



第四章 插值方法

在现实世界中, 变量之间的函数关系往往异常复杂, 其表述也呈多样化, 有的可用数学表达式描述, 有的则无法给出其明显的表达式而仅知道其在一些离散点上的函数值或导数值。当变量之间的函数关系表述较为复杂或不明显时, 人们自然希望能找到一些简单函数来近似地逼近其函数关系。逼近函数通常可在不同函数类中选取, 其既可以是一个代数多项式、三角多项式、指数函数或有理分式, 也可以是光滑函数或分段光滑函数。随着逼近函数的选取不同, 其逼近原函数的精度也各有差异。本章将介绍一些典型的函数逼近技巧。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 1 页 共 65 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.1 多项式插值问题

众所周知，最简单的函数类当属代数多项式函数类，本节将考虑在该函数类中取逼近函数的问题。设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且已知点 $x_i \in [a, b]$ 处的函数值 $f(x_i)$ ($i = p_0, p_1, \dots, p_n$)和点 $x_j \in [a, b]$ 处的导数值 $f^{(k_j)}(x_j)$ ($j = q_0, q_1, \dots, q_m$)，其中 k_j 为小于或等于 $n + m + 1$ 的任意正整数。今求一次数不超过 $n + m + 1$ 的代数多项式

$$L(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n+m+1}x^{n+m+1}$$

使

$$\begin{aligned} L(x_i) &= f(x_i), \quad i = p_0, p_1, \dots, p_n, \\ L^{(k_j)}(x_j) &= f^{(k_j)}(x_j), \quad j = q_0, q_1, \dots, q_m \end{aligned}$$

成立。该问题称为**代数多项式插值问题**，诸 x_i, x_j 称为**插值节点**，区间 $[a, b]$ 称为**插值区间**。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 2 页 共 65 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

例4.1 已知函数 $f(x)$ 的如下数据

| | | | |
|------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| y | 0 | 1 | 1 |
| y' | 0 | 1 | |

求 $f(x)$ 的插值多项式 $L(x)$.

解 设所求多项式为

$$L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

由已知条件得

$$L(0) = a_0 = 0, \quad L(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1,$$

$$L(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 1,$$

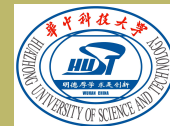
$$L'(0) = a_1 = 0, \quad L'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 1.$$

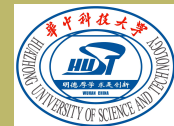
解之得

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = -\frac{3}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}.$$

故

$$L(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[第 3 页 共 65 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



例4.2 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值及其导数值 $\{f^{(k)}(x_0)\}_{k=0}^n$ ，试构造插值多项式 $L(x)$ 使得

$$L^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

解 设 $L(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ ，并令

$$f(x_0) = L(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = L'(x_0) = a_1,$$

$$f''(x_0) = L''(x_0) = 2!a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = L^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

则得

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

于是

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

该多项式即为Taylor展开式。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 4 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§4.2 Lagrange插值公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 其在 $n+1$ 个互异点 $x_i \in [a, b]$ 处的函数值 $y_i := f(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ 为已知, 今求一个次数不超过 n 的代数多项式

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

使其满足

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

该问题称为**Lagrange插值问题**, 所求得的多项式 $L_n(x)$ 称为**Lagrange插值多项式**。下述定理表明该代数插值问题的解 $L_n(x)$ 存在且唯一。

定理 4.1 代数插值问题 (1)-(2) 的解 $L_n(x)$ 存在且唯一。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 5 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



证明 由条件 (2) 有

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \cdots \cdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases} \quad (3)$$

注意到方程组 (3) 的系数行列式是 Vandermonde 行列式, 且有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0.$$

因此, 方程组 (3) 有唯一解 $\{a_i\}_{i=0}^n$, 即 $L_n(x)$ 存在且唯一。 ■

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

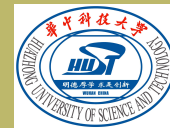
第 6 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



通过直接验证，我们有

定理 4.2 多项式

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (4)$$

满足

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

由定理 4.1 及定理 4.2 即可推得 Lagrange 插值多项式。

定理 4.3 代数插值问题 (1)-(2) 的解

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x), \quad n > 0, \quad (5)$$

其中 $l_j(x)$ 由 (4) 给出。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 7 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



证明 因 $l_j(x)$ 是一个 n 次多项式, 则 (5) 的右端也是一个 n 次多项式, 且由定理 4.2 有

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \delta_{ij} = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

故由定理 4.1 可知 $L_n(x)$ 为所求。 ■

在 Lagrange 插值公式 (5) 中, 当 n 取 1 或 2, 我们分别称之为**线性插值公式**和**抛物插值公式**。此外, Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 也可等价地写为:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x)}, \quad n > 0, \quad (6)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ 。公式 (5) 的计算程序见算法 4.1.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 8 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



算法 4.1 Lagrange 插值算法

```
function y=lagrange(x0,y0,x)
n=length(x0); m=length(x);
for i=1:m
    z=x(i); s=0.0;
    for k=1:n
        p=1.0;
        for j=1:n
            if j~=k
                p=p*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
            end
        end
        s=p*y0(k)+s;
    end
    y(i)=s;
end
end
```

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[第 9 页 共 65 页](#)[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 的一种逼近, 除在插值节点 x_i 处有 $L_n(x_i) = f(x_i)$ 外, 在其它点处 $L_n(x)$ 与函数 $f(x)$ 之间一般均存在着误差, 该误差可由微积分原理分析导出。

定理 4.4 设 $f(x) \in \mathbb{C}^{(n)}([a, b])$, 且 $f(x)$ 的 $n + 1$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, $x_i \in [a, b]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 为 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 的插值节点, 则 $L_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上的截断误差为

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad x \in [a, b], \quad (7)$$

其中 ξ 在诸 x_i 与 x 之间。

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)

第 10 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



证明 $\forall x \in [a, b]$, 若 x 是插值节点, 则 (7) 显然成立; 若 x 是非插值节点, 则作辅助函数

$$\Phi(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega_{n+1}(t)}{\omega_{n+1}(x)}[f(x) - L_n(x)], \quad t \in [a, b].$$

可验证:

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) = \Phi(x_1) = \cdots = \Phi(x_n) = 0.$$

因此, 由 Rolle 定理可得 $\Phi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n + 1$ 个零点。当依次反复应用 Rolle 定理时, 我们可得 $\Phi(t)$ 在区间 $[\min_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}, \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}]$ 上至少有一个零点 ξ , 即

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega_{n+1}(x)}[f(x) - L_n(x)] = 0.$$

由此即得 (7) 式。 ■

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 11 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



若 $f(x) \in \mathbb{C}^{(n+1)}([a, b])$, 则由 (7) 式进一步有 $L_n(x)$ 的误差估计

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad \text{其中} \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (8)$$

在误差表达式 (7) 中, 当函数 $f(x)$ 给定时, 因式

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

直接影响到误差 $R_n(x)$ 的大小。一般而言, 在插值区间中部使用插值, 则插值精度较高; 在插值区间两端或之外使用插值, 则插值精度较低。

例 4.3 给定函数 $f(x) = x \exp(x)[1 + \exp(x)]$, 插值节点

$$x_0 = 1.00, x_1 = 1.02, x_2 = 1.04, x_3 = 1.06,$$

试构造 Lagrange 插值多项式, 求 $f(1.03)$ 的逼近值, 并给出其绝对误差与误差估计。

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 12 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



解 依题意可取 $n = 3$, 函数 $f(x)$ 在插值节点 x_0, x_1, x_2, x_3 处的值依次为

$$y_0 = 10.10733792738970, \quad y_1 = 10.67308004210016,$$

$$y_2 = 11.26703336579383, \quad y_3 = 11.89055898557299.$$

因此, 其 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x) = \sum_{j=0}^3 y_j l_j(x), \quad \text{其中 } l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^3 \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

利用算法4.1可计算获得 $f(1.03)$ 的逼近值

$$L_3(1.03) = 10.96644523488020,$$

其绝对误差为

$$|R_n(1.03)| = |f(1.03) - L_3(1.03)| = 1.479487849564976e - 006.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 13 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



此外, 既然 $|f^{(4)}(x)|$ 在插值区间 $[1, 1.06]$ 上有最大值

$$\max_{1 \leq x \leq 1.06} |f^{(4)}(x)| = f^{(4)}(1.06) = 4.264964745969754e + 002,$$

则由式 (8) 可得误差估计

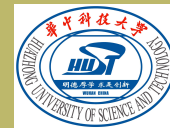
$$\begin{aligned} & |R_3(1.03)| \\ & \leq \frac{\max_{1 \leq x \leq 1.06} |f^{(4)}(x)|}{4!} |(1.03 - 1.00)(1.03 - 1.02)(1.03 - 1.04)(1.03 - 1.06)| \\ & = 1.599361779738663e - 006 \end{aligned}$$

由此可见, 误差估计与实际误差基本相符。 ■

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 14 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.3 分段插值公式

在使用 Lagrange 插值公式 (5) 时, 其插值多项式的次数 n 必须保持适度大小, n 的过大或过小均有可能导致大的插值误差。

例 4.4 考察函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

设将区间 $[-5, 5]$ 分为 n 等分, 以 $L_n(x)$ 表示取 $n+1$ 个等分点作节点的插值多项式。图 4.1 给出了 $L_{10}(x)$ 的图象。从图中可看出, 虽然 $L_{10}(x)$ 在 11 个插值节点上取与所逼近函数 $f(x)$ 相同的值, 但整体逼近效果是很差的, 越靠近端点逼近的效果就越差。这种由于采用高次插值而产生大误差的现象称为 **Runge 现象**。 ■

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

第 15 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

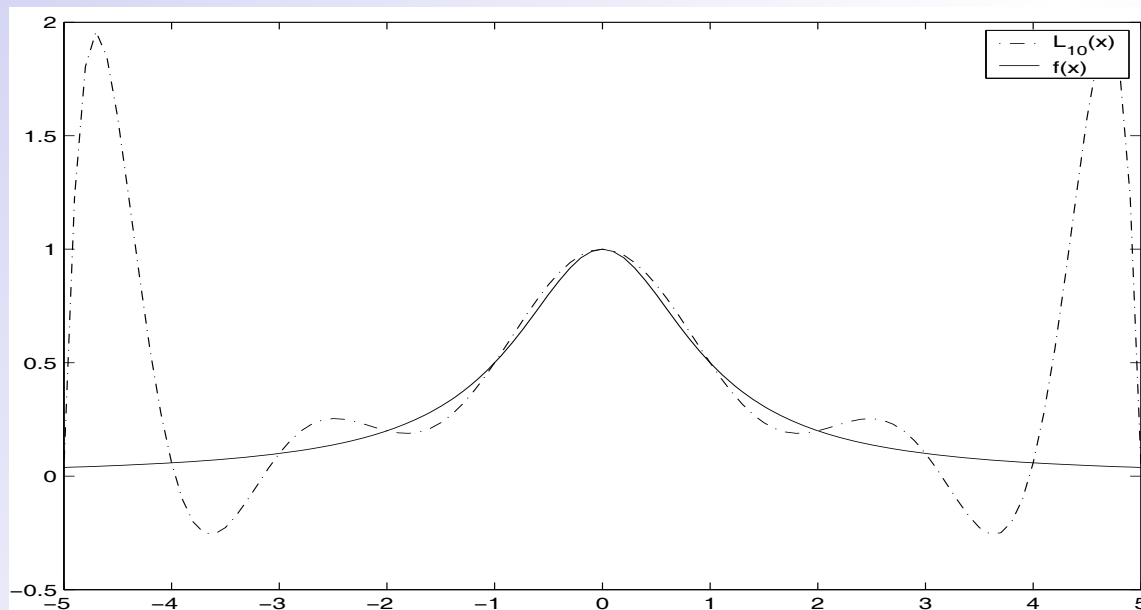


图 4.1. Runge 现象

Runge 现象表明: 节点加密或大范围内使用高次插值不一定能保证插值函数精确逼近被插值函数。为了保证所需插值精度, 一个可行办法是采用**分段低次插值**, 即首先在插值区间 $[a, b]$ 上引入适当节点 $\{x_i\}$ 将 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$, 然后在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上使用低次多项式插值。其中, 诸点 (x_k, y_k) 称为**型值点**, 这里 $y_k = f(x_k)$ 。

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 16 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



以下，我们探讨分段线性插值，即在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上使用一次多项式插值。从几何观点来看，即是以过型值点 (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, n$) 的折线 $I_h(x)$ 去逼近曲线 $f(x)$ 。记 $h_k = x_{k+1} - x_k$, $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{h_k\}$, 今求一折线函数 $I_h(x)$ ，其满足下列条件：

- 1) $I_h(x) \in \mathbb{C}([a, b])$,
- 2) $I_h(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$,
- 3) $I_h(x)$ 在每个插值区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上为一次函数。

易知，函数 $I_h(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (9)$$

在整个插值区间 $[a, b]$ 上的表达式为

$$I_h(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) y_k, \quad (10)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [▶](#)

第 17 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



其中 $l_k(x)$ 为 $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上的基函数, 其表达式为

$$l_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x_{k-1} \leq x \leq x_k \ (k \neq 0), \\ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}, & x_k \leq x \leq x_{k+1} \ (k \neq n), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

由插值基函数 $l_k(x)$ 的表达式可知

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} := \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

上式表明 $l_k(x)$ 具有**局部非零性**, 即 $l_k(x)$ 只在 x_k 附近不为零, 在其它地方均为零。这种局部非零性质使得插值点处的误差可控制在一个局部区域内, 而 Lagrange 插值公式中的基函数 $l_k(x)$ 不具有该性质。此外, 分段线性插值计算简单, 适用于光滑性要求不高的插值问题。当我们采用 MATLAB 实现分段线性插值计算时, 可直接采用命令 `interp1(x, y, \tilde{x} , 'linear')` 或 `interp1(x, y, \tilde{x})`, 其中 x 为节点向量, y 为对应的节点向量函数值, \tilde{x} 为插值点。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 18 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



在例 4.4 同样的插值条件下，利用分段线性插值 $I_1(x)$ 计算函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的逼近值，图 4.2 表明 $I_1(x)$ 的逼近效果要优于 $L_{10}(x)$ 。

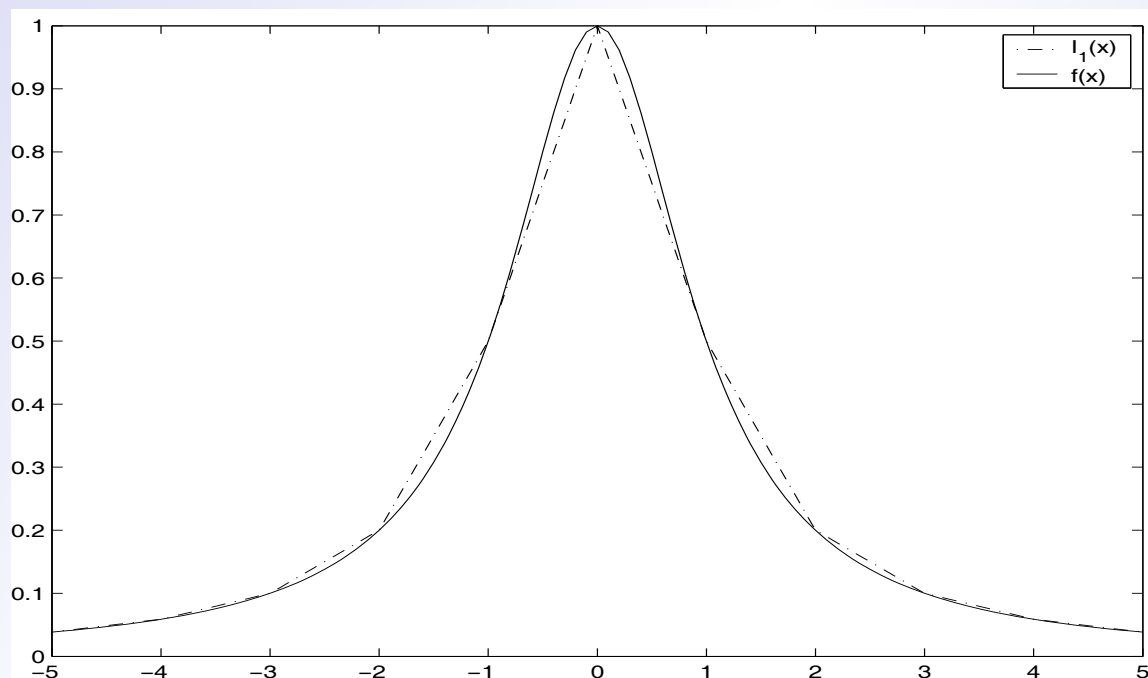


图 4.2 分段线性插值 $I_1(x)$.

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 19 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§4.3 Newton 插值公式

为提高插值精度，在计算过程中往往需要增加或减少节点，而 Lagrange 插值公式在计算时不易变节点。因此，本章将通过 Lagrange 插值公式实施恒等变形，而引入 Newton 插值公式。

§4.3.1 差商与差分

定义 4.1 设 x_0, x_1, \dots, x_n 为区间 $[a, b]$ 上的互异节点，则称 $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 在 x_i 处的零阶差商；称

$$\frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

为函数 $f(x)$ 在 x_i, x_j 处的一阶差商，记为 $f[x_i, x_j]$ ；一般称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

为 $f(x)$ 在 x_0, x_1, \dots, x_n 处的 n 阶差商。

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 20 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



利用差商的定义及数学归纳法可以证明下述性质:

定理 4.5 n 阶差商

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}, \quad (12)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

该性质表明差商的值与节点 x_0, x_1, \cdots, x_n 的排序无关, 即**差商具有对称性**。此外, 稍后我们将可证明下列差商性质成立。

定理 4.6 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 n 阶可导, 且诸节点 $x_i \in [a, b]$, 则 n 阶差商与 n 阶导数有如下关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \text{ 在诸 } x_i \text{ 之间}. \quad (13)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 21 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



定义 4.2 设函数 $y = f(x)$ 在等距节点 $x_i = x_0 + ih$ 处的函数值为 f_i ，在非节点 $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ 处的函数值为 $f(x_i) = f_{i+1/2}$ ，其中 h 称为步长,则称

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}, \quad \delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

分别为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的一阶向前差分，一阶向后差分和一阶中心差分。符号 Δ 、 ∇ 、 δ 分别称为向前差分算子，向后差分算子和中心差分算子。

由一阶差分的定义出发，可定义二阶差分

$$\Delta^2 f_i := \Delta(\Delta f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i,$$

$$\nabla^2 f_i := \nabla(\nabla f_i) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\delta^2 f_i := \delta(\delta f_i) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}.$$

一般地可定义 n 阶差分为

$$\Delta^n f_i := \Delta(\Delta^{n-1} f_i), \quad \nabla^n f_i := \nabla(\nabla^{n-1} f_i), \quad \delta^n f_i := \delta(\delta^{n-1} f_i).$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 22 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



若令 $If_i = f_i$, $Ef_i = f_{i+1}$, 则称 I 为不变算子, E 为移位算子。由于

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = Ef_i - If_i = (E - I)f_i,$$

于是 $\Delta = E - I$. 同理可得

$$\nabla = I - E^{-1}, \quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}.$$

由上述算子关系, 我们分别可得高阶差分算子

$$\Delta^n f_i = (E - I)^n f_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} E^{n-j} f_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+i-j}.$$

$$\begin{aligned} \nabla^n f_i &= (I - E^{-1})^n f_i = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} E^{-(n-j)} f_i \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{i+j-n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^n f_i &= (E^{1/2} - E^{-1/2})^n f_i = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} E^{j/2} E^{-(n-j)/2} f_i \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{i+j-n/2}. \end{aligned}$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 23 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

§4.3.2 一般 Newton 插值公式

由差商定义, 我们有

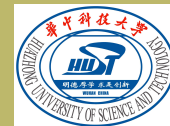
$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0), \\f[x_0, x] &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1), \\f[x_0, x_1, x] &= f[x_0, x_1, x_2] + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_2) \\&\vdots \\f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] &= f[x_0, x_1, \dots, x_n] + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_n).\end{aligned}$$

从上面最后一个式子逐次往上代入得

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\&\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i).\end{aligned}$$

记

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i), \quad (14)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 24 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\omega_{n+1}(x), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (15)$$

则有

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x). \quad (16)$$

由于

$$f(x_i) - N_n(x_i) = R_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

即

$$f(x_i) = N_n(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

且 $N_n(x)$ 为 n 次多项式, 则由定理 4.1 可知

$$N_n(x) \equiv L_n(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (17)$$

$N_n(x)$ 可作为 n 次插值多项式, 称之为 n 次 **Newton 插值公式**。由 (17) 及定理 4.2, 其截断误差

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad x \in [a, b], \quad (18)$$

其中 ξ 在诸 x_i 与 x 之间。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 25 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

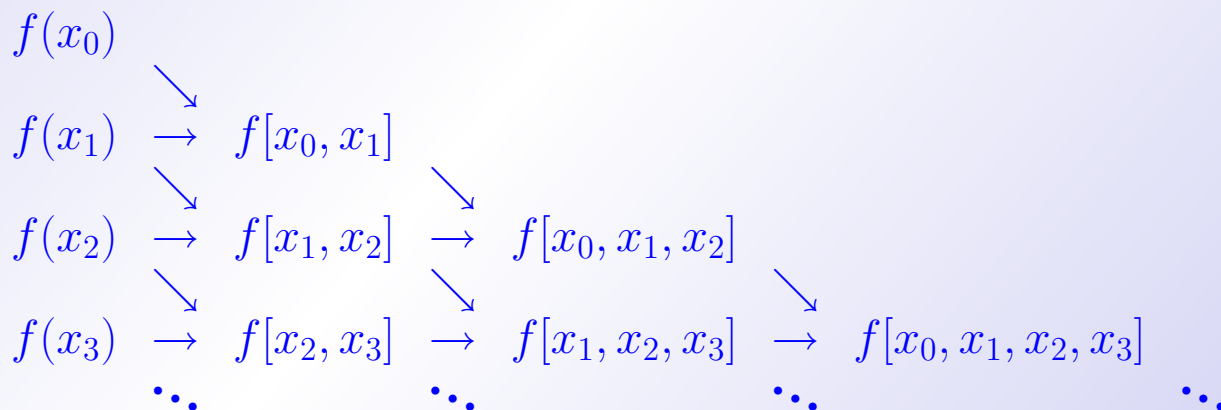
退出



由式 (15) 与 (18) 可知定理 4.6 成立。此外，注意到 Newton 插值公式 (14) 满足下列关系

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i), \quad x \in [a, b]. \quad (19)$$

上式说明 Newton 插值公式具有**承袭性**，即其每增加或减少一个插值节点，只需在上一步计算结果的基础上加上或减去一项。利用 Newton 插值公式 (14) 进行实际计算时，我们一般预先按照如下箭头所示顺序计算其差商：



而后将上表中处于对角线位置的差商值代入公式 (14) 计算出插值，其计算程序见算法 2.2.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 26 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

算法 4.2 Newton 插值算法

```
function np=newton_interpolation(x0,y0,x)
    n=length(x0);
    a(1)=y0(1);
    for k=1:n-1
        d(k,1)=(y0(k+1)-y0(k))/(x0(k+1)-x0(k));
    end
    for j=2:n-1
        for k=1:n-j
            d(k,j)=(d(k+1,j-1)-d(k,j-1))/(x0(k+j)-x0(k));
        end
    end
    d
    for j=2:n
        a(j)=d(1,j-1);
    end
    b(1)=1; c(1)=a(1);
    for j=2:n
        b(j)=(x-x0(j-1)).*b(j-1);
        c(j)=a(j).*b(j);
    end
    np=sum(c)
```

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 27 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



例 4.5 已知 $f(x) = \sin x$, 其插值节点为 $x_0 = 0.40$, $x_1 = 0.55$, $x_2 = 0.70$, $x_3 = 0.85$, $x_4 = 1.00$, 试构造 4 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.596)$ 的逼近值, 并指出其绝对误差。

解 据算法 4.2 可得差商值

| 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| <u>1.1160</u> | | | |
| 1.2029 | <u>0.28956</u> | | |
| 1.3169 | 0.38022 | <u>0.20148</u> | |
| 1.4605 | 0.47867 | 0.21877 | <u>0.028807</u> |

因此, 其 4 次 Newton 插值项式为

$$\begin{aligned} N_4(x) = & 0.41075 + 1.1160(x - 0.4) \\ & + 0.28956(x - 0.4)(x - 0.55) \\ & + 0.20148(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.70) \\ & + 0.028807(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.70)(x - 0.85), \end{aligned}$$

且 $f(0.596)$ 的逼近值 $N_4(0.596) = 0.63191$, 其绝对误差为

$$|f(0.596) - N_4(0.596)| = |0.63192 - 0.63191| = 10^{-5}. \quad \blacksquare$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 28 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§4.3.3 具等距节点的 Newton 插值公式

当插值节点为等距节点 $x_j = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) 时, Newton插值公式可被进一步简化。为此, 我们首先需要下列预备性结果。

定理 4.7 当等距离节点 $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 时, 差分与差商存在着下列关系:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}, \quad (20)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!h^n}. \quad (21)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 29 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



证明 我们利用数学归纳法证明 (20)。事实上, 当 $n = 1$ 时, 有

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}.$$

假设 $n = m - 1$ 时, 式 (20) 成立, 则有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}] = \frac{\Delta^{m-1} f(x_0)}{(m-1)!h^{m-1}}, \quad f[x_1, x_2, \cdots, x_m] = \frac{\Delta^{m-1} f(x_1)}{(m-1)!h^{m-1}}.$$

于是

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \cdots, x_m] &= \frac{f[x_1, \cdots, x_m] - f[x_0, \cdots, x_{m-1}]}{x_m - x_0} \\ &= \frac{\Delta^{m-1} f(x_1) - \Delta^{m-1} f(x_0)}{m!h^m} \\ &= \frac{\Delta^m f(x_0)}{m!h^m}. \end{aligned}$$

因此, 等式 (20) 获证。类似地, 等式 (21) 也可被证。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 30 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

若插值点 $x \in (x_0, x_1)$, 则可令 $x = x_0 + th$ ($0 < t < 1$), 应用该式及 (20) 到 (14) 得

$$N_n(x_0+th) = f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(t-i)}{n!}\Delta^n f(x_0). \quad (22)$$

公式 (22) 称为 **Newton 前插公式**, 其余项为

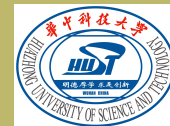
$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

若插值点 $x \in (x_{n-1}, x_n)$, 则可令 $x = x_n + th$ ($-1 < t < 0$), 应用该式及 (21) 到 (14) 得

$$N_n(x_n+th) = f(x_n) + t\nabla f(x_n) + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(t+i)}{n!}\nabla^n f(x_n). \quad (23)$$

公式 (23) 称作 **Newton 后插公式**, 其余项为

$$R_n(x) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$



访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 31 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



§4.4 Hermite 插值公式

某些实际问题不但要求插值函数 $H(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 处相等, 而且要求其在节点处的导数值也相等, 这就是所谓的**Hermite 插值问题**, 其一般提法是:

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m_i. \quad (24)$$

若其诸节点 x_i 互异, 且插值函数 $H(x)$ 取为代数多项式 $\Phi(x)$, 则确定多项式 $\Phi(x)$ 共需 $n + \sum_{i=0}^n m_i$ 个插值条件。为简单见, 下面我们将仅讨论 $2n + 1$ 次 Hermite 代数插值问题

$$H(x_i) = f(x_i), \quad H'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (25)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 32 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.4.1 Hermite 代数插值公式

记

$$y_j = f(x_j), \quad y'_j = f'(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

下列结果给出 $2n + 1$ 次 Hermite 代数插值问题的解。

定理 4.8 $2n + 1$ 次 Hermite 插值问题 (25) 的解 $H_{2n+1}(x)$ 存在且唯一，其表达式为

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j + (x - x_j)(y'_j - 2y_j l'_j(x_j))] l_j^2(x), \quad (26)$$

其中

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

第 33 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



证明 由插值条件(25) 可设

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \hat{l}_j(x) + y'_j \tilde{l}_j(x)], \quad (27)$$

其中 $\hat{l}_j(x_i) = \tilde{l}'_j(x_i) = \delta_{ij}$, $\hat{l}'_j(x_i) = \tilde{l}_j(x_i) = 0$ 。以下确定 $\hat{l}_j(x)$ 和 $\tilde{l}_j(x)$ 。令 $\hat{l}_j(x) = (ax + b)l_j^2(x)$, 易验证其为 $2n + 1$ 次多项式, 且

$$\hat{l}_j(x_i) = \hat{l}'_j(x_i) = 0, \quad i \neq j.$$

因此只须选择常数 a, b 使得

$$\begin{cases} (ax_j + b)l_j^2(x_j) = 1, \\ l_j(x_j)[al_j(x_j) + 2(ax_j + b)l'_j(x_j)] = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} ax_j + b = 1, \\ a + 2(ax_j + b)l'_j(x_j) = 0. \end{cases}$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 34 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



解之得

$$a = -2l'_j(x_j), \quad b = 1 + 2x_j l'_j(x_j).$$

类似地, 若令 $\tilde{l}_j(x) = (cx + d)l_j^2(x)$, 由已知条件可导出 $c = 1$, $d = -x_j$ 。将以上求得的 a, b, c, d 值代入 (27) 即得 (26) 式。 ■

Hermite 插值公式 (26) 的误差由下列命题给出。

定理 4.9 设 $f(x) \in \mathbb{C}^{(2n+1)}([a, b])$, 且 $f^{(2n+2)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, $x_i \in [a, b]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 为 Hermite 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 的互异节点, 则 $H_{2n+1}(x)$ 在 $[a, b]$ 上的截断误差为

$$R_{2n+1}(x) := f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x), \quad x \in [a, b], \quad (28)$$

其中 ξ 在诸 x_i 与 x 之间, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ 。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

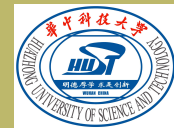
第 35 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



证明 $\forall x \in [a, b]$, 若 x 是插值节点, 则 (28) 显然成立; 若 x 是非插值节点, 则作辅助函数

$$\Psi(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{\omega_{n+1}^2(t)}{\omega_{n+1}^2(x)}[f(x) - H_{2n+1}(x)], \quad t \in [a, b].$$

可验证:

$$\Psi(x) = 0, \quad \Psi(x_i) = 0, \quad \Psi'(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

因此, 由 Rolle 定理可知 $\Psi'(t)$ 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 之间至少有 $n + 1$ 个零点, 且诸节点本身仍为 $\Psi'(t)$ 的零点。故 $\Psi'(t)$ 在 $[\min_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}, \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}]$ 内共有 $2n + 2$ 个互异零点。同理, $\Psi''(t)$ 在 $[\min_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}, \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}]$ 内共有 $2n + 1$ 个互异零点。当依次反复应用 Rolle 定理时, 我们可得 $\Psi^{(2n+2)}(t)$ 在区间 $[\min_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}, \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i, x\}]$ 上至少有一个零点 ξ , 即

$$\Psi^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{(2n+2)!}{\omega_{n+1}^2(x)}[f(x) - H_{2n+1}(x)] = 0.$$

由此即得 (28) 式。 ■

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 36 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

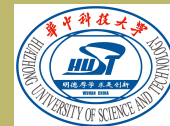
记

$$a_j(x) = l_j^2(x), \quad b_j = l'_j(x_j) = \sum_{i=0, i \neq j}^n \frac{1}{x_j - x_i}.$$

Hermite 插值算法的计算程序见算法 2.3.

算法 4.3 Hermite 插值算法

```
function y=hermite_interpolation(x0,y0,y1,x)
    n=length(x0); m=length(x);
    for k=1:m
        yk=0;
        for i=1:n
            a=1; b=0;
            for j=1:n
                if j~=i
                    a=a*((x(k)-x0(j))/(x0(i)-x0(j)))^2;
                    b=1/(x0(i)-x0(j))+b;
                end
            end
            yk=yk+a*((x0(i)-x(k))*(2*b*y0(i)-y1(i))+y0(i));
        end
        y(k)=yk;
    end
```



访问主页

标题页



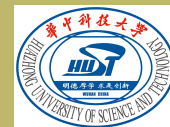
第 37 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



例 4.6 设函数 $f(x) = x \exp(x)[1 + \exp(x)]$, 插值节点 $x_0 = 1.00$, $x_1 = 1.02$, $x_2 = 1.04$, 试构造 5 次 Hermite 插值多项式, 求 $f(1.03)$ 的逼近值, 并给出其绝对误差。

解 函数 $f(x)$, $f'(x)$ 及 $l'_j(x)$ 在插值节点 x_0, x_1, x_2 处的值为

| j | 0 | 1 | 2 |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| y_j | 10.10733792738970 | 10.67308004210016 | 11.26703336579383 |
| y'_j | 27.60373195371005 | 28.98130538780004 | 30.42536696530995 |
| $l'_j(x_j)$ | -75 | 0 | 75 |

因此, 其 5 次 Hermite 插值多项式为

$$H_5(x) = \sum_{j=0}^2 [y_j + (x - x_j)(y'_j - 2y_j l'_j(x_j))] l_j^2(x),$$

其中 $l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^2 \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ 。由此, $f(1.03)$ 的逼近值 $H_5(1.03) = 10.96644671434300$, 其绝对误差为

$$|R_5(1.03)| := |f(1.03) - H_5(1.03)| = 2.505018414922233e - 011. \quad \blacksquare$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 38 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.4.2 分段三次 Hermite 插值

在小范围内采用低次 Hermite 插值是恰当的，但在大范围内则不然，此时试图增加节点引入高次插值其逼近效果同样也不理想。为此，本节将又一次采用分段插值的思想来解决这一问题，我们将以分段三次 Hermite 插值为例来阐明其算法。在插值区间 $[a, b]$ 上引入适当节点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ ，将 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ ，然后在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上使用三次插值 $H_3(x)$ 逼近函数 $f(x)$ ，并要求其满足：

- 1) $H_3(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([a, b])$,
- 2) $H_3(x_k) = y_k, \quad H'_3(x_k) = y'_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$
- 3) $H_3(x)$ 在每个插值区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上为三次多项式函数。

由 (26), 区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的三次 Hermite 插值为

$$H_3(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \beta_k(x) + y'_k \gamma_k(x) + y'_{k+1} \eta_k(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (29)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 39 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



其中

$$\alpha_k(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2,$$

$$\gamma_k(x) = (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2,$$

$$\beta_k(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2,$$

$$\eta_k(x) = (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2.$$

由此，整个插值区间 $[a, b]$ 上的分段三次 Hermite 插值的表达式为

$$H_3(x) = \sum_{k=0}^n [y_k \tilde{\alpha}_k(x) + y'_k \tilde{\beta}_k(x)] \quad x \in [a, b]. \quad (30)$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 40 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



这里

$$\tilde{\alpha}_k(x) = \begin{cases} \beta_{k-1}(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k \ (k \neq 0), \\ \alpha_k(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1} \ (k \neq n), \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_k(x) = \begin{cases} \eta_{k-1}(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k \ (k \neq 0), \\ \gamma_k(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1} \ (k \neq n), \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

分段三次 Hermite 插值具有分段线性插值类似的局部非零性，但前者比后者具有更高的光滑度和计算精度。当采用 MATLAB 实现分段三次 Hermite 插值时，我们可直接使用 MATLAB 命令 `interp1(x, y, \tilde{x} , 'cubic')` 或 `interp1(x, y, \tilde{x} , 'pchip')`，其中 x 为节点向量， y 为对应的节点向量函数值， \tilde{x} 为插值点。

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 41 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



例 4.7 设函数 $f(x) = x \sin x$, 插值节点 $x_i = i\pi/5$ ($i = 0, 1, \dots, 5$), 试分别利用 13 次 Hermite 插值多项式和分段 3 次 Hermite 插值多项式计算 $f(\pi/3)$ 的逼近值, 并比较其计算精度。

解 函数 $f(x)$, $f'(x)$ 在诸插值节点 x_i 处的值为

| i | 0 | 1 | 2 |
|--------|------------------|-------------------|-------------------|
| y_i | 0 | 0.36931636609809 | 1.19513286589662 |
| y'_i | 0 | 1.09610562152400 | 1.33937872404025 |
| i | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 1.79269929884493 | 1.47726546439237 | 0 |
| y'_i | 0.36857320467751 | -1.44549622463363 | -3.14159265358979 |

因此, 利用 13 次 Hermite 插值多项式可得 $f(1.03)$ 的逼近值

$$\tilde{H}_{13}(1.03) = 0.92060022795453,$$

其绝对误差为

$$|\tilde{R}_{13}(1.03)| := |f(1.03) - \tilde{H}_{13}(1.03)| = 1.370054583742e - 002.$$

利用分段 3 次 Hermite 插值多项式并直接运行 MATLAB 命令 `interp1(x, y, \tilde{x} , 'cubic')` 可得 $f(1.03)$ 的逼近值

$$H_3(1.03) = 0.91611387208115,$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 42 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



其绝对误差为

$$|R_3(1.03)| := |f(1.03) - H_3(1.03)| = 9.21418996404e - 003.$$

此时，分段 3 次 Hermite 插值多项式的计算精度要高于 13 次 Hermite 插值多项式的计算精度。 ■

§4.5 样条插值

在插值区间上作高次插值，可以保证曲线的光滑度，但计算精度较差，甚至出现如前所述的龙格现象。分段低次插值虽可避免龙格现象，但其光滑度不能满足某些工程设计上的要求，如飞机、船舶、汽车等的外形设计往往要求有较高的光滑度。为此，基于样条函数的插值逼近方法应运而生。**样条**的概念源于生产实践，其是绘制光滑曲线的一种简单工具，通常它是一根富有弹性的细长木条，绘图时用压铁使样条通过指定的型值点，并调整样条使其具有满意的光滑度，然后沿样条画出光滑曲线。这种曲线称为**样条曲线**，其相应的表征函数则称为**样条函数**。由此可见，样条函数有明显的工程背景，本节主要介绍基于三次样条函数的插值技术。

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 43 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§4.5.1 三次样条插值问题

三次样条函数的定义如下。

定义 4.2 给定区间 $[a, b]$ 上的一个分划:

$$\Pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

若 函数 $S(x)$ 满足

1. $S(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式,
2. $S(x) \in \mathbb{C}^{(2)}([a, b])$,

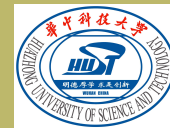
则称 $S(x)$ 是基于分划 Π 的三次多项式样条函数, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 称为内节点, x_0, x_n 称为边界节点。

以下我们利用区间 $[a, b]$ 上的三次多项式样条函数 $S(x)$ 进行插值, 使其逼近函数 $f(x)$ 。记

$$y_k = f(x_k), \quad y'_k = f'(x_k), \quad y''_k = f''(x_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

并设

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \quad (31)$$



访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 44 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



由于 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上为三次多项式, 故要确定 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数总计需 $4n$ 个条件。插值条件 (31) 给出了 $n+1$ 个条件, 又在插值内节点上 $x_k, k=1, \dots, n-1$, 由 $S(x) \in \mathbb{C}^{(2)}([a, b])$ 有 $3n-3$ 个条件成立:

$$\begin{cases} S(x_k - 0) = S(x_k + 0), & k = 1, \dots, n-1, \\ S'(x_k - 0) = S'(x_k + 0), & k = 1, \dots, n-1, \\ S''(x_k - 0) = S''(x_k + 0), & k = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (32)$$

至此共有 $4n-2$ 个条件, 剩余 2 个条件可由边界条件:

$$S'(x_0 + 0) = y'_0, \quad S'(x_n - 0) = y'_n \quad (33)$$

或

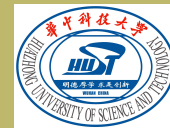
$$S''(x_0 + 0) = y''_0, \quad S''(x_n - 0) = y''_n \quad (34)$$

获得。下面, 我们将分别讨论 **I 型样条插值问题** $\{(31), (32), (33)\}$ 及 **II 型样条插值问题** $\{(31), (32), (34)\}$ 的求解。

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 45 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.5.2 I 型三次样条插值

本节我们求解插值问题 $\{(31), (32), (33)\}$, 记

$$S'(x_k) = m_k \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

则据分段三次 Hermite 插值 (30) 得

$$S(x) = \sum_{k=0}^n [y_k \tilde{\alpha}_k(x) + m_k \tilde{\beta}_k(x)]. \quad (35)$$

其中 m_k 可由条件 (33) 及 $S''(x_k - 0) = S''(x_k + 0)$ ($k = 1, \dots, n - 1$) 确定。

由(29), $S(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式为

$$S(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + m_k \beta_k(x) + m_{k+1} \beta_{k+1}(x).$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 46 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



对 $S(x)$ 求二阶导数得

$$\begin{aligned} S''(x) &= y_k \alpha_k''(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}''(x) + m_k \beta_k''(x) + m_{k+1} \beta_{k+1}''(x) \\ &= \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} \\ &\quad + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3} (y_{k+1} - y_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $h_k = x_{k+1} - x_k$ 。同理，可得 $S''(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式

$$\begin{aligned} S''(x) &= \frac{6x - 2x_{k-1} - 4x_k}{h_{k-1}^2} m_{k-1} + \frac{6x - 4x_{k-1} - 2x_k}{h_{k-1}^2} m_k \\ &\quad + \frac{6(x_{k-1} + x_k - 2x)}{h_{k-1}^3} (y_k - y_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned} \quad (37)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 47 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



由连续性条件: $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$ 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{k-1}}m_{k-1} + 2\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}\right)m_k + \frac{1}{h_k}m_{k+1} \\ &= 3\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (38)$$

即

$$(1 - a_k)m_{k-1} + 2m_k + a_k m_{k+1} = b_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (39)$$

该方程组称为**三转角方程**，这里

$$a_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} + h_k}, \quad b_k = 3 \left[(1 - a_k) \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} + a_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \right].$$

访问主页

标题页



第 48 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



联立 (33) 和 (39) 可得关于 m_1, m_2, \dots, m_{n-1} 的方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & a_1 & & & \\ 1-a_2 & 2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-a_{n-2} & 2 & a_{n-2} \\ & & & 1-a_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - (1-a_1)y'_0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - a_{n-1}y'_n \end{pmatrix}. \quad (40)$$

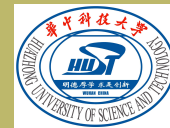
可利用第四章将介绍的追赶法求解该三对角方程组，所求得的诸 m_i 代回到 (35) 即得 I 型样条插值问题的解。该算法的边界值 y'_0, y'_n 可采用如下外推公式获得：

$$y'_0 = \left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) y'_1 - \frac{h_0}{h_1} y'_2, \quad y'_n = \left(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) y'_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} y'_{n-2}.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 49 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.5.3 II 型三次样条插值

以下我们求解插值问题{(31), (32), (34)}, 记

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

由于 $S(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式, 故 $S''(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数, 即

$$S''(x) = M_k \frac{x_{k+1} - x}{h_k} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{h_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \quad (41)$$

对式 (41) 积分两次, 并利用 $S(x_i) = y_i$ ($i = k, k+1$) 可得

$$\begin{aligned} S(x) = & M_k \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^3}{h_k} + \left(y_k - \frac{M_k h_k^2}{6} \right) \frac{x_{k+1} - x}{h_k} \\ & + \left(y_{k+1} - \frac{M_{k+1} h_k^2}{6} \right) \frac{x - x_k}{h_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (42)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 50 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



对 $S(x)$ 求导得

$$\begin{aligned} S'(x) = & -M_k \frac{(x_{k+1} - x)^2}{2h_k} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^2}{2h_k} \\ & + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{M_{k+1} - M_k}{6} h_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned} \quad (43)$$

同理, 可得 $S'(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式

$$\begin{aligned} S'(x) = & -M_{k-1} \frac{(x_k - x)^2}{2h_{k-1}} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_{k-1}} \\ & + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{M_k - M_{k-1}}{6} h_{k-1}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned} \quad (44)$$

由连续性条件 $S'(x_k - 0) = S'(x_k + 0)$, 得

$$(1 - a_k)M_{k-1} + 2M_k + a_k M_{k+1} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (45)$$

该方程组称为**三弯矩方程**, 其中

$$a_k = \frac{h_k}{h_{k-1} + h_k}, \quad b_k = \frac{6}{h_k + h_{k-1}} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \right).$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 51 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



联立 (45) 与 (34) 得关于 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & a_1 & & & \\ 1-a_2 & 2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-a_{n-2} & 2 & a_{n-2} \\ & & & 1-a_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - (1-a_1)y_0'' \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - a_{n-1}y_n'' \end{pmatrix}. \quad (46)$$

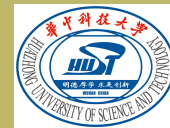
利用追赶法解该三对角方程组可求得诸 M_i , 将其代回到 (42) 即得 II 型样条插值问题的解。该算法的边界值 y_0'', y_n'' 可采用如下外推公式获得:

$$y_0'' = \left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) y_1'' - \frac{h_0}{h_1} y_2'', \quad y_n'' = \left(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) y_{n-1}'' - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} y_{n-2}''.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 52 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



§4.5.4 三次样条插值的收敛性与计算实现

三次样条插值的收敛性分析较为繁琐，为简单起见，本处直接引入相关结果。

定理 4.10 设 $f(x) \in \mathbb{C}^{(4)}([a, b])$, $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上逼近 $f(x)$ 的 I 型或 II 型三次样条插值，则当 $h := \max_{0 \leq k \leq n-1} \{h_k\} \rightarrow 0$ 时， $S(x)$ 收敛于 $f(x)$ ，且具有如下误差估计：

$$|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)| \leq c_l \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| h^{4-l}, \quad x \in [a, b]; \quad l = 0, 1, 2,$$

其中 $c_0 = \frac{5}{384}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, $c_2 = \frac{3}{8}$.

[访问主页](#)[标题页](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

第 53 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



对于三次样条插值的计算实现，人们不难依据先前节导出的计算方法编出其程序代码，也可参见 Matlab 工具箱。这里，我们介绍几个常用的计算三次样条插值的 Matlab 命令。以下记 $X0, Y0$ 为已知数据点， X 为插值点， Y 为相应的函数值， y'_a, y''_a 分别为左边界点处的一、二阶导数值， y'_b, y''_b 分别为右边界点处的一、二阶导数值。如果三次样条插值没有给出边界条件，则通常采用命令

$\text{interp1}(X0, Y0, X, 'spline')$ 或 $\text{spline}(X0, Y0, X)$.

若给出了边界处的一阶导数值 y'_a, y'_b ，则可采用命令

$c1 = \text{csape}(X0, Y0, 'complete', [y'_a, y'_b])$ 及 $\text{ppval}(c1, X)$;

若给出了边界处的二阶导数值 y''_a, y''_b ，则可采用命令

$c2 = \text{csape}(X0, Y0, 'second', [y''_a, y''_b])$ 及 $\text{ppval}(c2, X)$.

例 4.8 已知飞机机翼断面的下轮廓线部分数据如下

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| y | 0 | 1.2 | 1.7 | 2.0 | 2.1 | 2.0 | 1.8 | 1.2 | 1.0 | 1.6 |

试取步长 $h = 0.1$ ，利用三次样条插值方法绘出其飞机机翼断面下轮廓线。

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 54 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



解 编制如下 Matlab 程序:

```
X0=[0 3 5 7 9 11 12 13 14 15]';  
Y0=[0 1.2 1.7 2.0 2.1 2.0 1.8 1.2 1.0 1.6]';  
x=[0:0.1:15]; y=spline(X0,Y0,x);  
plot(X0,Y0,'r*',x,y,'b.');
```

可绘出其飞机机翼断面下轮廓线(见图 4.3)。 ■

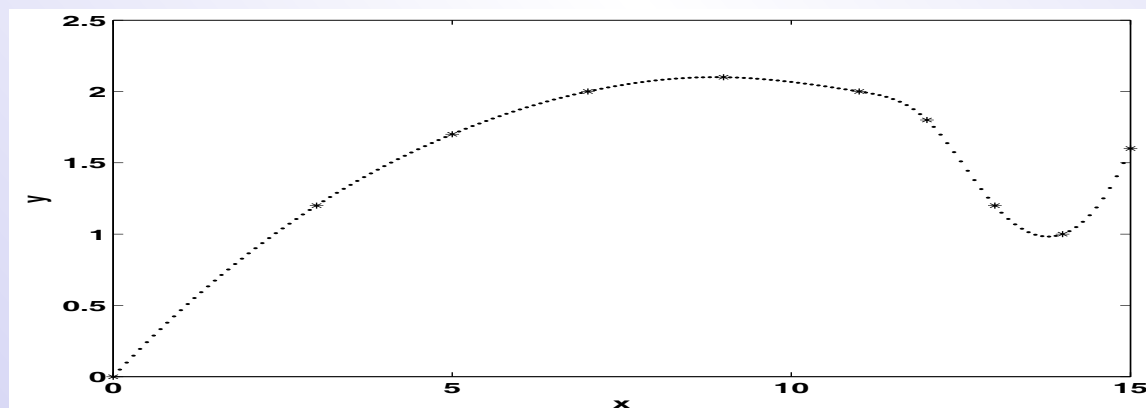


图 4.3 飞机机翼断面的下轮廓线.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 55 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§4.6 曲线拟合方法

在各种科学实验与数据统计分析中, 常常不知道问题的精确函数关系, 而仅能通过测试方法或统计方法获得一组数据。由于主观或客观原因, 这些数据往往带有误差, 利用这些数据构造的插值公式因此保留了这些误差, 这就表明插值方法作为科学研究工具存在着一定的局限性。为克服这一局限性, 人们常常采用**曲线拟合**来进行数据处理, 其不要求拟合曲线过型值点。实现这一目标的有效方法主要有**正则化方法**和**最小二乘法**。

§4.6.1 正则化方法

设有函数 $f(x)$ 及一组数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, 其中

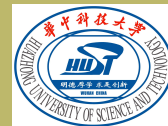
$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

今在由函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ 张成的函数类

$$\Phi := \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$$

中寻找一个逼近函数 $f(x)$ 的函数 $\varrho_0(x)$, 使得

$$\sum_{i=0}^n [\varrho_0(x_i) - y_i]^2 = \min_{\varrho \in \Phi} \sum_{i=0}^n [\varrho(x_i) - y_i]^2, \quad \text{其中 } \varrho_0(x) \in \Phi. \quad (47)$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 56 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



若记

$$\varrho(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x), \quad \varrho_0(x) = \sum_{i=0}^m a_i^* \varphi_i(x),$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_m)^T, \quad a^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_m(x_m) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则问题 (47) 等价于: 求一个向量 $a^* \in \mathbb{R}^{m+1}$, 使得

$$\|Aa^* - b\|_2 = \min_{a \in \mathbb{R}^{m+1}} \|Aa - b\|_2. \quad (48)$$

由下述定理, 问题 (48) 可转化为线性方程组的求解问题。

定理 4.11 $a^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ 为问题 (48) 的解当且仅当

$$A^T A a^* = A^T b. \quad (49)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 57 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



证明 若 $a^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ 为方程组 (49) 的解, $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ 为任意给定向量, 记 $\Delta a = a - a^*$, 则有

$$\begin{aligned}\|Aa - b\|_2^2 &= \|Aa^* - b + A\Delta a\|_2^2 \\ &= \|Aa^* - b\|_2^2 + \|A\Delta a\|_2^2 + 2(\Delta a)^T A^T (Aa^* - b) \\ &= \|Aa^* - b\|_2^2 + \|A\Delta a\|_2^2 \\ &\geq \|Aa^* - b\|_2^2.\end{aligned}$$

因此, $a^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ 为问题 (48) 的解。

反之, 若 a^* 为问题 (48) 的解, 但其不满足 (49), 即 $z := A^T(Aa^* - b) \neq 0$, 则对于向量 $a = a^* - \varepsilon z (\varepsilon > 0)$ 有

$$\begin{aligned}\|Aa - b\|_2^2 &= \|Aa^* - b - \varepsilon Az\|_2^2 \\ &= \|Aa^* - b\|_2^2 + \varepsilon^2 \|Az\|_2^2 - 2\varepsilon z^T A^T (Aa^* - b) \\ &= \|Aa^* - b\|_2^2 + \varepsilon^2 \|Az\|_2^2 - 2\varepsilon \|z\|_2^2 \\ &< \|Aa^* - b\|_2^2 + \varepsilon^2 \|Az\|_2^2.\end{aligned}$$

上式表明: 必存在充分小的正数 ε 使得 $\|Aa - b\|_2 < \|Aa^* - b\|_2$ 。这与 a^* 为问题 (48) 的解矛盾, 因此必有 (49) 成立。 ■

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 58 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



定理 4.11 给出了求解问题 (48) 的一种方法, 即通过解线性方程组 (49) 可获得问题 (48) 的解, 该方法称为**正则化方法**。

例 4.9 已知一组实验数据如下:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
| y_i | 1.00 | 2.12 | 3.02 | 3.26 | 3.14 | 2.86 | 2.51 | 2.06 | 1.76 | 1.34 |

试确定拟合曲线

$$\varrho(x) = a_0 + a_1x + a_3x \cos x + a_4x \sin x.$$

解 记

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x \cos x, \quad \varphi_3(x) = x \sin x.$$

则由此及已知有

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 59 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.0995 & 0.0100 \\ 1 & 0.2 & 0.1960 & 0.0397 \\ 1 & 0.3 & 0.2866 & 0.0887 \\ 1 & 0.4 & 0.3684 & 0.1558 \\ 1 & 0.5 & 0.4388 & 0.2397 \\ 1 & 0.6 & 0.4952 & 0.3388 \\ 1 & 0.7 & 0.5354 & 0.4510 \\ 1 & 0.8 & 0.5574 & 0.5739 \\ 1 & 0.9 & 0.5594 & 0.7050 \\ 1 & 1.0 & 0.5403 & 0.8415 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.12 \\ 3.02 \\ 3.26 \\ 3.14 \\ 2.86 \\ 2.51 \\ 2.06 \\ 1.76 \\ 1.34 \end{pmatrix}.$$

利用 Matlab 的矩阵除法命令得其拟合曲线的系数阵

$$\begin{aligned} a &:= (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T = (A' * A) \setminus (A' * b) \\ &= (-0.7455, 35.2613, -14.9459, -29.7546)^T. \end{aligned}$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 60 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



因此, 所求拟合曲线为

$$\rho(x) = -0.7455 + 35.2613x - 14.9459x \cos x - 29.7546x \sin x,$$

该曲线图形见图 4.4. ■

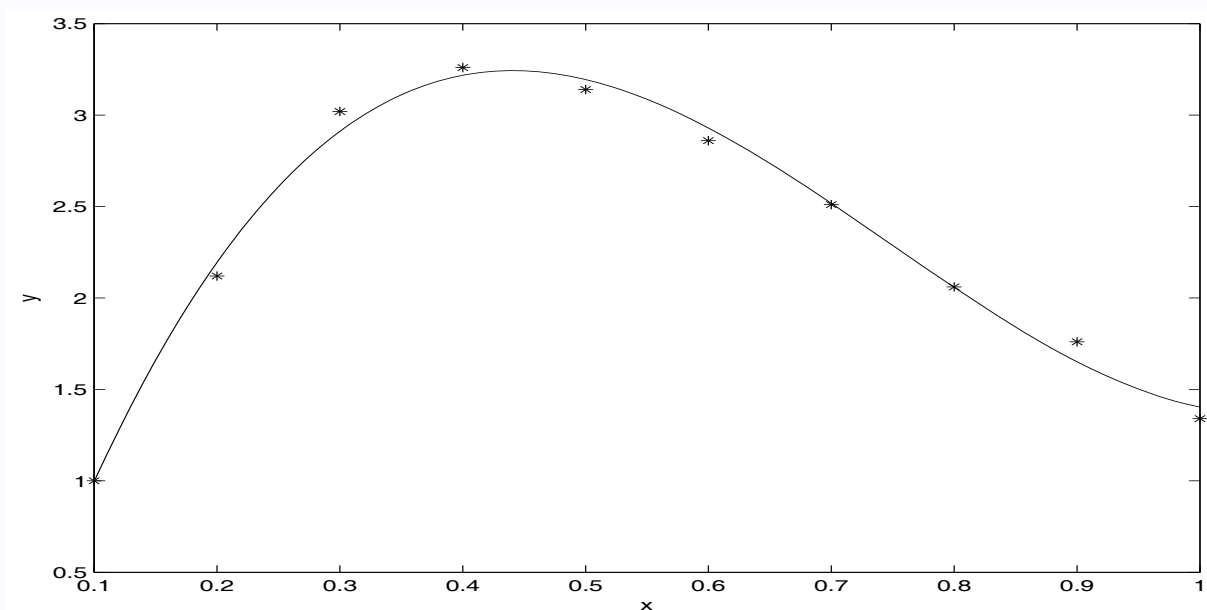


图 4.4 拟合曲线

$$\rho(x) = -0.7455 + 35.2613x - 14.9459x \cos x - 29.7546x \sin x.$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 61 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出

§4.6.2 最小二乘法

问题 (48) 也可转化为求多元函数

$$F(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2$$

的极小点 $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*)$ 问题。令

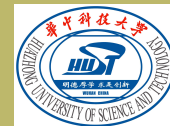
$$\frac{\partial F(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

即

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right] \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (50)$$

记

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \quad d_k = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_k(x_i),$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 62 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



则式 (50) 可写为

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_k, \varphi_j) a_j = d_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (51)$$

该方程称为上述最优化问题的**法方程**或**正则方程**，其可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}. \quad (52)$$

设 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ 线性无关，则方程组 (52) 的系数矩阵行列式不为零，从而该方程组有唯一解 $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*)$ 。故得最小二乘拟

合解 $\varrho_0(x) = \sum_{i=0}^m a_i^* \varphi_i(x)$ 。

[访问主页](#)[标题页](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)

第 63 页 共 65 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



上述方法称为**最小二乘法**，类似于正则化方法，我们可采用 Matlab 的矩阵除法命令解线性方程组 (52) 而获得拟合解。当基函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ 在多项式函数类

$$\Phi := \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$$

中选取时，我们也可使用 Matlab 命令 $\text{polyfit}(x0, y0, m)$ 求得拟合解，其中 $x0, y0$ 为给定的数据组。

例 4.10 已知一组实验数据如下：

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|------|------|------|-------|------|------|------|
| x_i | -1.5 | -1.0 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 |
| y_i | 68.1 | 23.9 | 1.20 | -6.84 | 1.06 | 25.2 | 69.4 |

求它的拟合曲线。

解 将给出的数据组标在坐标纸上，我们将看到各点在一条抛物线附近，故可设拟合曲线为 $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$ 。记

$$x0 = (-1.5, -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0, 1.5)^T,$$

$$y0 = (68.1, 23.9, 1.20, -6.84, 1.06, 25.2, 69.4)^T.$$

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

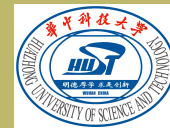
第 64 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出



则利用 Matlab 命令得其拟合曲线的系数阵

$$\begin{aligned} a &:= (a_0, a_1, a_2)^T = \text{polyfit}(x_0, y_0, 2) \\ &= (33.7181, 0.4543, -7.7152)^T. \end{aligned}$$

因此, 所求拟合曲线为

$$y = 33.7181x^2 + 0.4543x - 7.7152,$$

其图形见图 4.5。 ■

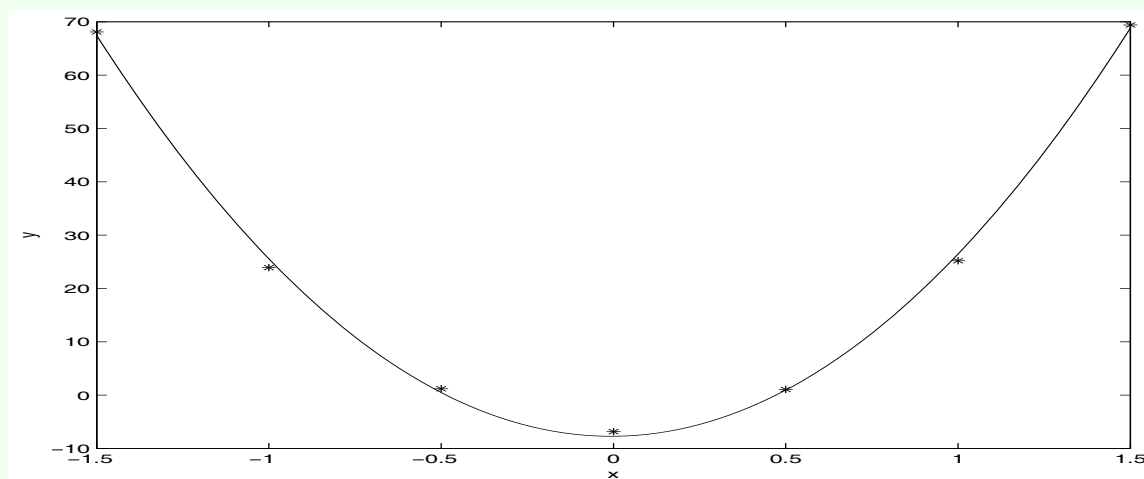


图 4.5 拟合曲线 $y = 33.7181x^2 + 0.4543x - 7.7152$.

访问主页

标题页



第 65 页 共 65 页

返回

全屏显示

关闭

退出