系统的复频域分析

开讲前言－本讲导入

- **拉普拉斯变换在系统分析中应用**
  - 信号的拉普拉斯变换与复频域的系统函数
- **建立复频域的系统函数**
  - 积分微分方程对系统建模后的拉普拉斯变换
  - 由元件的复频域模型，根据电路理论得系统函数
- **复频域响应的求取**
  - 根据激励信号和系统函数求得
- **由拉普拉斯反变换得到时域分析结果**
  - 系统的特征，响应的结果
- **利用拉普拉斯变换分析LRC电路的响应特征**

一：系统函数的概念

1：系统函数:卷积性质

$$\xrightarrow[E(s)]{e(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \xrightarrow[R(s)]{r(t)}$$

$$h(t) \leftrightarrow H(s)$$

单位冲激响应　　系统函数

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$R_{zs}(s) = E(s)H(s) \qquad H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

系统函数(亦称为转移函数、传递函数)是单位冲激响应的拉氏变换，在复频域刻画LTI系统的特征

2：系统函数：

基本单元函数e^{st}的零状态响应

$$e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{st-s\tau}d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$=e^{st}H(s)$$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

3：系统函数:基于信号的分解

$$e^{s_0 t} -> H(s_0)e^{s_0 t}$$

$$\frac{1}{2\pi j}E(s_0)e^{s_0 t}\Delta s -> \frac{1}{2\pi j}E(s_0)H(s_0)e^{s_0 t}\Delta s$$

$$\frac{1}{2\pi j}\sum E(s_0)e^{s_0 t}\Delta s -> \sum \frac{1}{2\pi j}E(s_0)H(s_0)e^{s_0 t}\Delta s$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}E(s)e^{st}ds -> \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}E(s)H(s)e^{st}ds$$

$$e(t) -> r_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}R_{zs}(s)e^{st}ds$$

$$R_{zs}(s) = E(s)H(s)$$

4:系统函数:基于拉氏变换性质

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\Lambda+a_1r'(t)+a_0r(t)$$

$$=b_me^{(m)}(t)+b_{m-1}e^{(m-1)}(t)+\Lambda+b_1e'(t)+b_0e(t)$$

$$\frac{d^nr_{zs}(t)}{dt^n}\leftrightarrow s^nR_{ZS}(s)-s^{n-1}r_{zs}(0^-)-s^{n-2}r_{zs}'(0^-)-\Lambda-r_{zs}^{(n-1)}(0^-)\boxed{=s^nR_{ZS}(s)}$$

两边同时做拉氏变换，利用时域微分性质，有

$$s^nR_{zs}(s)+a_{n-1}s^{n-1}R_{zs}(s)+\Lambda+a_1sR_{zs}(s)+a_0R_{zs}(s)$$

$$=b_ms^mE(s)+b_{m-1}s^{m-1}E(s)+\Lambda+b_1sE(s)+b_0sE(s)$$

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}\quad (a_n=1)$$

因果线性时不变系统的系统函数是有理的

$$H(p)=H(s)\big|_{s=p}$$

$$r(t)=H(p)e(t)$$

当收敛条件包括 $\delta=0$时， 令$s=j\omega$，

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

系统的频率响应

二：系统响应的S域求解

例： 已知输入 $e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, 初始状态为$r_{zi}(0)=2$， $r'_{zi}(0)=1$，

系统函数 $H(s)=\dfrac{s+5}{s^2+5s+6}$，求系统响应 r (t)。

- 解 ： 1:求 $r_{zi}(t)$，

$$H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$r_{zi}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=C_1+C_2=2 \\ r'_{zi}(0)=-2C_1-3C_2=1 \end{cases}$$

$C_1=7$， $C_2=-5$

$$r_{zi}(t)=\underbrace{7e^{-2t}-5e^{-3t}}_{\text{自然分量}} \qquad t>=0^-$$

2:零状态响应$r_{zs}(t)$

$$E_1(s)=\mathscr{L}\left\{e^{-t}\varepsilon(t)\right\}=\frac{1}{s+1}\qquad H(s)=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$r_{zs}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$=\underbrace{\underbrace{2e^{-t}}_{\text{受迫分量}}\ \underbrace{-3e^{-2t}+e^{-3t}}_{\text{自然分量}}}_{\text{瞬态分量}}\qquad t>0$$

1:求零输入响应：拉普拉斯变换

$$r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e'(t)+5e(t)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)$$
$$-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$$

r(0)=2， r'(0) =1，

$$r''_{zi}(t) \leftrightarrow s^2R_{zi}(s)-sr_{zi}(0)-r'_{zi}(0) \quad =s^2R_{zi}(s)-2s-1$$

$$r'_{zi}(t) \leftrightarrow sR_{zi}(s)-r_{zi}(0) \quad =sR_{zi}(s)-2$$

$$s^2R_{zi}(s)-2s-1+5sR_{zi}(s)-10 \quad +6R_{zi}(s) \quad =0$$

$$R_{zi}(s)=\frac{2s+11}{s^2+5s+6} \quad =\frac{7}{s+2}+\frac{-5}{s+3}$$

2:求全响应：拉普拉斯变换

$$r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e'(t)+5e(t) \qquad e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$$

$r_{zi}(0^-)=2$， $r'_{zi}(0-)=1$，

$$r''(t)\leftrightarrow s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)=s^2R(s)-2s-1$$

$$r'(t)\leftrightarrow sR(s)-r(0^-)=sR(s)-2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&r(0^-)=r_{zi}(0^-)+r_{zs}(0^-)\\&r_{zs}(0^-)=0\end{aligned}}$$

$$s^2R(s)-2s-1+5sR(s)-10\ +6R(s)=s\frac{1}{s+1}+\frac{5}{s+1}$$

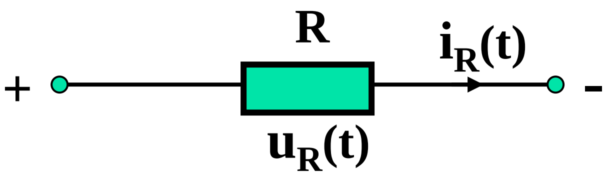
$$R(s)=\frac{2s+11}{s^2+5s+6}+\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$R_{zi}(s) \qquad E(s)H(s)=R_{ZS}(s)$$

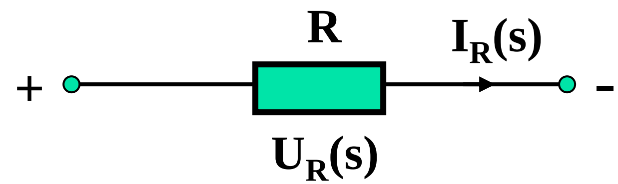
$$\boxed{H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}}$$

三、复频域的电路模型

1：电阻支路



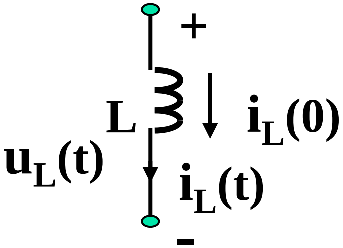
(a) 时域电路



(b) s 域等效电路

$$u_R(t) = Ri_R(t) \xleftrightarrow{\text{拉普拉斯变换}} U_R(s) = RI_R(s)$$

2：电感支路

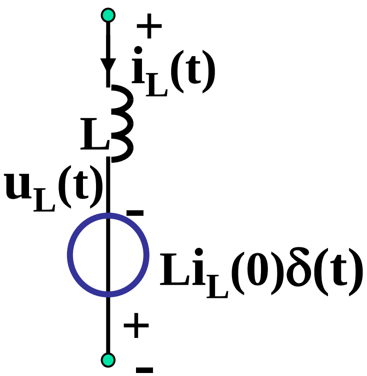


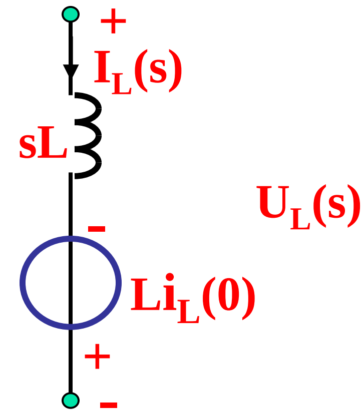
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\updownarrow$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

运算阻抗 $Z_L(s) = sL$
运算导纳 $Y_L(s)=1/sL$

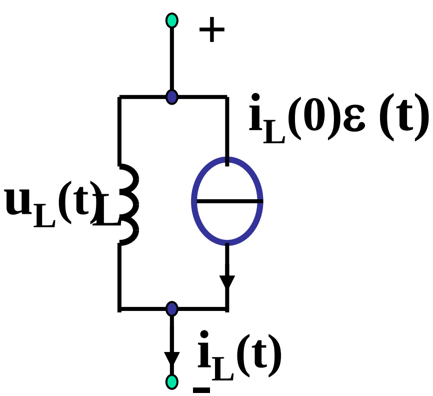


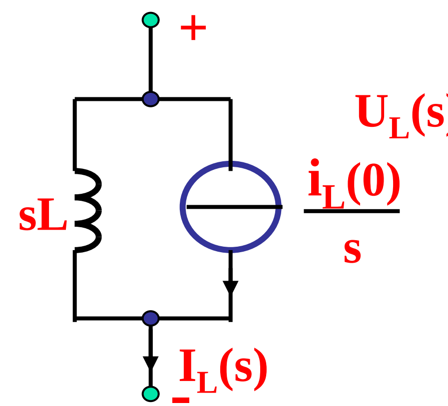


$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0)$$

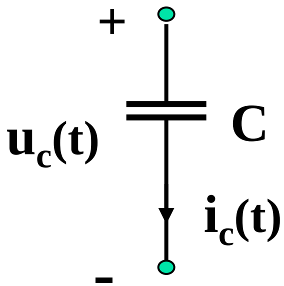
$$\updownarrow$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$$

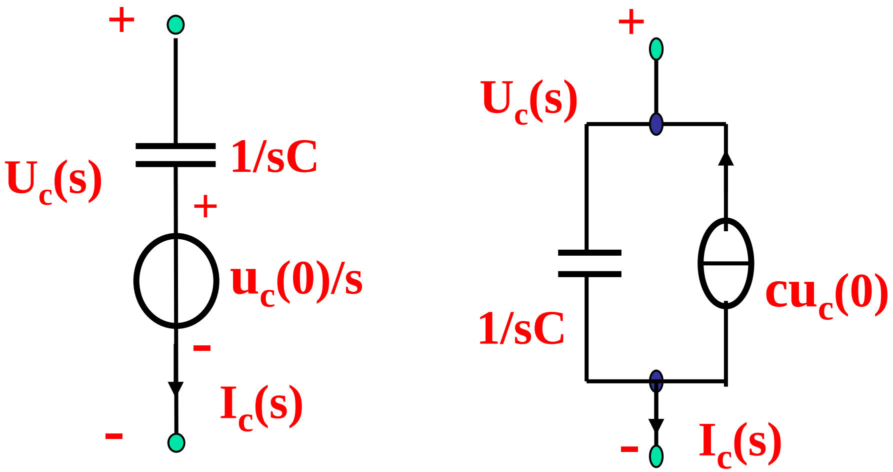




3：电容支路



(a) 时域电路



(b) s 复频域等效电路

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad u_C(0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)d\tau$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau + u_C(0)$$

$$U_c(s)=\frac{1}{sC}I_c(s)+\frac{1}{s}u_c(0)$$

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$I_c(s)=sCU_c(s)-Cu_c(0)$$

- 一般情况下

$$sL \neq \frac{U_L(s)}{I_L(s)} \quad , \qquad \frac{1}{sC} \neq \frac{U_C(s)}{I_C(s)}$$

  - 上面的等式只在初始状态为0 的时候成立

信号与线性系统

第 12 次课外作业

教材习题: 5.15、 5.21、 5.27、