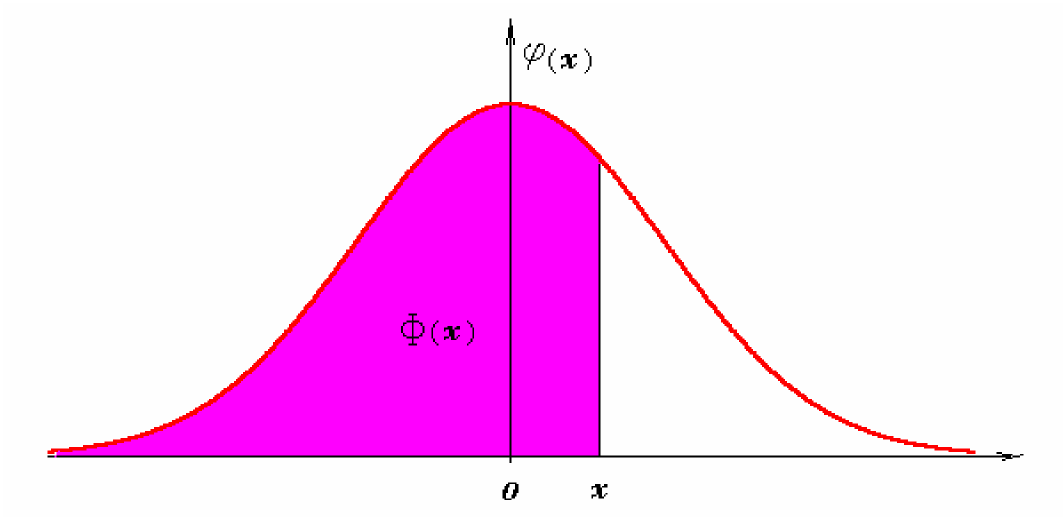
湖北省精品课程

概率论与数理统计



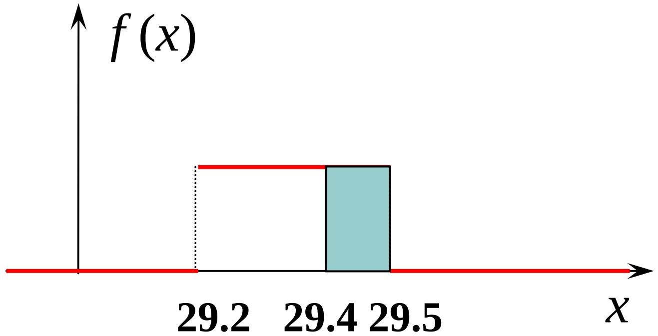
华中科技大学 概率统计系

叶　鹰　副教授

2.3.4　常见C.R.V.的分布

1．均匀分布　　$X \sim \mathrm{U}(a, b)$ (Uniform)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



例3（P_{54}例2.12）　设某地区讯期的一周内最高水位（单位：米）X~U(29.20，29.50)。求该周内最高水位超过29.40米的概率。

解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{29.5-29.2}=\dfrac{10}{3}, & 29.2 \le x \le 29.5 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

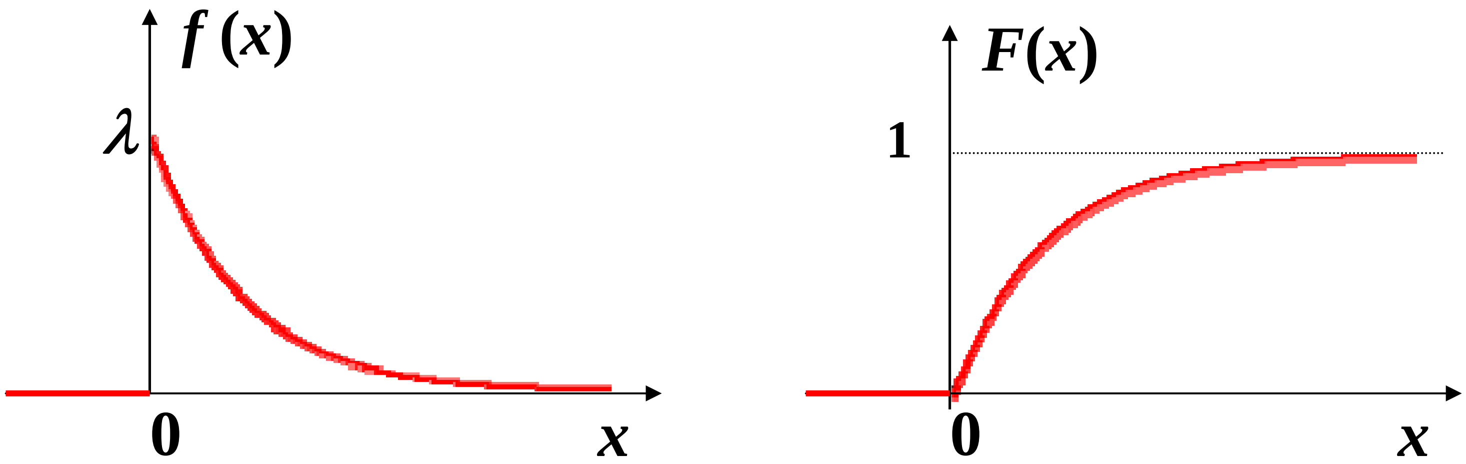
故

$$P(X > 29.4)=\int_{29.4}^{29.5}\frac{10}{3}dx=\frac{1}{3}$$

2．指数分布

$$X \sim \mathbf{E}(\lambda) \quad \text{(Exponent)}$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



例4（P_{56}例2.14）设一大型设备在任何长为 t 时间内发生故障的次数$N(t)$~$P(\lambda t)$。

（1）求相继两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布；

（2）求在设备无故障工作8小时的条件下，再无故障工作8小时的概率P。

解（1） $\boldsymbol{F(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N(t) = 0)}$

$$= 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad t \geqslant 0$$

$t < 0$时，$F(t) = P(\varnothing) = 0$ 即 $\boldsymbol{T \sim E(\lambda)}$

（2） $\boldsymbol{P = P(T > 16 | T > 8)} = \dfrac{P(T > 16, T > 8)}{P(T > 8)} = \dfrac{P(T > 16)}{P(T > 8)}$

$$= \frac{1 - F(16)}{1 - F(8)} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-8\lambda} = \mathrm{P}(T > 8)$$ 无记忆性

例5 设某产品的寿命(正常使用的时间) $X \sim E(\lambda)$，

(1) 已知λ=0.1，求$P(X>100)$；(2) 若$P(X>100)=0.1$，求λ.

解 (1) $P(X>100)=1-F(100)$

$$=e^{-100\times 0.1}=0.0000454$$

(2) $P(X>100)=e^{-100\lambda}=0.1$

$-100\lambda=\ln 0.1$，$\lambda=(\ln 0.1)/(-100)=0.023$

一般，由 $p=P(X>a)=e^{-a\lambda}$ 知，当a固定时，p是λ的单调降函数，当p固定时，a也是λ的单调降函数，这说明：

寿命有随着 λ 的增大而缩短的趋势。

3．正态分布

•伽利略（G.Galileo，1564~1642）

《关于两个主要世界系统的对话——托雷密和哥白尼》

•辛普森（Thomas Simpson，1710~1761）

《在应用天文学中取若干观察值的平均的好处》

•拉格朗日（J.L.Lagrange，1736~1813）

《关于取平均方法的有用性……》

•拉普拉斯（P.S.Laplace，1749~1827）

《？ ？ ？ 》

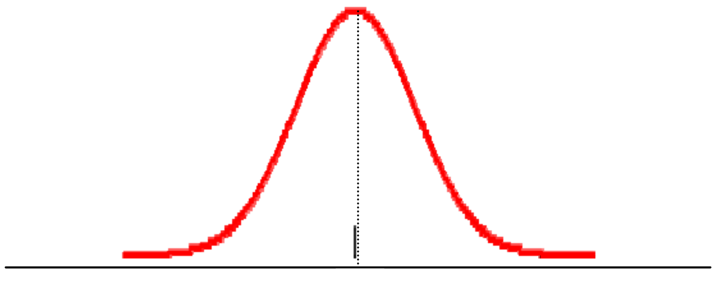
•高斯（Carl Friedrich Gauss，1777~1855）

《绕日天体运动的理论》(1809)

3．正态分布

$$f(x)=g(x^2)$$

$$=ce^{-x^2}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy]^{\frac{1}{2}}=[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy]^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{x=r\cos\theta}}\atop{y=r\sin\theta}\quad [\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi}$$

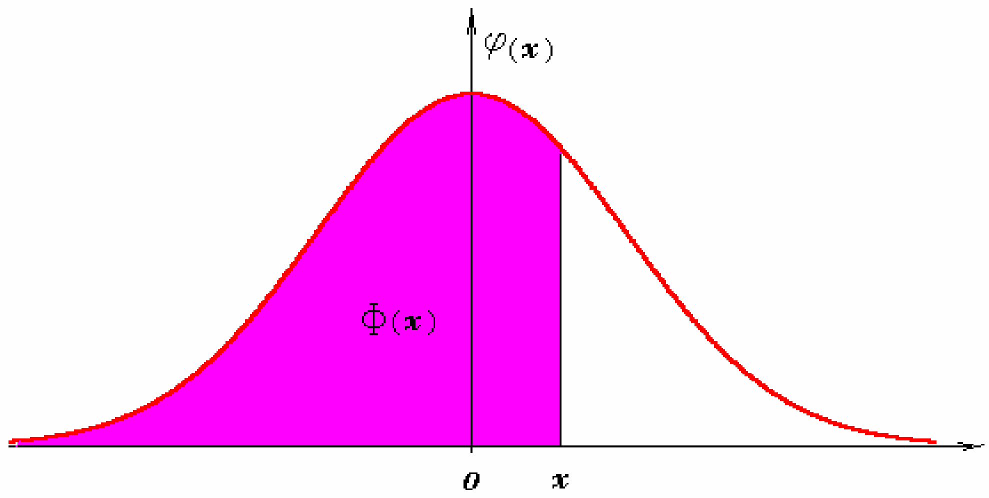
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

3．正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Normal

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx= \quad ?$$

标准正态分布：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$



3．正态分布

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$P(a<X<b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad =\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3．正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $P(a<X<b)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

例5 设 $X\sim N(1, 4)$，求 $P(X<1)$, $P(1<X<5)$, $P(X<0)$, $P(|X-1|<2)$，$P(X>10)$。

解 (1) $P(X<1)=\Phi(\frac{1-1}{2})-\Phi(\frac{-\infty-1}{2})=\Phi(0)=0.5$

一般 $P(X<\mu)=P(X>\mu)=0.5$

(2) $P(1<X<5)=\Phi(\frac{5-1}{2})-\Phi(\frac{1-1}{2})=\Phi(2)-0.5=0.4772$

(3) $P(X<0)=\Phi(\frac{0-1}{2})=\Phi(-0.5)=1-\Phi(0.5)=0.3085$

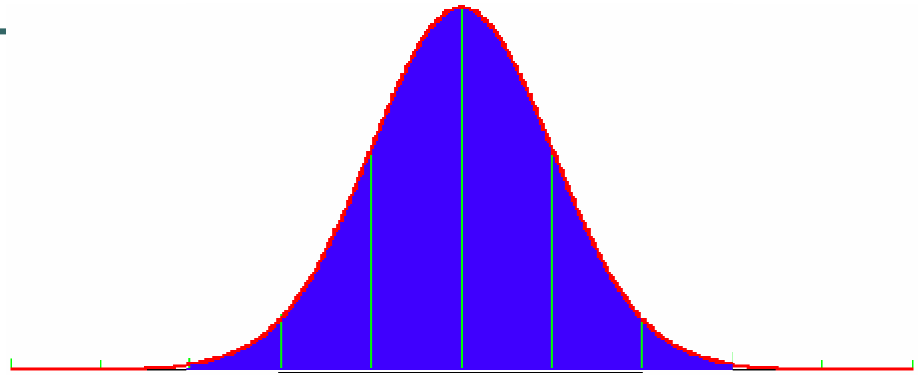
一般 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

(4) $P(|X-1|<2)=P(-1<X<3)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$

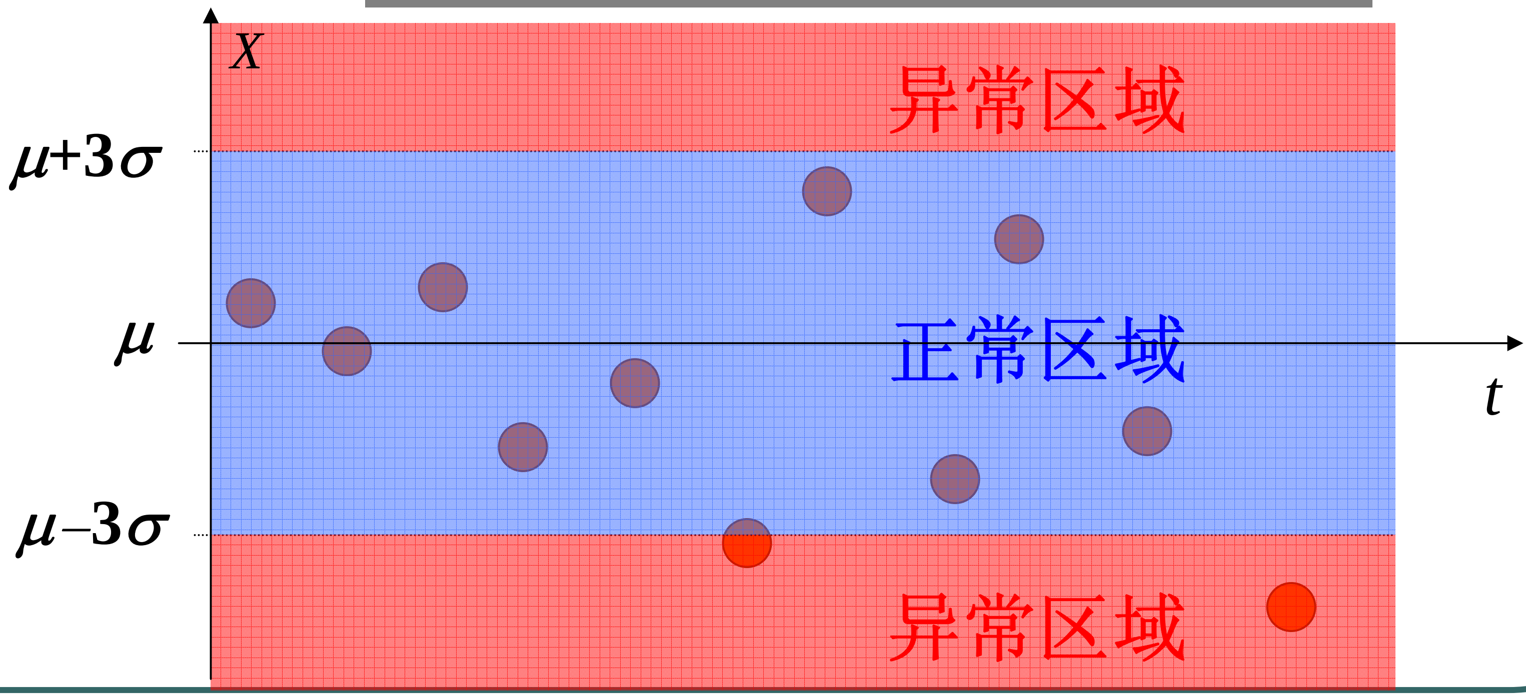
一般 $P(|X-\mu|<a\sigma)=2\Phi(a)-1$

(5) $P(X>10)=1-\Phi(\frac{10-1}{2})=1-\Phi(4.5)\approx 0$

3σ原则



a	1	2	3
$P(\|X-\mu\|<a\sigma)$	0.6827	0.9545	0.9973



例6（P_{60}例2.17）由历史记录，某地区年降雨量 $X \sim N(600, 150^2)$（单位：mm）

问:(1) 明年降雨量在400mm~700mm之间的概率是多少?

(2) 明年降雨量至少为300mm的概率是多少?

(3) 明年降雨量小于何值的概率为0.1?

解 (1) $P(400 < X < 700) = \Phi(\frac{700-600}{150}) - \Phi(\frac{400-600}{150})$

$$= \Phi(0.67) - \Phi(-1.33) = 0.6568$$

(2) $P(X \geq 300) = 1 - \Phi(\frac{300-600}{150}) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$

(3) $P(X < a) = \Phi(\frac{a-600}{150}) = 0.1 \Rightarrow \frac{a-600}{150} = \Phi^{-1}(0.1) = -1.285$

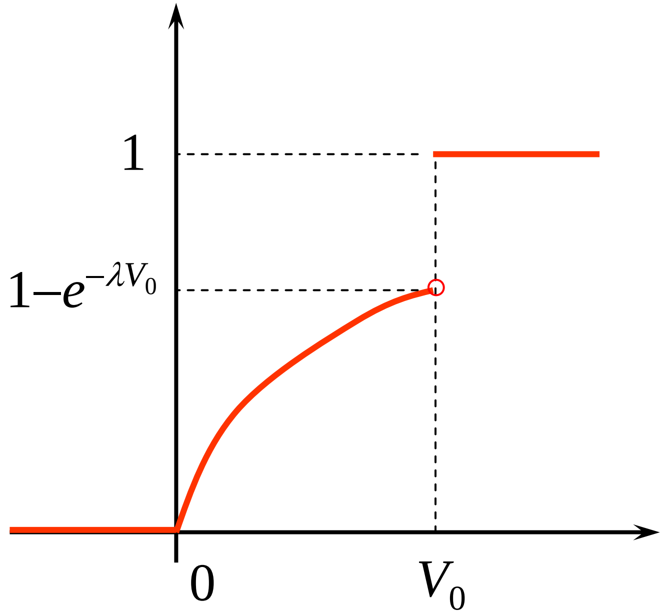
$\Rightarrow$ ***a*=407.7675**

例7(P_{30}例2.11)　设某电路的电压 V是随机变量且$V\sim E(\lambda)$，现用电压表进行测量,电压表的最大读数为 V_0。以X 记电压表的读数，求的分布函数。

解　由题意　$X=\min(V,V_0)$，故

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\leqslant x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0.\end{cases}$$

$$P(X=x)=\begin{cases}e^{-\lambda V_0}\ \alpha, & x=V_0,\\ 0, & x\neq V_0,\end{cases}$$



$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (1-e^{-\lambda x})/(1-\alpha), & 0\leqslant x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0.\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0,\end{cases}$$

$$\mathbf{F(x)=(1-\alpha)F_1(x)+\alpha F_2(x)}$$

——混合型随机变量

习题讲评

练习1.5 能否把n个任意事件$A_1,A_2,\ldots A_n$之和表示为n个互斥事件之和？请给出这种**表示**。

解 (1) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i\neq j} A_i A_j + \sum_{i\neq j\neq k} A_i A_j A_k - \cdots + (-1)^{n-1} A_1 A_2 \cdots A_n$$

(2) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{k-1} A_k \overline{A}_{k+1} \cdots \overline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} [A_k - \bigcup_{i\neq k} A_i]$$

(3) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{k-1} A_k = \sum_{k=1}^{n} [A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i]$$

(4) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} A_1 \cdots A_k \overline{A}_{k+1} \cdots \overline{A}_n$$