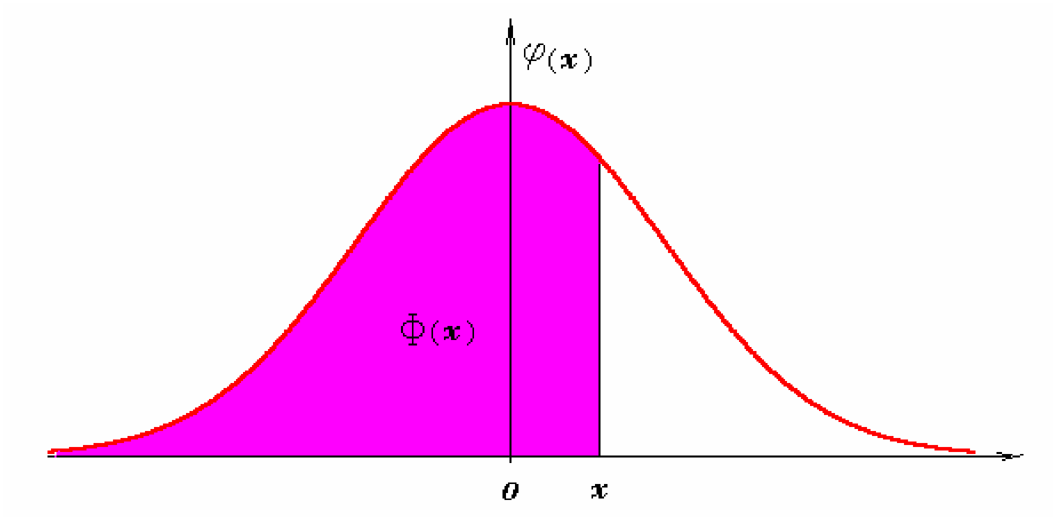
湖北省精品课程

概率论与数理统计



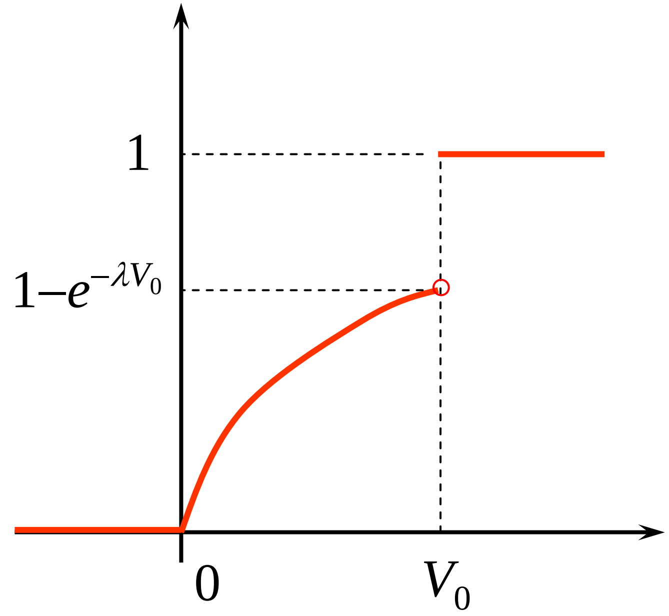
华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

例7(P$_{30}$例2.11) 设某电路的电压 V是随机变量且$V\sim E(\lambda)$，现用电压表进行测量,电压表的最大读数为 V_0。以X 记电压表的读数，求的分布函数。

解 由题意 $X=\min(V, V_0)$，故

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\leqslant x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0.\end{cases}$$



$$P(X=x)=\begin{cases}e^{-\lambda V_0}, & x=V_0,\\ 0, & x\neq V_0.\end{cases}$$

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (1-e^{-\lambda x})/(1-\alpha), & 0\leqslant x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0.\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases}0, & x<V_0,\\ 1, & x\geqslant V_0.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{F(x)=(1-\alpha)F_1(x)+\alpha F_2(x)}$$ ——混合型随机变量

§2.4 随机变量函数的分布

2.4.1 问题

1. $V \sim E(\lambda)$ ➡ $X = \min(V, V_0) \sim ?$

2. $R \sim U(0, r)$ ➡ $S = \pi R^2 \sim ?$

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ➡ $P(X \leqslant x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$Y \sim N(0, 1)$ ➡ $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(\sigma Y + \mu \leqslant x)$

➡ X 与 $\sigma Y + \mu$ 同分布

2.4.2 D.R.V.的函数

例1(P_{31}例2.12)已知X的分布列，求$Y_1=2X+1$，$Y_2=X^2$ 的分布。

$Y_1=2X+1$	-3	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

解

$Y_1=2X+1$	-3	-1	1	3	5
$Y_2=X^2$	4	1	0	1	4

Y_2	0	1	4
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

2.4.2 C.R.V.的函数

例2 设$X \sim N(0, 1)$，求 $Y = aX+b$ 的分布。

解 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX+b \leqslant y)$

$$= \begin{cases} P(X \le \dfrac{y-b}{a}) = \Phi(\dfrac{y-b}{a}), & a>0 \\ P(X \ge \dfrac{y-b}{a}) = 1-\Phi(\dfrac{y-b}{a}), & a<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}, & a>0 \\ -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}, & a<0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|} e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}$$

即$Y \sim N(b, a^2)$

定理(P_{35}) 设R.V.X有密度函数$f_X(x)$，函数 $y=g(x)$ 有反函数$x=h(y)$，且$h'(x)$存在并保号，则R.V. $Y=g(X)$有密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0\quad, & \text{其他} \end{cases}$$

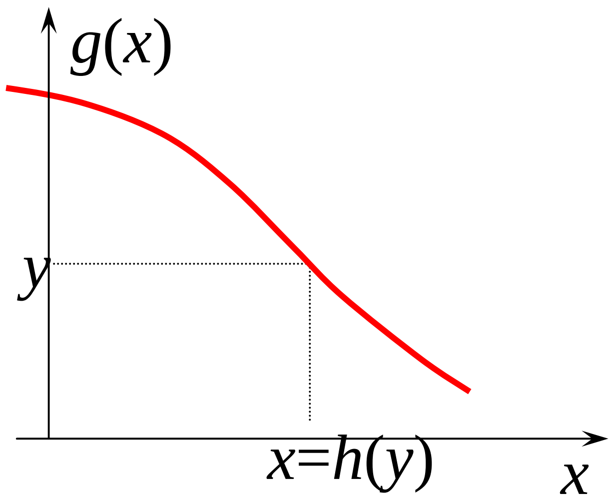
其中$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$, $\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

证明： 若$h'(x)<0$，即$g(x)\searrow$

$$F_Y(y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\geqslant h(y))$$

$$=\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx \quad g(+\infty)<y<g(-\infty)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[h(y)]\,|\,h'(y)\,|$$



当$y>g(+\infty)$时，$F_Y(y)=1$

当$y<g(-\infty)$时，$F_Y(y)=0$

$$\Rightarrow\quad f_Y(y)=F_Y'(y)=0$$

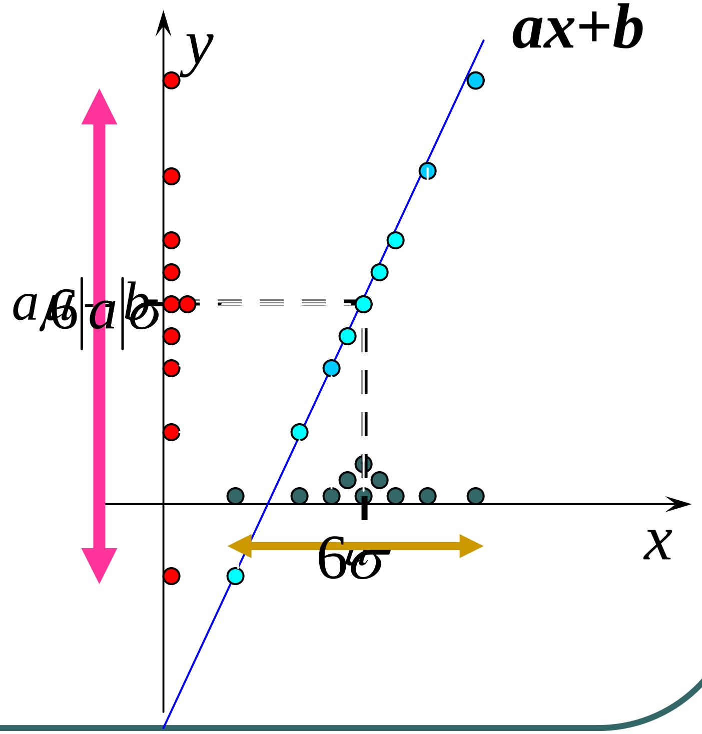
$Y=g(X)$的密度函数 $$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0\quad , & \text{其他} \end{cases}$$

例3 (P_{33}例2.14)设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$Y=aX+b$ ($a\neq 0$) 的分布。

解： $y=g(x)=ax+b,\quad x=h(y)=\dfrac{y-b}{a},\quad h'(y)=\dfrac{1}{a}$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left|\frac{1}{a}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{(y-a\mu-b)^2}{2a^2\sigma^2}}$$



即 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,\ (|a|\sigma)^2)$

线性变换不变性

$Y=g(X)$的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0\quad, & 其他 \end{cases}$

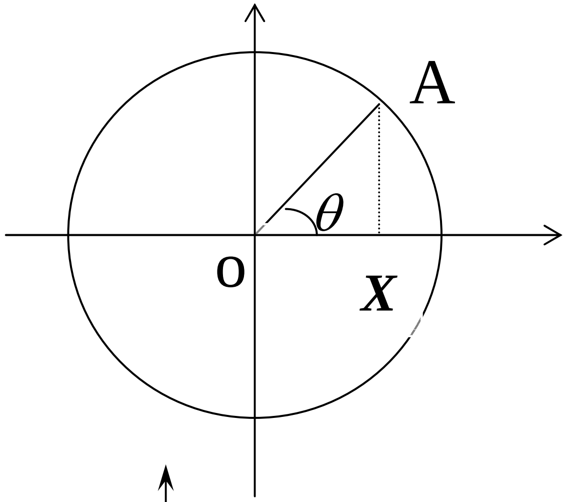
例3 设 $X\sim E(\lambda)$，求 $Y=X^3$ 的分布。

解: $y=g(x)=x^3$, $x=h(y)=y^{\frac{1}{3}}$,

$$h'(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}, & y>0 \\ 0\quad, & y\le 0 \end{cases}$$

例4 (P$_{34}$例2.16) 设C是以原点为圆心的单位圆周，A为C上的任意一点，求A的横坐标的分布。



解 记θ为OA与x轴的夹角，

由题意$\theta \sim U(-\pi, \pi)$，则$X=\cos\theta$

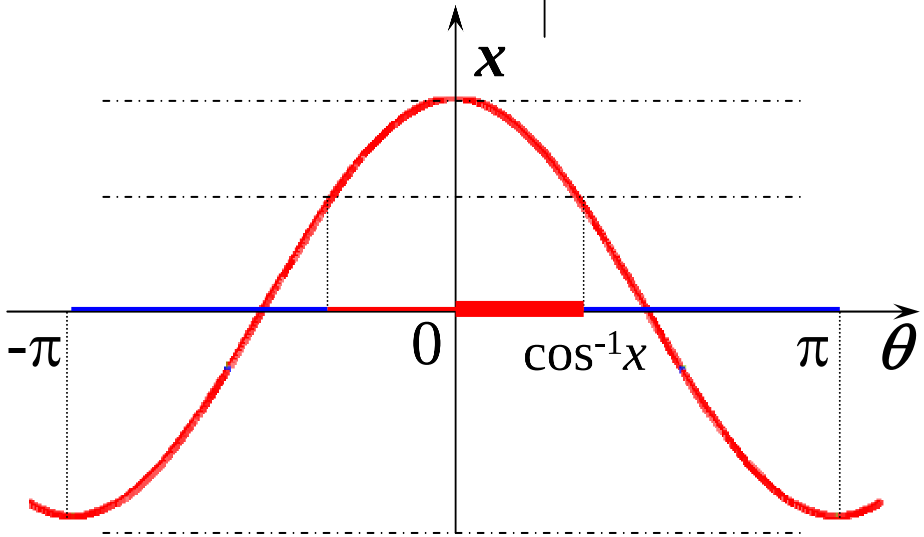
$$F_X(x) = P(\cos\theta \le x)$$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \\ p & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$p = P(-\pi < \theta \le -\arccos x) + P(\arccos x < \theta \le \pi)$$

$$= 1 - 2P(0 < \theta \le \arccos x)$$

$$= 1 - 2\frac{\arccos x}{2\pi}$$



$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

例**5** 设 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 注意到 $Y=X^2\geqslant 0$，故当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$.

当 $y>0$ 时，
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$$
$$=\boldsymbol{P}(-\sqrt{\boldsymbol{y}}\le \boldsymbol{X}\le\sqrt{\boldsymbol{y}})$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

例**6**(P_{33}例2.15) 若 $X\sim N(0,1)$, 则 $Y=X^2$ 的概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$