《离散数学》模拟试题参考答案

一、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1．A　2．A　3．B　4．B　5．A　6．A　7．D　8．D　9．C　10．C

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1．$\exists x \neg A(x)$　　2．x，y，z；x，y　　3．15　　4．Φ；$\{1\}$

5．$(P(a) \wedge P(b)) \wedge (S(a) \vee S(b))$　　6．$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；2　　7．$a$

8．3；1　　9．自由变元　　10．$(R_1^{-1} - R_2^{-1})R$

三、计算题（每小题 7 分，共 42 分）

1．解：设 $A = ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \to R)) \to \neg(P \wedge \neg R)$，其真值表如下：

$P\ \ Q\ \ R$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \to R$	$(\neg P \vee Q) \wedge (Q \to R)$	$\neg R$	$P \wedge \neg R$	$\neg(P \wedge \neg R)$	A
0 0 0	1	1	1	1	1	0	1	1
0 0 1	1	1	1	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	0	0	1	0	1	1
0 1 1	1	1	1	1	0	0	1	1
1 0 0	0	0	1	0	1	1	0	1
1 0 1	0	0	1	0	0	0	1	1
1 1 0	0	1	0	0	1	1	0	1
1 1 1	0	1	1	1	0	0	1	1

由真值表可知，公式 A 为重言式。

2．解：$r(R) = R \cup I_A = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

$= \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), \underline{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}\}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\} \cup \{(b, a), (a, b), (c, b), (d, c)\}$

$= \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), \underline{(c, b), (d, c)}\}$

$R^2 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d)\}$

$R^3 = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, c)\}$

$R^4 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d)\} = R^2$

$t(R) = \cup R^i = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), \underline{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (a, d)}\}$

3．**解**：$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$

$= (A \cup B) - A$

$= (A \cup B) \cap A'$

$= (A \cap A') \cup (B \cap A')$

$= \Phi \cup (B - A)$

$= B - A$

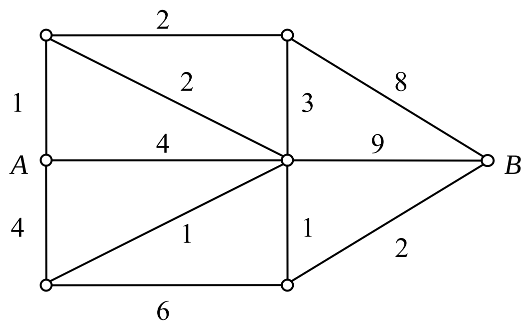
4．**解**：对于任意的 $3k_1, 3k_2 \in H\ (k_1, k_2 \in \mathrm{I})$，因为 $3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \in H$，所以运算 $+$ 在H上是封闭的。因此$< H; + >$是$< \mathrm{I}; + >$的子代数。

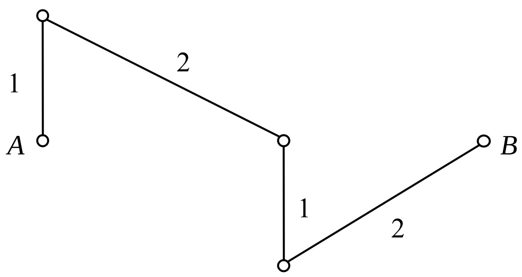
又$< \mathrm{I}; + >$的单位元是 0，显然 $0 \in H$。

对于任意 $3k \in H$，其逆元 $-3k = 3(-k) \in H$。

故$< H; + >$是群$< \mathrm{I}; + >$的子群。

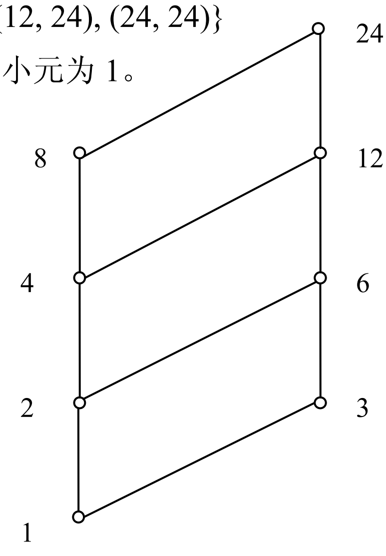
5．**解**：从 A 到 B 的最短路如右图所示，权值为 6。





6．**解**：$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (1, 24),$
$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (2, 24),$
$(3, 3), (3, 6), (3, 12), (3, 24), (4, 4), (4, 8), (4, 12), (4, 24),$
$(6, 6), (6, 12), (6, 24), (8, 8), (8, 24), (12, 12), (12, 24), (24, 24)\}$

$< A; R >$的哈斯图如下。显然，A 的最大元为 24，最小元为 1。



四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1．**证**：设 g 为群$<G; *>$的生成元，单位元为 e。

由题设，$<H; *>$是$<G; *>$的子群。

若$<H; *>$为单位元群$<\{e\}; *>$，则显然$<H; *>$是循环群。

若$<H; *>$为不是单位元群，则必有某$g^n \in H\ (n \neq 0)$，此时

$$(g^n)^{-1} = g^{-n} \in H$$

因此，H中必有g的正整数次幂。设r是使得$g^r \in H$的最小正整数。

对于任意$g^s \in H$，令$s = mr + i\ (0 \le i < r)$，则有

$$g^i = g^{s-mr} = g^s * (g^r)^{-m} \in H$$

但由 r 是最小正整数之假设，必有 $i = 0$。

于是$s = mr$，即$g^s = (g^r)^m$。

故$< H; * >$是由g^r生成的循环群。

综上所述，命题得证。

2．**证**：设无向简单图G是不连通的，其k个连通分支为$G_1, G_2, \ldots, G_k$。任取结点$u, v \in G'$，

（1）若 u 和 v 不在图 G 的同一个连通分支中，则$\{u, v\}$不是图 G 的边，因而$\{u, v\}$是图 G' 的边；

（2）若u和v在图G的同一个连通分支中，不妨设其在连通分支$G_i\ (1 \le i \le k)$中，在不同于G_i的另一连通分支上取一结点w，则$\{u, w\}$和$\{w, v\}$都不是图G的边，因而$\{u, w\}$和$\{w, v\}$都是G' 的边。

综上可知，不管哪种情况，u 和 v 都是连接的。

由 u 和 v 的任意性可知，G' 是连通的。

3．**解**：令 $F(x)$：x 会操作计算机；$G(x)$：x 认识 26 个英文字母；$H(x)$：x 是文盲；$I(x)$：x 是很聪明的。

前提：$\forall x(F(x) \to G(x)), \forall x(H(x) \to \neg G(x)), \exists x(H(x) \wedge I(x))$

结论：$\exists x(I(x) \wedge \neg F(x))$

证明如下：

(1)	$\exists x(H(x) \wedge I(x))$	前提
(2)	$H(c) \wedge I(c)$	(1)；ES 规则
(3)	$H(c)$	(2)；化简式
(4)	$I(c)$	(2)；化简式
(5)	$\forall x(H(x) \to \neg G(x))$	前提
(6)	$H(c) \to \neg G(c)$	(5)；US 规则
(7)	$\neg G(c)$	(3), (6)；假言推理
(8)	$\forall x(F(x) \to G(x)$	前提
(9)	$F(c) \to G(c)$	(8)；US 规则
(10)	$\neg F(c)$	(7), (9)；拒取式
(11)	$I(c) \wedge \neg F(c)$	(4), (10)；$A, B \Rightarrow A \wedge B$
(12)	$\exists x(I(x) \wedge \neg F(x))$	(11)；EG 规则