

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Лабораторная работа 3.2.1

Сдвиг фаз в цепи переменного тока

Выполнил:

Гисич Арсений

Б03-109

Долгопрудный

2022

1 Аннотация

Целью данной работы является изучение влияния активного сопротивления, индуктивности и ёмкости на сдвиг фаз между током и напряжением в цепи переменного тока.

2 Теоретические сведения

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Для напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ получим уравнение

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Перейдём к комплексному представлению колебаний. Запишем уравнение (1) в комплексной форме, обозначая комплексные величины как «векторы»:

$$\begin{aligned} U_C &= \operatorname{Re} \mathbf{U}_C, & \mathbf{U}_C &= \operatorname{Re} \mathbf{U}_C + i \operatorname{Im} \mathbf{U}_C, \\ \varepsilon &= \operatorname{Re} \varepsilon, & \varepsilon &= \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \\ \ddot{\mathbf{U}}_C + 2\gamma\dot{\mathbf{U}}_C + \omega_0^2 \mathbf{U} &= \omega_0^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Комплексный множитель $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 e^{i\varphi_0}$, стоящий перед $e^{i\omega t}$, называется *комплексной амплитудой*.

Решив уравнение (2), получим комплексное выражение для напряжения на конденсаторе \mathbf{U}_C . *Вещественная часть* этого решения $\operatorname{Re} \mathbf{U}_C$ и является решением исходного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\mathbf{U}_C(t) = \mathbf{U}_{C0} e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где \mathbf{U}_{C0} — комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе, не зависящая от времени. Подставляя (3) в (2), находим \mathbf{U}_{C0} и далее, комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на сопротивлении и индуктивности:

$$\mathbf{U}_{C0} = \frac{\varepsilon_0}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \quad \mathbf{U}_{R0} = \frac{R\varepsilon_0}{Z}, \quad \mathbf{U}_{L0} = i\omega L \frac{\varepsilon_0}{Z}. \quad (5)$$

Комплексная величина Z называется *комплексным сопротивлением*, или *импедансом*, последовательного контура. Можно определить импеданс каждого отдельного элемента контура:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

В новых обозначениях уравнения (4)–(5) принимают вид

$$\mathbf{I} = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \quad \mathbf{U}_{R0} = Z_R \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{U}_{C0} = Z_C \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{U}_{L0} = Z_L \mathbf{I}_0. \quad (6)$$

Импеданс контура Z не зависит от начальных условий, не содержит величин ни токов, ни напряжений, а определяется свойствами всех элементов, соединённых в контур, и частотой синусоидальной ЭДС, к которой он подключён. Таким образом, *импеданс Z является характеристикой колебательного контура на заданной частоте*.

Выражение (4) для импеданса контура Z содержит действительную часть

$$\operatorname{Re} Z = R,$$

называемую *активным* сопротивлением контура, и мнимую часть

$$\operatorname{Im} Z = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

носящую название *реактивного* сопротивления.

Импедансы контура и его отдельных элементов — комплексные числа — могут быть представлены в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi},$$

где $Z_0 = |Z|$ — модуль комплексного числа, $\psi = \arg Z$ — его аргумент (фаза). Для импеданса рассматриваемого последовательного контура при этом находим

$$Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R}{\cos \psi_I},$$
$$\tan \psi_I = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7)$$

Ток в контуре и напряжения на отдельных его элементах теперь могут быть получены по формулам (4)–(6). Например, действительная часть тока в контуре

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \psi_I \cos(\omega t + \varphi_0 - \psi_I). \quad (8)$$

Как видно из (7) и (8), угол ψ_I , определяемый отношением мнимой и действительной частей импеданса, представляют собой сдвиг фаз между напряжением на последовательном контуре и током в нём, причём *положительные значения угла ψ_I соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные — опережению*. В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка самоиндукции, сдвиг фазы ψ_I лежит в пределах $-\pi/2 < \psi_I < \pi/2$.

3 Методика измерений

Эталонная катушка L , магазин ёмкостей C и магазин сопротивлений R соединены последовательно и через дополнительное сопротивление r подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору.

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления r , пропорциональный напряжению, — с генератора. Оба сигнала подаются на осциллограф, имеющий два канала вертикального отклонения.

4 Используемое оборудование

1. генератор звуковой частоты;
2. двухканальный осциллограф;
3. магазин ёмкостей;

4. магазин сопротивлений;
5. катушка индуктивности;
6. резисторы;
7. универсальный измеритель импеданса (LCR -метр);

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 RC-цепь

Установленные параметры: $L = 50 \text{ мГн}$, $\nu = 1 \text{ кГц}$. Рассчитанное реактивное сопротивление цепи

$$X_1 = 1/(\omega C) = 318 \text{ Ом}.$$

Полученные значения сдвига фаз ψ в зависимости от сопротивления R представлены в таблице 1.

$R, \text{ Ом}$	$\sigma_R, \text{ Ом}$	$x_0, \text{ дел}$	$\sigma_{x_0}, \text{ дел}$	$x, \text{ дел}$	$\sigma_x, \text{ дел}$	$\psi, \pi \cdot \text{ рад}$	$\sigma_\psi, \pi \cdot \text{ рад}$
0,00	0,01	25,0	0,5	-12,0	0,5	-0,48	-0,02
300,00	0,01	25,0	0,5	-6,5	0,5	-0,26	-0,02
600,00	0,01	25,0	0,5	-4,0	0,5	-0,16	-0,02
900,00	0,01	25,0	0,5	-2,5	0,5	-0,10	-0,02
1800,00	0,01	25,0	0,5	-1,0	0,5	-0,04	-0,02
320,00	0,01	25,0	0,5	-6,0	0,5	-0,24	-0,02
240,00	0,01	25,0	0,5	-7,0	0,5	-0,28	-0,02
190,00	0,01	25,0	0,5	-8,0	0,5	-0,32	-0,02

Таблица 1: RC-цепь

Полученный график зависимости $\text{ctg } \psi = f(\omega C R_\Sigma)$ представлен на рис. 1.

6 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе исследовалась зависимость сопротивления проволоки от мощности выделяющегося на ней тепла. По результатам измерений для каждой температуры определялся коэффициент теплопроводности воздуха. Полученная зависимость представлена на рис. ???. Полученные значения для всех температур, кроме 70°C , согласуются с табличными данными – $\kappa = 0,025 \div 0,030 \text{ Вт/(К} \cdot \text{м)}$. Используемый в работе метод измерений позволяет достичь относительной точности результатов в 20%. Основной вклад в погрешность вносит погрешность определения коэффициентов линейной зависимости.

Также в данной работе был определён температурный коэффициент сопротивления молибдена:

$$\alpha = \frac{1}{R_{273}} \frac{dR}{dT} = 0,0047 \pm 0,0008 \text{ К}^{-1}.$$

Табличное значение для данного коэффициента – $0,0049 \text{ К}^{-1}$, что согласуется с полученным результатом.

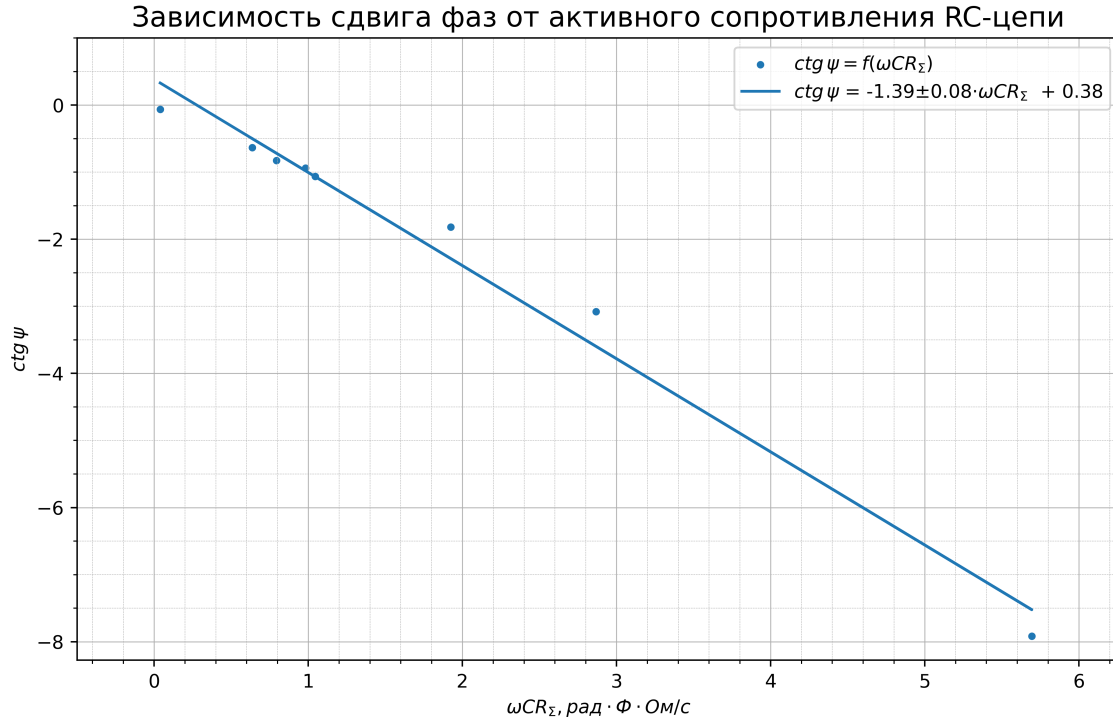


Рис. 1:

В простейшей модели твёрдых шариков коэффициент теплопроводности пропорционален корню абсолютной температуры $\kappa \propto T^{\frac{1}{2}}$. Экспериментальное значение показателя степени

$$\boxed{\beta = 3,511 \pm 1,964},$$

что слабо согласуется с теорией. Во-первых, это может быть связано с неучтенными тепловыми потерями через основания цилиндра. Во-вторых, количество экспериментальных точек достаточно мало. В-третьих, при выводе формулы (??) пренебрегалось зависимостью теплопроводности от температуры, поэтому она справедлива только при $\Delta T \ll T$. И наконец, возникновение термо-ЭДС повлияло на точность вольтметра. Для получения более точного результата необходимо увеличить диапазон рабочих температур, количество экспериментальных точек и уменьшить шаг изменения температуры.