МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Лабораторная работа 3.2.3

Резонанс токов в параллельном контуре

Выполнил:

Гисич Арсений

Б03-102

Долгопрудный

2022

1 Аннотация

В данной работе исследовался резонанс токов в параллельном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, были получены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики, определены основные параметры контура.

2 Теоретические сведения

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos{(\omega t + \varphi_0)}$. Для напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ получим уравнение

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \varepsilon_0 \cos{(\omega t + \varphi_0)}. \tag{1}$$

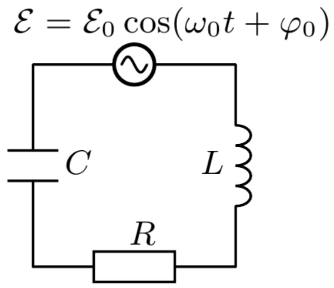

Рис. 1: Последовательный контур с внешней ЭДС

Перейдём к комплексному представлению колебаний. Запишем уравнение (1) в комплексной форме, обозначая комплексные величины как «векторы»:

$$U_C = \operatorname{Re} \mathbf{U_C}, \qquad \mathbf{U_C} = \operatorname{Re} \mathbf{U_C} + i \operatorname{Im} \mathbf{U_C},$$
$$\varepsilon = \operatorname{Re} \varepsilon, \qquad \varepsilon = \varepsilon_\mathbf{0} e^{i\omega t} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)},$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_\mathbf{C} + 2\gamma \dot{\mathbf{U}}_\mathbf{C} + \omega_0^2 \mathbf{U} = \omega_0^2 \varepsilon. \tag{2}$$

Комплексный множитель $\varepsilon_\mathbf{0} = \varepsilon_0 e^{i\varphi_0}$, стоящий перед $e^{i\omega t}$, называется *комплексной амплитудой.*

Решив уравнение (2), получим комплескное выражение для напряжения на конденсаторе $\mathbf{U_C}$. *Вещественная часть* этого решения $\operatorname{Re} \mathbf{U_C}$ и является решением исходного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\mathbf{U_C}(t) = \mathbf{U_{C0}} e^{i\omega t}, \tag{3}$$

где $\mathbf{U_{C0}}$ — комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе, не зависящая от времени. Подставляя (3) в (2), находим $\mathbf{U_{C0}}$ и далее, комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на сопротивлении и индуктивности:

$$\mathbf{U_{C0}} = \frac{\varepsilon_\mathbf{0}}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{4}$$

$$\mathbf{I_0} = \frac{\varepsilon_\mathbf{0}}{Z}, \quad \mathbf{U_{R0}} = \frac{R\varepsilon_\mathbf{0}}{Z}, \quad \mathbf{U_{L0}} = i\omega L \frac{\varepsilon_\mathbf{0}}{Z}. \tag{5}$$

Комплексная величина Z называется *комплексным сопротивлением*, или *импедансом*, последовательного контура. Можно определить импеданс каждого отдельного элемента контура:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

В новых обозначениях уравнения (4)–(5) принимают вид

$$\mathbf{I} = \frac{\varepsilon_\mathbf{0}}{Z}, \quad \mathbf{U_{R0}} = Z_R \mathbf{I_0}, \quad \mathbf{U_{C0}} = Z_C \mathbf{I_0}, \quad \mathbf{U_{L0}} = Z_L \mathbf{I_0}. \tag{6}$$

Импеданс контура Z не зависит от начальных условий, не содержит величин ни токов, ни напряжений, а определяется свойствами всех элементов, соединённых в контур, и частотой синусоидальной ЭДС, к которой он подключён. Таким образом, *импеданс Z является характеристикой колебательного контура на заданной частоте.*

Выражение (4) для импеданса контура Z содержит действительную часть

$$\operatorname{Re} Z = R,$$

называемую *активным* сопротивлением контура, и мнимую часть

$$\operatorname{Im} Z = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

носящую название *реактивного* сопротивления.

Импедансы контура и его отдельных элементов — комплексные числа — могут быть представленны в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi},$$

где $Z_0 = |Z|$ — модуль комплексного числа, $\psi = \arg Z$ — его аргумент (фаза). Для импеданса рассматриваемого последовательного контура при этом находим

$$Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R}{\cos\psi_I},$$

$$\tan\psi_I = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{7}$$

Ток в контуре и напряжения на отдельных его элементах теперь могут быть получены по формулам (4)–(6). Например, действительная часть тока в контуре

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\psi_I \cos(\omega t + \varphi_0 - \psi_I). \tag{8}$$

Как видно из (7) и (8), угол ψ_I, определяемый отношением мнимой и действительной частей импеданса, представляют собой сдвиг фаз между напряжением на последовательном контуре и током в нём, причём *положительные значения угла ψ_I соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные — опережению.* В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка самоиндукции, сдвиг фазы ψ_I лежит в пределах $-\pi/2 < \psi_I < \pi/2$.

3 Методика измерений

$$I = \frac{E}{R_I} = \frac{E_0 cos(\omega t + \varphi_0)}{R_I} = I_0 cos(\omega t + \varphi_0) \text{ — ток на генераторе}$$

$$R_S = \frac{U_{RS}}{I} = \frac{U_{RS}}{\omega C U_{CS}} = \frac{1}{\omega C} tg\delta$$

где R_S — эквивалентное последовательное сопротивление (ЭПС)
Для используемых емкостей C_n выполнено $tg\delta < 10^{-3}$

$$R_{\sum} = R + R_L + R_S$$

где $R_{\sum}$ — суммарное активное сопротивление контура.
Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

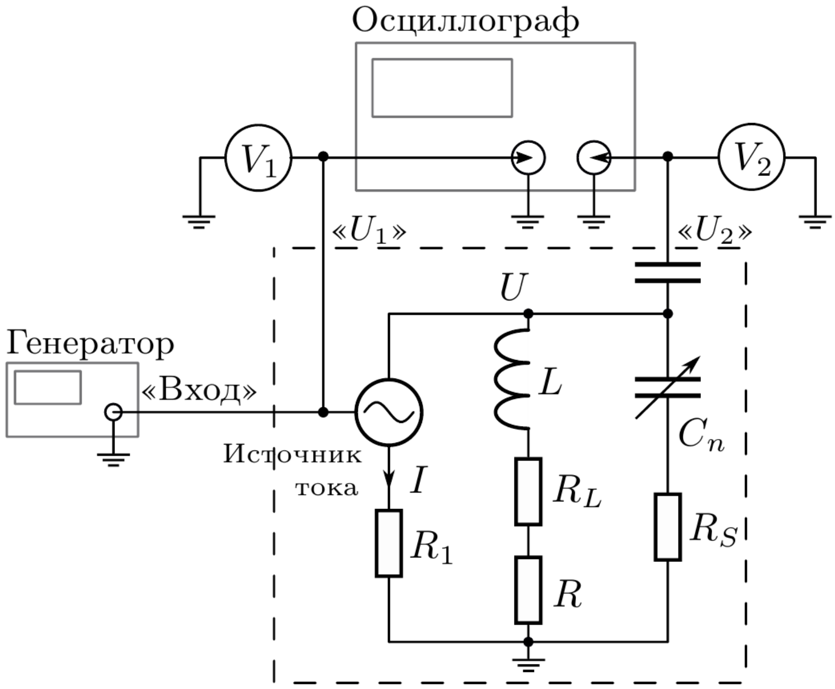

Рис. 2: Блок-схема экспериментального стенда

$Z_L = R_L + i\omega L$, $Z_C = R_S - i\frac{1}{\omega C}$, $Z = R_{\sum} + i(\omega L - d\dfrac{1}{\omega C})$
Тогда напряжение на контуре и токи на индуктивной и емкостной частях контура при нулевой начальной фазе можно представить в виде:

$$I_c = I\frac{Z_L}{Z_C + Z_L} = iQI_0\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1 - i\dfrac{R+R_L}{\rho}\dfrac{\omega_0}{\omega}}{1 + iQ(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega})}$$

$$I_L = I\frac{Z_c}{Z_C + Z_L} = iQI_0\frac{\omega_0}{\omega}\frac{1 + itg\delta}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

$$U = I\frac{Z_L Z_c}{Z_C + Z_L} = Q\rho I_0\frac{(1 - i\frac{R+R_L}{\rho}\frac{\omega_0}{\omega})(1 + itg\delta)}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — реактивное сопротивление контура, $Q = \frac{\rho}{R_{\sum}}$ — добротность контура
Рассмотрим случай, когда $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Тогда

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

Пренебрегая поправками порядка Q^{-2}, получим:

$$I_c = QI_0\frac{\omega}{\omega_0}\frac{e^{i\phi_c}}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_c = \frac{\pi}{2} - \frac{R+R_L}{\rho} - arctg(\tau\Delta\omega)$$

$$I_L = QI_0\frac{\omega_0}{\omega}\frac{e^{i\phi_L}}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_L = -\frac{\pi}{2} + \delta\,\mathrm{arctg}(\tau\Delta\omega)$$

$$U = Q\rho I_0 \frac{\omega}{\omega_0}\frac{e^{i\phi_U}}{\sqrt{1+(\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_U = -\frac{\omega}{\omega_0}\frac{R+R_L}{\rho} + \delta - arctg(\tau\Delta\omega)$$

где $\tau = \frac{2L}{R_\sum} = \frac{2Q}{\omega_0}$ — время затухания.
При резонансе, т.е. когда $\Delta\omega = 0$:

$$I_c(\omega_0) = QI_0, \phi_c(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{R+R_L}{\rho}$$

$$I_L(\omega_0) = QI_0, \phi_L(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \delta$$

$$U(\omega_0) = Q\rho I_0 = Q^2 R_\sum I_0, \phi_U\omega_0 = -\frac{R+R_L}{\rho} + \delta$$

$$\phi_c'(\omega_0) = \phi_L'(\omega_0) = \phi_U'(\omega_0) = -\tau$$

4 Используемое оборудование

1. генератор сигналов;
2. источник напряжения;
3. двухканальный осциллограф;
4. цифровые вольтметры;

5 Результаты измерений и обработка данных

Параметры образца:

$a = 2,2$ *мм*

$L = 6,0$ *мм*

$l = 7$ *мм*

Результаты измерения калибровочной зависимости поля B от тока в электромагните I_M представлены в таб. 1. Калибровочный график зависимости представлен на рис. ??.

I_M, A	δ_{I_M}, A	B, *мТл*	δ_B, *мТл*
0,000	0,020	17,7	1,9
0,210	0,021	224,8	12,2
0,500	0,023	521,8	27,1
0,810	0,024	802,7	41,1
1,020	0,025	929,4	47,5
1,220	0,026	1016,2	51,8
1,420	0,027	1072,1	54,6

Таблица 1: Калибровочная зависимость $B(I_M)$

6 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе была исследована зависимость ЭДС Холла от величины магнитного поля при различных значениях тока через образец. Были определены постоянная Холла, подвижность и концентрация носителей заряда в образце легированного германия. Полученные значения:

$$\boxed{R_H = (739 \pm 35) \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}, \quad n = (8,5 \pm 0,2) \cdot 10^{21}\ \frac{1}{\text{м}^3}, \quad \mu = 1446 \pm 123\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}}$$

Табличное значение собственной концентрации носителей зарядов для германия $n_0 = 2,4 \cdot 10^{13}\ \frac{1}{\text{м}^3}$. Это меньше полученного значения, что говорит о том, что данный образец германия содержит примеси. Основной вклад в погрешность вносит погрешность определения коэффициентов зависимости. Также на ошибку измерений может влиять зависимость концентрации основных носителей заряда от температуры, ярко выраженная в полупроводниках.