第六章 系统函数

一：系统函数的三种图示法

二：系统函数极点和零点与系统时域特性的关系

三：系统函数的极点、零点与系统频率特性的关系

前讲回顾

1:求全响应：拉普拉斯变换

$$r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e'(t)+5e(t) \quad e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$$

$r_{zi}(0^-)=2$， $r'_{zi}(0-)=1$，

$$r''(t)\leftrightarrow s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)=s^2R(s)-2s-1$$

$$\boxed{\begin{aligned}&r(0^-)=r_{zi}(0^-)+r_{zs}(0^-)\\&r_{zs}(0^-)=0\end{aligned}}$$

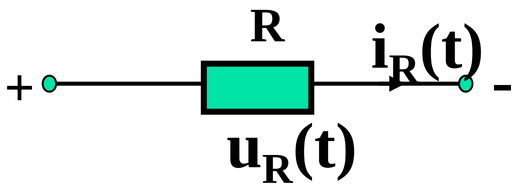
$$s^2R(s)-2s-1+5sR(s)-10+6R(s)=s\frac{1}{s+1}+\frac{5}{s+1}$$

$$R(s)=\frac{2s+11}{s^2+5s+6}+\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$R_{zi}(s) \qquad E(s)H(s)=R_{ZS}(s)$$

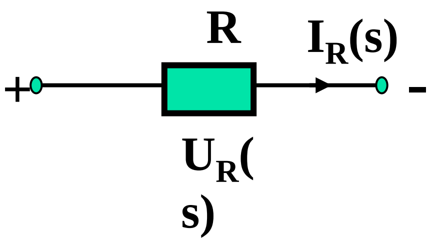
$$\boxed{H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}}$$

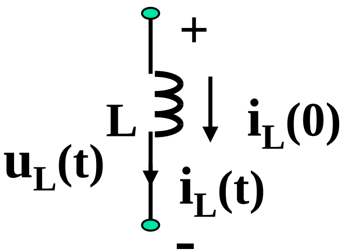
2：复频域的电路模型



$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

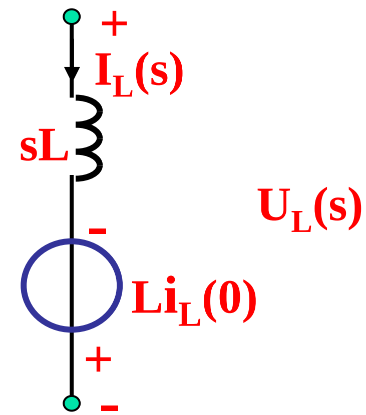
$$U_R(s) = RI_R(s)$$

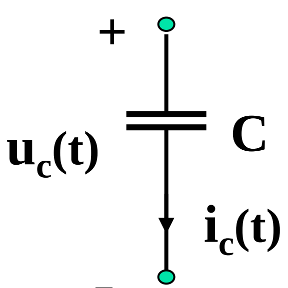




$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

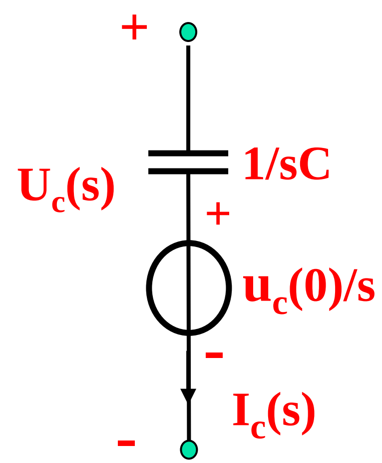
$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$$



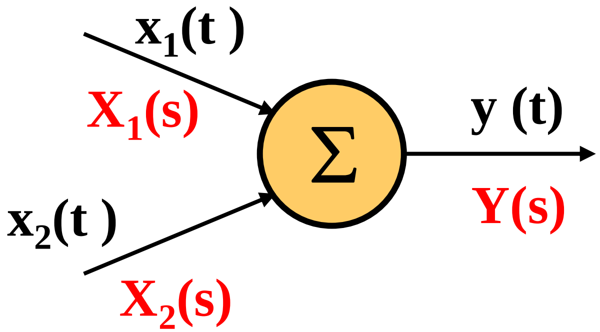


$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_C(0)$$

$$U_c(s) = \frac{1}{sC}I_c(s) + \frac{1}{s}u_c(0)$$

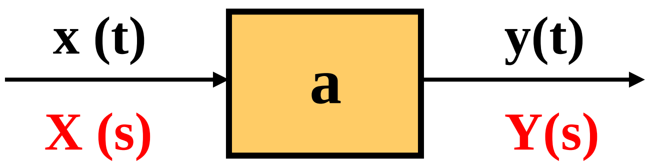


3:线性系统的模拟



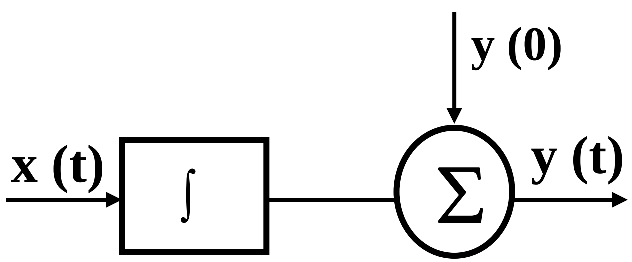
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

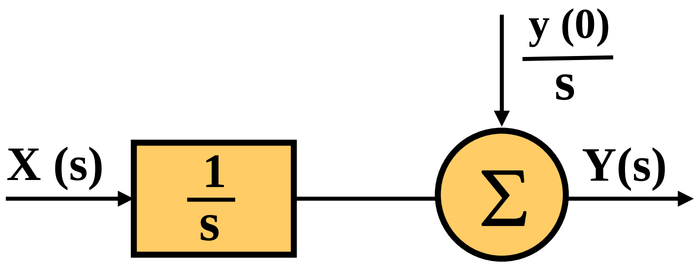


$$y(t) = a\,x(t)$$

$$Y(s) = a\,X(s)$$



$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau\boxed{+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau}$$



$$Y(s)=\frac{y(0)}{s}+\frac{X(s)}{s}$$

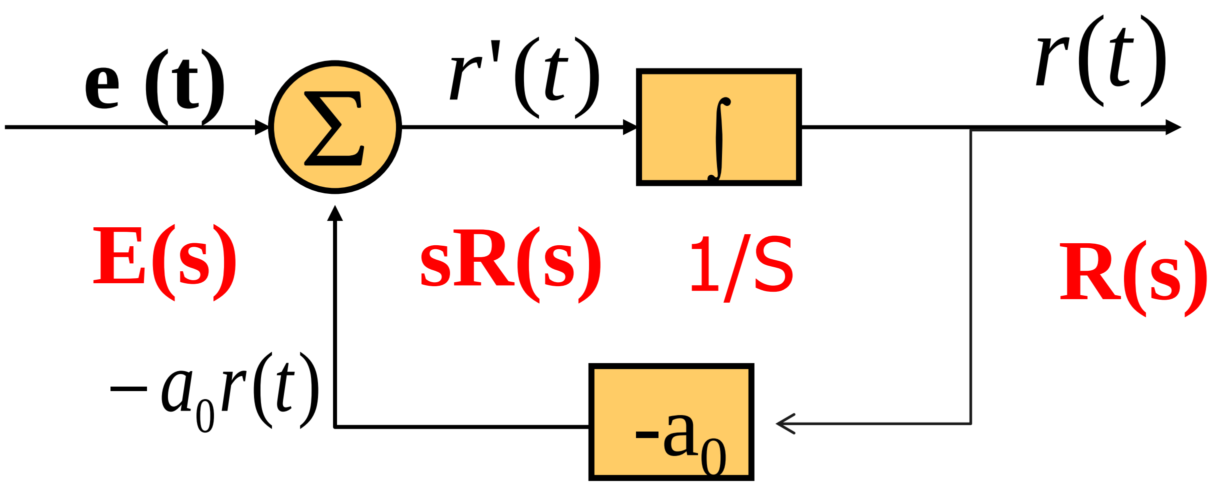
直接模拟

- 一阶系统模拟 $r'(t)+a_0r(t)=e(t)$ 初态为0

$$1: \int_0^t r'(t)dt = r(t)$$

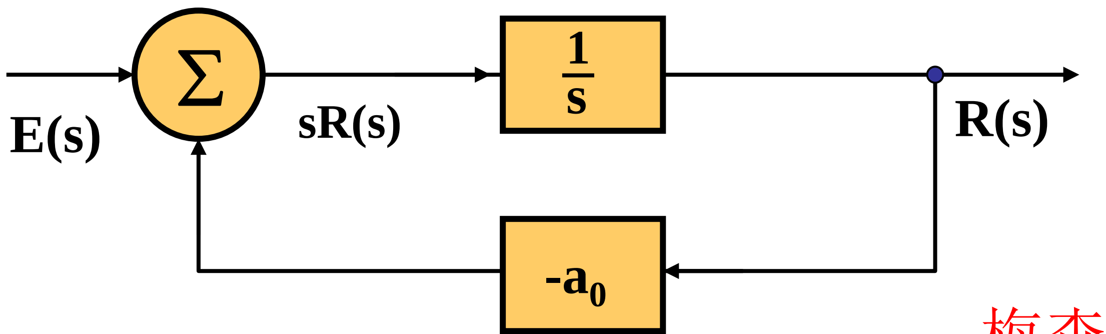
$$2: r'(t) = e(t) - a_0 r(t)$$

$sR(s) = E(s) - a_0R(s)$

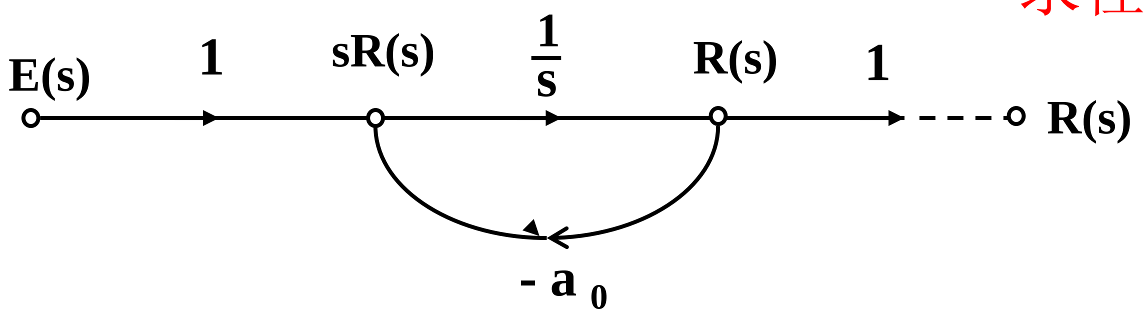


4：信号流图 结点、路径以及标注在路径上的传输值的模拟图

- 结点代表信号变量，同时兼有加法器功能
- 路径连接结点，变量间的因果关系，起点因，终点果
- 传输值是两个变量之间的转移函数



梅森（Mason）公式
求任意流图的的传输函数



开讲前言－本讲导入

- **系统函数在前面的章节已经介绍**
  - 时域中转移算子
  - 频域或复频域关于系统分析用到系统函数
  - 通过系统函数求解零状态响应
  - 通过冲击响应确定系统函数
- **从系统分析的角度看系统函数**
  - 系统函数与系统的稳定性
  - 系统函数与系统的频率特性

一：系统函数的三种图示法

1:频率特性

2:复轨迹

3:极点零点图

系统函数

$$\xrightarrow[E(s)]{e(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \xrightarrow[R(s)]{r(t)}$$

$$h(t) \leftrightarrow H(s)$$

单位冲激响应　　系统函数

线性时不变系统的系统函数是有理的

$$H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

1:频率特性

h(t)的傅里叶变换H(jw)存在

频率响应函数 $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ 收敛条件包括0时

$$H(j\omega) = U(j\omega) + jV(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

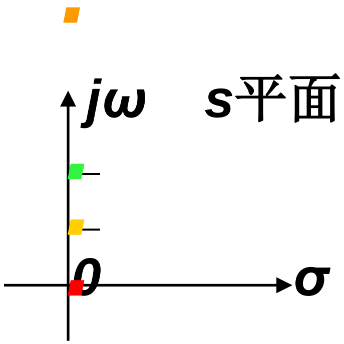
幅频特性：$\left|H(j\omega)\right| \sim \omega$

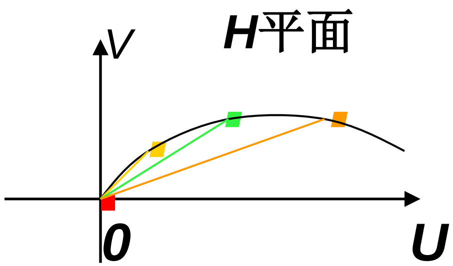
相频特性：$\varphi(\omega) \sim \omega$

2复轨迹

在正弦信号激励下（即 $\sigma=0, s=j\omega$ ），复变量s在s平面中沿 $j\omega$ 轴变化（ $j0\rightarrow j\infty$ ），映射到**H**平面中得到的一条曲线称为系统函数的复轨迹（用极坐标表示）。

$$H(s)=\left|H\right|e^{j\varphi}=U+jV \qquad U=\mathrm{Re}[H] \qquad V=\mathrm{Im}[H]$$





3:极点零点图

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad H_0=\frac{b_m}{a_n}$$

$$H(s)=\infty$$

$D(s)=0$ 的根：$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 称为函数 $H(s)$ 的极点

$$H(s)=0$$

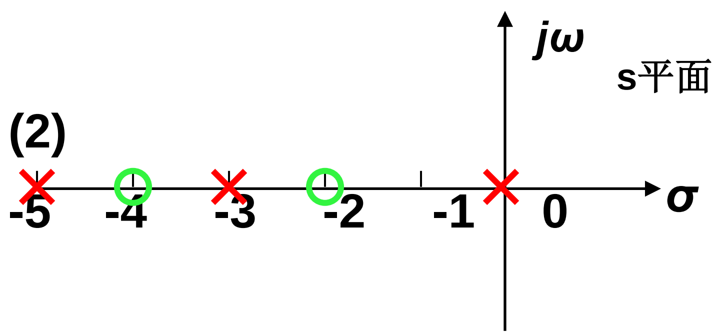
$N(s)=0$ 的根：$z_1,z_2,\cdots,z_m$ 称为函数 $H(s)$ 的零点

极零图：把系统函数的极点和零点标绘在s平面中，就成为极点零点分布图，简称极零图。

例 $H(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)^2}$

极点：$p_1=0$(一阶)，$p_2=-3$(一阶)，$p_3=-5$(二阶)

零点：$z_1=-2$(一阶)，$z_2=-4$(一阶)



系统函数与极点零点分布规律

- 极点和零点在实轴上或者与实轴镜像成对。
- 个数相同

n< m，则当 s → ∞ 时,无穷大处有（ m - n）阶极点

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_m}{a_n} s^{m-n} = \infty$$

n> m，则当 s → ∞ 时,无穷大处有（ n - m）阶零点

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_m s^m}{a_n s^n} = \lim_{s\to\infty} \frac{b_m}{a_n} s^{-(n-m)} = 0$$

复变函数理论：S为0和无穷大都是在虚轴上

分析极点零点的意义

从极点分布可以知道系统响应所具有的模式，从而可以了解系统是否稳定。

从零点分布可以了解响应分量的相位与幅度。

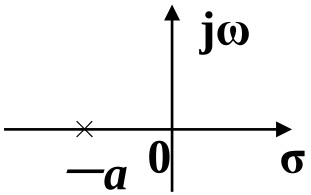
从极零点分布可以求得系统的频率特性。

二：系统函数极点和零点与系统时域特性的关系

1：极点在左半s平面

1）在实轴 $p_i = -a, a > 0$

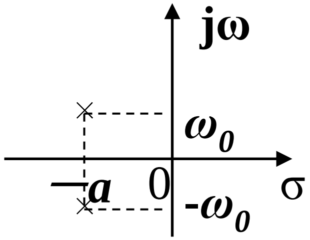
$$H_i(s) = \frac{k_i}{s+a} \Rightarrow h_i(t) = k_i e^{-at}$$



——按指数规律衰减

2）不在实轴上 $p_i = -a \pm j\omega_0$

$$H_i(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \Rightarrow h_i(t) = e^{-at} Cos\omega_0 t$$



——减幅的余弦振荡

2：极点在虚轴上

1):原点

- 单极点，例如 $H(S)=b_k/s$ $h(t)=b_k\varepsilon(t)$ 阶跃保持
- 重极点，例如 $H(S)=b_k/s^2$ $h(t)=b_k t\varepsilon(t)$ 增长无界

2):轴上

- 单极点，例如 $h(t)=\cos\omega t.\ t>0$ $p_{1,2}=\pm j\omega$(等幅振荡)

$$H_i(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}\leftrightarrow h_i(t)=Cos\,\omega_0 t$$

- 重极点，例如 $h(t)=t\sin\omega t\varepsilon(t)$ $p_{1,2,3,4}=\pm j\omega$(增长振荡)

$$H(s)=\frac{s}{\left(s^2+\omega_1^2\right)^2}$$

3：极点在右半平面

1）. 在实轴上（正）$p_i = a, a > 0$

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s-a} \Rightarrow h_i(t) = k_i e^{at}$$

——按指数规律增长

2). 不在实轴上（正）

$$p_i = a \pm j\omega_0, a > 0$$

$$H_i(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0{}^2} \Rightarrow h_i(t) = e^{at} Cos\omega_0 t$$

——增幅的余弦振荡

结论一：极点零点分布决定时域波形

1：极点位置决定时域波形变化规律

（如：衰减/增幅速率、振荡频率等）

- 时间函数的幅度由极点的实部决定
- 时间函数的频率由极点的虚部决定

2：零点只决定时间函数的相位和幅度

$$H(s)=\frac{s+b}{(s+a)^2+\omega^2}$$

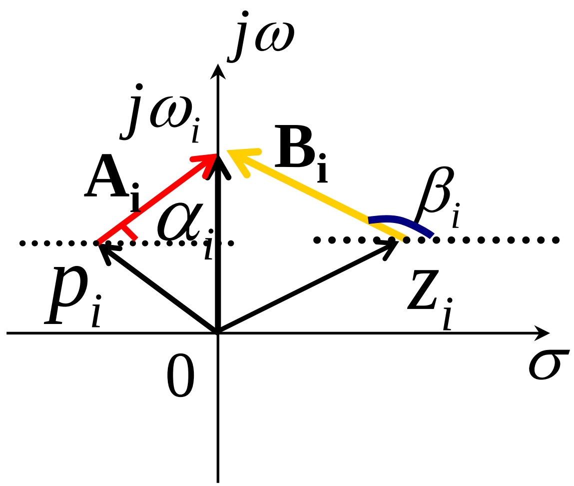
$$h(t)=\frac{\sqrt{(b-a)^2+\omega^2}}{\omega}e^{-at}\cos(\omega t-\varphi) \qquad \varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{\omega}$$

三：系统函数的极点、零点与系统频率特性的关系

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\qquad H_0=\frac{b_m}{a_n}$$

$$H(j\omega)=H_0\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$j\omega, z_i, p_k$ 均为复数，可用矢量表示



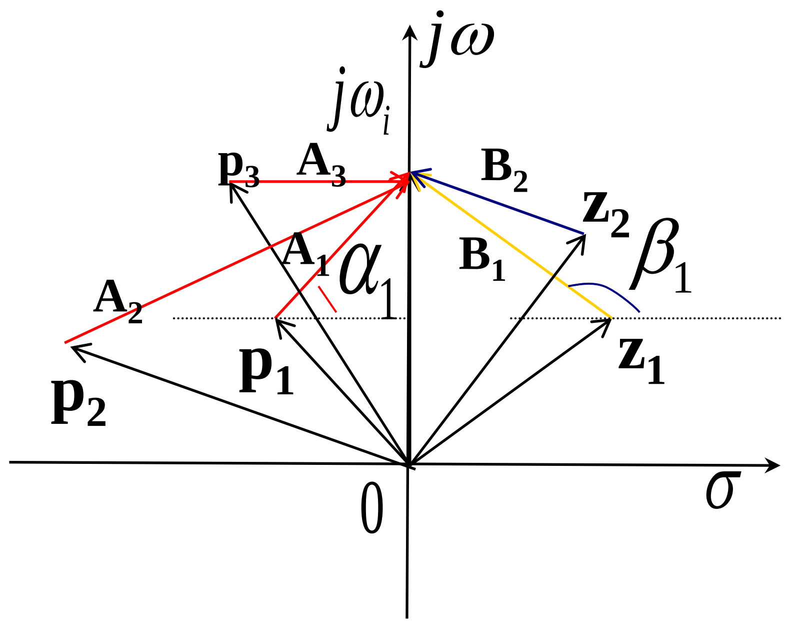
$$j\omega-z_i=B_ie^{j\beta_i}$$

$$j\omega-p_i=A_ie^{j\alpha_i}$$

$$H(j\omega)=H_0\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)(j\omega-p_3)}$$

$$H(j\omega)=\frac{B_1B_2}{A_1A_2A_3}e^{j(\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|\mathrm{H}(j\omega)|=\frac{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}\qquad \varphi(\omega)=\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$



- 针对变量变化趋势，列表反映

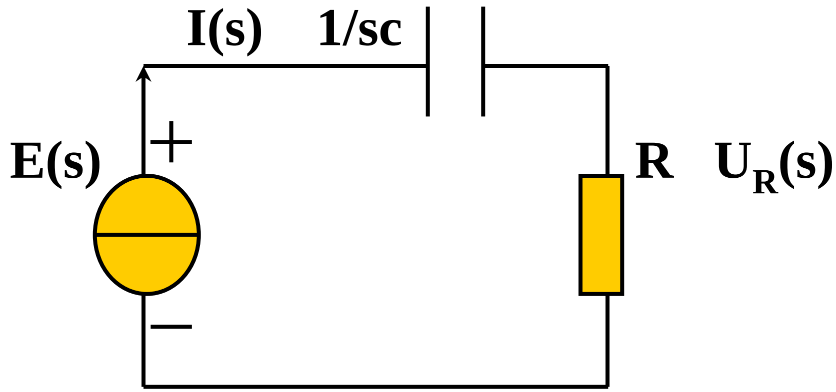
列表:

ω	$\|H(j\omega)\|$	$\varphi(\omega)$
ω_1	$\|H(j\omega_1)\|$	$\varphi(\omega_1)$
ω_2	$\|H(j\omega_2)\|$	$\varphi(\omega_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$|H(\omega)| \sim \omega$　　　　$\varphi(\omega) \sim \omega$

作出幅频曲线　　　　作出相频曲线

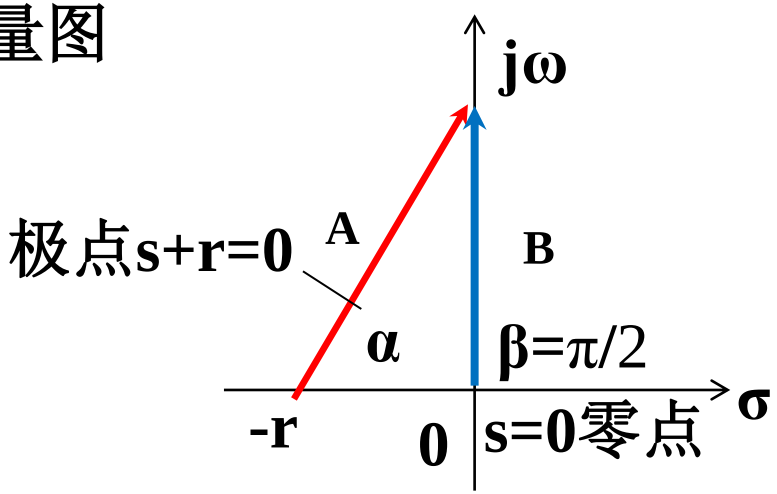
例:RC电路在正弦电压作用下的频率响应特性。



① $$H(s)=\frac{U_R(s)}{E(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sc}}=\frac{s}{s+r}$$ 式中：$r=\frac{1}{RC}$， **p= -r，z=0；**

② $$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+r}=\frac{\dot{B}}{\dot{A}}=\frac{B}{A}e^{j\varphi(\omega)}$$

③作矢量图



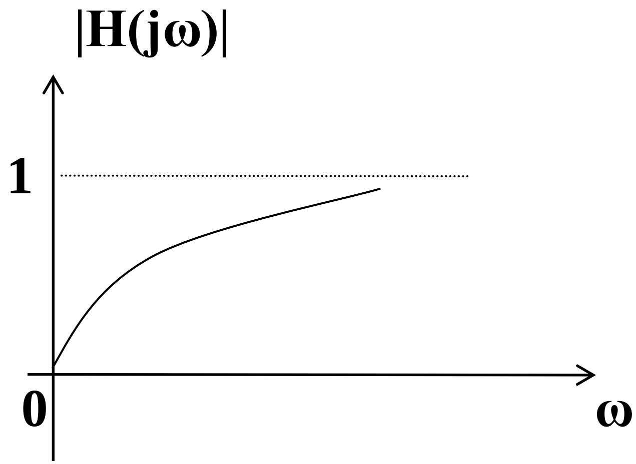
$|H(j\omega)|=B/A$

$\varphi(\omega)=\beta-\alpha$

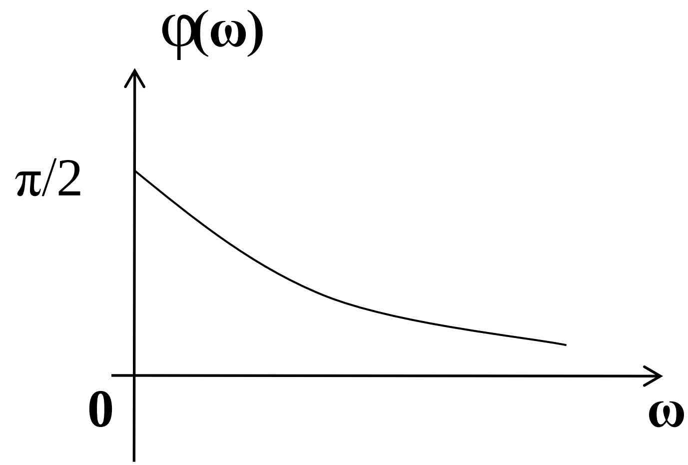
④列表

ω	B	A	|H(jω)|	φ(ω)
0	0	r	0	π/2
ω	↑↑	↑	↑	↓
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	∞	∞	1	0

⑤描绘趋势

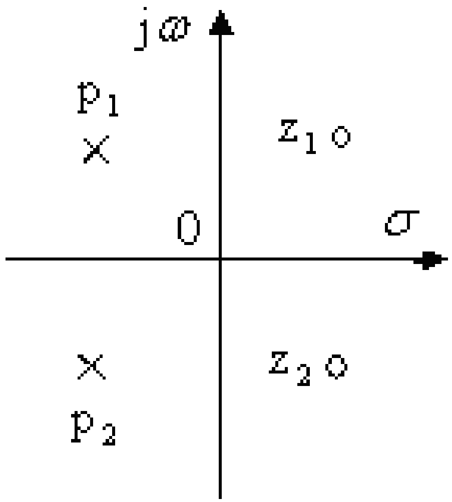


幅频曲线



相频曲线

全通函数：在右半面的零点和在左半面的极点分别对虚轴互成镜像的网络函数。



$$p_1 = p_2^* = -z_2 = -z_1^*$$

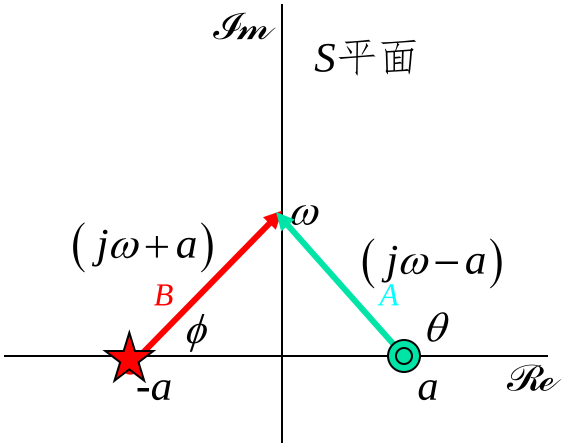
由于 $|H(j\omega)| = H_0 \dfrac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$

于是 $|H(j\omega)| = H_0$

即此种网络对各种频率的信号可以一视同仁的传输。故常来做相位校正而不产生幅度失真。

全通系统

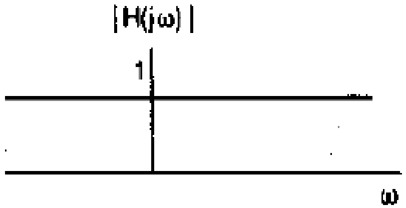
零极点对称虚轴，
频率响应的模与频率无关，是一个常数

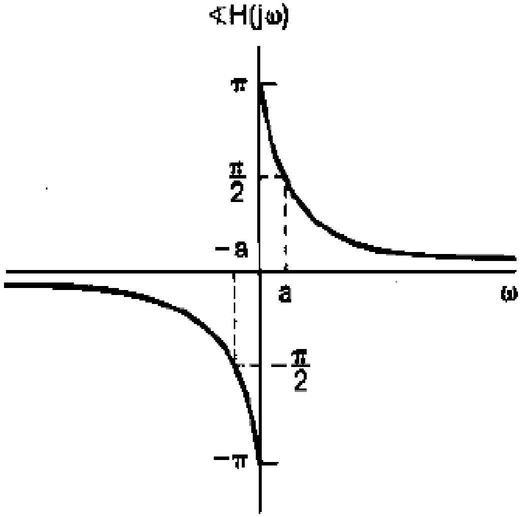


$$H(j\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+a}$$

$$|H(j\omega)|=1$$

$$\angle\{H(j\omega)\}=\theta-\phi=\pi-2\phi=\pi-2\arctan(\omega/a)$$





本讲小结

- 系统函数的定义
- 系统函数的表示方法
  - 频率特性、复轨迹、极点零点图
  - 重点介绍极零图的表示方法
- 系统函数极点零点分布与系统稳定性
  - 右半平面极点系统不稳定
  - 左半平面极点系统稳定
  - 虚轴极点特殊考虑
- 系统函数极点零点分布与系统频率特性
  - 系统函数极点零点的矢量表示
  - 极点零点附近的幅度、相位特征

信号与线性系统

第 14 次课外作业

教材习题：6.2、 6.8