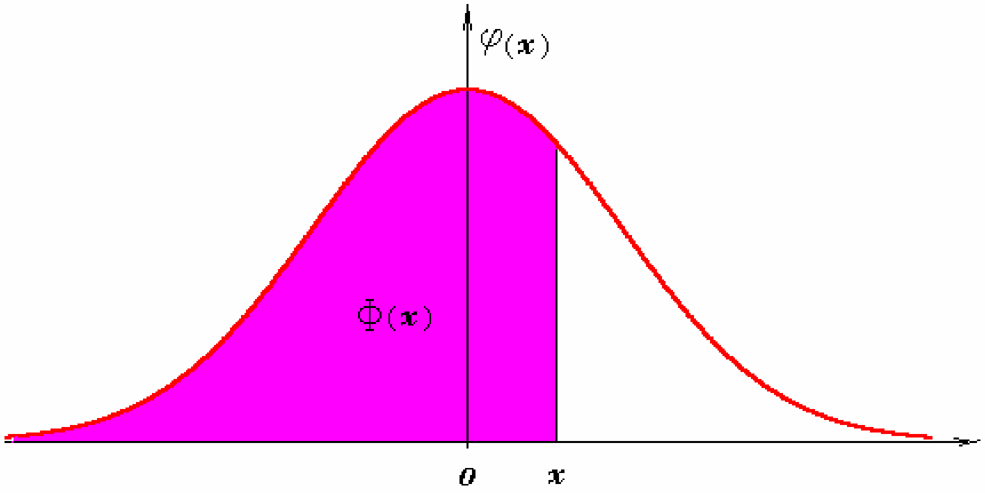
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

§ 3.2 边缘分布

3.2.1　边缘分布函数

$$F_X(x)=P(X \leqslant x)=P(X \leqslant x,\ Y<+\infty)=F(x,\ +\infty)$$

$$F_Y(y)=P(Y \leqslant y)=P(X<+\infty,\ Y \leqslant y)=F(+\infty,\ y)$$

3.2.1　D.R.V.的边缘分布

$$P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\cdot}$$

$$P(Y=y_i)=\sum_i P(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_i p_{ij} \triangleq p_{\cdot j}$$

例1（P_{42}例3.3）在有1件次品和5件正品的产品中，分别进行有放回和不放回地任取两次，定义随机变量(X,Y)如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到正品}\\ 0, & \text{第一次取到次品}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到正品}\\ 0, & \text{第二次取到次品}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合概率分布和两个边缘概率分布。

解（1）有放回抽样：

$$P(X=0,\ Y=0)$$
$$=P(X=0)\,P(Y=0|X=0)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$1/36$	$5/36$	$1/6$
1	$5/36$	$25/36$	$5/6$
$p_{\cdot j}$	$1/6$	$5/6$	1

（2）不放回抽样：

$$P(X=0,\ Y=0)$$
$$=P(X=0)\,P(Y=0|X=0)$$
$$=\frac{1}{6}\times 0=0$$

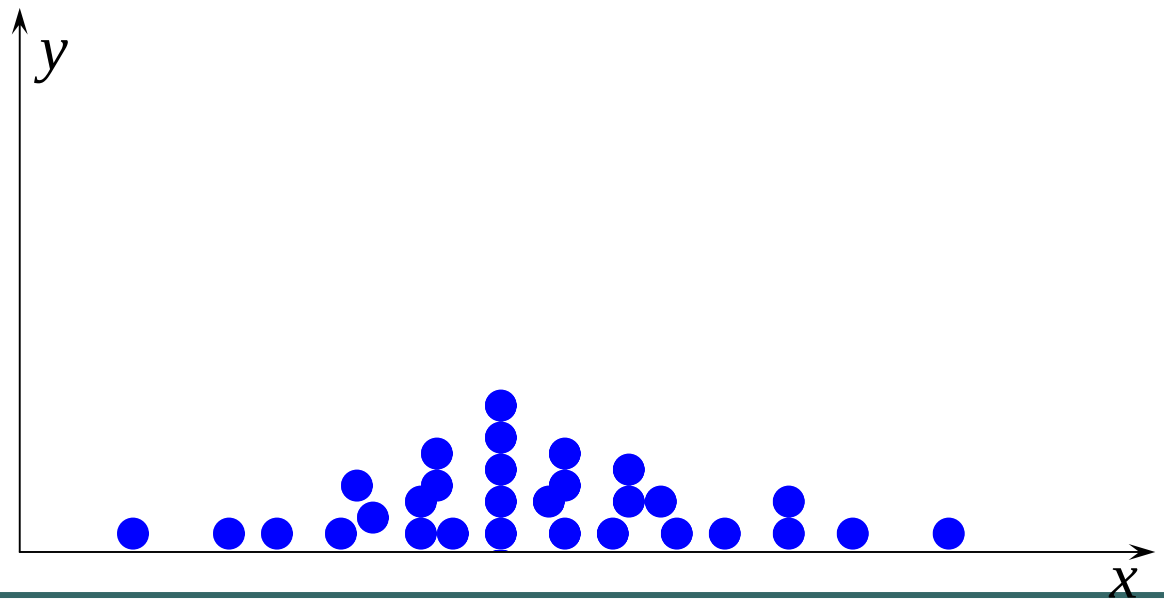
$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{6}\times 1$ $1/6$	$1/6$
1	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}$ $1/6$	$\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}$ $2/3$	$5/6$
$p_{\cdot j}$	$1/6$	$5/6$	1

3.2.3 C.R.V.的边缘分布

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv]du$$

故X的**边缘密度函数** $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

同理Y的**边缘密度函数** $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$



例2（P_{82}例3.5）**设$(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求$X$和$Y$的边缘密度函数。**

解 (X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=\frac{exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

令 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \ =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}]dv$$

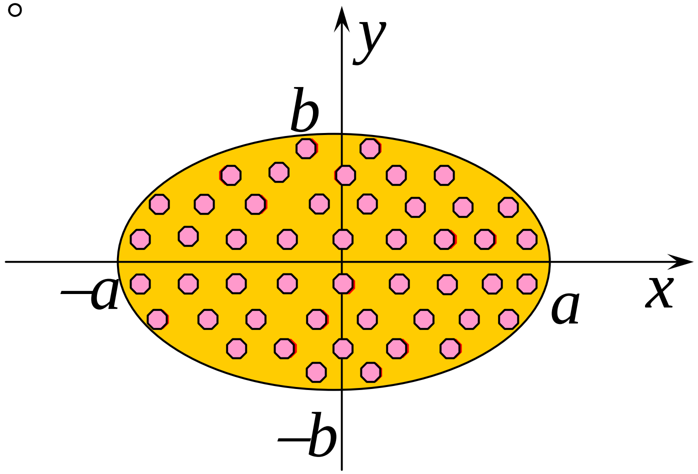
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{(v-\rho u)^2}{2(\sqrt{1-\rho^2})^2}]dv \quad \exp[-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即$X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，同理$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

例3（P_{83}例3.6）设(X,Y)在G上服从均匀分布，其中

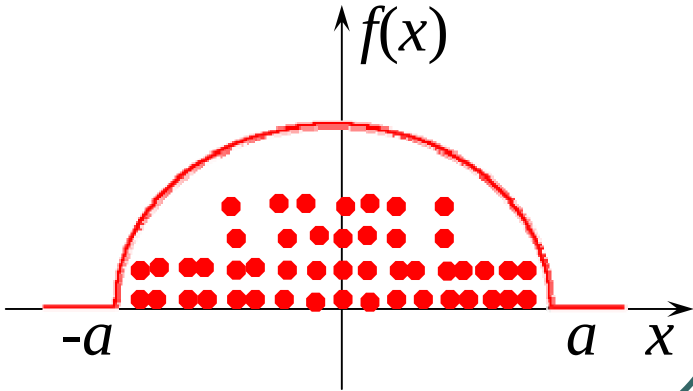
$G=\{(x,y):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$，求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。



解

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab\pi}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{1}{ab\pi}dy=\frac{2}{a^2\pi}\sqrt{a^2-x^2}\qquad -a<x<a$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{b^2\pi}\sqrt{b^2-y^2}, & -b<y<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

§3.3 条件分布

3.3.1 问题

身高$X\sim N(170, 4^2)$，体重$Y\sim N(59, 2^2)$　$X|Y=50\sim N(?,?)$

3.3.2 D.R.V.的条件分布

设 $P(X=x_i, Y=y_i)=p_{ij}$，　$P(X=x_i)=p_{i\bullet}$，　$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}$，

则定义给定 $Y=y_j$下，X 的**条件分布律（列）**为

$$P(X=x_i \mid Y=y_i)=\frac{P(X=x_i, Y=y_i)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \qquad i=1,2,\ldots$$

给定 $X=x_i$下，Y 的**条件分布律（列）**为

$$P(Y=y_i \mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \qquad j=1,2,\ldots$$

例1（续§3.1例1）$P(X=m)=\frac{1}{4}$， $m=1,2,3,4$，

$P(Y=n\mid X=m)=\frac{1}{m}$， $\boldsymbol{n=1,2,\ldots,m}$。求条件分布$\boldsymbol{X|_{Y=n}}$。

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i\bullet}$	$X/_{Y=1}$	$X/_{Y=2}$	$X/_{Y=3}$	$X/_{Y=4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$1/4$	$12/25$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$1/4$	$6/25$	$6/13$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$1/4$	$4/25$	$4/13$	$4/7$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$1/4$	$3/25$	$3/13$	$3/7$	1
$p_{\bullet j}$	$25/48$	$13/48$	$7/48$	$3/48$	1	1	1	1	1
$Y/_{X=2}$	$1/2$	$1/2$	0	0					

例2（P_{87}例3.8）设某医院一天出生的婴儿数为X，其中男婴数为Y，已知(X,Y)的联合分布列为：

$$P(X=n,Y=m) = e^{-14}\frac{7.14^m}{m!}\cdot\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} \qquad n=0,1,\cdots \quad m=0,1,\cdots,n$$

求X与Y的边缘分布和条件分布。

解 $$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}7.14^m 6.86^{n-m}\frac{e^{-14}}{n!}=\frac{(7.14+6.86)^n}{n!}e^{-14}$$

$n=0,1,\cdots$ 即 $X\sim P(14)$

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6.86}\times\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}=\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14} \qquad m=0,1,\cdots$$

$Y\sim P(7.14)$

$$P(Y=m\mid X=n)=\frac{e^{-14}\frac{7.14^m}{m!}\cdot\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{14^n}{n!}e^{-14}}=C_n^m\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m}$$

$m=0,1,\cdots n$

（n固定）

$Y\mid X=n\sim B(n,0.51)$

3.3.3 C.R.V.的条件分布

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例3（P_{89}例3.9）$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$。

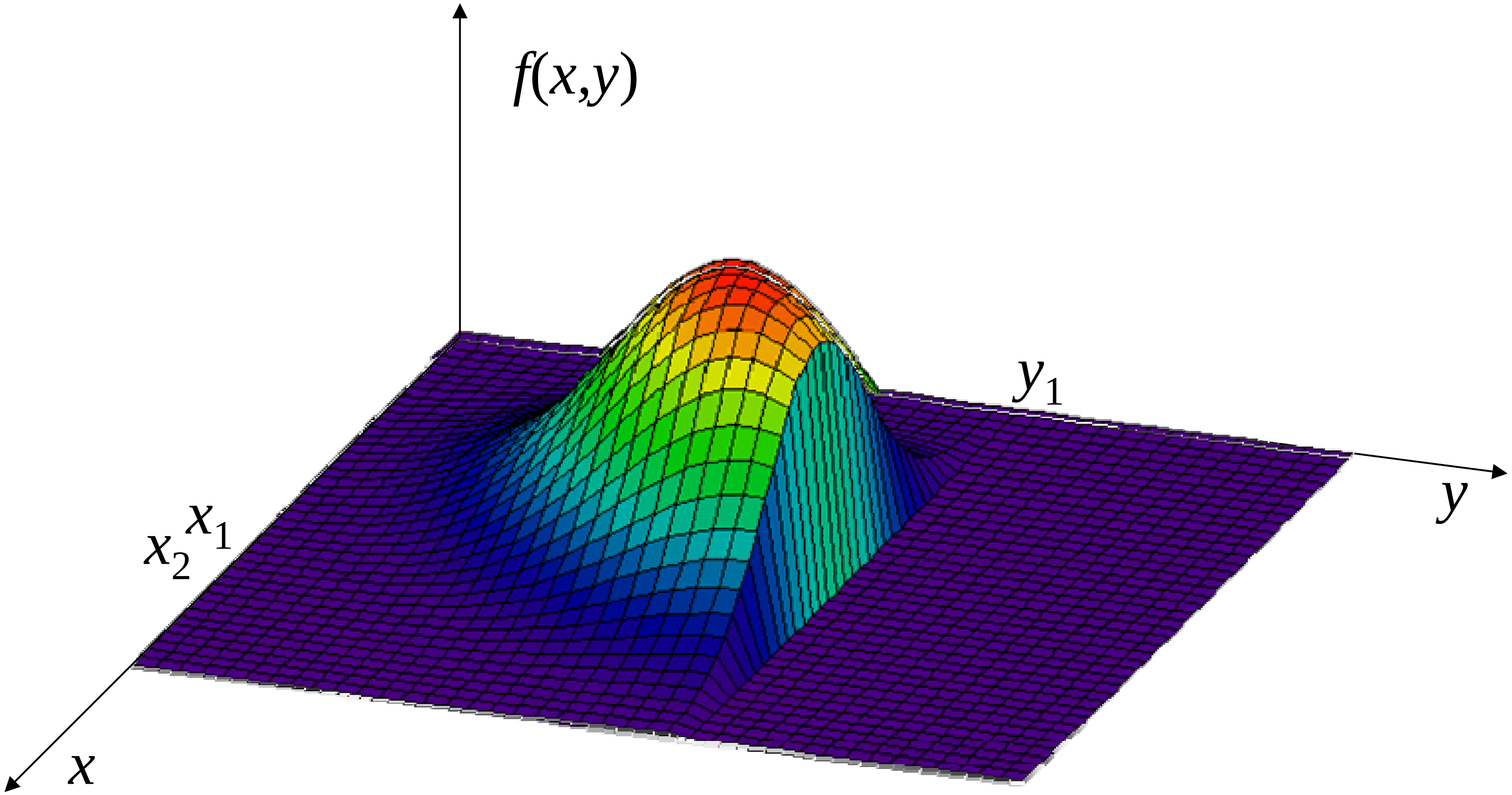
解

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{[x-(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2))]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\}$$

即 $X|Y=y\sim N(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2),\quad \sigma_1^2(1-\rho^2))$

同理 $Y|X=x\sim N(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \sigma_2^2(1-\rho^2))$



$f(x,y)$
y_1
y
x_1
x_2
x

例3（P_{83}例3.6续）设(X,Y)在G上服从均匀分布，其中

$G=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$，求条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$。

解 由

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab\pi}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{b^2\pi}\sqrt{b^2-y^2}, & -b<y<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $-b<y<b$ 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{b}{2a}\dfrac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}, & -\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}<x<\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\\ 0\,, & \text{其他}\end{cases}$$

即 $X|_{Y=y}\sim U(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\ \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2})$

习题选讲

习题2.12 设随机变量X取值于[0,1]，若$P(x_1<X\leqslant x_2)$只与x_2-x_1有关（对一切$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$），证明：$X\sim U(0,1)$

解 $P(x_1<X\leqslant x_2)$与x_2-x_1成正比，则当$x\in[0,1]$时

$$F(x)=P(0<X\leqslant x)=kx$$

由$F(1)=P(X\leqslant 1)=1$得$k=1$，故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

即 $X\sim U(0,1)$

习题选讲

习题2.12 设随机变量X取值于[0,1]，若$P(x_1<X\leqslant x_2)$只与x_2-x_1有关（对一切$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$），证明：$X\sim U(0,1)$

解 将区间[0,1] n等分，由题意，对$m\leqslant n$有

$$F(\frac{m}{n})=P(0<X\le\frac{m}{n})=\sum_{k=1}^{m}P(\frac{k-1}{n}<X\le\frac{k}{n})=mP(0<X\le\frac{1}{n})$$

$$=m[\frac{P(0<X\le 1)}{n}]=\frac{m}{n}$$

对$x\in[0,1]$有$\frac{m}{n}<x\le\frac{m+1}{n}$，由$F(x)$的单调性

$$\frac{m}{n}=F(\frac{m}{n})<F(x)\le F(\frac{m+1}{n})=\frac{m+1}{n}$$

$$-\frac{1}{n}<\frac{m}{n}-x<F(x)-x\le\frac{m+1}{n}-x\le\frac{1}{n}$$

由n的任意性　$F(x)=x,\quad x\in[0,1]$　　即　$X\sim U(0,1)$

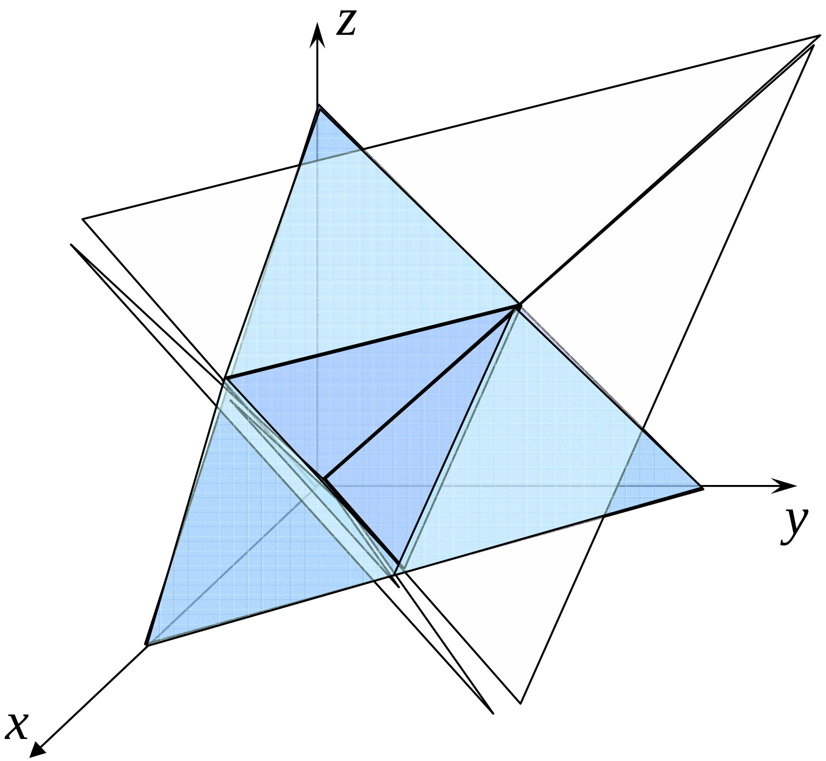
例3（P12习题1.12）将长为L的线段任意折成三段，求此三段能构成一个三角形的概率。

解Ⅰ 设三段的长度分别为x，y，z，则

$$\Omega = \{(x,y,z): 0< x,y,z <\mathrm{L},\ x + y + z = L\}$$

$$A = \{(x,y,z): \quad x + y > z,\quad y + z > x,\quad z + x > y\}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$



例3（P12习题1.12）将长为L的线段任意折成三段，求此三段能构成一个三角形的概率。

解Ⅱ 设三段的长度分别为x，y，$L-x-y$，则

$$\Omega=\{(x,y):0<x,y<L,\ x+y<L\}$$

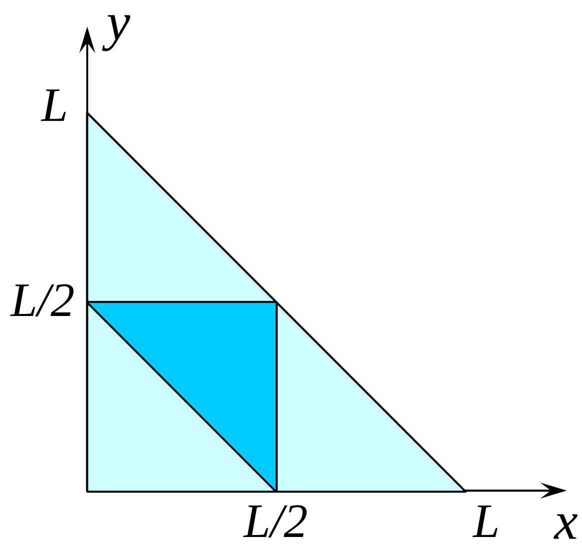
$$A=\{(x,y):$$

$$x+y>L/2$$

$$L/2>x$$

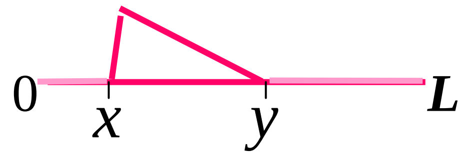
$$L/2>y\}$$

$$P(A)=\frac{1}{4}$$



例3（P12习题1.12）将长为L的线段任意折成三段，求此三段能构成一个三角形的概率。

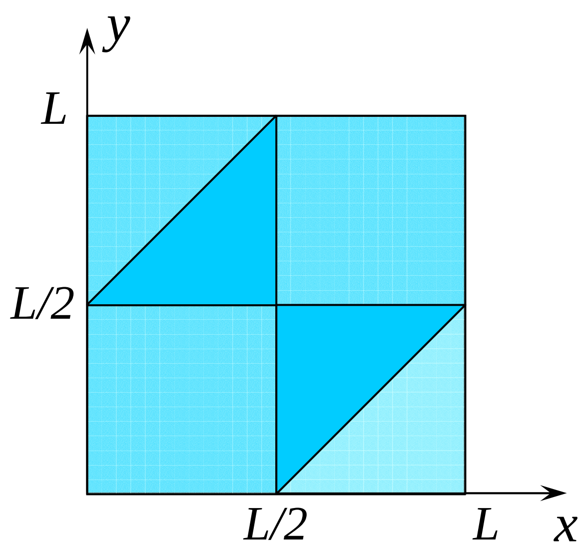
解Ⅲ 设两个折点分别为x，y，则



$$\Omega = \{(x,y,z): 0 < x,y < L\}$$

$$A = \{(x,y):\quad x < y,\quad y > L/2, y < x + L/2, x < L/2\ ;$$

$$x > y, x > L/2,$$
$$x < y + L,$$
$$y < L/2\ \}$$



$$P(A) = \frac{1}{4}$$

习题选讲

练习8.5 设楼房有六层，每个乘电梯的人在2,3,4,5,6层下的概率分别为0.08，0.14，0.20，0.26，0.32，试求在一楼乘上电梯的15人中，恰好有1,2,3,4,5人分别在2,3,4,5,6层下电梯的概率P。

解 记X_i为在第i层下电梯的人数，i=2,3,4,5,6，则

$$P(X_2=1, X_3=2, X_4=3, X_5=4, X_6=5) \quad =0.073$$

$$= C_{15}^1 C_{14}^2 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5 \; 0.08^1\, 0.14^2\, 0.20^3 0.26^4\, 0.32^5$$

$$P = C_{15}^1 0.08 \cdot 0.92^{14} \times C_{14}^2 \left(\frac{0.14}{0.92}\right)^2 \left(\frac{0.78}{0.92}\right)^{12} \times C_{12}^3 \left(\frac{0.20}{0.78}\right)^3 \left(\frac{0.58}{0.78}\right)^9$$

$$\times C_9^4 \left(\frac{0.26}{0.58}\right)^4 \left(\frac{0.32}{0.58}\right)^5 \times \left(\frac{0.32}{0.32}\right)^5$$

习题选讲

练习10.4 设二维随机变量（X，Y）在矩形G={(x,y)：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 1$}上服从均匀分布。记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases} \qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

求U和V的联合分布列。

$U \backslash V$	0	1
0	1/4	0
1	1/2	1/4

解 P{U=0，V=0}

$=P\{X\leqslant Y,\ X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y, X>2Y\}=0$

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y, X>2Y\}=\frac{1}{2}$