

# 多功能摆的设计与应用

## 【引言】

“摆动”是最基本的物理现象，“摆”是一种实验装置，可用来展现种种力学现象。伽利略很早就发现了摆的等时性原理，指出摆的周期与摆长的平方根成正比，而与摆的质量和材料无关，为后来摆钟的设计与制造奠定了基础。1673 年，荷兰科学家惠更斯制造的惠更斯摆钟就运用了摆的等时性原理。西方工艺家们把摆的等时性原理用于时钟上，作为稳定的“定时器”，使机械钟能够指示出“秒”，从而将计时精度提高了近 100 倍。在日常生活、工业生产、现代测量技术和科学研究各个领域，人们已研制出形态千差万别、功能各不相同的摆，例如：单摆、双线摆、三线摆、振动摆、扭摆、弹簧摆、冲击摆、复摆、倒立摆、圆锥摆、电磁摆、混沌摆等等。根据摆的基本原理设计出来的各种精密仪器和装备，为科学的发展和社会的进步做出了显著的贡献，例如，葛氏扭摆内耗仪、凯特摆测重力加速度、傅科摆证实了地球自转等。本实验利用所给装置来搭建不同的摆，研究它们的运动规律，进行应用设计，在这里具体的研究单摆、扭摆，因为它们是最经典的实验，是众多形形色色、用途各异的精密摆的基础，它不仅在学生进行科学实验训练方面有很大作用，而且在科学研究和精密仪器设计等各个方面均有重要价值。本实验要求：（1）搭建单摆，运用误差均分原则、单摆公式和累积放大法原理测量本地的重力加速度  $g$ ，根据对  $g$  的测量精度要求，选择适当的测量仪器和方法，并分析基本误差来源，提出修正方法。（2）设计搭建扭摆，利用扭摆测量材料的切变模量。

## 【开篇设问】

- 1、理想单摆公式成立的前提条件是什么？
- 2、何谓误差均分原则？它在实验设计、仪器选用方面起什么作用？
- 3、何谓累积放大法原理？在本实验中有无限制？能无限累计放大吗？
- 4、影响单摆法测量重力加速度  $g$  精度的主要因素有那些？
- 5、本扭摆测钢丝切变模量实验是如何设计，以避免测量那些较难测准的物理量，从而提高实验精度的。

## 【实验目的】

1. 根据误差均分原理，对单摆法测量重力加速度  $g$  进行实验设计和仪器选配；
2. 研究单摆运动规律，用单摆法测量当地重力加速度  $g$ ；
3. 研究扭摆运动规律，用扭摆法测量钢丝的切变模量；
4. 学会用不确定度方法分析和评定实验结果。

## 【实验原理】

1. 设计和搭建单摆测本地重力加速度：

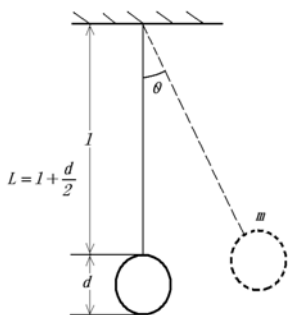


图 1 单摆示意图

理想的单摆应该是一根没有质量，没有弹性的线，系住一个没有体积的质点，在真空中纯粹由于重力的作用，在与地面垂直的平面内作摆角趋于零的自由振动。

由于作简谐振动，其摆动周期公式为：
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

如果利用（1）式测重力加速度，只需测量单摆摆长和周期就行做，做起来比较容易，但这样的单摆在现实中很难搭建，因为悬线再轻也有质量，摆球再小也有质量有体积，摆角也难趋于零，否则很难观察，如果不在真空中做，就会受空气浮力影响。考虑到这些因素，实际单摆周期公式就为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[ 1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_l}{12m} \left( 1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_l}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]} \quad (2)$$

式(2)中,  $T$  是单摆的摆动周期,  $l$ 、 $m_l$  是单摆摆线的长度和质量,  $d$ 、 $m$ 、 $\rho$  是摆球的直径质量和密度,  $\rho_0$  是空气密度,  $\theta$  是摆角。按(2)式做,  $g$  会测得更准一些, 但显然很麻烦。如何设计测量方案, 选择测量仪器? 在这里给大家提供一个参考案例。

设  $m=33.0\text{g}$ ,  $m_l=0.1\text{g}$ ,  $l=45.0\text{cm}$ ,  $d=2.00\text{cm}$ ,  $\rho=7.8\text{g/cm}^3$ ,  $\rho_0=1.3\times 10^{-3}/\text{cm}^3$ ,  $\theta=5^\circ$ 。

摆球的几何形状对  $T$  的修正为:  $\frac{d^2}{20l^2} \approx 9.9 \times 10^{-5}$

摆的质量对  $T$  的修正为:  $\frac{m_l}{12m} \times \left( 1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_l}{m} \right) \approx 2.6 \times 10^{-4}$

空气浮力对  $T$  的修正为:  $\frac{\rho_0}{2\rho} \approx 8.3 \times 10^{-5}$

摆角对  $T$  的修正为:  $\theta=5^\circ$  时,  $\frac{\theta^2}{16} \approx 4.7 \times 10^{-4}$

$\theta=3^\circ$  时,  $\frac{\theta^2}{16} \approx 1.7 \times 10^{-4}$

若实验精度要求在  $10^{-3}$  内, 这些修正项都可忽略不计, 若要求更高的精度, 则这些因素就

不可忽略, 而必须考虑。本实验测量重力加速度  $g$  要求其测量相对不确定度  $\frac{U_g}{g} \leq 1\%$ ,

要求不高, 可忽略上述因素, 式(2)就与式(1)一样了, 这样就可以用理想单摆的周期式来测量重力加速度  $g$  了。

单摆法测量重力加速度的测量式为:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 (l + d/2)}{T^2} \quad (3)$$

式中  $l$  为摆线长度,  $d$  为小球的直径,  $T$  为摆动周期,  $L$  为有效摆长, 如图 1 所示。只要测出它们就可以得到重力加速度  $g$ 。

用什么方法和仪器来测量? 在知道重力加速度的测量要求后, 还需要知道各量的测量不确定度, 在一般情况下可用误差均分原理来估算一下。误差均分原理的意思就是, 各直接测量量的不确定度对间接测量量总不确定度的贡献是一样的, 如下式:

具体到本次实验: 对于  $U_r(g) = \frac{U_g}{g} = \sqrt{\left( \frac{U_l}{l} \right)^2 + \left( \frac{2U_T}{T} \right)^2}$  若要求  $U_r(g) < 1\%$ ,

可假定  $\left(\frac{U_L}{L}\right)^2 = \left(\frac{2U_T}{T}\right)^2 = \frac{U_r^2(g)}{2}$ ，因为式中两个括号部分分别是测摆长和测周期的不确定度对  $g$  的不确定度的贡献，按误差均分原理应该一样。

$$\text{则有: } U_L < \frac{L}{\sqrt{2}} \times 1\%, \quad U_T < \frac{T}{2\sqrt{2}} \times 1\%$$

但上式具体值不知，因此在正式测量之前可粗略测一下各量，或者根据具体装置估算一下。假设单摆参数估计值：摆长  $l \approx 45\text{cm}$ ，摆球直径  $d \approx 2\text{cm}$ ，摆动周期  $T \approx 1.3\text{s}$  代入上式，可得：

$$U_L < 0.3\text{cm} \quad U_T < 4.0 \times 10^{-3}\text{s}$$

据此，可选择米尺来测摆长，因为米尺测量的不确定度可达  $0.05\text{cm}$ 。但用常用的测时间仪器秒表来测周期就出现了问题，根据统计分析，由于测量者开或停秒表的反应时间约为  $0.1$  秒，合起来约为  $0.2$  秒，这显然不能满足周期的测量要求，如果不打算另选别的仪器，则可用累积放大测量法，即一种将微小待测量累积放大后再测量以减小误差的方法来测量周期，这就有可能达到要求。可算出周期要累积放大的倍数  $n$  是：

$$n = \frac{0.2\text{s}}{4.0 \times 10^{-3}\text{s}} = 50$$

这样我们可选择米尺测摆长，选择用秒表测  $n$  倍周期的时长得到周期  $T$ 。

## 2. 设计和搭建扭摆测钢丝的切变模量：

如图 2 所示：一矩形材料上下两侧面受到与侧面平行的大小相同、方向相反的力作用时，就会发生形状改变，这种形变称为剪切形变，简称切变。外力  $F$  与施力面积  $S$  之比为切应力，用符号  $\tau$  表示，两施力面积错开后形成的材料角度变化  $\varphi = d/D$  称为切应变。在弹性

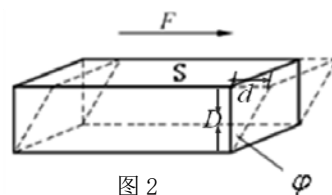


图 2

限度内切应力与切应变成正比，即： $\tau = G\varphi$ ，式中比例系数  $G$  称为切变模量，单位为  $\text{N/m}^2$  它是度量材料在弹性限度内物体受力形变大小的重要参量。本实验利用扭摆来测量它。

如图 3，将金属丝的上端固定，下端联结一转动惯量为  $I$  的物体就构成了扭摆。以金属丝为轴对物体施加一外力矩，使物体扭转一角度  $\theta$  后松开，外力矩撤去后，在悬丝弹性恢复力矩  $M$  的作用下，物体将反复扭动，忽略空气阻尼力矩的作用，根据刚体转动定理有

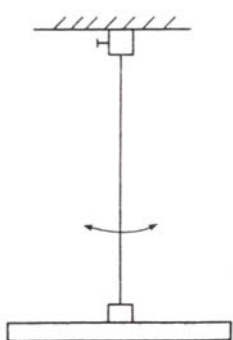


图 3 扭摆示意图

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4)$$

式中， $I$  为刚体对悬线轴的转动惯量， $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  为角加速度，弹性恢复力矩与转角  $\theta$  的关系为：

$$M = -c\theta \quad (5)$$

式中， $c$  为扭转系数，它与悬线长度  $L$ ，悬线直径  $D$ ，悬线材料的切变模量  $G$  的关系为：

$$c = \frac{\pi G D^4}{32L} \quad (6)$$

扭摆的运动微分方程为： $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta$  (7)

由此可见扭摆作简谐振动，它的扭动周期  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$ ，(8)

将(6)式代人(8)式得： $T = 2\pi\sqrt{\frac{32LI}{\pi GD^4}}$  (9)

可知切变模量  $G$  等于  $G = \frac{128\pi LI}{D^4 T^2}$  (10)

若按此式测  $G$ ， $I$  不易测准，需对扭摆重新设计、改进，如图4所示是改进后的扭摆，金属丝下吊一金属摆杆，摆杆上对称的钻有多对孔，两相同钢球对称放置在摆杆上，由于几个物体绕同一轴的转动惯量等于它们的代数和，由周期式可得：

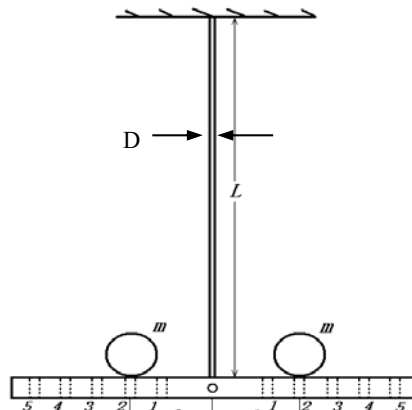


图4 改进后的扭摆

$$T^2 = \frac{128\pi L(I_0 + I_1)}{GD^4}$$

$I_0$  为不放钢球时扭摆系统本身的转动惯量， $I_1$  为两钢球绕悬丝轴摆动时的转动惯量。再根据转动惯量的平行轴定理，有：

$$T^2 = \frac{128\pi L(I_0 + 2I_c + Md^2)}{GD^4} \quad (11)$$

式中  $I_c$  为钢球绕其通过质心轴的转动惯量， $M$  为两钢球的总质量， $d$  为扭转半径。如果实验中，将两钢球分别放在金属摆杆第  $i$  对孔和第  $j$  对孔时，摆动起来，测出其周期  $T_i$ 、 $d_i$  和  $T_j$ 、 $d_j$  分别代入(11)式，两式相减，经整理 就可得到扭摆法测量钢丝切变模量式为：

$$G = \frac{128 \pi LM (d_j^2 - d_i^2)}{D^4 (T_j^2 - T_i^2)} \quad (12)$$

此式和式(11)不同之处是不必求悬丝下端第一个连接物的转动惯量，这对于第一个连接物的转动惯量不易测准时最为适用。

### 【仪器简介】

米尺、游标卡尺、螺旋测微计、秒表、细线、钢球、多功能摆底座和支架、数字天平、光电计时器、钢丝、金属摆杆等。

### 【实验内容】

1. 自己设计方案，测量本地的重力加速度  $g$ 。要求重力加速度  $g$  的测量相对不确定度  $U_r = U_g / g < 1\%$ 。

可参考原理部分所述案例，根据单摆公式、误差均分原理和实验室所给参数，进行实验设计和仪器选

配。

2. 利用所给部件组装单摆，用单摆法测量本地的重力加速度  $g$ 。

根据上一步的设计，选择合适的仪器和测量方法，对摆长  $l$ 、摆球直径  $d$  和摆动周期  $T$  均按实验室要求的测量次数测量，并把相应的数据记录下来，表格自拟，计算本地的重力加速度  $g$ 。

3. 利用所给部件组装扭摆，用扭摆法测量钢丝的切变模量  $G$ 。

选择合适的仪器，测量两钢球分别对称置于金属摆杆 1、2、3 对孔时的摆动周期  $T$  和转动半径  $d$ ，并测出钢丝长度  $L$ 、直径  $D$  及钢球质量  $M$ ，按实验室要求的测量次数测量，把相应的数据记录下来，表格自拟，按式（12）计算钢丝的切变模量  $G$ 。

注意事项：

1. 做单摆实验时，一定要使摆球在竖直平面内摆动，摆幅要小；
2. 搭建扭摆和测量时，切记不要把钢丝弄弯；
3. 一定要使扭摆摆杆在水平面内绕定轴摆动；
4. 在扭摆的摆杆上放置钢球时要小心，尽量不要使钢球滚落；
5. 实验结束后，请整理好实验仪器。

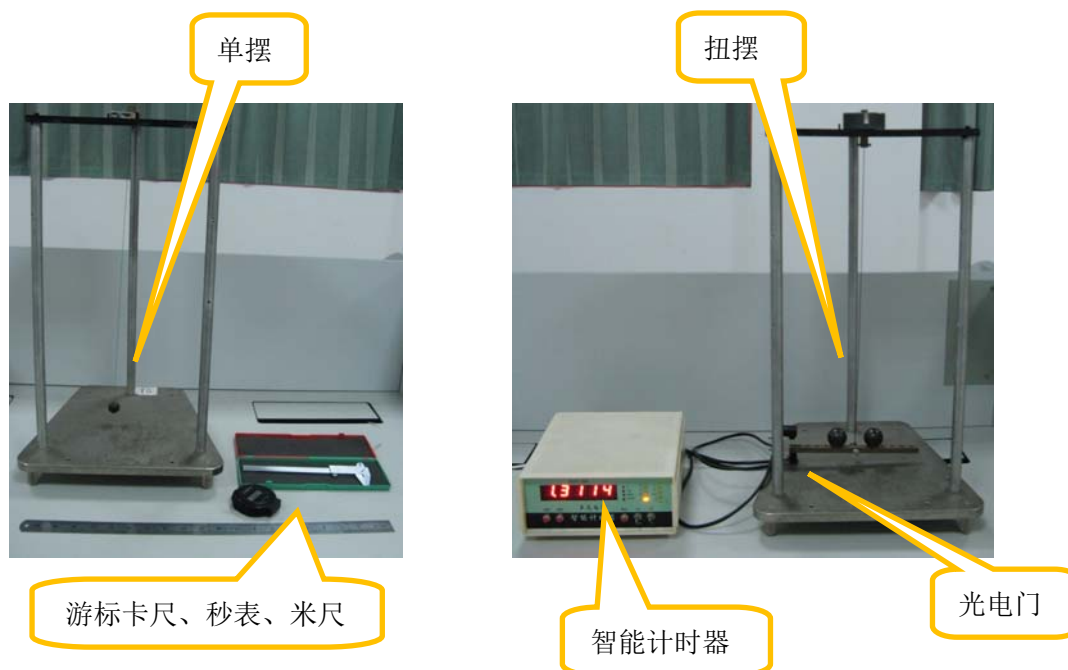
### 【结果分析】

1. 将数据填入自拟记录表格，计算重力加速度  $g$  及其不确定度，判断所设计的实验方案是否达到预期的要求，写出结果表达式， $g = \bar{g} \pm U_g$ ，分析误差原因，若要提高测量精度，应从哪些方面改进。
2. 将数据填入自拟记录表格，用两钢球位于 1-1 和 2-2、1-1 和 3-3、2-2 和 3-3 对孔时的测量数据分别计算  $G_{12}$ 、 $G_{13}$ 、 $G_{23}$  及其平均值，与实验室所给参考值比较，分析误差原因，对如何减小误差可提出自己的看法。

### 【拓展内容】

- 1、改变摆角，研究大摆角时，单摆的运动规律。
- 2、改变摆球的形状和质量，研究不同摆球的运动规律和阻尼状态。
- 3、利用单摆原理自行设计一种简易的测量装置，测量某种物理量或某种运动规律。
- 4、你还可以将扭摆设计成其它样子，来测量材料的切变模量吗？

附录:



光电智能计时器及使用介绍:



为了测周期，可反复按功能按钮选择“T”

扭摆摆动后，按“清零”扭清零，当计时次数显示为“6”的时候按“停止”扭停止计数，此时计时器会依次显示前5次摆动的周期值，以及5次周期的总时间。注意确认每次摆动的时间相差不要太大。读取5次摆动的总时间。



两个光电探头都要接上并且发光才能正常工作。