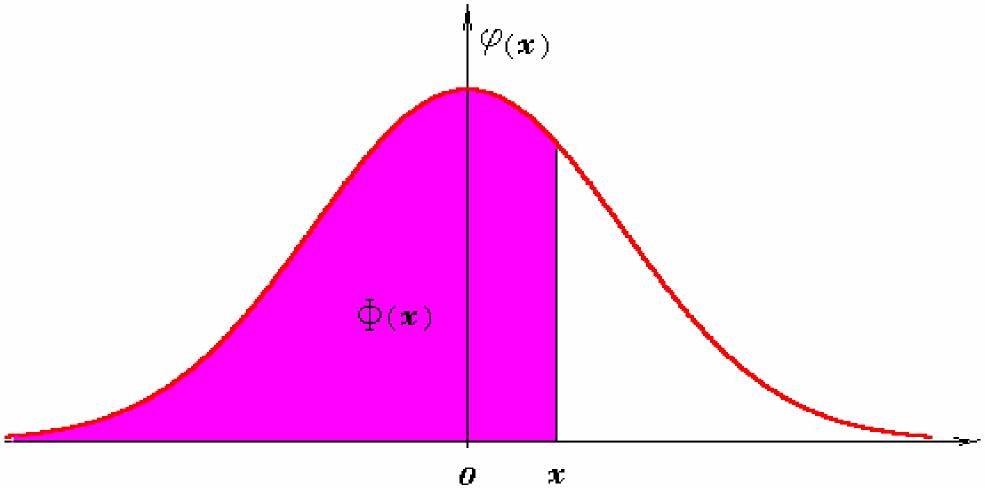
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

§3.4 随机变量的独立性

3.4.1 问题

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)\Rightarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$X\,|Y\sim N(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho\,(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2))$$

当$\rho=0$时 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

3.4.2 定义

若$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ $\begin{cases}\text{D.R.V.} & p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\\ \text{C.R.V.} & f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)\end{cases}$

则称随机变量 X 与Y 相互独立。

例1（P_{50}例3.9）设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$，证明$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是$\rho=0$。

证明：$\rho=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

$$f(x,y)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

即 $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y) \quad \Rightarrow \quad f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)\,f_Y(\mu_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \Rightarrow \sqrt{1-\rho^2}=1 \Rightarrow \rho=0$$

例2（P_{91}例3.11） 讨论D.R.V.(X,Y)的独立性.

$X \backslash Y$	-1	0	2	$p_{i\cdot}$
1/2	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
1	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
2	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$1/2$
$p_{\cdot j}$	$2/5$	$1/5$	$2/5$	

$\because\ p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$　　$i,j=1,2,3$　　故X与Y相互独立.

§3.5 多个随机变量函数的分布

3.5.1 和的分布

例1（P_{50}例3.11） 设$X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(n,p)$且相互独立，求$Z=X+Y$ 的分布。

解

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\,P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}\,C_n^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_n^{k-i}\right]p^k(1-p)^{2n-k}$$

$$=C_{2n}^k p^k(1-p)^{2n-k}\qquad k=0,1,2,\ldots 2n$$

$Z\sim B(2n,p)$

- **离散型卷积公式:**

$$P(X+Y=k)=\sum_i P(X=i,Y=k-i)$$

$$\xlongequal{X与Y独立}\sum_i P(X=i)P(Y=k-i)$$

- **二项分布可加性:**

若$X\sim B(m，p)$，$Y\sim B(n，p)$且相互独立，则$X+Y\sim B(m+n，p)$.

- **泊松分布可加性:**

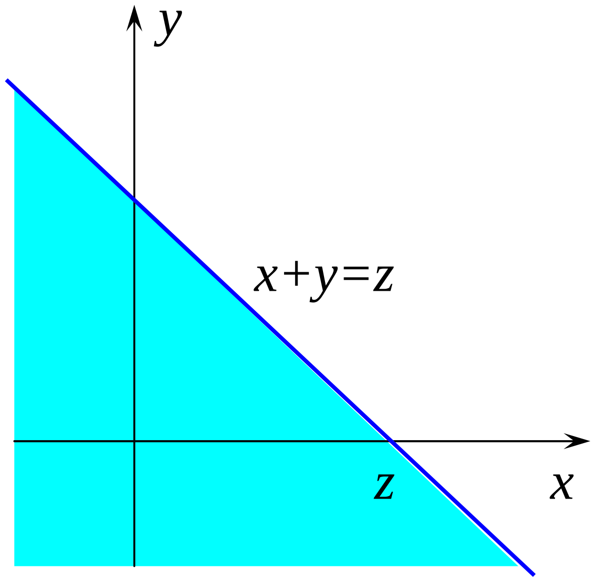
若$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$且相互独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

例2（P_{51}例3.13）设$X \sim N(0,1)$与$Y \sim N(0,1)$独立，求 $Z=X+Y$的分布。

解 $F_Z(z) = P(X+Y \leqslant z)$

$$= \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y) dx] dy$$



$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{2})} \exp[-\frac{(y-z/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}] dy \right] e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$X+Y \sim N(0,2)$

•连续型卷积公式:

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy \ =\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$\xlongequal{X\text{与}Y\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \ =\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

•正态分布可加性:

若$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$且相互独立，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2\ ,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

•正态分布的线性组合性质:

若$X_i\sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$,$i=1,2,\ldots,n$,相互独立，则对任何实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$,有

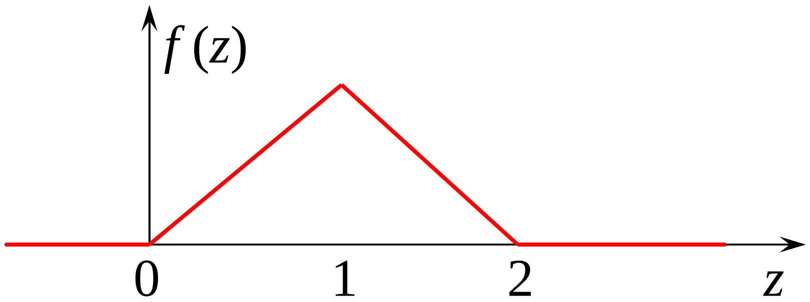
$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

例3（P_{95}例3.13）设 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

解 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

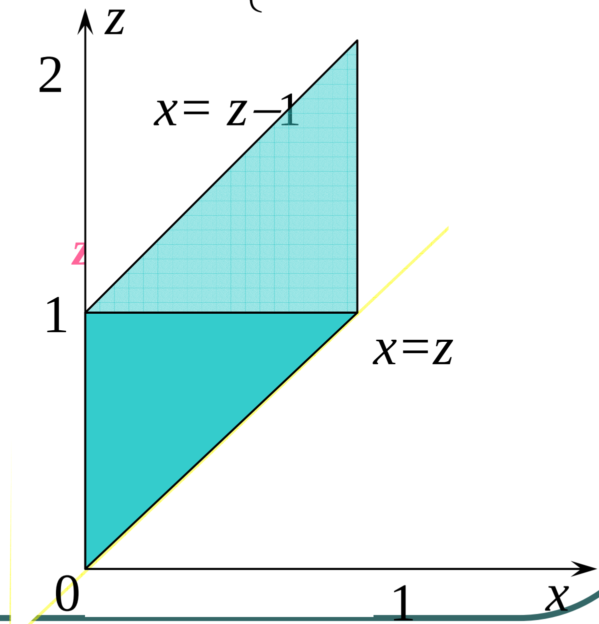
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx=z, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z, & 1\le z<2\\ 0, & z\ge 2\end{cases}$$



注意到被积函数的非零区域为：

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$



3.5.2 商的分布

例4 设(X,Y)的联合概率密度如下，求$Z=X/Y$的分布.

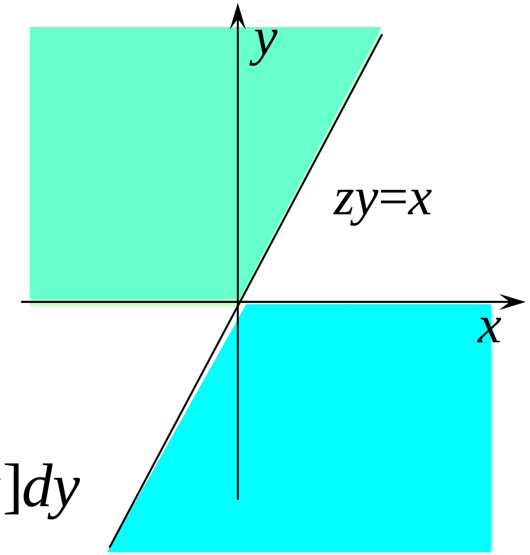
$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解

$$F_Z(z)=P\left(\frac{X}{Y}\le z\right)=\iint_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{y>0,\ x\le zy} f(x,y)\,dxdy$$

$$+\iint_{y<0,\ x\ge zy} f(x,y)\,dxdy$$



$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)\,dx\right]dy+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_0^{+\infty} yf(zy,y)\,dy+\int_{-\infty}^{0}-yf(zy,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy$$

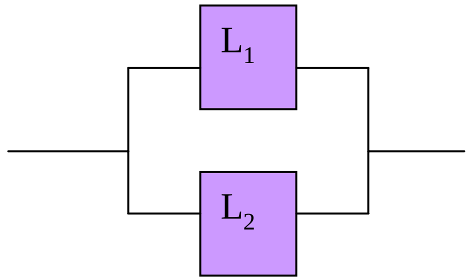
$$\begin{cases}0<zy<1\\ 0<y<zy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<y<1/z\\ 1<z\end{cases}\qquad f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 1\\ \int_0^{1/z} y\cdot 3zy\,dy=z^{-2}, & z>1\end{cases}$$

3.5.3 最大（小）值的分布

例5（P_{53}例3.16） 设系统L由两个独立的子系统L_1，L_2构成，子系统的寿命 $X_i \sim E(\lambda)$，$i=1,2$，且相互独立。就下面构成系统的方法分别求L的寿命Z的分布：(1)并联；(2)串联；(3)备用。

解 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1)并联 $Z=\max(X_1, X_2)$



$F_Z(z) = P(\max(X_1, X_2) \leqslant z)$

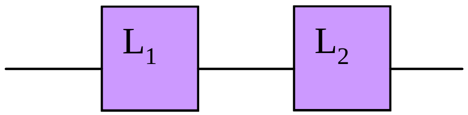
$\quad = P(X_1 \leqslant z,\ X_2 \leqslant z) = [F_X(z)]^2\ P(X_2 \leqslant z)$

$f_Z(z) = F_Z'(z) = 2F_X(z)\, f_X(z) = \begin{cases}2(1-e^{-\lambda z})\lambda e^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

一般

若$X_1, X_2,\ldots, X_n$独立同分布，则 $f_{max}(x) = n[F(x)]^{n-1} f_X(x)$

（2）串联　$Z = \min(X_1, X_2)$



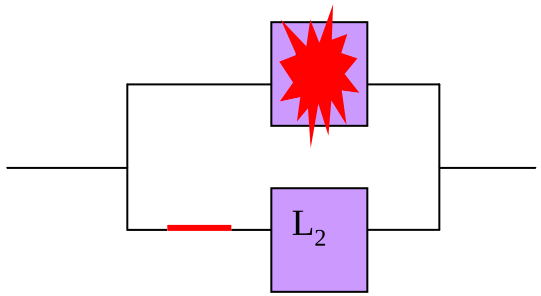
$$F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2) \leqslant z) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > z)$$
$$= 1 - P(X_1 > z,\ X_2 > z) = 1 - [1 - F_X(z)]^2$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = 2[1 - F_X(z)]\, f_X(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

一般

若$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布，则 $f_{max}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f_X(x)$

（3）备用 $Z = X_1 + X_2$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\,dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

习题选讲

例3.2 设随机变量X_1, X_2的概率分布为

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

且$P(X_1X_2=0)=1$，求（X_1, X_2）的联合分布。

解

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	