

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
**Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №8**

по дисциплине  
«Математическая статистика»

Выполнил студент  
группы 5030102/90101

Лаэтин Андрей Алексеевич

Проверил  
Доцент, к.ф.-м.н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2022

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>СПИСОК ТАБЛИЦ</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачи</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 Задание . . . . .	4
<b>2 Теория</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения . . . . .	4
2.1.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ нормального распределения . . . . .	4
2.1.2 Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения нормального распределения . . . . .	4
2.2 Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратичного отклонения произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход . . . . .	5
2.2.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ произвольной генеральной совокупности при большом объёме выборки . . . . .	5
2.2.2 Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения $\sigma$ произвольной генеральной совокупности при большом объёме выборки . . . . .	5
<b>3 Программная реализация</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>4 Результаты</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>5 Обсуждение</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>6 Приложение</b> . . . . .	<b>7</b>

## СПИСОК ТАБЛИЦ

1	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения . . . . .	6
2	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Асимптотический подход . . . . .	7

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Задание

Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону  $N(x, 0, 1)$ , для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик  $\chi^2$  и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять  $\gamma = 0.95$ .

## 2 Теория

### 2.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

#### 2.1.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ нормального распределения

Дана выборка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объёма  $n$  из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочное среднее  $\bar{x}$  выборочное среднее квадратическое отклонение  $s$ . Параметры  $m$  и  $\sigma$  нормального распределения неизвестны. Доверительный интервал для  $m$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$\begin{aligned} P\left(\bar{x} - \frac{sx}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{sx}{\sqrt{n-1}}\right) &= 2F_T(x) - 1 = 1 - \alpha \\ P\left(\bar{x} - \frac{st_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{st_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

#### 2.1.2 Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения нормального распределения

Дана выборка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объёма  $n$  из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочную дисперсию  $s^2$ . Параметры  $m$  и  $\sigma$  нормального распределения неизвестны. Задаёмся уровнем значимости  $\alpha$ . Доверительный интервал для  $\sigma$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}}\right) \quad (2)$$

## 2.2 Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратичного отклонения произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

При большом объёме выборки для построения доверительных интервалов может быть использован асимптотический метод на основе центральной предельной теоремы.

### 2.2.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ произвольной генеральной совокупности при большом объёме выборки

Предполагаем, что исследуемое генеральное распределение имеет конечные математическое ожидание  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ .  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль нормального распределения  $N(0, 1)$  порядка  $1 - \frac{\alpha}{2}$ . Доверительный интервал для  $m$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$P\left(\bar{x} - \frac{st_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{st_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma \quad (3)$$

### 2.2.2 Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения $\sigma$ произвольной генеральной совокупности при большом объёме выборки

Предполагаем, что исследуемая генеральная совокупность имеет конечные первые четыре момента.  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантиль нормального распределения  $N(0, 1)$  порядка  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .  $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$  - эксцесс генерального распределения,  $e = \frac{m_4}{s^4} - 3$  - выборочный эксцесс,  $m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$  - четвёртый выборочный центральный момент.

$$s(1+U)^{-\frac{1}{2}} < \sigma < s(1-U)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$s(1-0.5U) < \sigma < s(1+0.5U) \quad (5)$$

где  $U = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{e+2}{n}}$

Формулы (4) или (5) дают доверительный интервал для  $\sigma$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  [1, с. 461-462].

## 3 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python версии 3.9 в среде разработки PyCharm. Использовались дополнительные библиотеки:

1. scipy

2. math
3. matplotlib
4. numpy

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

## 4 Результаты

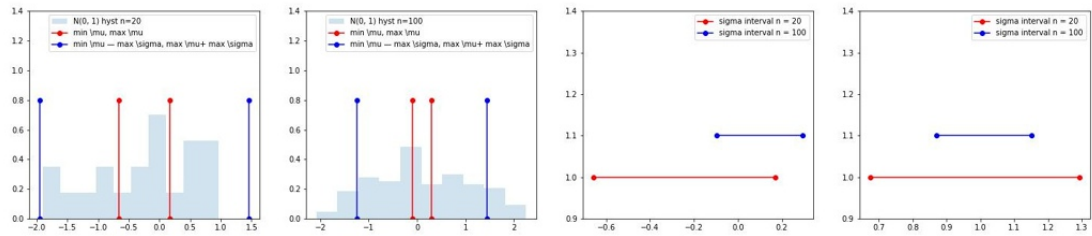


Рис. 1: Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров.

$n = 20$	$m$	$\sigma$
	$[-0.66, 0.17]$	$[0.67, 1]$
$n = 100$	$m$	$\sigma$
	$[-0.10, 0.30]$	$[0.87, 1]$

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

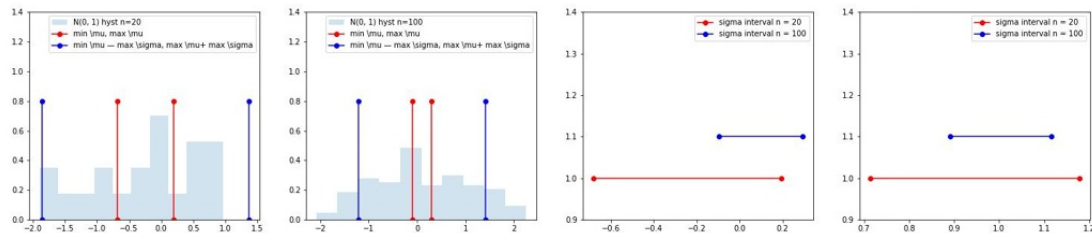


Рис. 2: Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров.

Асимптотический подход

$n = 20$	$m$	$\sigma$
	$[-0.68, 0.19]$	$[0.71, 1.18]$
$n = 100$	$m$	$\sigma$
	$[-0.10, 0.29]$	$[0.89, 1.12]$

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Асимптотический подход

## 5 Обсуждение

- Генеральные характеристики ( $m = 0$  и  $\sigma = 1$ ) накрываются построенными доверительными интервалами.
- Также можно сделать вывод, что для большей выборки доверительные интервалы являются соответственно более точными, т.е. меньшими по длине.
- Кроме того, при большом объёме выборки асимптотические и классические оценки практически совпадают.

## 6 Приложение

Код программы GitHub URL:

<https://github.com/A21l63/math-prob-stat>