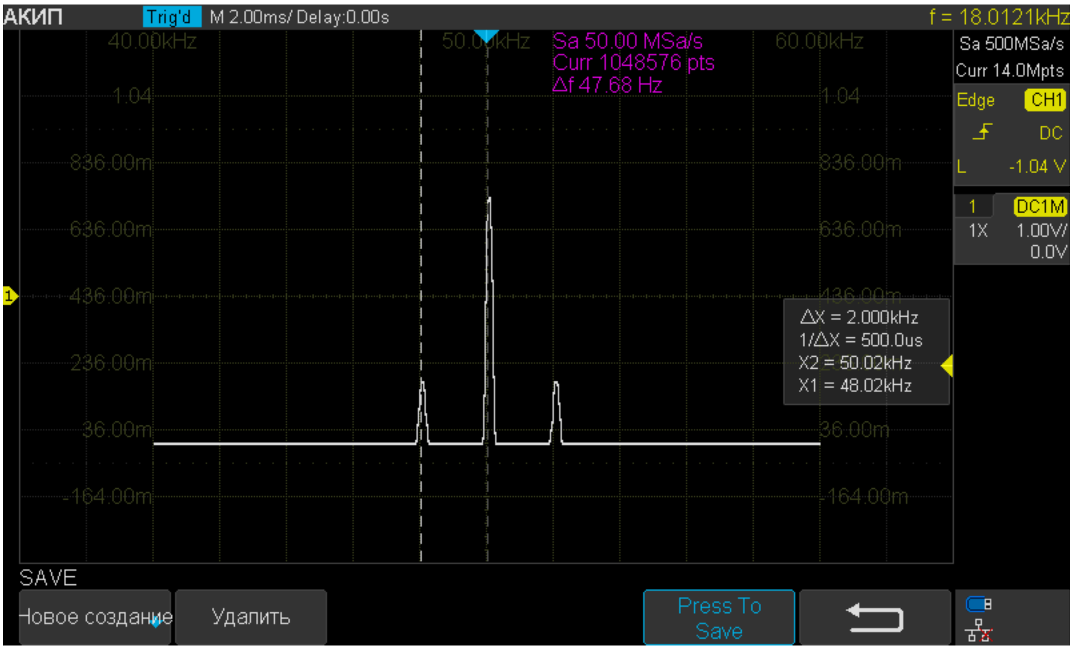

Рис. 25: Спектр амплитудно-модулированного сигнала при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $\nu_{мод} = 2$ *кГц* и $m = 0,5$

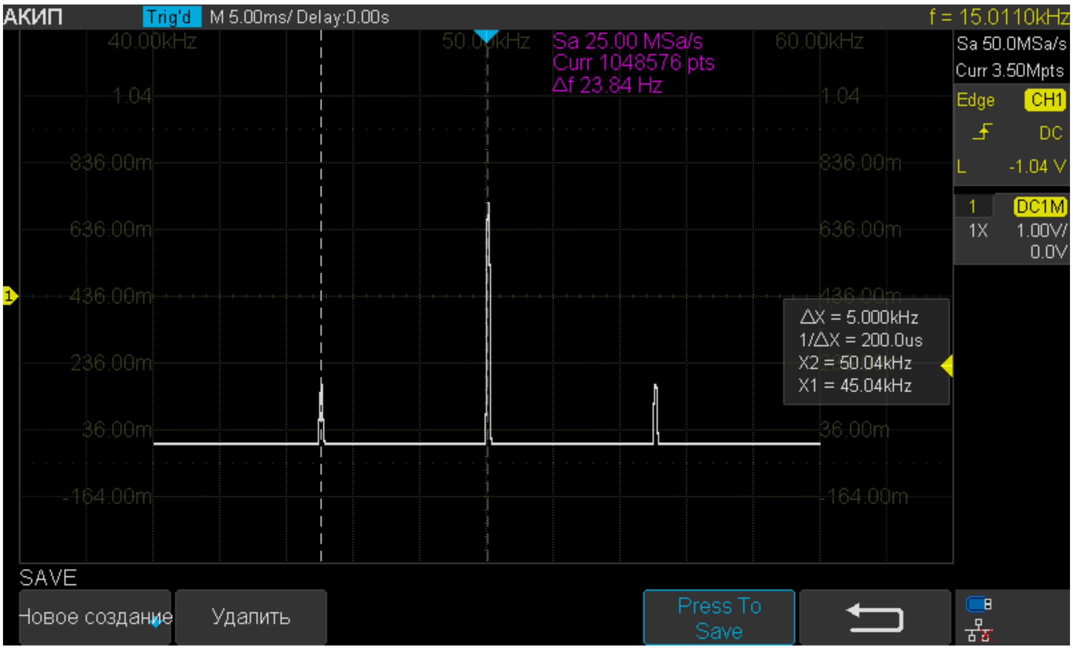

Рис. 26: Спектр амплитудно-модулированного сигнала при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $\nu_{мод} = 5$ *кГц* и $m = 0,5$

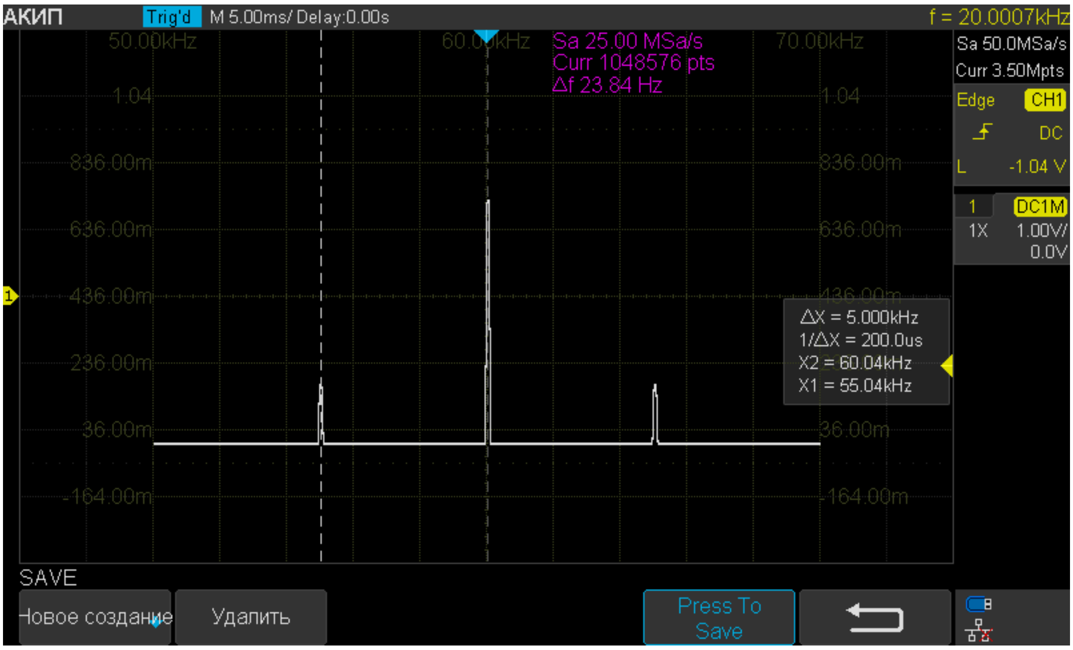

Рис. 27: Спектр амплитудно-модулированного сигнала при $\nu_0 = 60$ *кГц*, $\nu_{мод} = 5$ *кГц* и $m = 0,5$

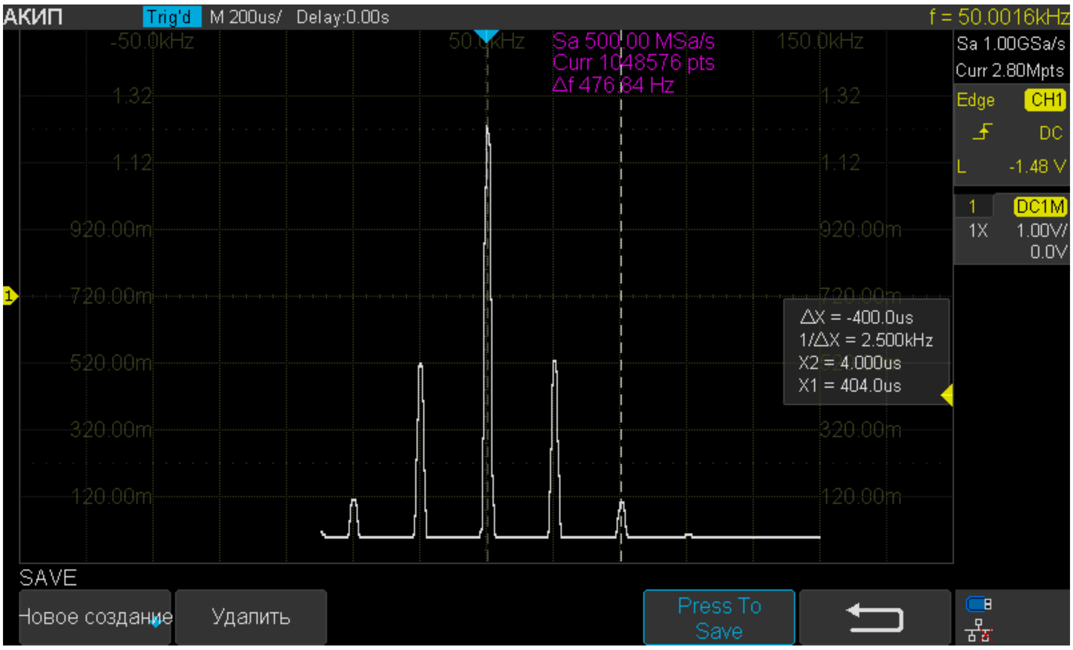

Рис. 28: Спектр модулированного по фазе сигнала при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $\nu_{мод} = 2$ *кГц* и $\varphi_m = 10°$

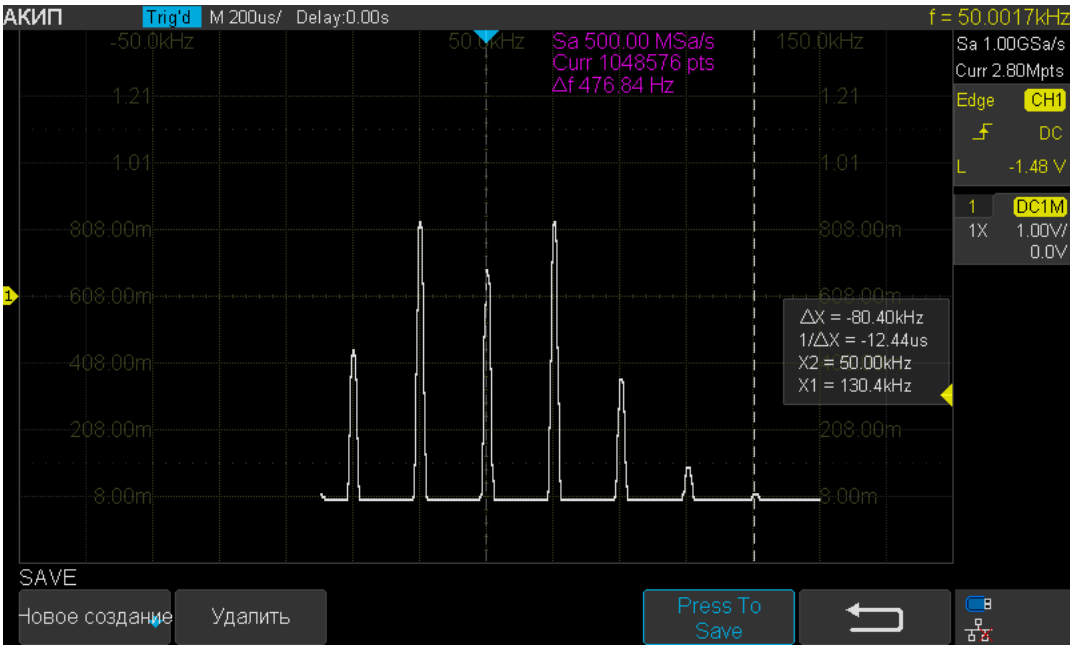

Рис. 29: Спектр модулированного по фазе сигнала при $\nu_0 = 50$ *кГц*, $\nu_{мод} = 2$ *кГц* и $\varphi_m = 90°$