

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Вопрос по выбору

«Духи» Роуланда

Автор:

Гисич Арсений

Б03-102

Долгопрудный

2023

Аннотация

У реальных дифракционных решёток могут быть разнообразные ошибки в расположении штрихов, проявляющиеся в нарушении их периодичности. Каждый винт делительной машины имеет периодическую ошибку нарезки, и она приводит к периодическим ошибкам в расположении штрихов. Это сказывается в появлении около каждой спектральной линии ложных линий, симметрично расположенных относительно основных и получивших название «духов Роуланда».

Для волны длины λ , падающей под углом i на дифракционную решётку, направления θ на дифракционные максимумы выражаются формулой

$$d(\sin i + \sin \theta) = N\lambda,$$

где d — период решётки, N — порядок максимума.

Если m — период винта делительной машины, то расстояние от края решётки до n -го штриха выражается как

$$y = d_0 n + d_1 \sin e_1 n + d_2 \sin e_2 n + \dots,$$

где $e_k = 2\pi/m_k$ и d_k — максимальное отклонение любого штриха от корректного положения вследствие ошибки e_k .

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\xi &= \sin \alpha + \sin \alpha', \\ \mu &= \sin i + \sin \theta = \frac{2\pi N}{kd_0},\end{aligned}$$

где α и α' — направление падающего и дифрагировавшего луча относительно оси X . Тогда колебание напряжённости электрического поля в плоскости экрана пропорционально

$$\sum \int_{y'}^{y''} e^{-ik(\xi x + \mu y)} ds = \sum e^{-ik\mu y'} \int_0^{y''-y'} e^{-ik(\xi x + \mu y)} ds.$$

Для упрощения можно принять $y'' - y' = d_0$, тогда из под знака интеграла можно вынести сумму

$$\sum e^{-ik\mu(d_0 n + d_1 \sin e_1 n + d_2 \sin e_2 n + \dots)}.$$

Пусть J_n — функция Бесселя. Тогда

$$\begin{aligned}\cos(u \sin \varphi) &= J_0(u) + 2[J_2(u) \cos^2 \varphi + J_4(u) \cos^4 \varphi + \dots] \\ \sin(u \sin \varphi) &= 2[J_1(u) \sin \varphi + J_3(u) \sin^3 \varphi + \dots]\end{aligned}$$

Также $e^{-iu \sin \varphi} = \cos(u \sin \varphi) - i \sin(u \sin \varphi)$. Тогда сумма преобразуется как

$$\sum \left\{ \begin{aligned} &e^{-ik\mu d_0 n} \\ &\times [J_0(k\mu d_1) + 2(-iJ_1(k\mu d_1) \sin e_1 n + J_2(k\mu d_1) \cos 2e_1 n - \dots)] \\ &\times [J_0(k\mu d_2) + 2(-iJ_1(k\mu d_2) \sin e_2 n + J_2(k\mu d_2) \cos 2e_2 n - \dots)] \\ &\times [J_0(k\mu d_3) + \dots] \\ &\times [\dots] \end{aligned} \right.$$

В простейшем случае все d_k равны нулю, кроме d_0 и d_1 . Используя формулу

$$\sum_0^{n-1} e^{-ipn} = e^{-i\frac{n-1}{2}p} \frac{\sin \frac{pn}{2}}{\sin \frac{p}{2}}.$$

находим выражение для интенсивности

$$\left\{ J_0(k\mu d_1) \frac{\sin n \frac{k\mu d_0}{2}}{\sin \frac{k\mu d_0}{2}} \right\}^2 + J_1^2(k\mu d_1) \left\{ \left\{ \frac{\sin n \frac{k\mu d_0 + e_1}{2}}{\sin \frac{k\mu d_0 + e_1}{2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{\sin n \frac{k\mu d_0 - e_1}{2}}{\sin \frac{k\mu d_0 - e_1}{2}} \right\}^2 \right\} + \dots$$

Здесь $u = k\mu_p d_1 = (2\pi[N + (p/m)]d_1/d_0)$, откуда можно получить выражение для длин волн, соответствующих «духам»:

$$\lambda_p = \lambda \left(1 \pm \frac{p}{Nm} \right).$$

Так как n — велико, это выражение даёт очень узкие спектральные линии, которые не накладываются и, как следствие, могут быть различимы. Соответствующие позиции спектральных линий и их «духов» представлены в таб. 1. На рис. 1 изображена зависимость интенсивностей «призраков» различных порядков от соотношения d_1/d_0 .

| Расположение | Интенсивность | Обозначение |
|-------------------------------------|---------------------|-------------------------|
| $\mu = \frac{2\pi N}{kd_0}$ | $J_0^2(k\mu d_1)$ | первоначальная линия |
| $\mu_1 = \mu \pm \frac{e_1}{kd_0}$ | $J_1^2(k\mu_1 d_1)$ | «призраки» 1-го порядка |
| $\mu_2 = \mu \pm \frac{2e_1}{kd_0}$ | $J_2^2(k\mu_2 d_1)$ | «призраки» 2-го порядка |
| $\mu_3 = \mu \pm \frac{3e_1}{kd_0}$ | $J_3^2(k\mu_3 d_1)$ | «призраки» 3-го порядка |

Таблица 1: Расположение соответствующих спектральных линий и их «духов»

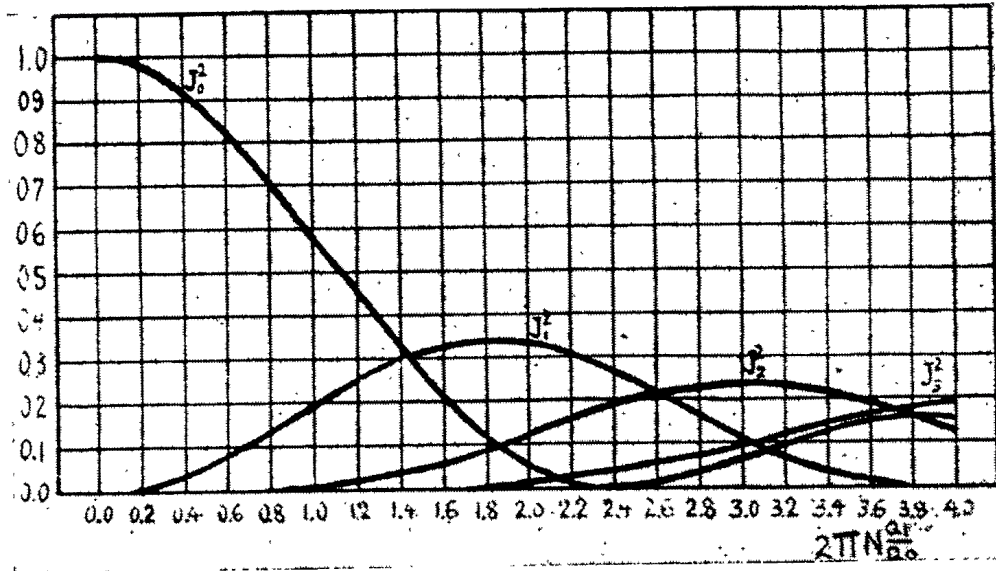


Рис. 1: График зависимости интенсивности J_n от отношения d_1/d_0

Общий вид делительной машины Роуланда представлен на рис. 2. Управляющий механизм делительной машины оснащён компенсационным цилиндром C (рис. 3), который удерживает длинный конец рычага L . Короткий конец рычага несёт наконечник B шнека W , который вращает шнековое колесо A . В начале цилиндр был настроен так, чтобы

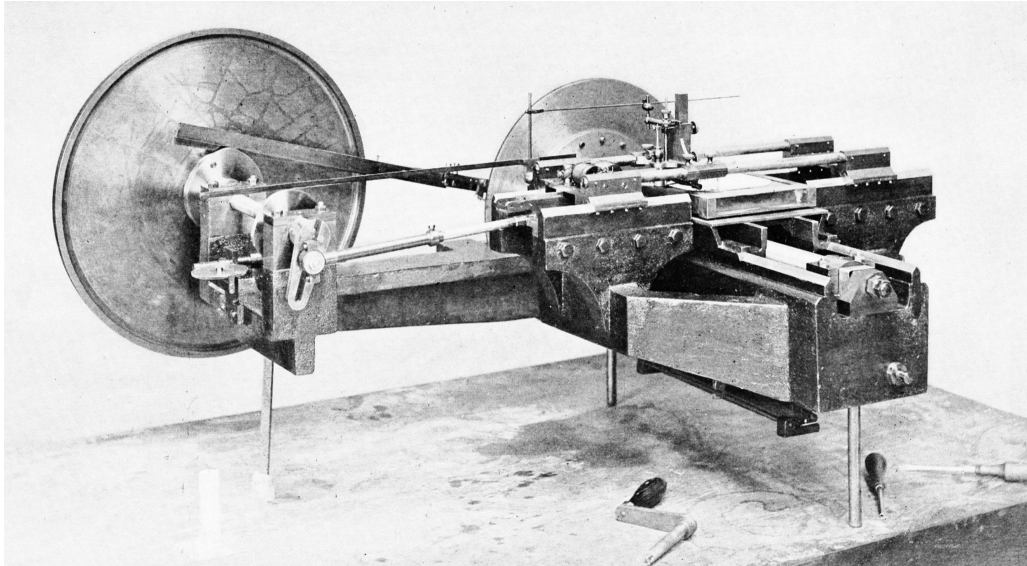


Рис. 2: Делительная машина Роуланда

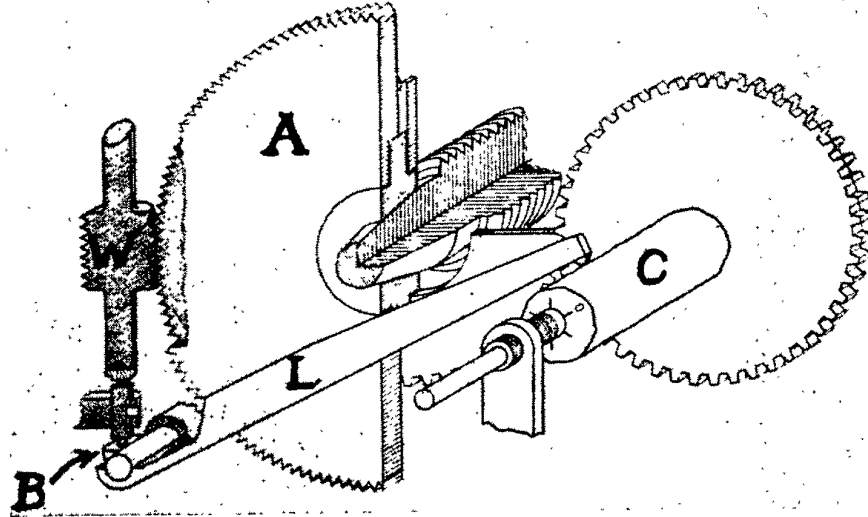


Рис. 3: Управляющий механизм делительной машины

убрать любые ошибки вращения. Затем на компенсатор добавлялись различные ошибки. Результаты экспериментов, проведённых в Ryerson Physical Laboratory, представлены далее.

Для решётки 600 штр/мм для зелёной спектральной линии ртути в 3 порядке наблюдается линия как на рис. 4(a). При добавлении ошибки $d_1 \sin \theta$ с таким периодом, что $d_1/d_0 = 0,1274$, результат будет как на рис. 4(b). Главная линия исчезает и по бокам наблюдаются «духи» 1-го и 2-го порядков. Если увеличить d_1/d_0 до 0,203 таким образом, что $2\pi N \frac{d_1}{d_0} = 3,832$, результат будет как на рис. 4(c). Первый «призрак» исчезает, а основная линия и второй «призрак» имеют одинаковую интенсивность, что согласуется с теорией.

Для демонстрации зависимости от порядка дифракционного максимума, возьмём спектр 2-го, 3-го и 4-го порядков. Соответствующие значения $u = 2\pi N \frac{d_1}{d_0}$: 1,604, 2,405 и 3,208. Результаты изображены на рис. 5(a), (b), (c).

Однако, призрак любого порядка — 3-го, 5-го, 8-го и т. д. — можно получить добав-

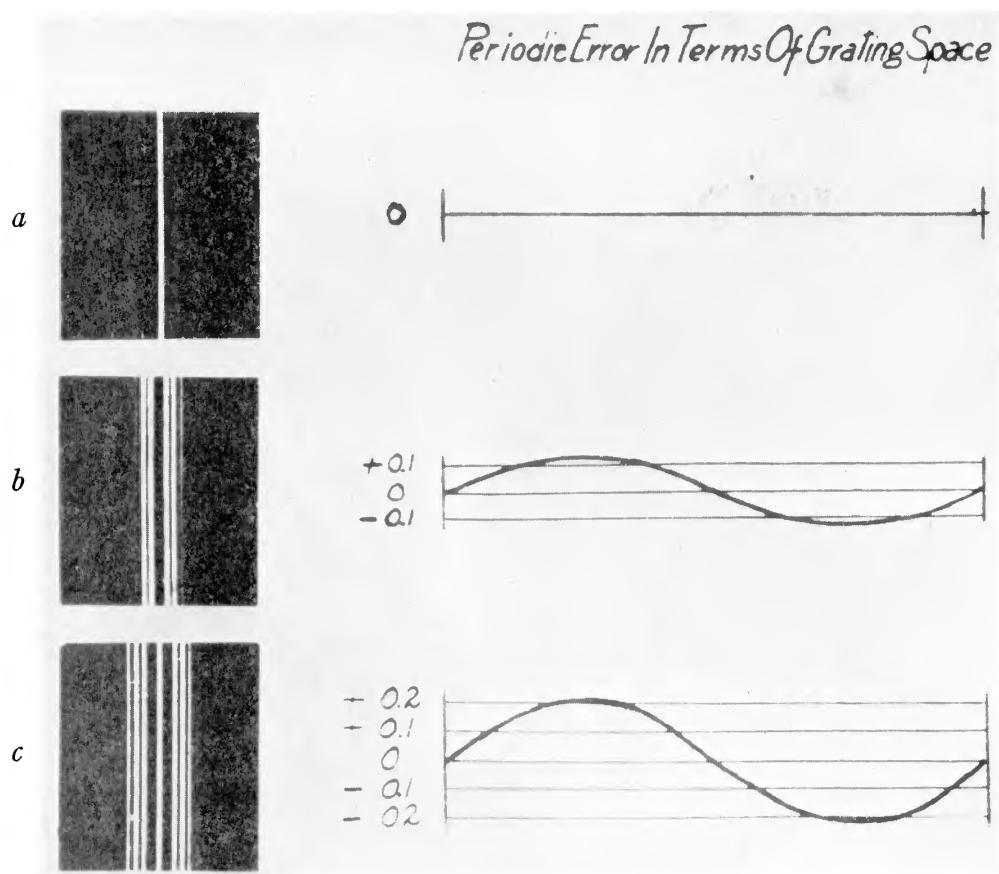


Рис. 4: «Духи» Роуланда для зелёной линии ртути в 3-м порядке дифракции

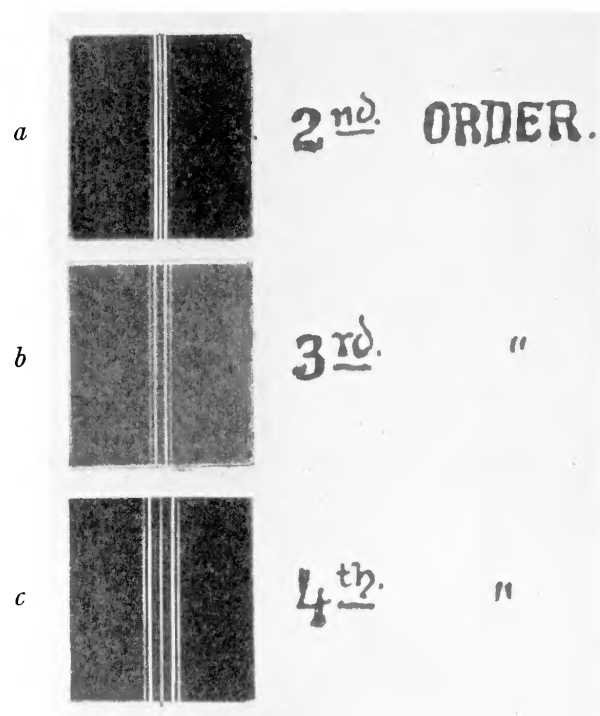


Рис. 5: «Духи» Роуланда в зависимости от порядка спектра

лением ошибки $d_1 \sin 3\theta$, или $d_1 \sin 5\theta$, или $d_1 \sin 8\theta$, и т. д. Ошибки $d_1 \sin 8\theta$ и $d_1 \sin 7\frac{1}{2}\theta$ приводят к появлению «призраков» 8-го порядка в первом случае и на позиции $7\frac{1}{2}$, на середине между 7-м и 8-м порядками, как показано на рис. 6(a) и (b). На рис. 6(c) показаны «духи» 7-го и 8-го порядков одинаковой интенсивности.

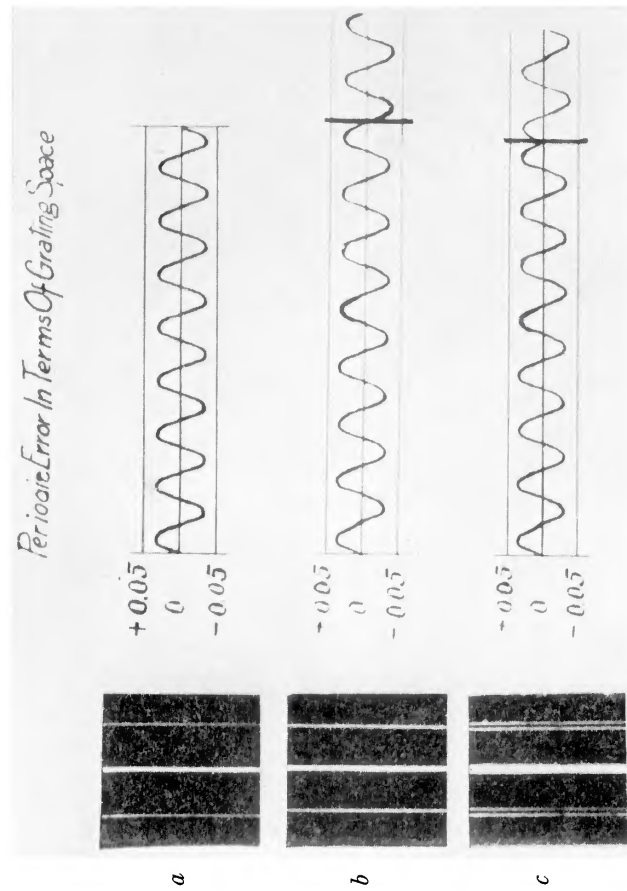


Рис. 6: «Духи» Роуланда высоких порядков

При добавлении ошибки $d_1 \sin 8\frac{1}{3}\theta$, которая после каждого оборота начиналась бы в одной фазе, «духи» появляются в 8-м и 9-м порядках, но «дух» 8-го порядка имеет в 4 раза бóльшую интенсивность, как показано на рис. 7(a). Когда были добавлены ошибки $d_1 \sin 7\theta$ и $d_1 \sin 8\theta$ одновременно, одинаковые «призраки» появлялись на 7 и 8 позициях. Аналогичные результаты были получены для ошибок $d_1 \sin 5\theta$ и $d_1 \sin 8\theta$, как показано на рис. 7(b) и (c).

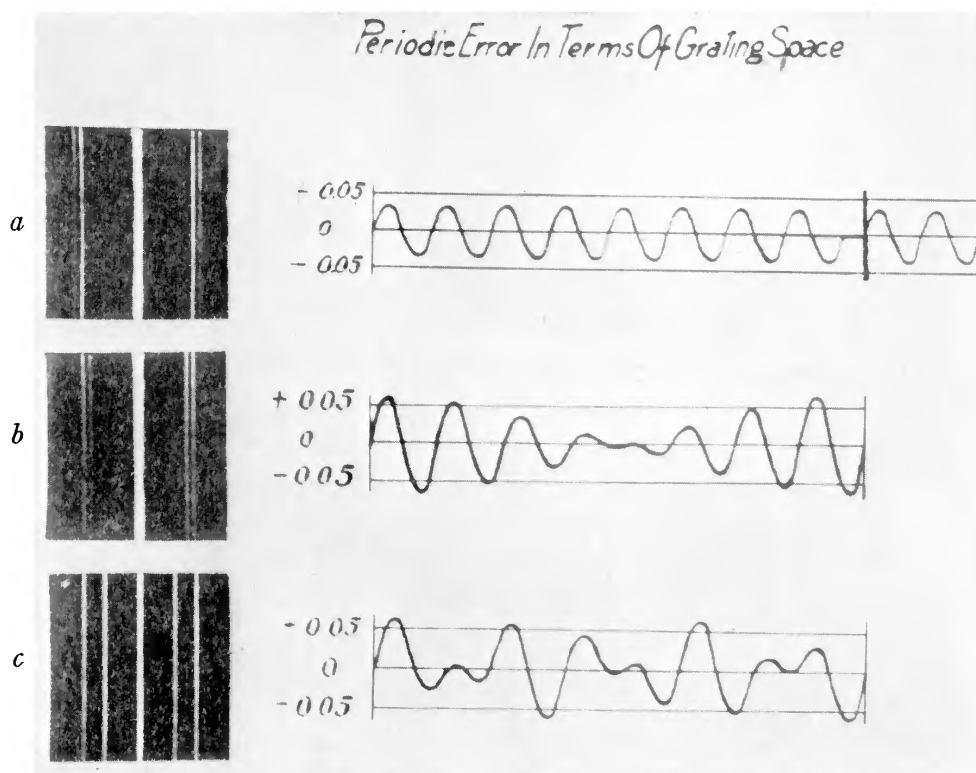


Рис. 7: «Духи» Роуланда при сложении ошибок

Список литературы

- [1] The Astrophysical Journal. V. 85, N. 2. March, 1937. Henry G. Gale. Rowland Ghosts.
- [2] Physical Papers of Henry A. Rowland. c. 525.