



第三章 线性方程组的数值解法

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

是当今科学工程中最常见的数学模型，自古以来人们已导出各种计算方法，其解法大致可分为直接法与迭代法两类。**直接法**即是通过有限次四则运算获得方程组精确解的方法，如：Crammer 法则、Gauss 消去法等；而**迭代法**则是采取逐次逼近的方法，从一个或多个初始量出发，按照一定计算格式获得方程组数值解的方法，如以下将要介绍的 Jacobi 迭代法、Gauss 迭代法及超松弛代法等。一般而言，迭代法比直接法更适合于现代大规模科学工程计算，其具有所需存储单元少、程序简单、计算速度快等优点。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 1 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§3.1 Gauss 消元法

§3.1.1 Gauss 顺序消元法

Gauss顺序消元法是一个经典的求解线性方程组的直接方法，该算法的主要思想是首先将方程组 (1) 化为一个系数阵为下三角阵 (或上三角阵) 的方程组，然后采用前推 (或回代) 过程求得其线性方程组的解。

记线性方程组 (1) 为

$$AX = b, \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

且设 A 为 $n \times n$ 级非奇异矩阵。为利用计算机实现 Gauss 顺序消元，我们将计算过程中出现的矩阵及其元素进行编号，其计算步骤如下：

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 2 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



Step 1. 记方程组 (2) 为 $A^{(1)}X = b^{(1)}$, 其中

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} = A, \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} = b.$$

假设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$, 取 $m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$ ($i = 2, 3, \dots, n$), 用该数的负值乘方程组 (2) 的第 1 个方程, 然后将其加到第 i 个方程 ($i = 2, 3, \dots, n$) 上, 则依次可消去自第 2 个方程到第 n 个方程中的变量 x_1 , 由此得下列等价方程组

$$A^{(2)}X = b^{(2)}, \quad (3)$$

$$\text{其中} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad i, j = 2, 3, \dots, n;$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 3 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



Step 2. 假设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$, 取 $m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 再用 m_{i2} 的负值乘上方程 (3) 的第 2 个方程, 然后将其加到第 i 个方程 ($i = 3, 4, \dots, n$) 上, 则依次可消去自第 3 个方程到第 n 个方程中的变量 x_2 , 得下列等价方程组

$$A^{(3)}X = b^{(3)}, \quad (4)$$

$$\text{其中 } A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \quad i, j = 3, 4, \dots, n;$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 4 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



Step 3. 重复上述步骤，经 $n - 1$ 次消元后得下列系数阵为上三角阵的方程组

$$A^{(n)}X = b^{(n)}, \quad (5)$$

$$\text{其中 } A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

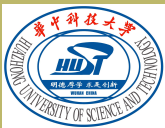
$$a_{nn}^{(n)} = a_{nn}^{(n-1)} - m_{n,n-1}a_{n-1,n}^{(n-1)}, \quad b_n^{(n)} = b_n^{(n-1)} - m_{n,n-1}b_{n-1}^{(n-1)},$$

$$m_{n,n-1} = a_{n,n-1}^{(n-1)} / a_{n-1,n-1}^{(n-1)}.$$

Step 4. 从方程组 (5) 的第 n 个方程开始，自下而上依次解出 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ ，该过程称为回代过程，其计算公式如下：

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \quad x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^{(i)}, \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1. \quad (6)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 5 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



上述方法称为**Gauss顺序消元法**，这种消元法的计算可行性前提条件是其消元过程的所有主元素 $a_{kk}^{(kk)} \neq 0$ ，且其绝对值不能过小，否则，将导致计算过程无法进行或计算结果严重失真。

例 3.1 利用 Gauss 顺序消元法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 \\ -2.000 & 1.070 & 5.643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}.$$

解 对方程组的增广矩阵进行行变换得

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ -2.000 & 1.070 & 5.643 & 3.000 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 4001 & 6006 & 2003 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 0 & 5.000 & 2.000 \end{array} \right].$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 6 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



采用回代法计算上述最后一个矩阵对应的方程组

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ 0 & 2004 & 3005 \\ 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1002 \\ 2.000 \end{bmatrix},$$

得其解

$$X = (0.000, -0.09980, 0.4000)^T.$$

而原方程组具 4 位有效数字的解是

$$X^* = (-0.4904, -0.05104, 0.3675)^T.$$

由此可知 Gauss 顺序消元法所得解 X 的误差为

$$err := \|X - X^*\|_2 \approx 0.4939,$$

相对于原方程组系数阵中的元素而言，解 X 的误差过大。其原因是在作消元时，用了小主元 0.001 作除数，致使其他元素的数量级大大地增加，在计算机字长有限的情况下，导致了较大的舍入误差。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 7 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.1.2 Gauss 选主元消元法

为避免消元过程中出现零主元或绝对值非常小的主元，本节介绍二种改进的 Gauss 消元法，即**完全选主元法**和**选列主元法**。

设线性方程组 (1) 经过 k 次消元后的方程组对应的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & a_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & 0 & & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & & b_{k+1}^{(k+1)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & & b_n^{(k+1)} \end{array} \right], \quad (7)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 8 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



在该矩阵的子块

$$\begin{bmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

中找出绝对值最大的元素，若

$$|a_{pq}^{(k+1)}| = \max_{k+1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k+1)}|,$$

则交换矩阵 (7) 中的第 $k+1$ 行与第 p 行、第 $k+1$ 列与第 q 列，从而将 $a_{pq}^{(k+1)}$ 移到主元位置，该过程称为**完全选主元**。以 $a_{pq}^{(k+1)}$ 作为新的主元，消去矩阵 (7) 中的位于 $(k+2, k+1), (k+3, k+1), \dots, (n, k+1)$ 处的元素，即完成第 $k+1$ 次消元。重复上述步骤，经 $n-1$ 次完全选主元消元后，增广矩阵 $(A|b)$ 中的阵 A 可化为一个上三角阵，解其对应的方程组即获得原方程组的解。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 9 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



完全选主元法在计算过程中花费了大量的时间用于寻找主元，事实上，对于某些线性方程组，我们可采用如下选列主元的方法完成消元过程，其将大大地节省搜寻主元的时间。在线性方程组(1)经过 k 次消元获得增广矩阵(7)的基础上，我们在阵(7)中的子块

$$\begin{bmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k+1)} \\ a_{k+2,k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

中找出绝对值最大的元素 $a_{pk+1}^{(k+1)}$ ： $|a_{pk+1}^{(k+1)}| = \max_{k+1 \leq i \leq n} |a_{ik+1}^{(k+1)}|$ ，然后交换矩阵(7)中的第 $k+1$ 行与第 p 行，从而将 $a_{pk+1}^{(k+1)}$ 移到主元位置，该过程称为**选列主元**。以 $a_{pk+1}^{(k+1)}$ 作为新的主元，消去矩阵(7)中的位于 $(k+2, k+1), (k+3, k+1), \dots, (n, k+1)$ 处的元素，即完成第 $k+1$ 次消元。重复上述步骤，经 $n-1$ 次选列主元消元后，增广矩阵 $(A|b)$ 中的阵 A 可化为一个上三角阵，解其对应的方程组即获得原方程组的解，此即为**选列主元消元法**。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 10 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



例 3.2 用选列主元法求解例 3.1 中的线性方程组。

解 对方程组的增广矩阵进行选列主元消元得

$$\begin{aligned}(A|b) &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2.000 & 1.070 & 5.643 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \end{array} \right] \\&\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2.000 & 1.070 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.176 & 1.801 & 0.5000 \\ 0 & 2.001 & 3.003 & 1.002 \end{array} \right] \\&\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2.000 & 1.070 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.176 & 1.801 & 0.5000 \\ 0 & 0 & 1.868 & 0.6870 \end{array} \right].\end{aligned}$$

解上述最后一个矩阵对应的方程组得原方程组的解

$$X = (-0.4900, -0.05113, 0.3678)^T$$

其与精确解 $X^* = (-0.4904, -0.05104, 0.3675)^T$ 比较, 误差为

$$err := \|X - X^*\|_2 \approx 5.0804e - 004. \quad \blacksquare$$

由此可见, 选主元法有效地改进了 Gauss 顺序消元法。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 11 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.2 三角分解法

当 Gauss 消元过程无零主元时, 线性方程组 (1) 的求解过程也可变换为求解二个系数阵分别为上三角阵和下三角阵的线性方程组, 这将大大地节省 Gauss 消元过程所需时间和存储空间, 其方法称为**三角分解法**或**LU 分解法**。记

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{k+1,k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}},$$

则 Gauss 消元过程: $(A^{(k)}|b^{(k)}) \rightarrow (A^{(k+1)}|b^{(k+1)})$ 可等价地视为

$$L_k A^{(k)} = A^{(k+1)}, \quad L_k b^{(k)} = b^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 12 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



由上列诸式递推得

$$A^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2} \cdots L_2L_1A^{(1)}, \quad b^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2} \cdots L_2L_1b^{(1)}. \quad (8)$$

注意到 $A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$ 则由 (8) 有

$$A = L_1^{-1}L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}A^{(n)}, \quad b = L_1^{-1}L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}b^{(n)}. \quad (9)$$

由于诸 L_k^{-1} 均为下三角矩阵, 则它们的乘积 $L := L_1^{-1}L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}$ 仍是一个下三角矩阵, 若记

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(n)} = U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 13 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



则有

$$A = LU, \quad (10)$$

该分解也称为**Doolittle 分解**或**LU 分解**, 形如 L 的矩阵称为**单位下三角阵**。理论分析表明: 当阵 A 的全体顺序主子式 $\det(A_i) \neq 0$ 时, Gauss 消元过程不会出现零主元, 此时我们有上述 LU 分解, 且其分解是唯一的。综合上述论据, 我们有如下结论。

定理 3.1 若阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的顺序主子式 $\det(A_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则存在唯一的单位下三角阵 L 及上三角阵 U 使得 (10) 成立。

由定理 3.1, 方程组 (1) 的求解过程可分解为下列子过程:

$$LY = b \Rightarrow Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \Rightarrow UX = Y \Rightarrow X.$$

其具体步骤如下:

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 14 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



Step 1. 据 (10) 计算 $L = (l_{ij}), U = (u_{ij})$ 中的元素:

$$\begin{cases} u_{1i} = a_{1i}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, & i = 2, 3, \dots, n, \\ u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}, & i = r, r+1, \dots, n; \quad r = 2, 3, \dots, n, \\ l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr})/u_{rr}, & i = r, r+1, \dots, n, \quad r = 2, 3, \dots, n; \end{cases} \quad (11)$$

Step 2. 利用前推过程解方程组 $LY = b$:

$$\begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k, & i = 2, 3, \dots, n; \end{cases} \quad (12)$$

Step 3. 利用回代过程解方程组 $UX = Y$:

$$\begin{cases} x_n = y_n/u_{nn}, \\ x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k)/u_{ii}, & i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (13)$$

该算法的 Matlab 程序如下:

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 15 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



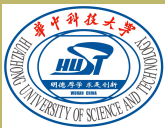
算法 3.1 LU 分解法

```
function x=lux(A,b)
[n,n]=size(A); L=zeros(n);
U=zeros(n); x=zeros(n,1); y=zeros(n,1);
for r=1:n
    for i=r:n
        U(r,i)=A(r,i)-sum(L(r,1:r-1).*U(1:r-1,i)');
        L(i,r)=(A(i,r)-sum(L(i,1:r-1).*U(1:r-1,r)'))/U(r,r);
    end
end;
L, U
for i=1:n
    y(i)=b(i)-sum(L(i,1:i-1).*y(1:i-1)');
end
for j=n:-1:1
    x(j)=(y(j)-sum(U(j,j+1:n).*x(j+1:n)'))/U(j,j);
end
```

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 16 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



例 3.3 用三角分解法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

解 运行算法 3.1, 可计算出方程组系数阵 A 的三角分解: $A = LU$, 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 4.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 3.0000 & 1.1429 & 1.0000 & 0 \\ 2.0000 & 1.2857 & 2.3333 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} 1.0000 & -2.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ 0 & 7.0000 & -14.0000 & 6.0000 \\ 0 & 0 & 6.0000 & -2.8571 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0476 \end{bmatrix}.$$

且可得方程组的解

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 2, 3, 4)^T. \quad \blacksquare$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 17 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出

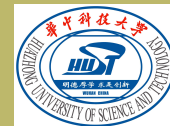
§3.3 追赶法

在一些实际问题中，例如微分方程的有限元方法以及船体放样中求三次样条函数等，都会产生如下形式的三对角方程组三对角稀疏型方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其系数阵的非零元素集中分布在主对角线及其相邻两条次对角线上。为保证该方程组有唯一解，我们恒设其系数阵可逆。方程组(14)经 $n-1$ 次消元后，可化为同解的上三角型方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (15)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 18 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

其中

$$\begin{cases} u_1 = c_1/b_1, & q_1 = d_1/b_1, \\ u_i = c_i/(b_i - u_{i-1}a_i), & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ q_i = (d_i - q_{i-1}a_i)/(b_i - u_{i-1}a_i), & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (16)$$

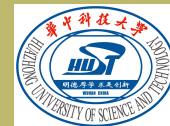
利用回代过程即可求得方程组 (14) 的解

$$x_n = q_n, \quad x_i = q_i - u_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (17)$$

该算法程序如下:

算法 3.2 追赶法

```
function x=chase(a,b,c,d)
n=length(b); u(1)=c(1)/b(1); q(1)=d(1)/b(1);
for i=2:n-1
    h(i)=b(i)-u(i-1)*a(i-1);
    u(i)=c(i)/h(i);
    q(i)=(d(i)-q(i-1)*a(i-1))/h(i);
end
q(n)=(d(n)-q(n-1)*a(n-1))/(b(n)-u(n-1)*a(n-1));
x(n)=q(n);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=q(i)-u(i)*x(i+1);
end
```

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 19 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



上述消元过程称之为“追”，回代过程称之为“赶”，故称该方法为**追赶法**。追赶法的优点在于可直接用公式(15)-(16)计算方程组(14)，其与 Gauss 消元法相比较，不但节省了大量的存储单元，而且加速了计算速度。

例 3.4 用追赶法求解三对角稀疏型方程组

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解 记

$$a = [2 \ 2 \ 2 \ 2]', \quad b = [6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6]', \quad c = [3 \ 3 \ 3 \ 3]', \quad d = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]'$$

据算法 3.2，运行 *Matlab* 命令 `chase(a,b,c,d)` 得其方程组的解

$$x = [0.1194 \ 0.0944 \ 0.3981 \ 0.1407 \ 0.7864]'. \quad \blacksquare$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 20 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.3 误差分析

求解线性方程组 (2) 的各种直接方法理论上可计算出方程组的精确解，可是当上机运行其算法时，对于某些方程组往往难以获得其精确解，有些计算结果甚至严重失真。其主要原因是由于计算机的字长有限，使得输入的已知数据往往带有微小扰动，某些方程组对这种小扰动异常敏感，而导致其计算解产生大的偏差，我们称该类方程组为**病态方程组**。本节将研究线性方程组的病态现象，并给出其敏度分析。

设线性方程组 (2) 的系数阵 A 及右端向量 b 分别带有微小扰动 δ_A 和 δ_b ，其导出的扰动解 $X + \delta_X$ 满足

$$(A + \delta_A)(X + \delta_X) = b + \delta_b. \quad (18)$$

将 (2) 代入 (18) 得

$$(A + \delta_A)\delta_X = \delta_b - \delta_A X, \quad (19)$$

即

$$\delta_X = (A + \delta_A)^{-1}(\delta_b - \delta_A X) = (I + A^{-1}\delta_A)^{-1}A^{-1}(\delta_b - \delta_A X).$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 21 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



不妨设 $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$, 则由上式及定理 1.8 得

$$\|\delta_X\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|} (\|\delta_b\| + \|\delta_A\|\|X\|) \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta_A\|} (\|\delta_b\| + \|\delta_A\|\|X\|).$$

从而

$$\frac{\|\delta_X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta_A\|} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|X\|} + \|\delta_A\| \right). \quad (20)$$

又由

$$\|b\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|$$

有

$$\frac{1}{\|X\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}. \quad (21)$$

代入 (21) 到 (20) 得

$$\frac{\|\delta_X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta_A\|} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right) \approx \|A^{-1}\|\|A\| \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right).$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 22 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



此误差估计表明： $\|A^{-1}\|\|A\|$ 表征着方程组 (2) 的解 X 对其系数阵 A 及右端向量 b 变化的敏度，故称 $\|A^{-1}\|\|A\|$ 为方程组 (2) 的**条件数**，并记为 $\text{cond}(A)$ 。当 $\text{cond}(A) \gg 1$ 时，方程组 (2) 视为是病态的。常用条件数有

$$\text{cond}(A)_1 := \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1,$$

$$\text{cond}(A)_\infty := \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty,$$

$$\text{cond}(A)_2 := \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}.$$

这里 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 与 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最大特征值和最小特征值。特别，当矩阵 A 为对称阵时，

$$\text{cond}(A)_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 23 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§3.4 Jacobi迭代法

将线性方程组 (2) 的系数阵 A 分解为

$$A = L + D + U,$$

其中 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当对角阵 D 可逆时, 方程组 (2) 可等价地写为

$$X = -D^{-1}(L + U)X + D^{-1}b. \quad (22)$$

据此得 **Jacobi 迭代公式**

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

其中 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ 。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 24 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



该迭代公式也可写成如下分量形式:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

例 3.5 试利用 Jacobi 迭代公式求解下列方程组

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ -4 \\ 22 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

并使数值解 $X^{(k)}$ 满足精度要求: $\|X - X^{(k)}\|_2 \leq 10^{-3}$, 其中 $X = (1, 2, 3, 4)'$ 为方程组的精确解。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 25 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



解 经计算

$$-D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1667 & -0.3333 & -0.1667 \\ -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0 & 0.4000 \\ -0.1429 & 0.2857 & 0.1429 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{-1}b = (2.3333, 0.7500, 0.8000, 3.1429)'$$

自 $X^{(0)} = 0$ 开始, 应用 Jacobi 迭代公式 (23) 计算其方程组, 经 16 次迭代后可得数值解

$$X^{(16)} = (1.0002, 1.9995, 2.9997, 3.9996)',$$

且其满足 $\|X - X^{(16)}\|_2 = 7.3485e - 004 < 10^{-3}$ 。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 26 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.5 Gauss-Seidel 迭代法

方程组 (2) 也可等价地写为

$$DX = -LX - UX + b. \quad (26)$$

若记 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$, 则由上式可构造迭代格式

$$DX^{(k+1)} = -LX^{(k+1)} - UX^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, .$$

当对角阵 D 可逆时, 上式等价于

$$X^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}UX^{(k)} + (D + L)^{-1}b. \quad (27)$$

此即为 **Gauss-Seidel 迭代公式**, 其分量形式为

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 27 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



例 3.6 试利用 Gauss-Seidel 迭代公式求解方程组 (25)，并使数值解 $X^{(k)}$ 满足精度要求： $\|X - X^{(k)}\|_2 \leq 10^{-3}$ ，其中 $X = (1, 2, 3, 4)'$ 为方程组的精确解。

解 经计算

$$-(D + L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 0.1667 & -0.3333 & -0.1667 \\ 0 & -0.0833 & 0.4167 & 0.3333 \\ 0 & 0.0167 & 0.0167 & 0.4333 \\ 0 & -0.0452 & 0.1690 & 0.1810 \end{bmatrix},$$

$$(D + L)^{-1}b = (2.3333, -0.4167, 1.1833, 2.8595)'$$

自 $X^{(0)} = 0$ 开始，应用 Gauss-Seidel 迭代公式 (27) 计算其方程组，经 9 次迭代后可得数值解

$$X^{(9)} = (1.0001, 1.9996, 2.9997, 3.9998)',$$

且其满足 $\|X - X^{(9)}\|_2 = 5.4772e - 004 < 10^{-3}$ 。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 28 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.6 逐次超松弛迭代法

逐次超松弛迭代 (Successive Overrelaxation Iteration) 是加速经典迭代格式收敛速度的一种技术，其通过引入适当的松弛因子，使得改进的迭代格式具有较快的收敛速度。本节以改进的 Gauss-Seidel 迭代公式为例来阐明这种加速收敛技术。注意到 Gauss-Seidel 迭代公式有等价形式

$$DX^{(k+1)} = DX^{(k)} + [b - LX^{(k+1)} - (D + U)X^{(k)}].$$

今在上式中引入松弛因子 ω ，则得

$$DX^{(k+1)} = DX^{(k)} + \omega[b - LX^{(k+1)} - (D + U)X^{(k)}],$$

即

$$(D + \omega L)X^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega U]X^{(k)} + \omega b.$$

若阵 D 可逆，则有

$$X^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1}\{[(1 - \omega)D - \omega U]X^{(k)} + \omega b\}. \quad (29)$$

该方法被称为**逐次超松弛迭代方法**或**SOR 方法**。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 29 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



逐次超松弛迭代方法有分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

当 $\omega = 1$ 时, SOR 方法即为 Gauss-Seidel 迭代方法。理论分析表明: SOR 方法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$; 特别, 当方程组的系数阵 A 为对称正定时, 该条件也是 SOR 方法收敛的充要条件。此外, 使得 SOR 方法收敛的最佳松弛因子是

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2[-D^{-1}(L + U)]}},$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径。

例 3.7 试采用最佳松弛因子 ω_{opt} 构造一类 SOR 方法求解方程组 (25), 并使数值解 $X^{(k)}$ 满足精度要求: $\|X - X^{(k)}\|_2 \leq 10^{-3}$, 其中 $X = (1, 2, 3, 4)'$ 为方程组的精确解。

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

第 30 页 共 39 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



解 经计算, SOR 方法关于方程组 (25) 的最佳松弛因子为

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2[-D^{-1}(L + U)]}} \approx 1.0997.$$

矩阵 $\omega(D + \omega L)^{-1}b = (2.5660, -0.5861, 1.3152, 3.0755)'$,

$$(D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U]$$
$$= \begin{bmatrix} -0.0997 & 0.1833 & -0.3666 & -0.1833 \\ 0.0548 & -0.2005 & 0.4765 & 0.3757 \\ -0.0099 & -0.0038 & -0.0755 & 0.4822 \\ 0.0313 & -0.0924 & 0.1954 & 0.1229 \end{bmatrix}.$$

自 $X^{(0)} = 0$ 开始, 应用 SOR 迭代公式 (29) 计算其方程组, 经 6 次迭代后可得数值解 $X^{(6)} = (0.9998, 1.9999, 2.9996, 4.0000)'$, 且其满足 $\|X - X^{(6)}\|_2 = 4.5826e - 004 < 10^{-3}$ 。 ■

由此可见, SOR 迭代法加快了 Gauss-Seidel 迭代法的收敛速度。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 31 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§3.7 迭代法的收敛性

针对线性方程组 (2), 我们已构造了多种迭代算法, 评价一个算法有效性及其优劣的重要标致是其收敛性及收敛速度。为此, 本节对线性方程组的一般迭代法及前述各种特殊迭代法的收敛性给出若干分析, 导出其收敛性判据。

设线性方程组 (2) 有如下迭代格式

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + F \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

其中 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 矩阵 B 称为其迭代格式的**迭代矩阵**。当给定初始向量 $X^{(0)}$ 时, 若有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*,$$

则称其迭代格式是**收敛的**, 此时由 (31) 二端取极限得

$$X^* = BX^* + F. \quad (32)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[第 32 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



若方程组 (32) 与方程组 (2) 相容, 即存在可逆阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$G(I - B) = A, \quad GF = b, \quad (33)$$

则方程组 (32) 与方程组 (2) 等价。从而, X^* 必为线性方程组 (2) 的精确解, 因此我们可将迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 的某项 $X^{(k)}$ 作为精确解 X^* 的近似值。

定理 3.2 当给定初始向量 $X^{(0)}$ 时, 迭代格式 (31) 收敛的充要条件是其迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B) < 1$ 。

证明 由 (31)-(32) 有

$$X^{(k)} - X^* = B(X^{(k-1)} - X^*) = \cdots = B^k(X^{(0)} - X^*), \quad (34)$$

则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*$ 当且仅当 $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$, 从而应用定理 1.7 即得欲证结论。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 33 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



作为该定理的一个诠释，我们考虑 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法及取最佳松弛因子的 SOR 方法应用于方程组 (25) 时的收敛性。其迭代矩阵分别为

$$B_J = -D^{-1}(L + U); \quad B_{GS} = -(D + L)^{-1}U;$$

$$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U].$$

经计算, 上述迭代矩阵的谱半径分别为

$$\rho(B_J) = 0.5742 < 1, \quad \rho(B_{GS}) = 0.3303 < 1, \quad \rho(B_{SOR}) = 0.4180 < 1.$$

故由定理 3.2, 其三种迭代法应用于方程组(25) 时均是收敛的。

事实上, 当迭代法应用于高维线性方程组时, 利用其迭代阵的谱半径来判别收敛性是困难的, 因此有必要给出方便易行的收敛性判别准则。下面我们给出一个利用矩阵范数来判别收敛性的准则, 其不但给出了收敛性判据, 而且给出了迭代法的先验与后验误差估计。

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[第 34 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



定理 3.3 若存在从属于某向量范数 $\|\cdot\|$ 的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得迭代法 (31) 的迭代阵 B 满足 $\|B\| < 1$, 则该迭代法是收敛的, 且满足先验误差估计

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

及后验误差估计

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

其中 X^* 为方程组 (2) 的精确解。

证明 据 (34) 有

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \|B\|^k \|X^{(0)} - X^*\|. \quad (37)$$

由 $\|B\| < 1$ 可知 $I - B$ 可逆, 则方程 (32) 等价于 $X^* = (I - B)^{-1}F$, 且由此有

$$X^{(0)} - X^* = (I - B)^{-1}[(I - B)X^{(0)} - F] = (I - B)^{-1}(X^{(0)} - X^{(1)}).$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 35 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



因此

$$\|X^{(0)} - X^*\| \leq \|(I - B)^{-1}\| \|X^{(0)} - X^{(1)}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|X^{(0)} - X^{(1)}\|.$$

将该式代入 (37) 即得先验误差估计 (35)。又由 (31) 和 (32) 有

$$\begin{aligned} X^{(k)} - X^* &= B(X^{(k-1)} - X^*) \\ &= B[X^{(k-1)} - (I - B)^{-1}F] \\ &= B(I - B)^{-1}[(I - B)X^{(k-1)} - F] \\ &= B(I - B)^{-1}(X^{(k-1)} - X^{(k)}). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\|X^{(k)} - X^*\| \\ &\leq \|B\| \|(I - B)^{-1}\| \|X^{(k-1)} - X^{(k)}\| \quad \blacksquare \\ &\leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|. \end{aligned}$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 36 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



后验误差估计 (36) 通常可作为迭代法计算程序的终止准则, 即当用户要求数值解的精度满足: $\|X^{(k)} - X^*\| \leq \varepsilon$ 时, 我们仅需在计算程序中设置终止准则:

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon.$$

通常, 我们也可将终止准则取为:

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon.$$

下面我们将给出更加简单的迭代法收敛性判据, 为此首先引入矩阵的对角占优概念及其相关性质。

定义 3.1 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若其满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称矩阵 A 是**对角占优**的; 若上述不等式对所有 i 有严格不等号成立, 则称矩阵 A 是**严格对角占优**的。

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[第 37 页 共 39 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



引理 3.1 若矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 严格对角占优, 则 A 非奇异。

证明 若 A 奇异, 则齐次方程组 $AX = 0$ 有非零解 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。不妨设 $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, 则 $|x_i| > 0$, 且有

$$|a_{ii}x_i| = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}||x_i|.$$

即

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

而这与 A 严格对角占优相矛盾! 故命题成立。 ■

定理 3.4 如果线性方程组 (2) 的系数矩阵 A 是严格对角占优的, 则求解该方程组的 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法及松弛因子 $\omega \in (0, 1)$ 的 SOR 方法均是收敛的。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 38 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出



证明 由 A 严格对角占优有 $|a_{ii}| > 0$ ($1 \leq i \leq n$) 可知对角阵 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 可逆。若 Jacobi 迭代阵 $B_J = -D^{-1}(L + U)$ 有特征值 $\tilde{\lambda}$ 满足 $|\tilde{\lambda}| \geq 1$, 则由 A 严格对角占优可推得 $\tilde{\lambda}D + L + U$ 也严格对角占优, 从而

$$\det(\tilde{\lambda}I - B_J) = \det[\tilde{\lambda}I + D^{-1}(L + U)] = \det(D^{-1}) \det(\tilde{\lambda}D + L + U) \neq 0.$$

因此 Jacobi 迭代阵的谱半径 $\rho(B_J) < 1$ 。故由定理 3.2, Jacobi 迭代法是收敛的。

若 SOR 方法的迭代阵

$$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U], \quad \omega \in (0, 1]$$

有特征值 $\tilde{\lambda}$ 满足 $|\tilde{\lambda}| \geq 1$, 则由 A 严格对角占优可推得 $(\tilde{\lambda} - 1 + \omega)D + \omega(\tilde{\lambda}L + U)$ 也严格对角占优, 从而

$$\begin{aligned} \det[\tilde{\lambda}I - B_{SOR}] &= \det[\tilde{\lambda}I - (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)] \\ &= \det[(D + \omega L)^{-1}] \det[(\tilde{\lambda} - 1 + \omega)D + \omega(\tilde{\lambda}L + U)] \neq 0. \end{aligned}$$

因此 SOR 迭代阵的谱半径 $\rho(B_{SOR}) < 1$ 。故由定理 3.2, SOR 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法均是收敛的。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 39 页 共 39 页

返回

全屏显示

关闭

退出