有趣的投影

华中科技大学软件学院　万琳

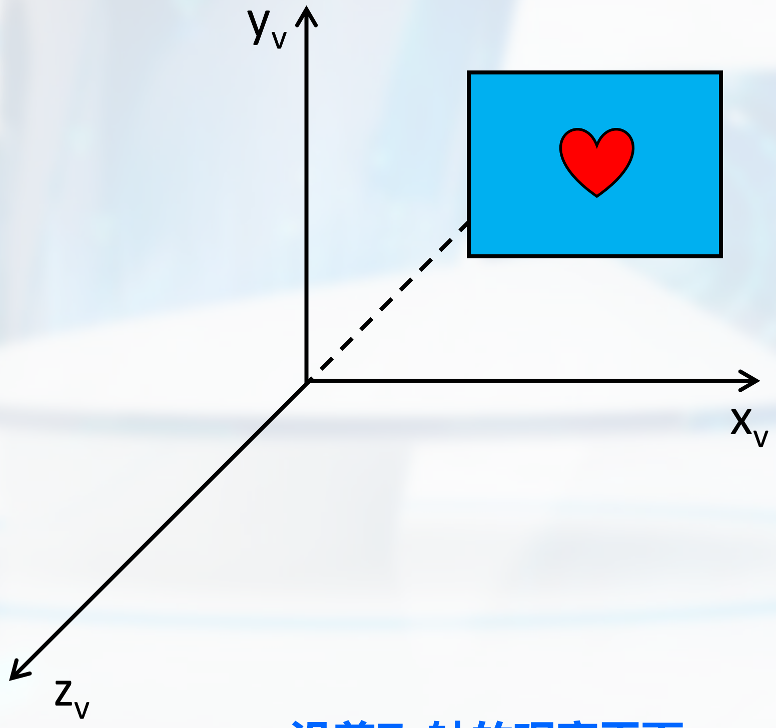
提纲

1. 投影的概念
2. 平行投影
3. 透视投影

1 投影的概念

观察变换中隐含有一个观察平面。

观察平面（View Plane），即投影平面。

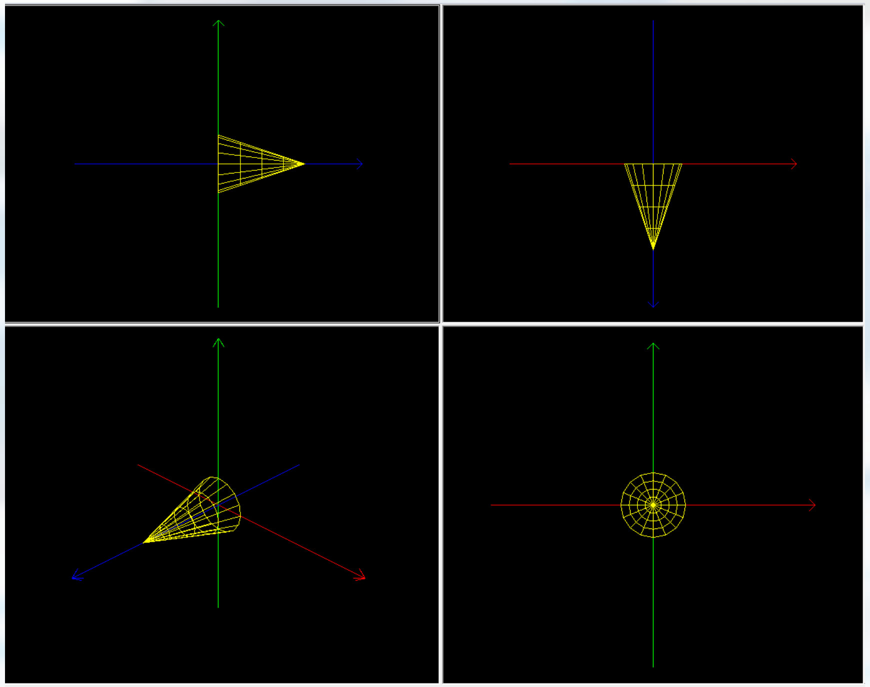


沿着Zv轴的观察平面

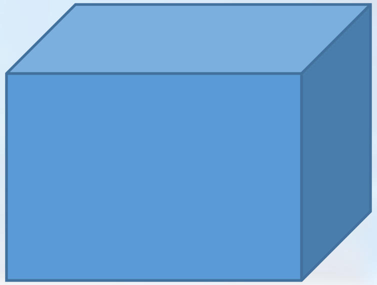
1

投影的概念

投影方式：平行投影



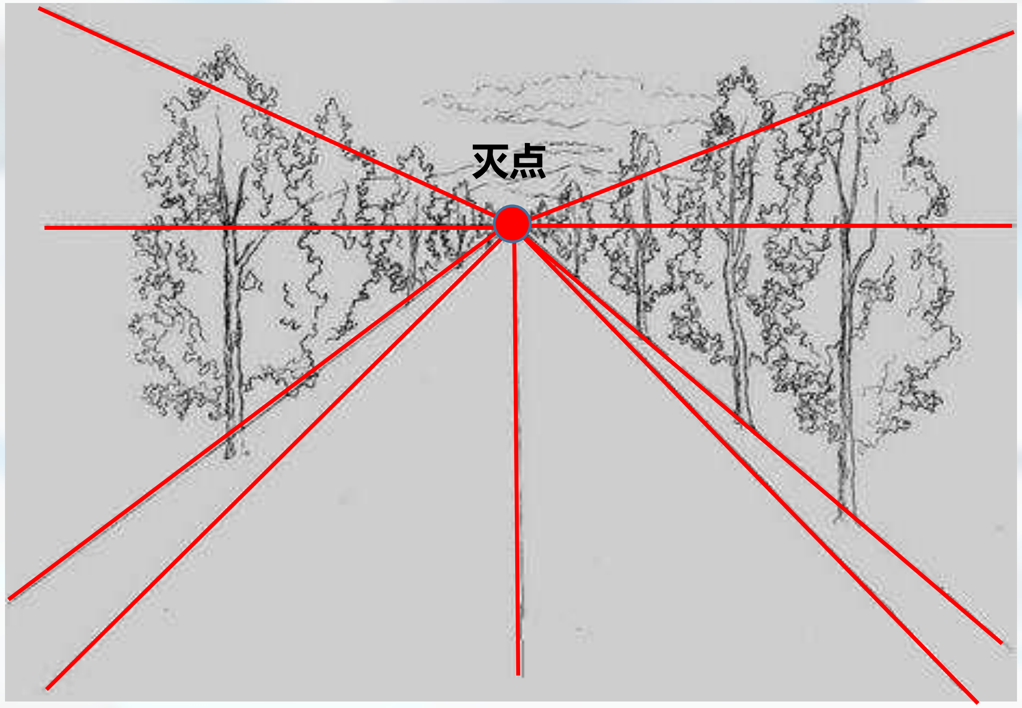
三视图



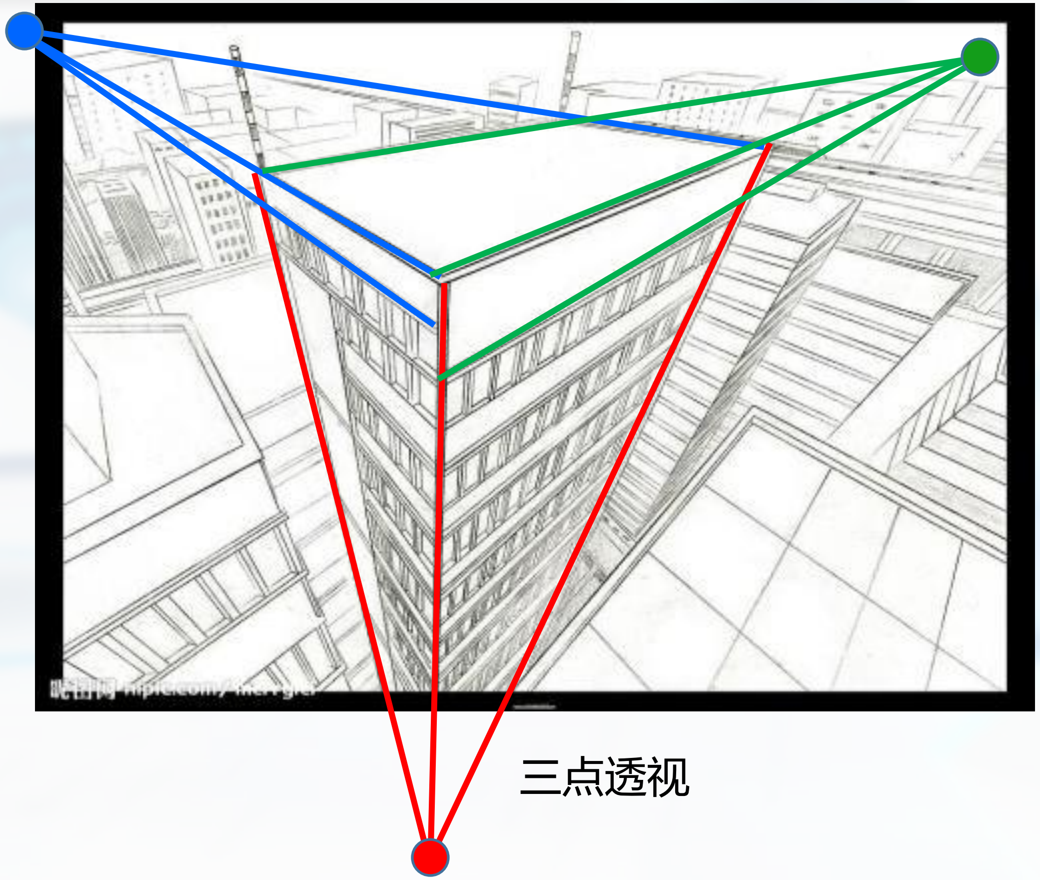
轴测图

1 投影的概念

投影方式：透视投影



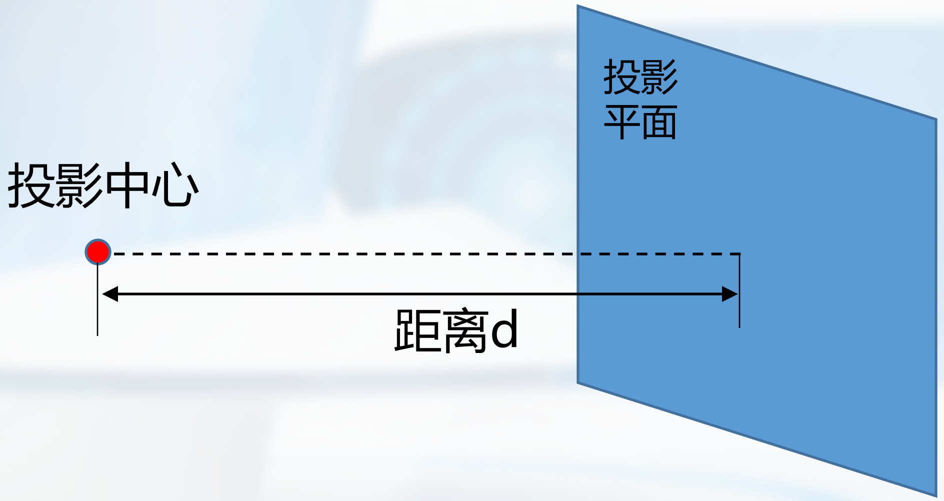
一点透视



三点透视

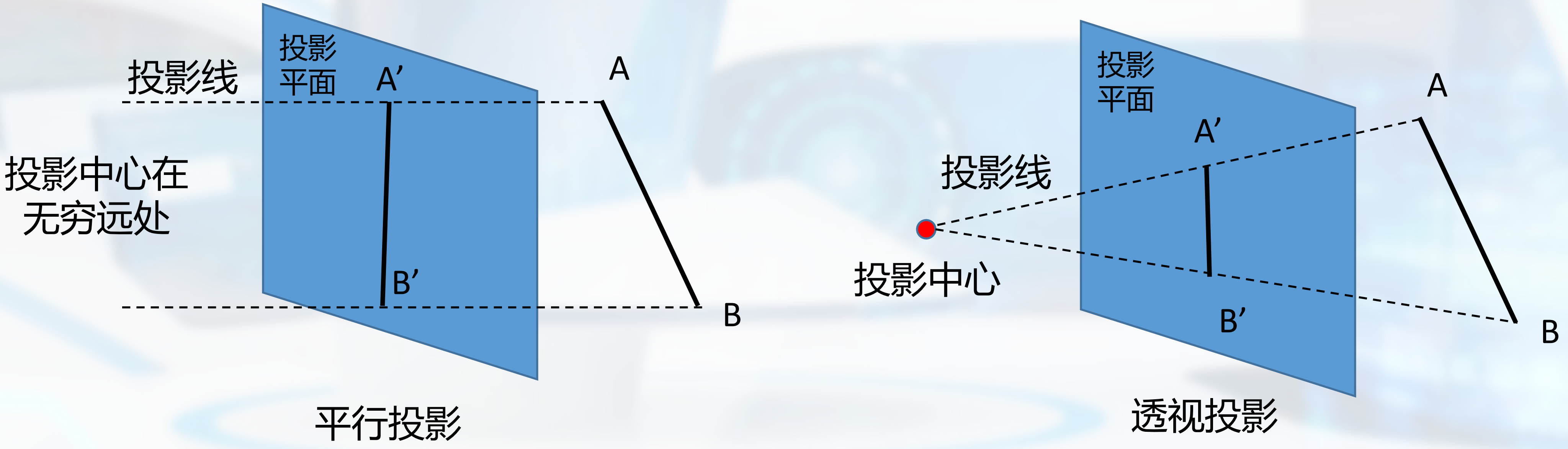
1 **投影的概念**

投影方式：



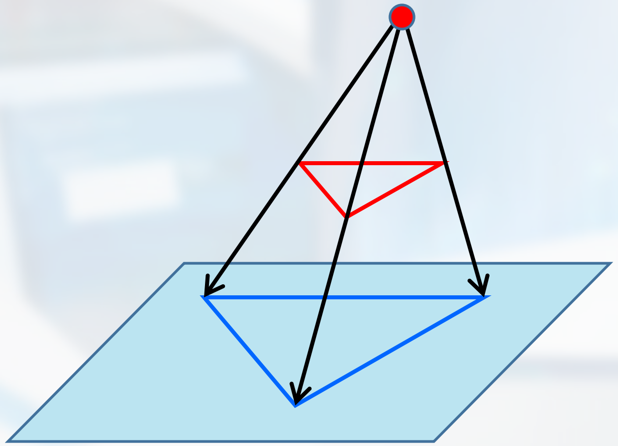
1 投影的概念

投影方式：

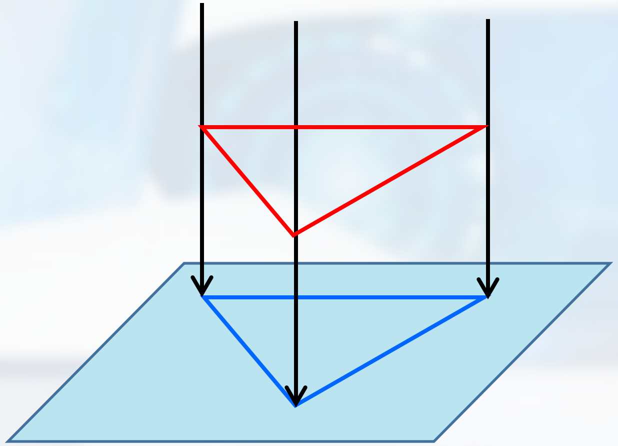


1 投影的概念

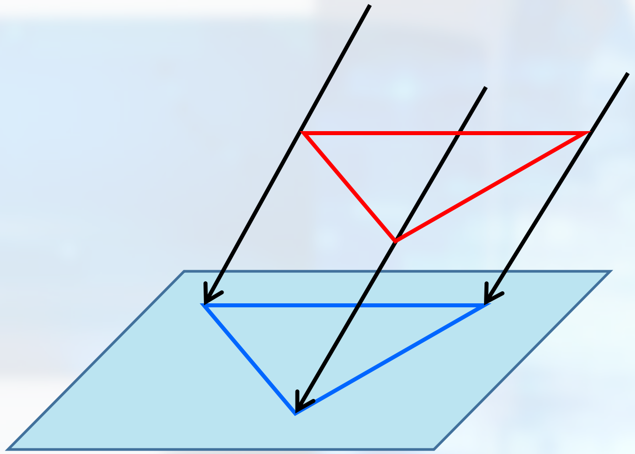
投影方式：



（a）透视投影



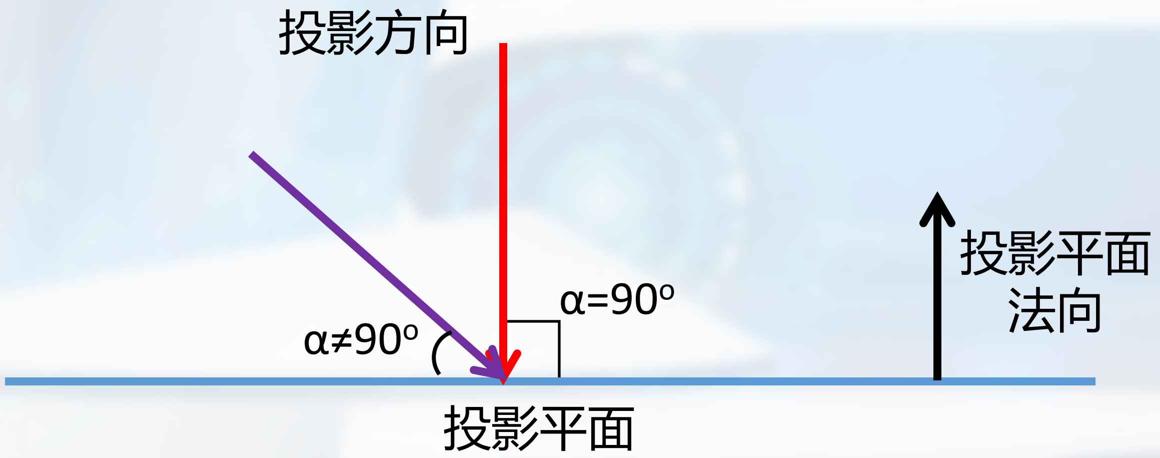
（b）正投影



（c）斜投影

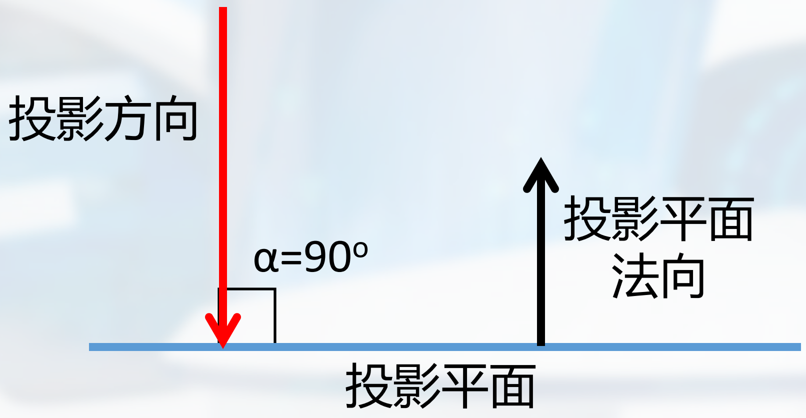
2 平行投影

平行投影可分成两类：正投影和斜投影。

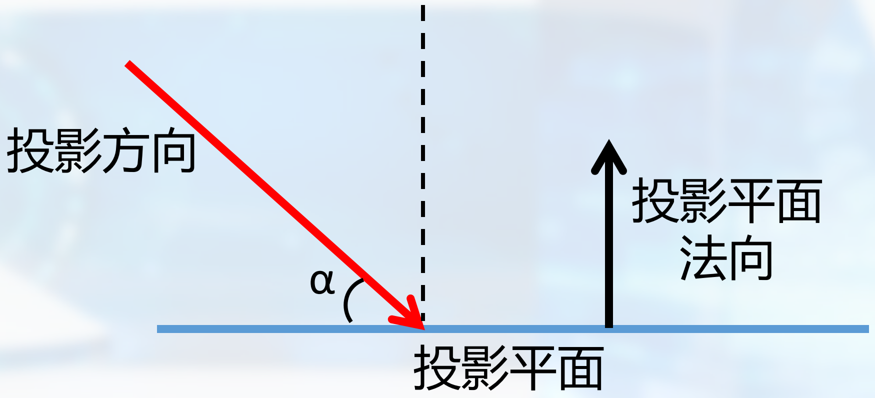


2 平行投影

平行投影可分成两类：正投影和斜投影。



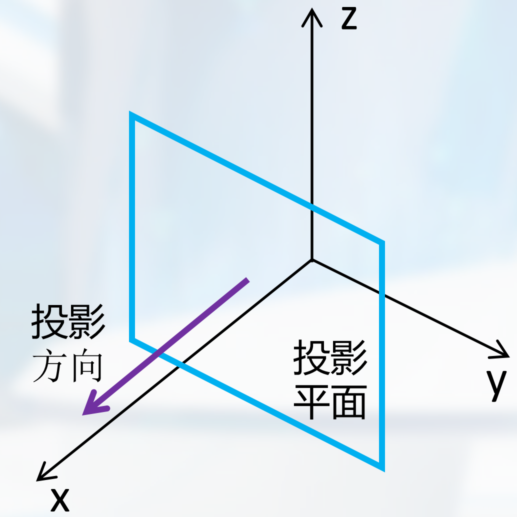
（a）正投影



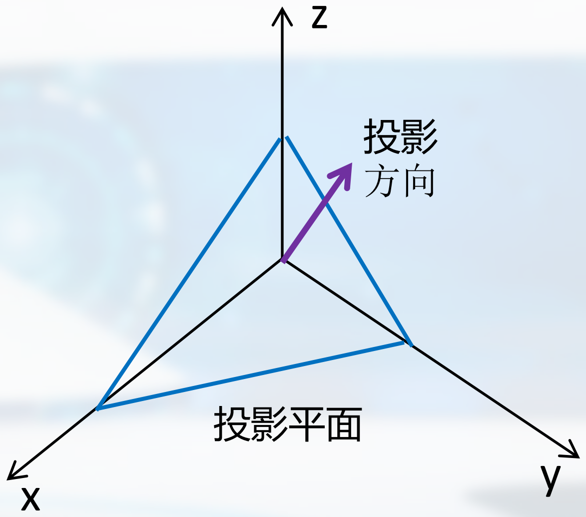
（b）斜投影

平行投影

正投影分为：三视图、正轴测图。



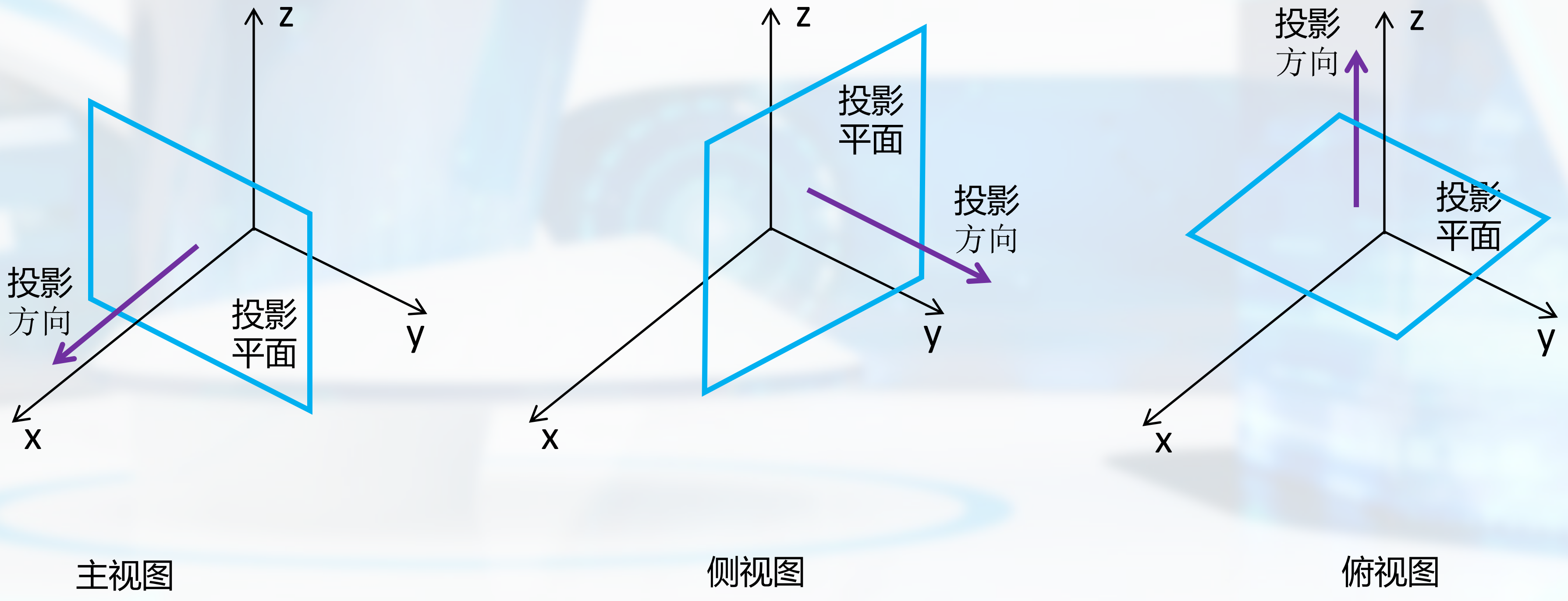
三视图



正轴测图

2 平行投影

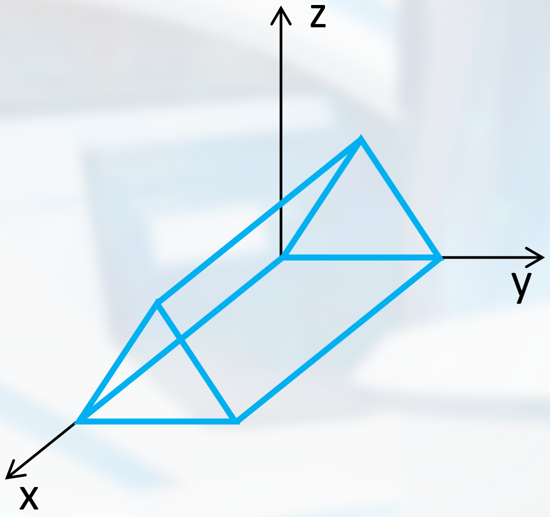
正投影分为：**三视图**、正轴测图。

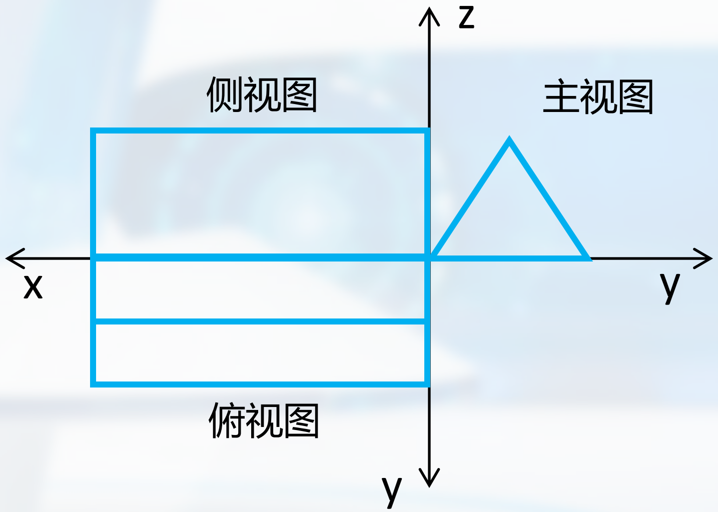


2

平行投影

正投影分为：**三视图**、正轴测图。





以投影面与x轴垂直且在x_p处的主视图为例：

$x' = x_p$

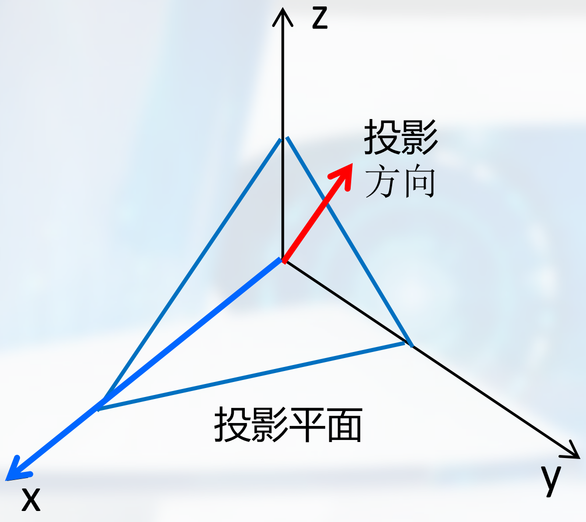
$y' = y$

$z' = z$

2

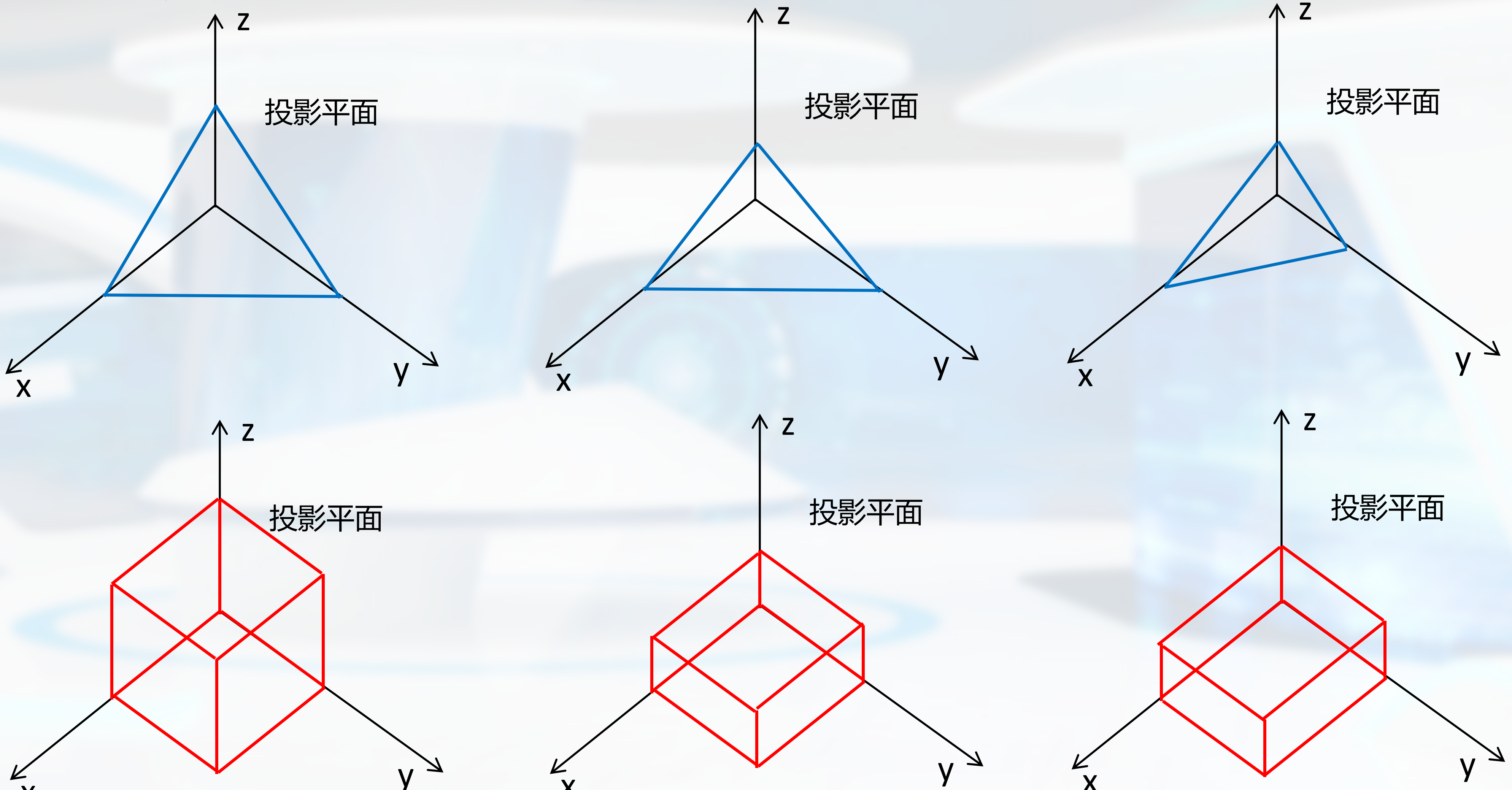
平行投影

正投影分为：三视图、**轴测图**。



当将该平面的法向量方向旋转到x轴
则投影平面为YOZ平面

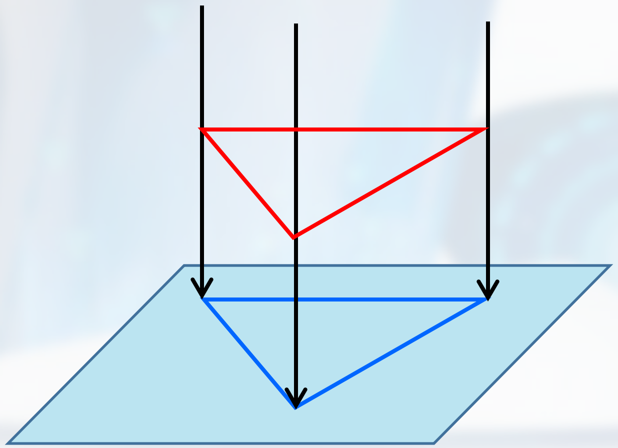
2 平行投影



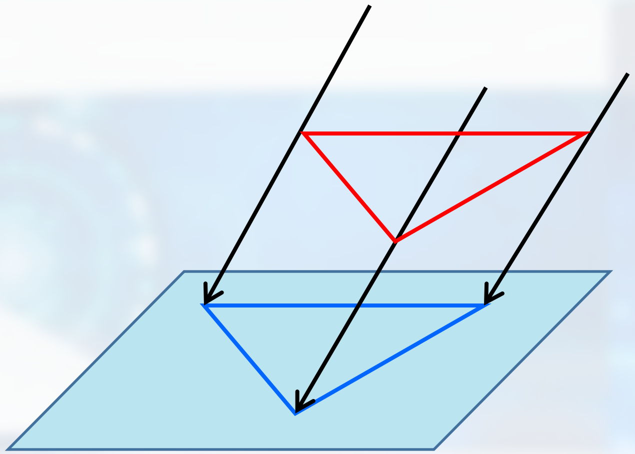
（a）等轴测 （b）正二测 （c）正三测

1 投影的概念

斜投影：



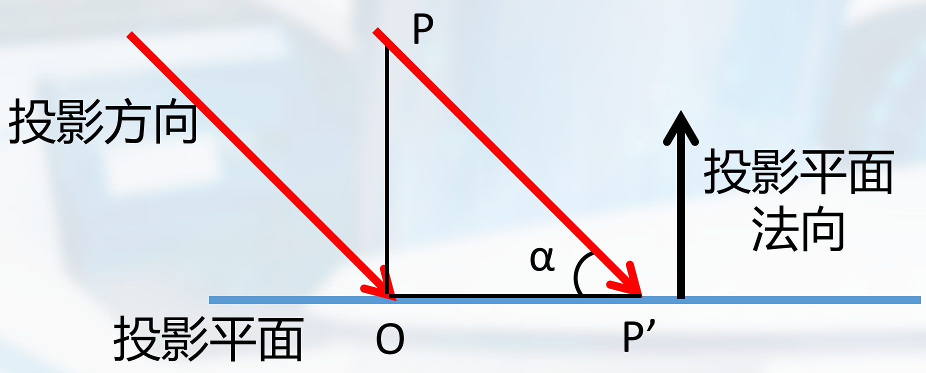
（ a ）正投影



（ b ）斜投影

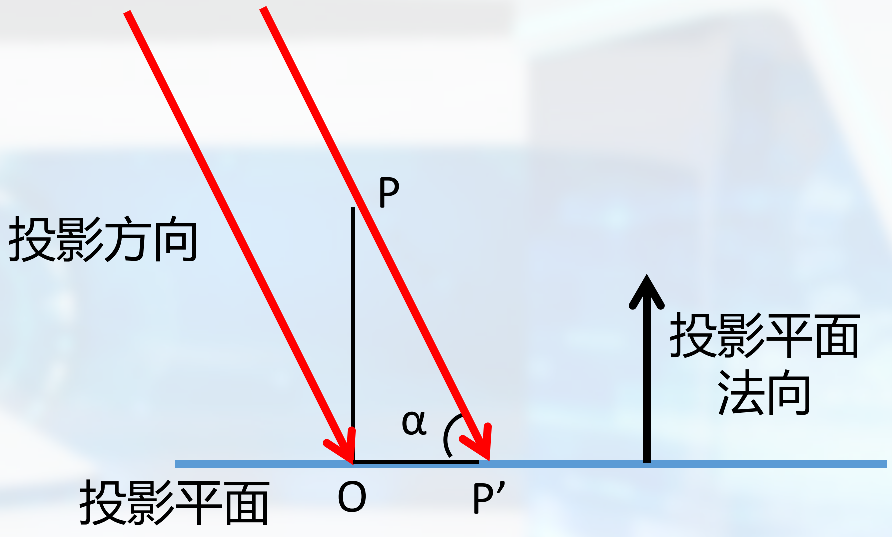
2 平行投影

斜投影：常见的有斜等测和斜二测。



（a）斜等测

α=arctg（1）

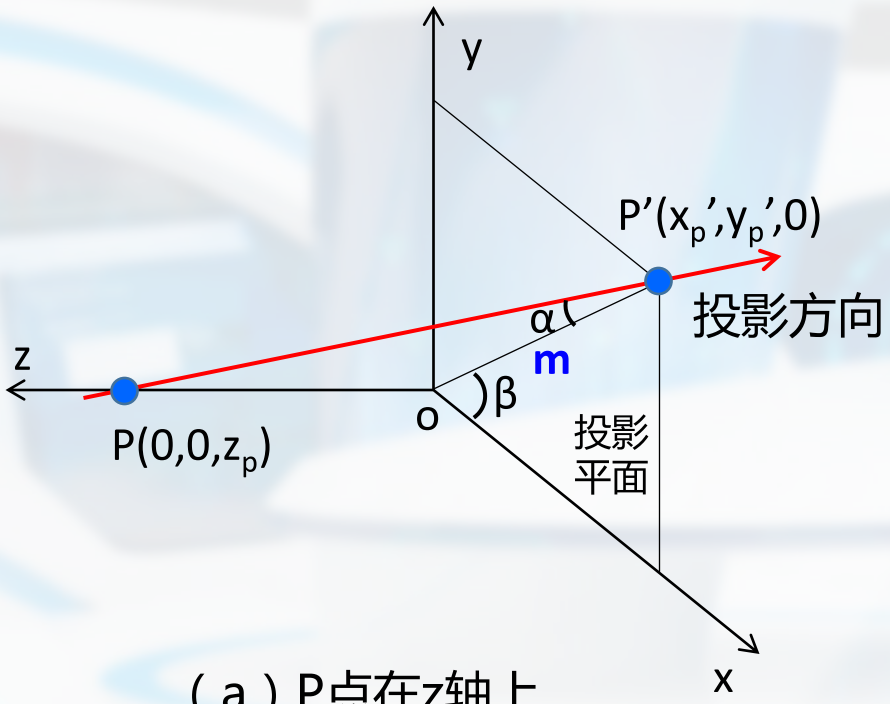


（b）斜二测

α=arctg（2）

2 平行投影

斜投影：常见的有斜等测和斜二测。



（a）P点在z轴上

其中：

$m=z_p \cdot ctg\alpha$

因此：

$x_p'=z_p \cdot ctg\alpha \cdot \cos\beta$

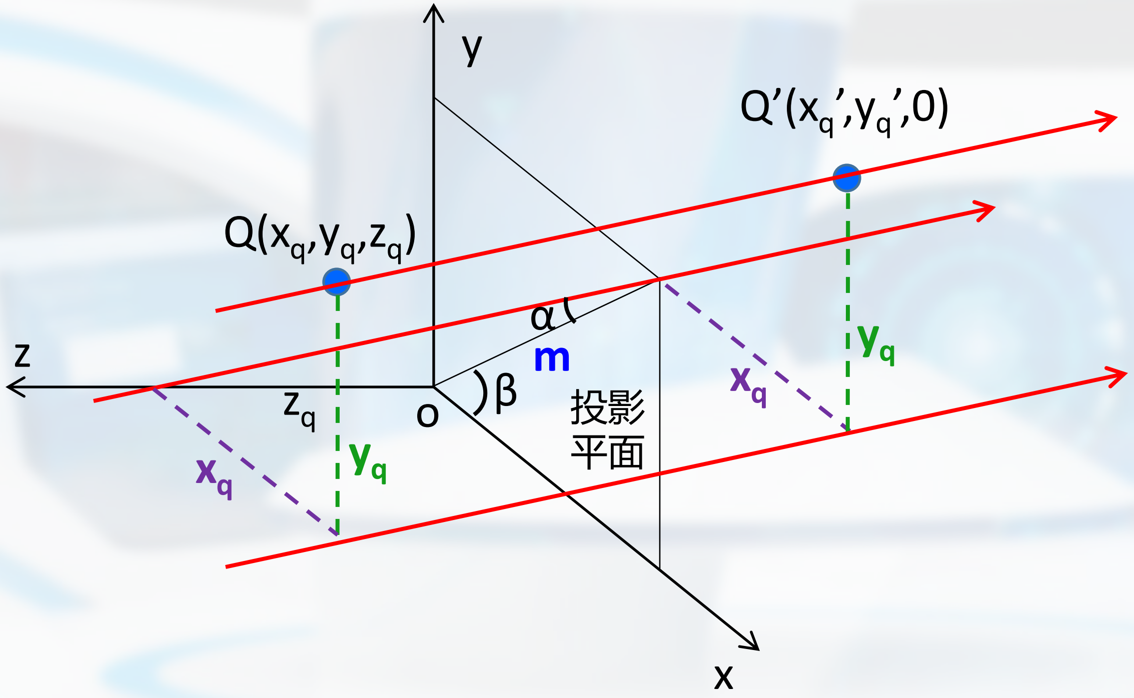
$y_p'=z_p \cdot ctg\alpha \cdot \sin\beta$

$z_p'=0$

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ctg\,\alpha\cos\beta & ctg\,\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 平行投影

斜投影：常见的有斜等测和斜二测。



（b）Q点为空间任意一点

其中：

$m=z_q \cdot ctg\alpha$

因此：

$x_p'=x_q+z_q \cdot ctg\alpha \cdot \cos\beta$

$y_p'=y_q+z_q \cdot ctg\alpha \cdot \sin\beta$

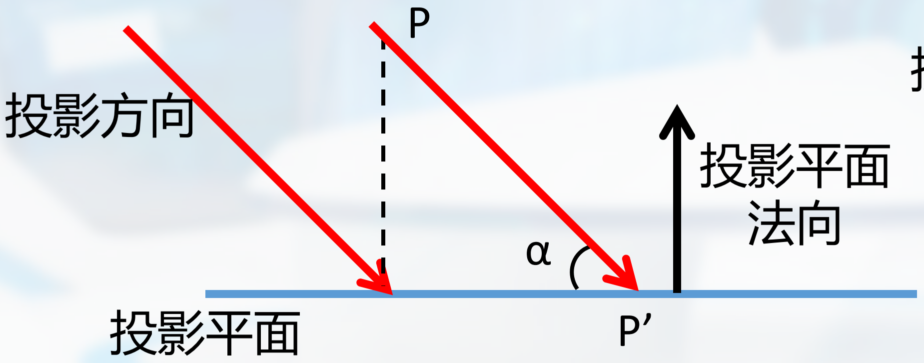
$z_p'=0$

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ctg\alpha\cos\beta & ctg\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 平行投影

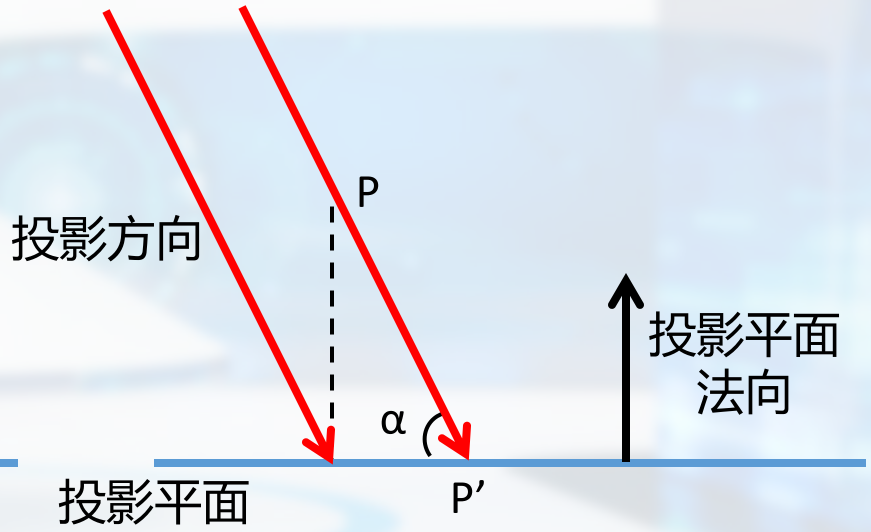
斜投影：常见的有斜等测和斜二测。

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ ctg\alpha\cos\beta & ctg\alpha\sin\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



（a）斜等测

α=arctg（1）

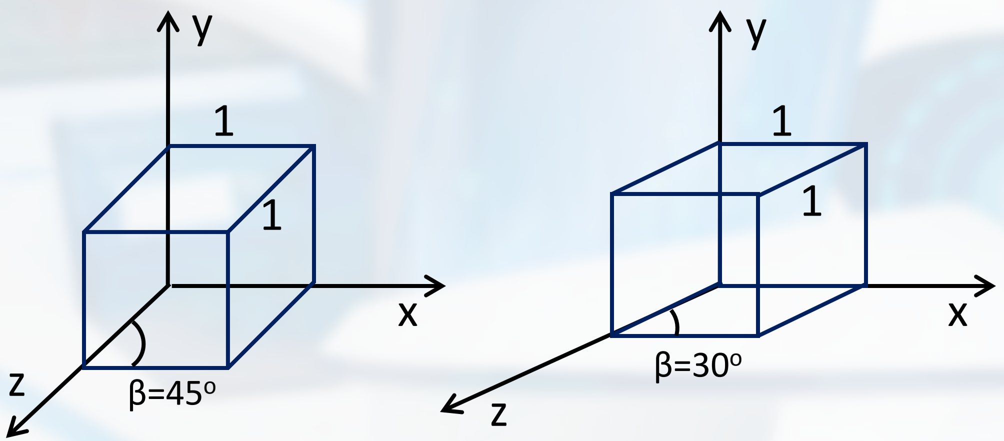


（b）斜二测

α=arctg（2）

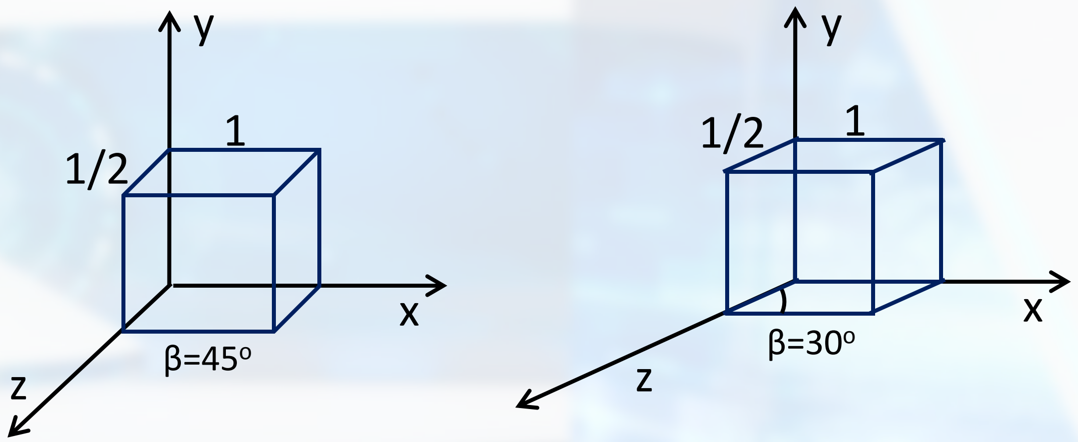
2 平行投影

斜投影：常见的有斜等测和斜二测。



（a）斜等测

α=arctg（1）

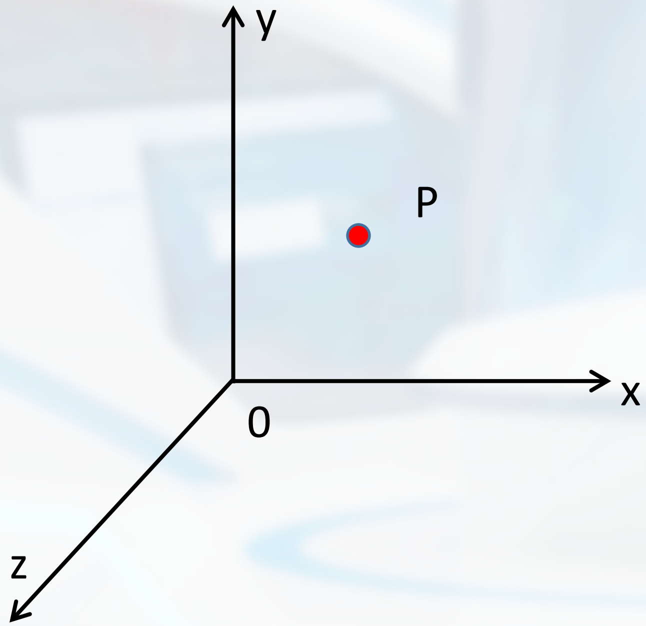


（b）斜二测

α=arctg（2）

3 透视投影

基于三维齐次坐标的变换：



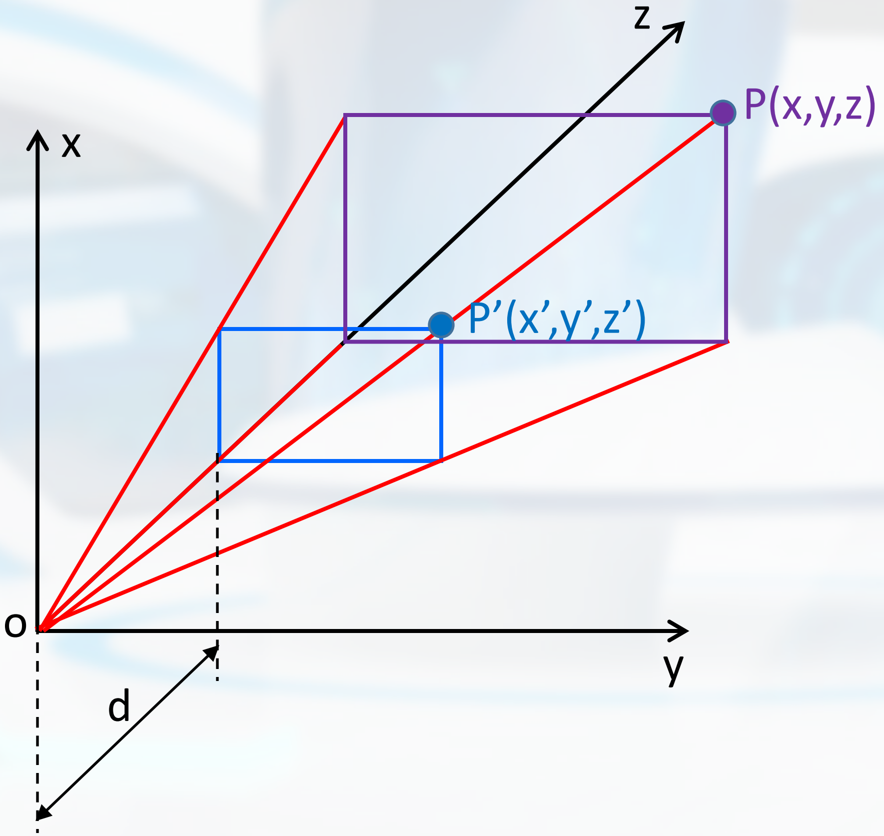
三维坐标系下点p(x,y,z)变换后为p′（x′，y′，z′）：

则所有的变换可以用矩阵T_{3D}来表示！

$$p' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} T_1 \qquad\qquad T_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right] \\ T_2 \qquad\qquad T_4 \end{array}$$

3 透视投影

一点透视



利用相似三角形对应边成比例：

x’:x=y’:y=d:z

$$\Rightarrow \quad x'=\frac{x}{z/d},\ y'=\frac{y}{z/d},\ z'=d$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T_1 & \qquad\qquad T_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{d}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} T_2 & \qquad\qquad T_4 \end{array} \end{array}$$

3 透视投影

透视缩小效应：三维形体透视投影的大小与形体到投影中心的距离成反比

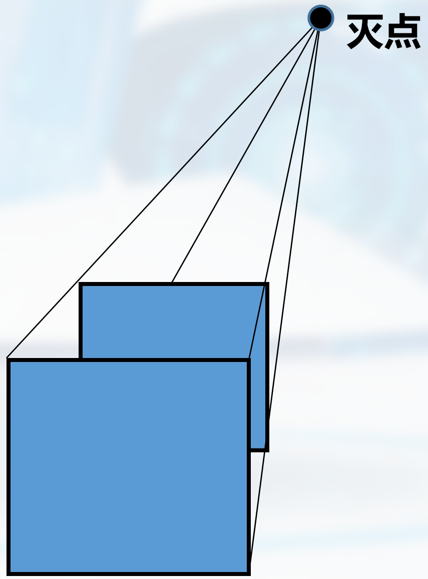
3

透视投影

灭点：

◆不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点，这个点称为**灭点**(Vanishing Point)。

◆坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点称作**主灭点**。



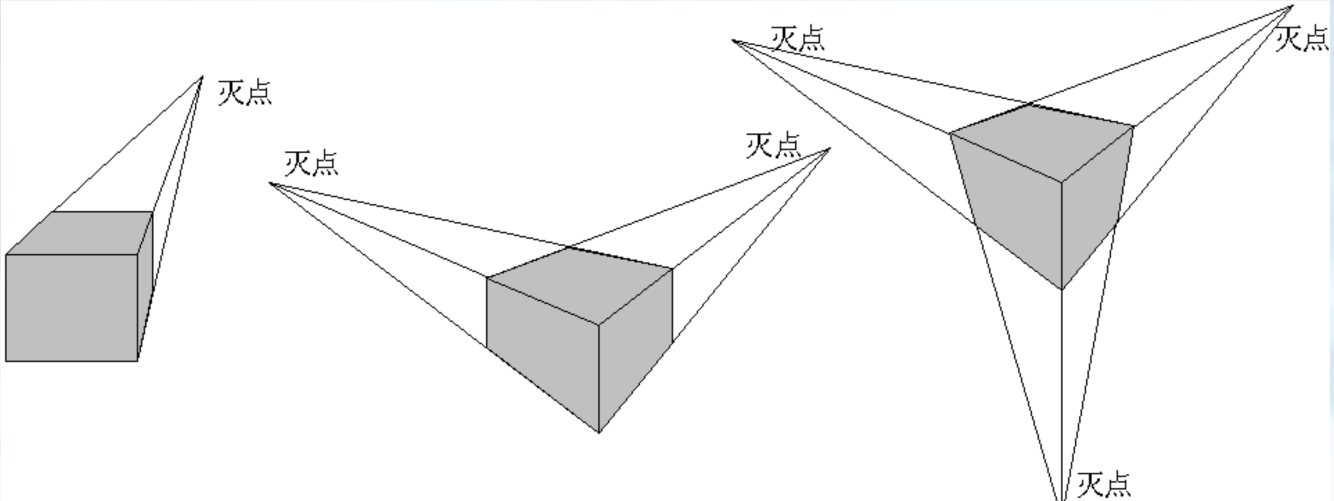
3 透视投影

透视投影按照主灭点个数的分类：

◆**一点透视**有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行。

◆**两点透视**有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行。

◆**三点透视**有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交。



(a)一点透视 (b)二点透视 (c)三点透视

谢谢

软件学院　万琳