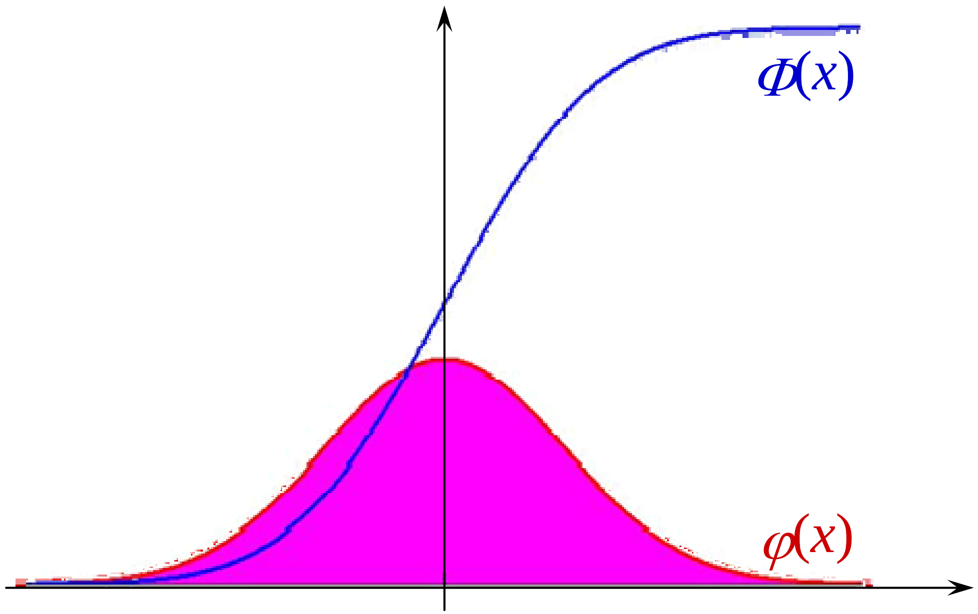
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

8.1.3 检验步骤

1、根据实际问题，提出原假设H_0和备择假设H_1，如

$$\mathbf{H_0}: \mu = \mu_0 \qquad \mathbf{H_1}: \mu \neq \mu_0$$

2、构造检验统计量 $\boldsymbol{T(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$，使$H_0$为真时，$T$有确定的分布，如

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

3、对给定的显著水平α，确定H_0的拒绝域W，使

$P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W) = \alpha$，如$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): T > t_\alpha(n-1)\}$

4、作出检验结论：

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W \Rightarrow$ 拒绝$\boldsymbol{H_0}$

否则 $\Rightarrow$ 不拒绝$\boldsymbol{H_0}$ ～认为$\boldsymbol{H_0}$与实际情况差异不显著。

§8.2 正态总体均值的检验

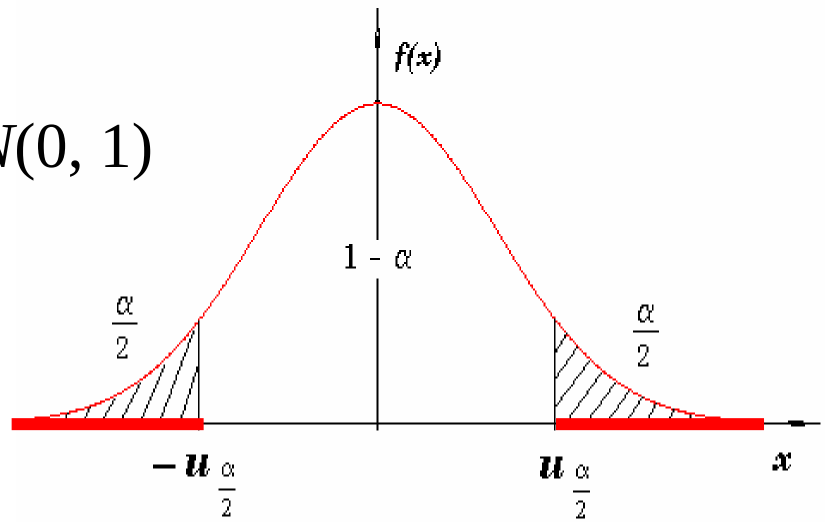
8.2.1 单总体情况 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

H_0 : $\mu = \mu_0$ H_1 : $\mu \neq \mu_0$

(1) σ^2已知

当H_0为真时 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$



拒绝域W: $|U| > u_{a/2}$

——U检验

例1（续例8.1） 袋装葡萄糖重量 $X \sim N(\mu, 0.015^2)$

0.497，0.506，0.518，0.524，0.498，0.511，0.520，0.515，0.512

问在显著水平$\alpha = 0.05$下，包装机工作是否正常?

解 H_0：$\mu = 0.5$ (正常) H_1：$\mu \neq 0.5$ (不正常)

$$n = 9 \quad \bar{x} = 0.5112 \quad \sigma = 0.015$$

$$\alpha = 0.05, \quad u_{0.025} = 1.96$$

$$|U| = \left| \frac{0.511 - 0.5}{0.015} \sqrt{9} \right| = 2.244 > 1.96 \quad \text{或} \; |0.511 - 0.5| > 0.0098$$

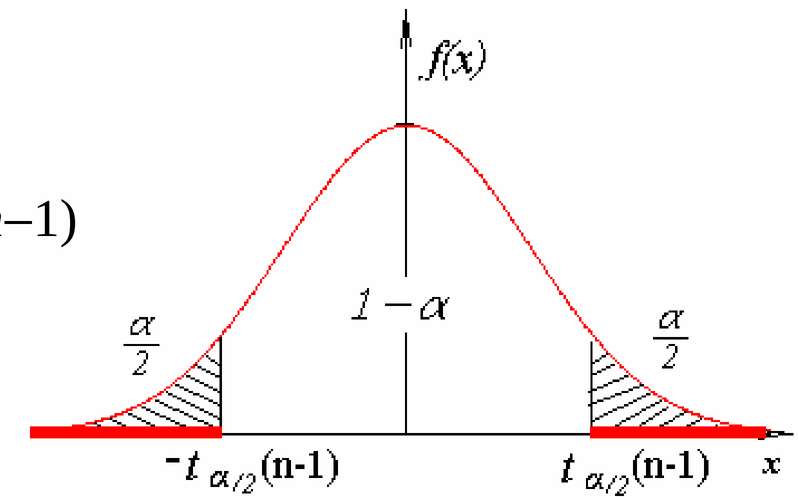
故 认为包装机工作不正常。

(2) σ^2未知

当H_0为真时 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

拒绝域W: $|T|>t_{a/2}(n-1)$

——T 检验



例2（P_{148}例8.9）100g罐头番茄汁VC含量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

n=17：16, 22, 21, 20, 23, 21, 19, 15, 14, 23, 17, 20, 29, 18, 22, 16, 25

试在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设$H_0:\mu=22$(合格), $H_1:\mu\neq 22$。

解 $\bar{x}=20.059$ $s=3.8806$ $t_{0.025}(17)=2.1199$

$$|t|=\left|\frac{20.059-22}{3.8806}\sqrt{17}\right|=2.0625<2.1199$$ 故不拒绝H_0

例2（P_{148}例8.9）100g罐头番茄汁VC含量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

n=17：16, 22, 21, 20, 23, 21, 19, 15, 14, 23, 17, 20, 29, 18, 22, 16, 25

试在显著水平$\alpha = 0.05$下，检验假设$H_0:\mu \geqslant 22$(合格), $H_1:\mu < 22$。

解 $\bar{x} = 20.059$ $s = 3.8806$ $t_{0.95}(17) = -1.7459$

$$t = \frac{20.059 - 21}{3.8806}\sqrt{17} = -2.0625 < -1.7459$$ 故不拒绝H_0

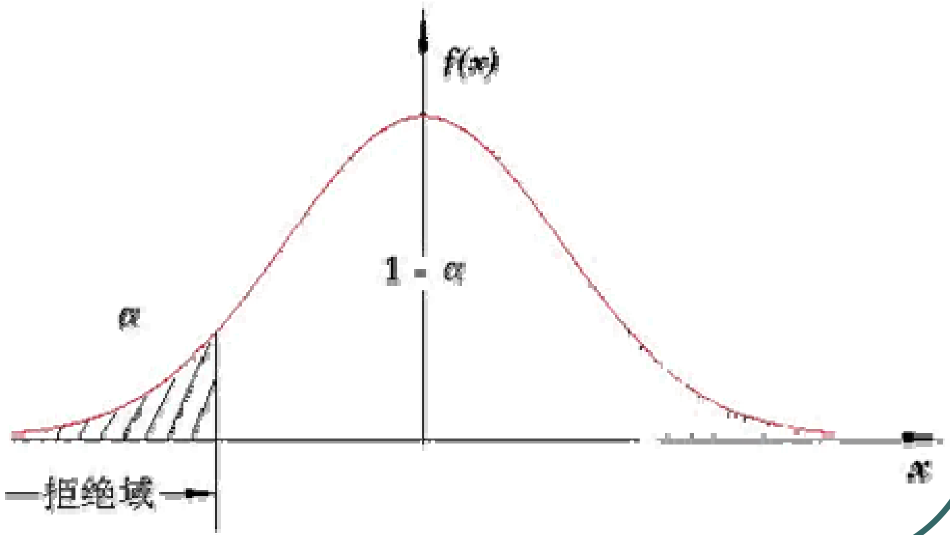
一般单侧假设检验问题：

H_0：$\mu \geqslant \mu_0$ H_1：$\mu < \mu_0$

的拒绝域为 $t < t_{1-\alpha}(n-1)$

H_0：$\mu \leqslant \mu_0$ H_1：$\mu > \mu_0$

的拒绝域为 $t > t_{\alpha}(n-1)$



8.2.2 两总体情况

$$X_1, X_2, \cdots, X_{n1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \bar{X},\ S_1^2$$

$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2) \qquad \bar{Y},\ S_2^2$$

H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　　H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

(1) σ_1^2，σ_2^2 已知

$$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n1}) \text{ 与 } \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n2}) \text{ 相互独立}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n1} + \frac{\sigma_2^2}{n2})$$

当H_0为真时 $U = (\bar{X} - \bar{Y}) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}} \sim N(0, 1)$

拒绝域W:　　$|U| > u_{\alpha/2}$　　——U检验

例3（P150例8.13）

甲厂钢丝强度 $X\sim N(\mu_1, 80^2)$ n1 = 50 $\bar{x}=1208$

乙厂钢丝强度 $Y\sim N(\mu_2, 94^2)$ n2 = 50 $\bar{y}=1282$

问甲、乙两厂钢丝的抗拉强度是否有显著差别？(α=0.05)

解 H_0：$\mu_1=\mu_2$ H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

$$|U|=\left|\frac{1208-1282}{\sqrt{\frac{80^2}{50}+\frac{94^2}{50}}}\right|=4.239 > u_{0.025}=1.96$$

故 拒绝H_0，即认为两厂钢丝的抗拉强度有显著差异。

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \qquad S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 - n_2 - 2}$$

当H_0为真时

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

拒绝域W: $\quad |T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ ——T 检验

例4（P151例8.14）

70℃时的断裂强度$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ $n_1=8$ $\bar{x}=20.4$， $s_1^2=0.886$

80℃时的断裂强度$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ $n_2=6$ $\bar{y}=19.3167$, $s_2^2=1.0566$

问70℃与80℃对断裂强度有无显著差别？（α=0.10）

解 H_0：$\mu_1=\mu_2$ H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

$$|t|=\frac{|20.4-19.3167|}{\sqrt{7\times0.886+5\times1.0566}}\sqrt{\frac{48\times12}{14}}=2.05036>1.782$$

故 拒绝H_0，即认为70℃与80℃对断裂强度有显著差别。

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 未知，但$n_1 = n_2 = n$

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Z_i = X_i - Y_i \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{array} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$$

H_0： $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$， H_1： $\mu = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

当H_0为真时 $$T = \frac{\bar{Z}}{S_Z}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

拒绝域W： $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$ ——T 检验

例5（P152例8.15） 甲橡胶轮的磨损量$X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $n_1=8$

乙橡胶轮的磨损量$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $n_2=8$

问这两种轮胎的耐磨性有无显著差别？（α=0.10)

解 $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

x	4900	5220	5500	6020	6340	7660	8650	4870
y	4930	4920	5140	5700	6110	6880	7930	5010
$z=x-y$	-30	320	360	320	230	780	720	-140

对Z~$N(\mu, \sigma^2)$，检验假设 $H_0:\mu=0$, $H_1:\mu\neq 0$（σ^2未知)

$$\bar{z}=320,\quad s_Z=319.687,\quad t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(7)=1.8946$$

$$|t|=\left|\frac{\bar{z}}{s}\sqrt{8}\right|=2.8312>1.8946$$

故 拒绝H_0，即认为两种轮胎的耐磨性有显著差别。

§8.3 正态总体方差的检验

8.3.1 单总体情况 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

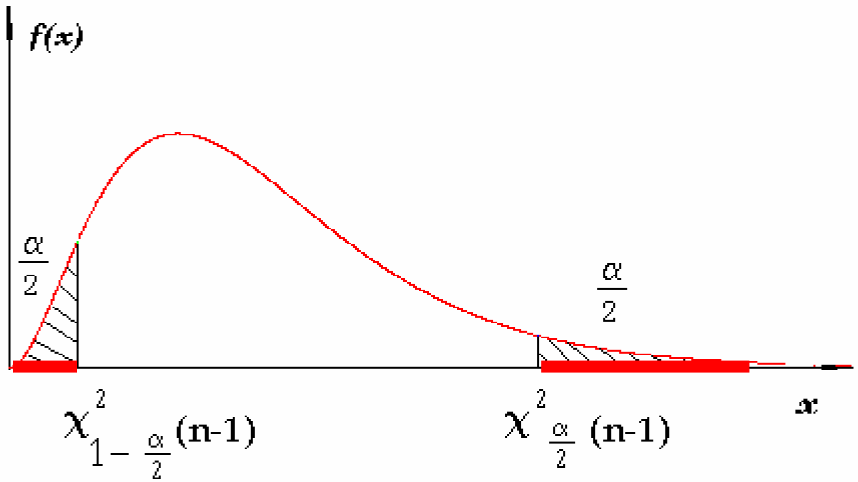
当H_0为真时

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域W: $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$,

$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

——χ^2检验



例1（P154例8.17）维尼纶的纤度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

n=5：1.32　1.55　1.36　1.40　1.44

问在显著水平α=0.1下，纤度总体的方差有无显著变化?

解　$H_0: \sigma^2 = 0.048^2$，$H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$

计算：　$\bar{x} = 1.414$，　$s^2 = 0.00778$

查表：　$\chi^2_{0.95}(4) = 0.711$，　$\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$

$$\chi^2 = 4 \times \frac{0.00778}{0.048^2} = 13.507 > 9.488$$

故　拒绝H_0，即认为纤度总体的方差有显著变化。

8.3.2 两总体情况

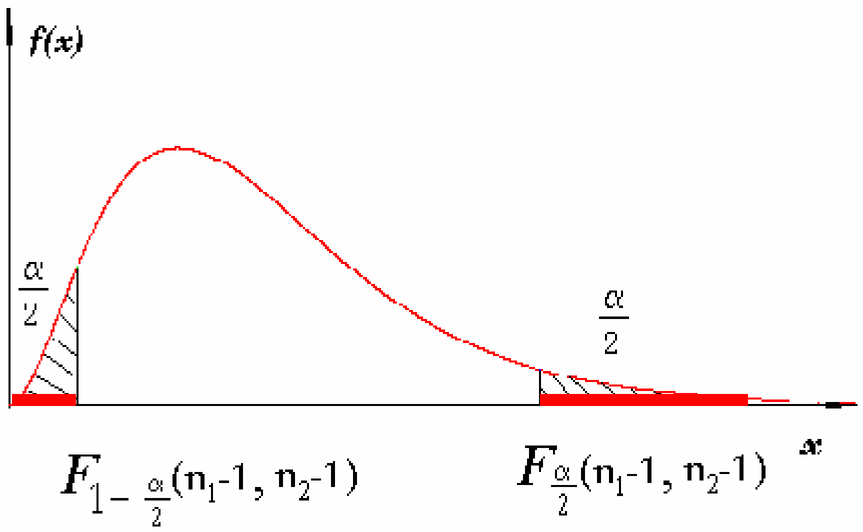
$$X_1, X_2, \cdots, X_{n1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \bar{X},\ S_1^2$$

$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2) \qquad \bar{Y},\ S_2^2$$

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad\qquad H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

当H_0为真时

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$



拒绝域W:

$$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

$$F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

——F 检验

例2（P155例8.18） 旧法的杂质含量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $n_1=13$

新法的杂质含量 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $n_2=9$

问新方法的杂质含量是否低于旧方法? $(\alpha=0.05)$

解 先检验 $H_0:\ \sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\ \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

计算 $\bar{x}=25.6846,\ s_1^2=5.86141;\ \bar{y}=22.5111,\ s_2^2=1.64111$

$$f=\frac{5.86141}{1.64111}=3.5716<4.1998=F_{0.025}(12,8)$$

故 不拒绝H_0，即可认为方差相同。

再检验 $H_0:\mu_2\geq\mu_1,\quad H_1:\mu_2<\mu_1$

$$t=\frac{25.6846-22.5111}{\sqrt{12\times5.86141+8\times1.64111}}\sqrt{\frac{13\times9\times20}{13+9}}=3.5825>1.725=t_{0.05}(20)$$

故 拒绝H_0，即认为新方法的杂质含量明显低于旧方法。