第7章 离散时间系统的时域分析

一：离散时间系统的概述

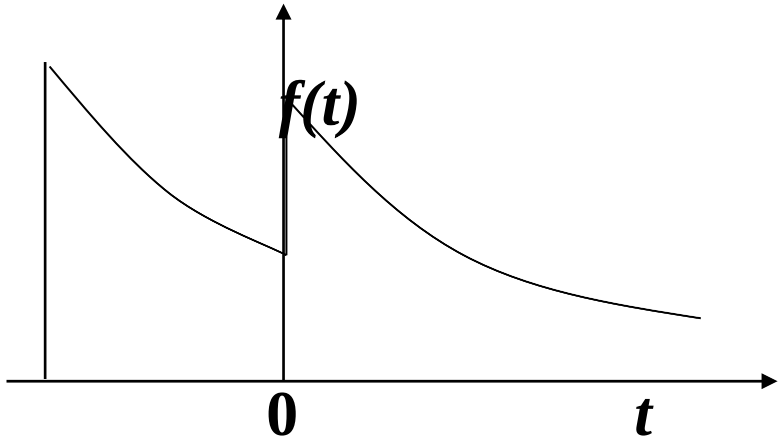
二：取样信号和取样定理

一：离散时间系统的概述

1：离散信号定义

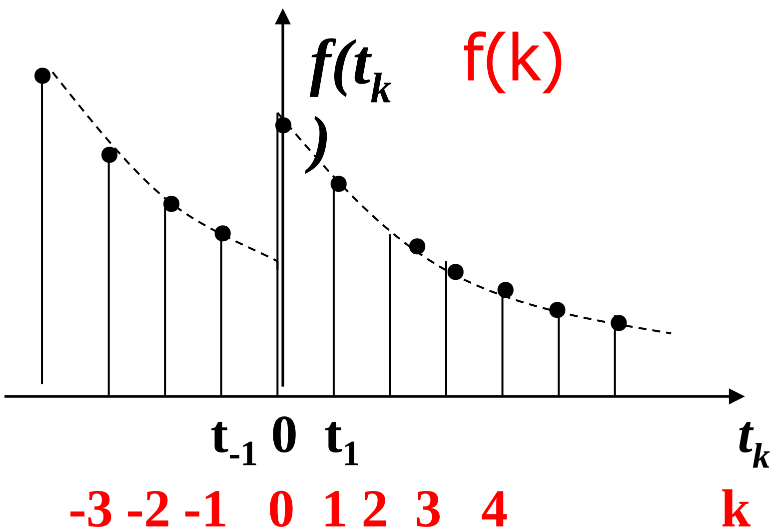
$$1: f(t) \sim t$$

t取连续值，f(t)值任意



$$2: f(t_k) \sim t_k$$

k序号取整数，$f(t_k)$值任意

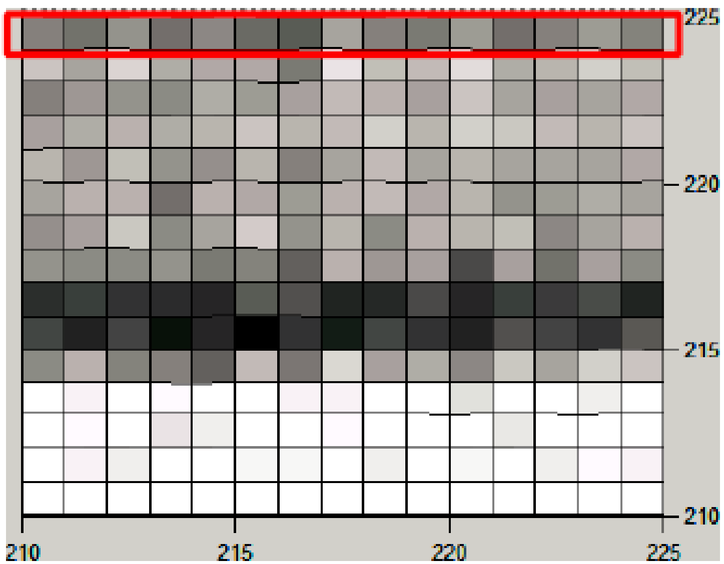


$$f(kT) \sim t_k = kT$$

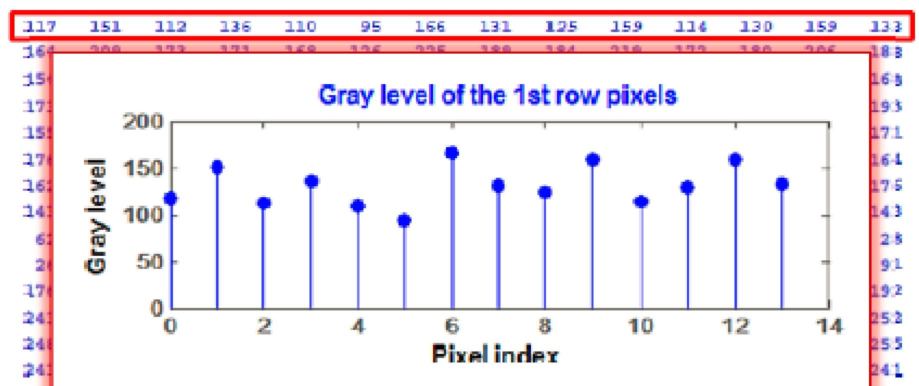
$$f(k) \sim k \quad \text{整数}$$

自变量也可以是其他量，如：位置

- 数字灰度图像

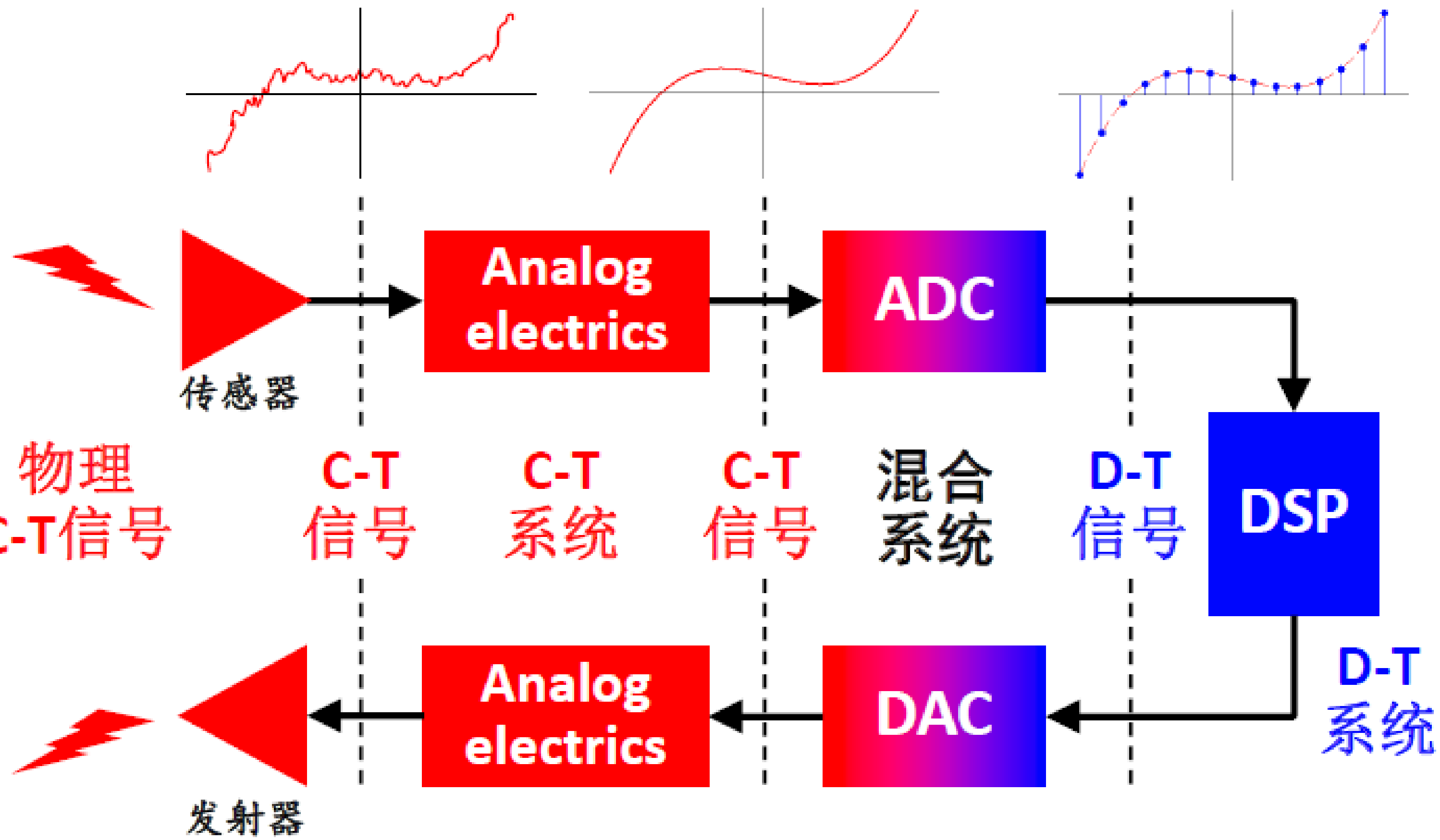


255-White, 0-Black



C-T信号和D-T信号的关系

现代的电系统看上去通常是这样的...



2:信号表现形式

- 解析式

$$f_1(k)=2(-1)^k \qquad (k=0、\pm1、\pm2、---)$$

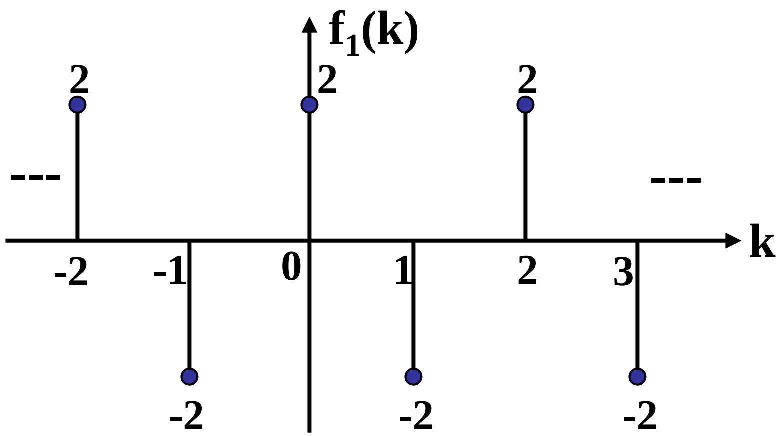
$$f_2(k)=k(1/2)^k \qquad (k=0、1、2、---)$$

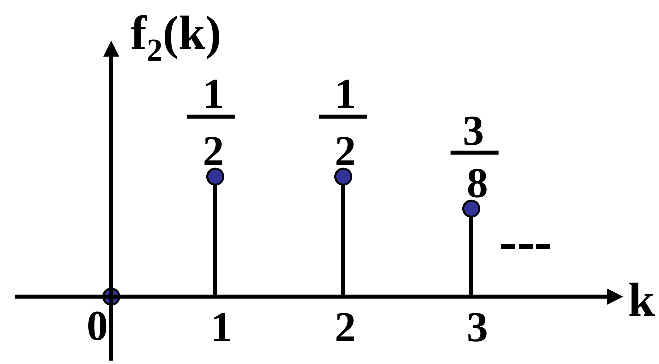
- 序列形式

$$f_1(k)=\{\ldots,\ 2,\ -2,\ 2,\ -2,\ 2,\ -2,\ \ldots\}$$

$$f_2(k)=\{0,\ 1/2、1/2,\ 3/8,\ \ldots\}$$

- 图形





3：信号的能量和功率

给定时间内信号的能量和功率

连续时间信号

$$E=\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt$$

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt$$

离散时间信号

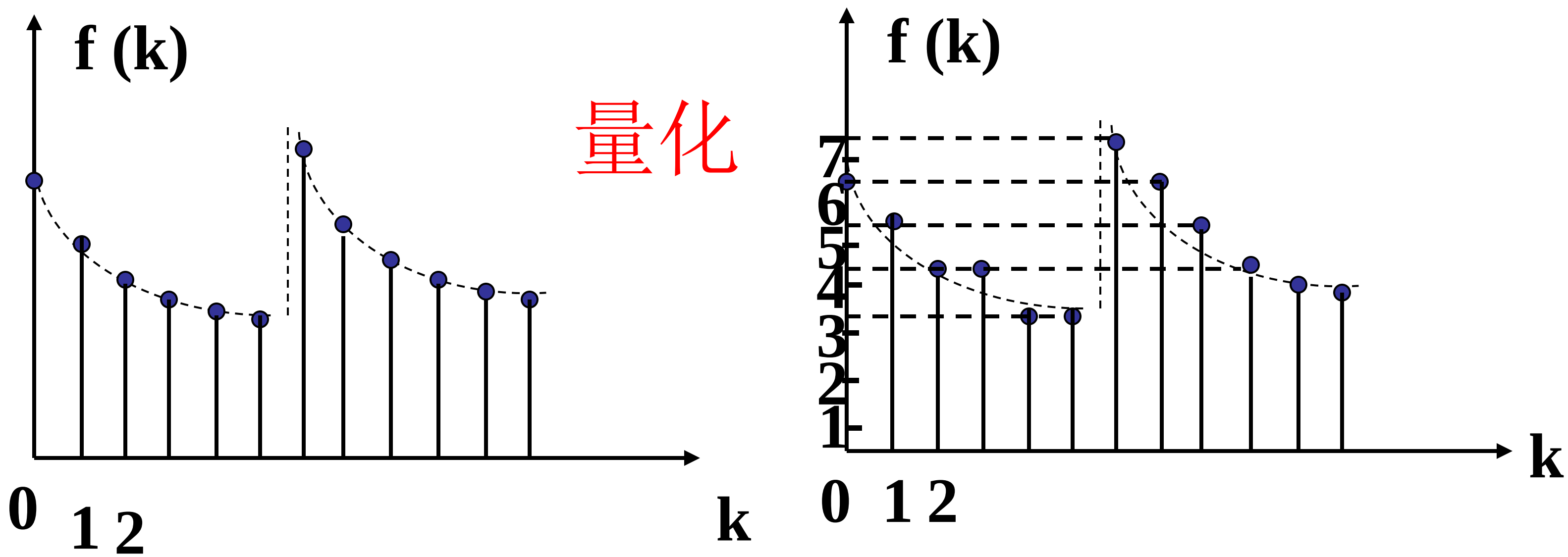
$$E=\sum_{n_1}^{n_2} f^2(k)$$

$$p=\frac{1}{\underline{n_2-n_1+1}}\sum_{n_1}^{n_2} f^2(k)$$

总能量 $E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)\right|^2$

4：数字信号

- 离散信号与数字信号
  - 经过量化的离散信号称为数字信号



(a) 离散信号　　(b) 数字信号

5：基本运算

（1） 离散信号的和、差、积

将两离散信号序号相同的样值相加、相减与相乘而构成一个新的离散信号（序列）。

例：

$$f_1(k) = (-1)^k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \text{------})$$

$$f_2(k) = k - 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \text{------})$$

常记作

$$f_1(k) + f_2(k) = \begin{cases} (-1)^k & (k < 0) \\ (-1)^k + (k-1) & (k \geq 0) \end{cases}$$

$$f_1(k) - f_2(k) = \begin{cases} (-1)^k & (k < 0) \\ (-1)^k - (k-1) & (k \geq 0) \end{cases}$$

$$f_1(k)f_2(k) = (-1)^k (k-1) \qquad (k \geq 0)$$

（2） 离散信号的反褶

将 f (k) 的图形以纵轴为对称轴翻转 180º，得到 f (-k) 。

（3） 移序

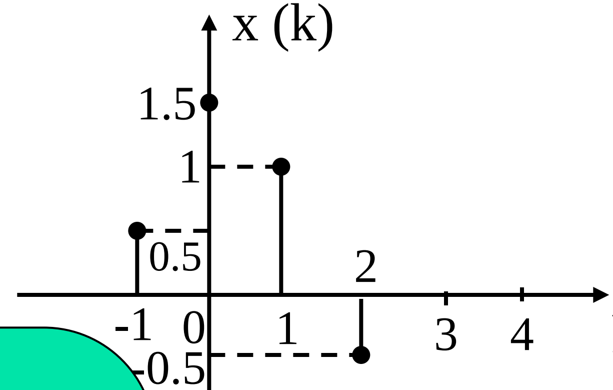
将在 f (k) ~ k 平面内的信号图形沿 k 轴向前（左）或向后（右）移动，这时信号各样值的序号都将增加或减少某个定值。

$f(k+1)$ ——$f(k)$前移（左移）一个序号——增序

$f(k-1)$ ——$f(k)$后移（右移）一个序号 ——减序

例 已知

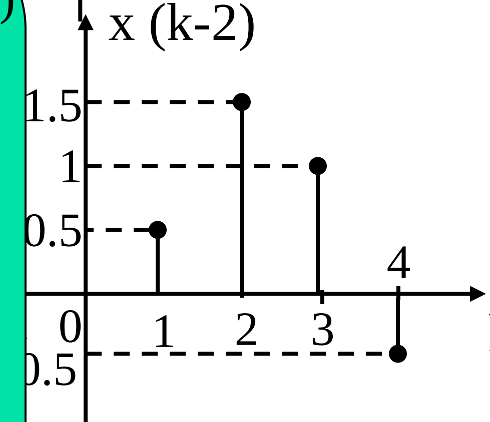
$$x(k)=\begin{cases}0.5 & (k=-1)\\ 1.5 & (k=0)\\ 1 & (k=1)\\ -0.5 & (k=2)\\ 0 & \end{cases}$$



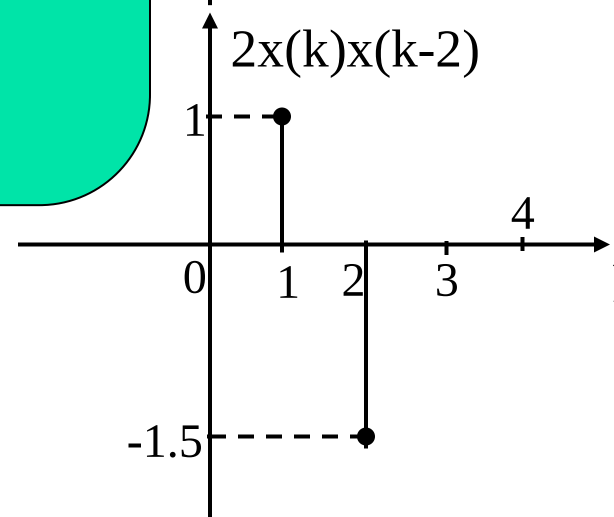
图解求 y (k) = x (k)

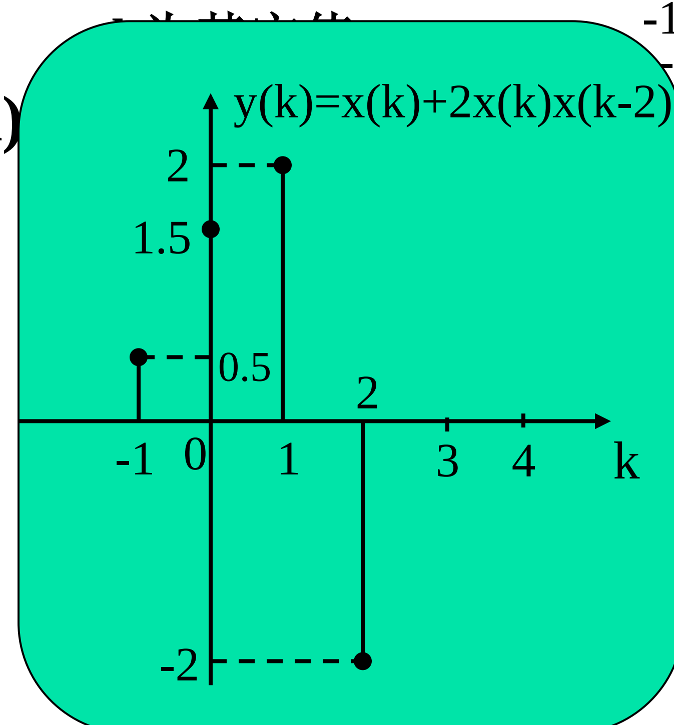
解:

$$x(k-2)=\begin{cases}0.5\\ 1.5\\ 1\\ -0.5\\ 0\end{cases}$$



$$2x(k)x(k-2)=\begin{cases}1\\ -1.5\\ 0\end{cases}$$





$$y(k)=\begin{cases}0.5 & (k=-1)\\ 1.5 & (k=0)\\ 2 & (k=1)\\ -2 & (k=2)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$

（5） 序列差分

一阶前向差分 $\{\Delta f(k)\} = \{f(k+1)-f(k)\}$

一阶后向差分 $\{\nabla f(k)\} = \{f(k)-f(k-1)\}$

二阶前向差分 $\{\Delta^2 f(k)\}$

$$\{\Delta[\Delta f(k)]\}= \{\Delta f(k+1) - \Delta f(k)\}= \{f(k+2)-2f(k+1)+f(k)\}$$

$$=\{\Delta[f(k+1) - f(k)]\}$$

二阶后向差分 $\{\nabla^2 f(k)\}$

$$\{\nabla[\nabla f(k)]\}= \{\nabla f(k)-\nabla f(k-1)\}= \{f(k)-2f(k-1)+f(k-2)\}$$

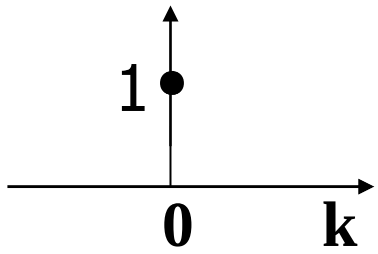
n阶依次类推

6：常用典型离散时间信号

三者关系：

（1）单位函数

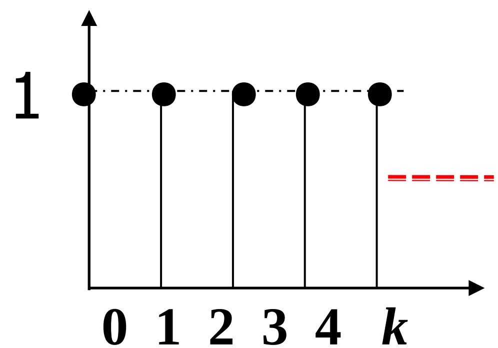
$$\delta(k)=\begin{cases}1, k=0\\0, k\neq 0\end{cases}$$



$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

（2）单位阶跃序列

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1(k\geq 0)\\0(k<0)\end{cases}$$

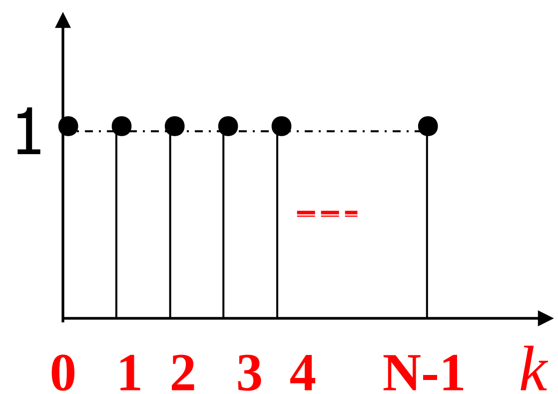


$$\varepsilon(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\cdots$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$$

（3）矩形序列

$$G_N(k)=\begin{cases}1(0\leq k\leq N-1)\\0(k<0, k\geq N)\end{cases}$$

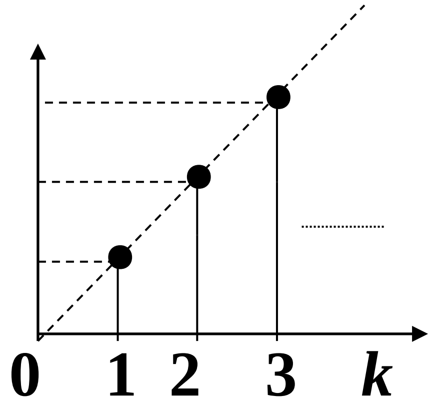


$$G_N(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-N)$$

$$=\sum_{j=0}^{N\text{-}1}\delta(k-j)$$

（4）斜变序列

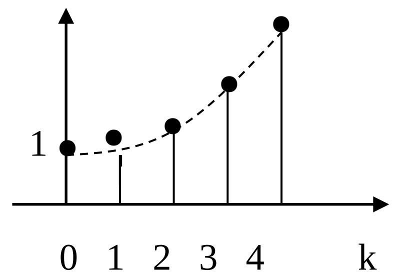
$$f(k) = k\varepsilon(k)$$



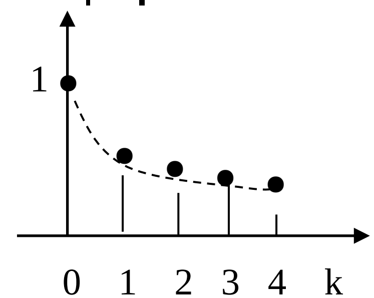
（5）单边指数序列

$$f(k) = a^{k}\varepsilon(k)$$

|*a*|>*1* 发散

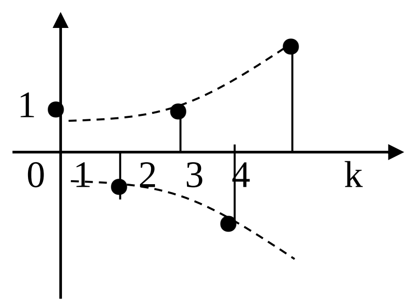


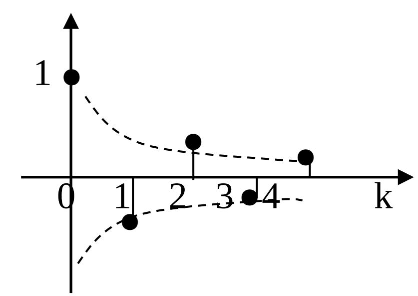
|*a*|<*1* 收敛



***a*>0,**序列值皆为正

***a*<0,**序列值在正、负间摆动





（6）正弦序列 $Sin(k\omega_0)\varepsilon(k)$

$$\cos(\omega_0 t) \neq \cos((\omega_0 + 2\pi)t) = \cos(\omega_0 + 2\pi t)$$

不同w就是不同信号

$$\cos((\omega_0 + 2\pi)k) = \cos(\omega_0 k + 2\pi k) = \cos(\omega_0 k)$$

w相差2π 是同一个信号

（7）复指数序列 $e^{j\omega_0 k}$

$$= Cos\omega_0 k + jSin\,\omega_0 k = |f(k)|e^{j\varphi_k} \quad \begin{cases} |f(k)| = 1 \\ \varphi_k = k\omega_0 \end{cases}$$

7：指数信号和三角信号周期性

$\sin\omega_0 k$ k是整数 $M=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

m是整数，当mM是整数时$k+mM$ 是整数

$$Sin\,\omega_0(k+mM)=Sin[\omega_0(k+m\frac{2\pi}{\omega_0})]$$

$$=Sin(\omega_0 k+m2\pi)=Sin\,k\omega_0$$

指数信号和三角信号周期性

$M=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 必须是有理数

最小周期：$mM=m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 最小自然数

复指数信号小结

CT: $e^{j\omega_0 t}$	DT: $e^{j\omega_0 n}$
不同频率，不同信号	频率相差2π整数倍的信号相同
对任意频率，信号都是周期的	$\frac{\omega_0}{2\pi}$是有理数，才是周期的
周期 $T = 2\pi/\omega_0$	周期 N: $m\frac{2\pi}{\omega_0}$中最小的自然数
基波频率 $= \omega_0$	基波频率 $\omega_1 = 2\pi/N$

求信号最小周期

连续信号 $x(t)=\cos(\frac{2\pi}{9}t)$ $T=9$

离散信号 $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{9}n)$ $M=9$

连续信号 $x(t)=\cos(2.6\pi t)$ $T=10/13$

离散信号 $x(n)=\cos(2.6\pi n)$ $\cancel{M=10/13}$ $N=10$

连续信号 $x(t)=\cos(8t)$ $T=2\pi/8$

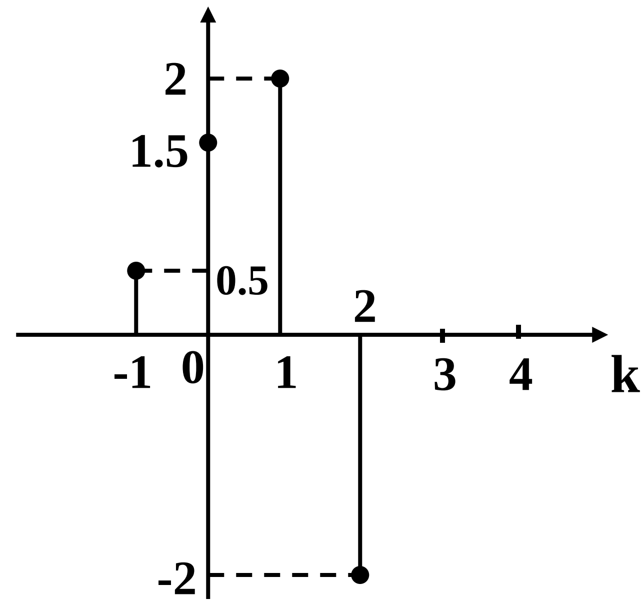
离散信号 $x(n)=\cos(8n)$ $M=2\pi/8$ 无理数

非周期函数

7 离散信号的分解

例 已知

$$x(k)=\begin{cases}0.5 & (k=-1)\\ 1.5 & (k=0)\\ 1 & (k=1)\\ -0.5 & (k=2)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$



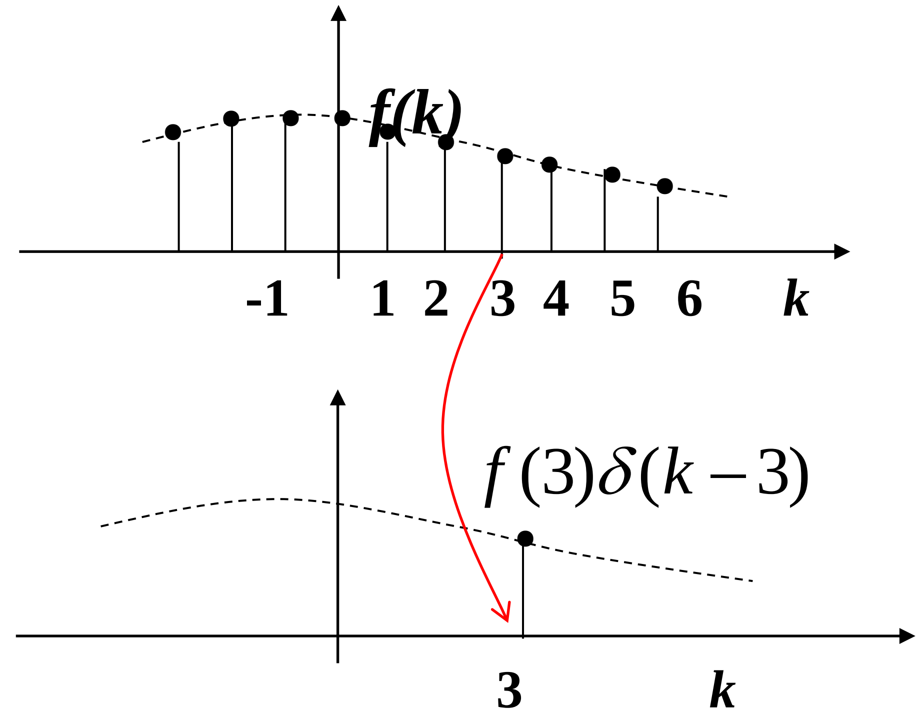
用单位函数描述

$$x(k)=0.5\delta(k+1)+1.5\delta(k)+\delta(k-1)-0.5\delta(k-1)$$

7 离散信号的分解

$$f(k)\delta(k-k_0)=f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$f(k)\delta(k-3)=f(3)\delta(k-3)$$



$$f(k)=\Lambda+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+\Lambda$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}f(j)\delta(k-j)$$

8：线性非时（移）变离散时间系统

线性：　若 $e_1(k) \to y_1(k)$, $e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1 e_1(k) + c_2\, e_2(k) \to c_1 y_1(k) + c_2\, y_2(k)$

非移变：若 $e_1(k) \to y_1(k)$　则 $e_1(k-i) \to y_1(k-i)$

线性非移变系统：

若 $e_1(k) \to y_1(k)$, $e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1 e_1(k-i) + c_2\, e_2(k-j) \to c_1 y_1(k-i) + c_2\, y_2(k-j)$

二：取样信号与取样定理

连续时间信号与离散时间信号之间的转换

- 连续时间信号取样得到离散时间信号
- 离散时间信号恢复得到连续信号
- 不失真取样的条件—取样定理

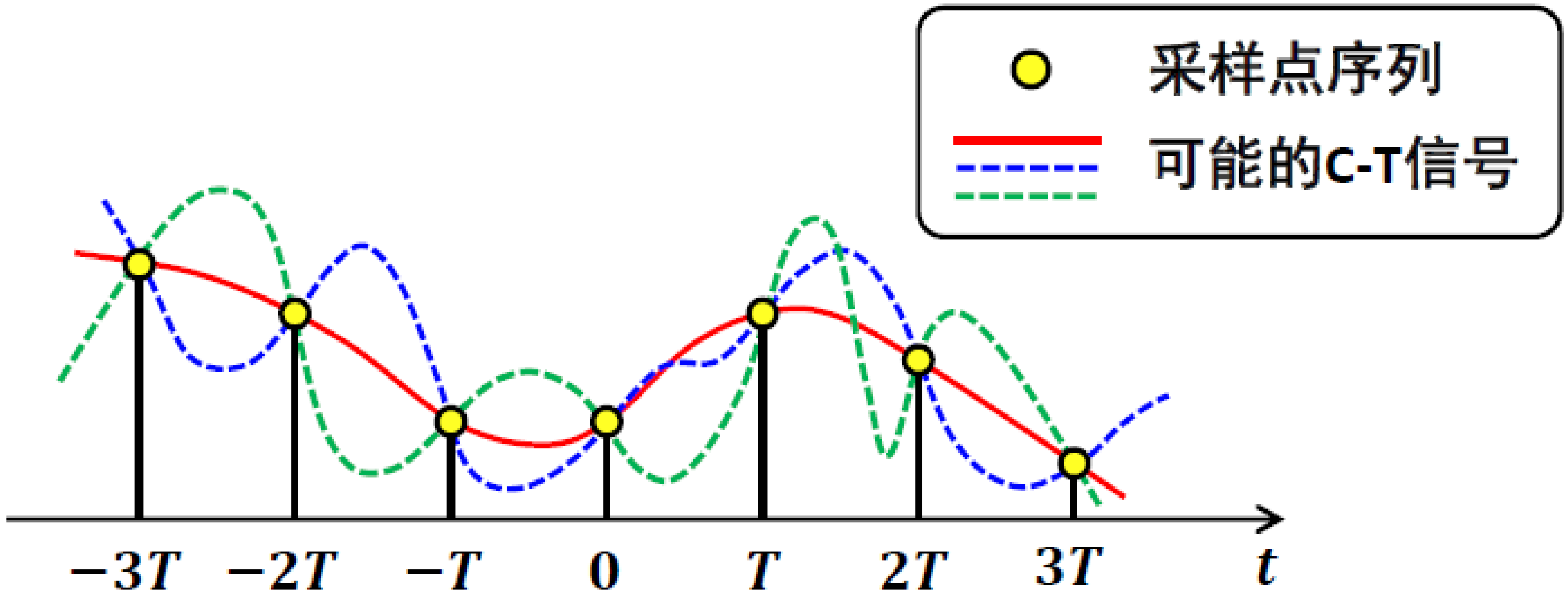
采样是连续时间信号和离散时间信号间桥梁

- 通过分析采样过程的时域和频域变换
- 建立两类信号互相转换的原理和方法。

1. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息?

2. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号?

采样：在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采样



在没有任何限制的条件下，从连续信号中采样得到的样本序列不能唯一的代表原来的连续时间信号

采样定理发展

Harry Nyquist

Vladimir Kotelnikov

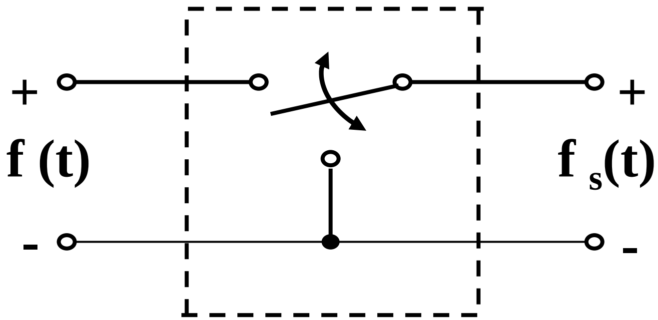
Claude Elwood Shannon

■1928年，美国电信工程师H.奈奎斯特首先提出，因此常称为奈奎斯特采样定理

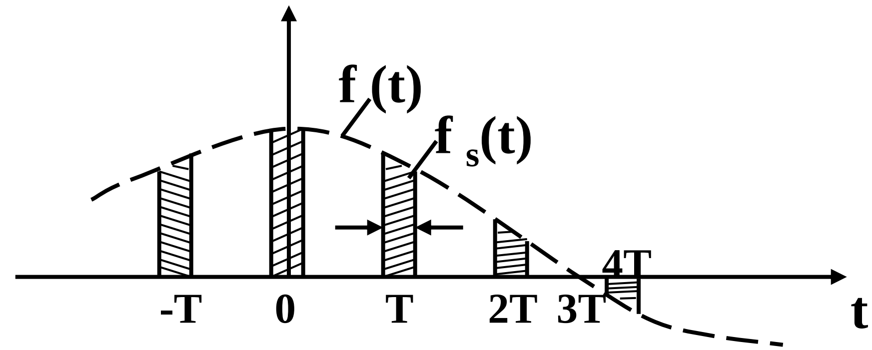
■1933年，苏联工程师科捷利尼科夫首次用公式进行严格表述，因此在苏联文献中称为科捷利尼科夫采样定理

■1948年，信息论创始人C.E.香农对这一定理加以明确说明并正式作为定理引用，因此在许多文献中又称为香农采样定理

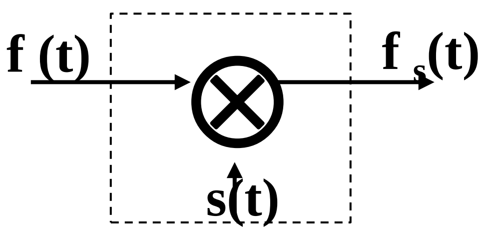
1、连续时间信号的取样



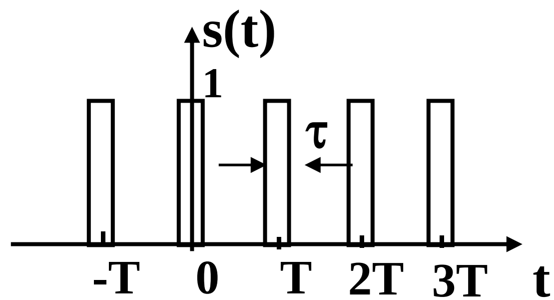
(a) 抽样器



(b) 输入原信号 f(t) 和输出抽样信号$f_s(t)$

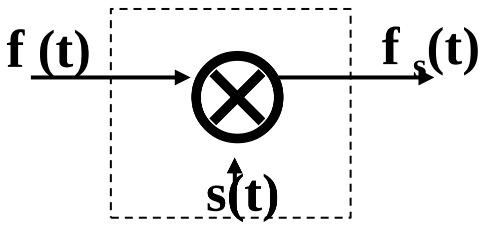


抽样的模型

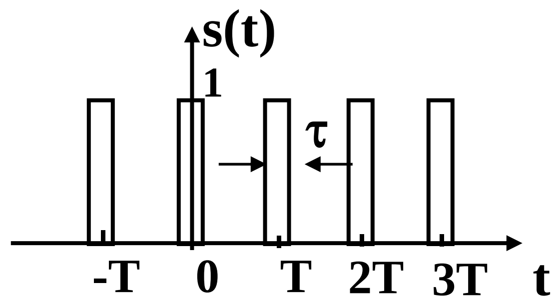


开关函数

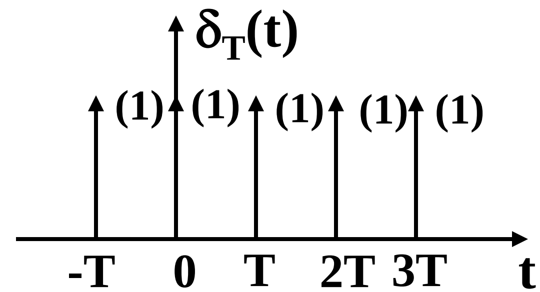
开关电路的数学模型:s(t)　　则 $f_s(t) = f(t)\,s(t)$



抽样的模型



(a) 开关函数



(b) 单位冲激序列

$$\mathrm{s(t)} \approx \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \tau\delta_T(t)$$

$\tau \rightarrow 0$

$$s_\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \lim_{\tau\to 0} \tau\delta_T(t)$$

$$f_s(t) = f(t)s_\delta(t) = f(t)\lim_{\tau\to 0} \tau\delta_T(t)$$

理想取样信号 $f_\delta(t) = \dfrac{1}{\tau} f_s(t) = f(t)\cdot\delta_T(t)$

$$f_\delta(t)=\frac{1}{\tau}f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)$$

抽样（角）频率

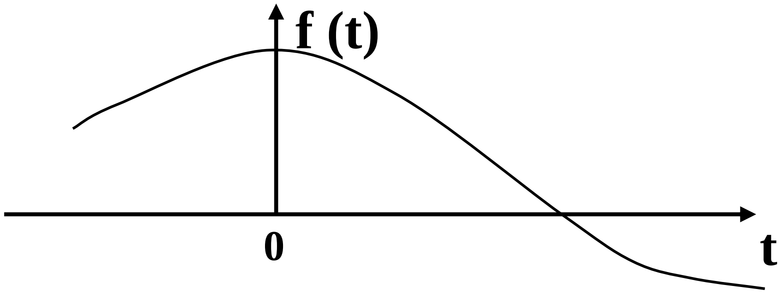
$$\boxed{\omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

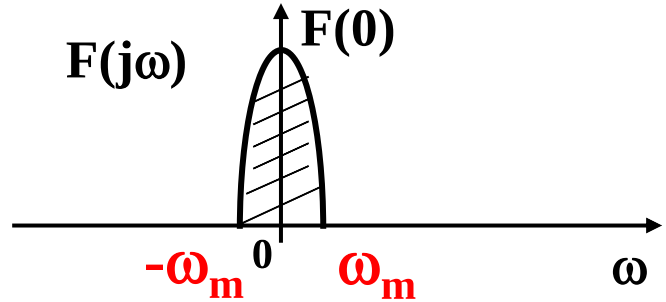
$$\delta_T(t)\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s)=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

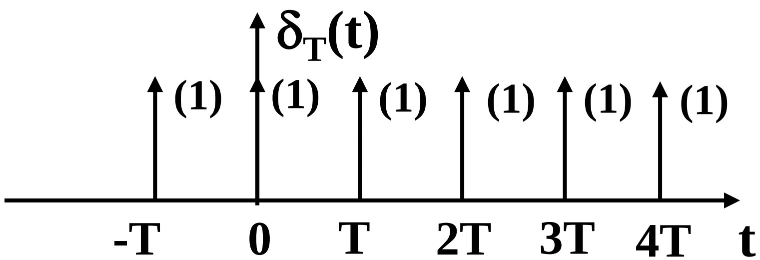
$$F_\delta(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\mathscr{F}\{\delta_T(t)\}$$

$$F_\delta(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s)$$

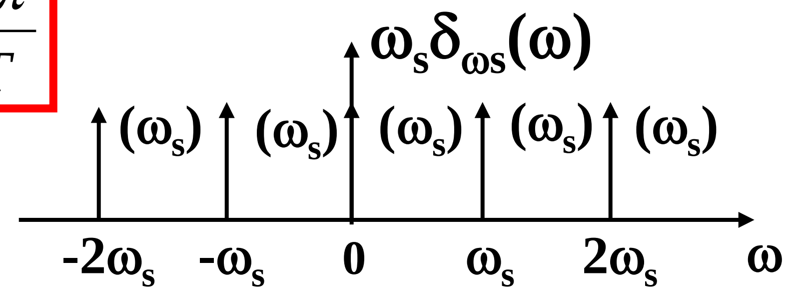
$$=\frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)\boxed{=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[(j(\omega-n\omega_s)]}$$



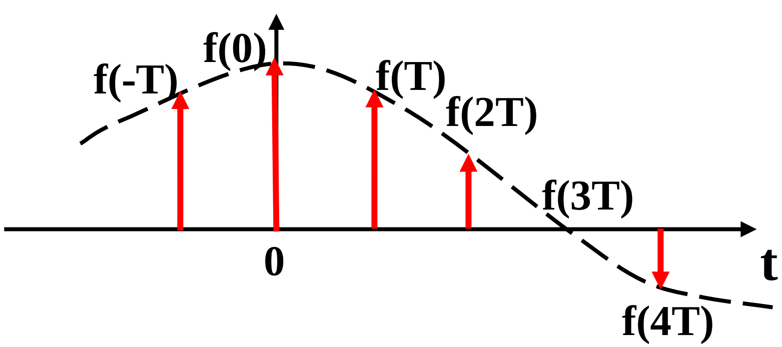


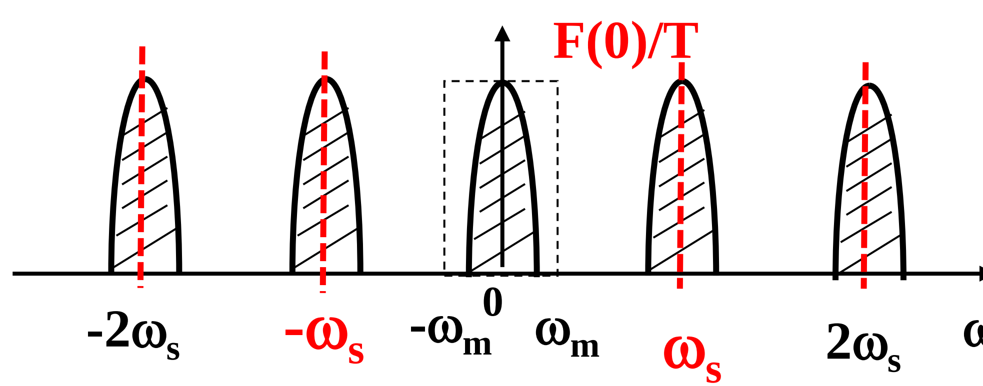


$$\boxed{\omega_s = \frac{2\pi}{T}}$$



$$\boxed{f_\delta(t) = \frac{1}{\tau} f_s(t) = f(t)\delta_T(t)} \longleftrightarrow \boxed{F_\sigma(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[(j(\omega - n\omega_s))]}$$





采样过程总结

连续时间信号

$$f_s(t) = f(t)s_\delta(t) = f(t)\lim_{\tau\to 0}\tau\delta_T(t)$$

$$f_\delta(t) = \frac{1}{\tau}f_s(t) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$ 理想取样信号

$$F_\delta(j\omega) = \frac{1}{T}F(j\omega)*\delta_{\omega s}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j(\omega-n\omega_s))$$

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$$

离散时间信号

$$f(nT) \qquad f(n)$$

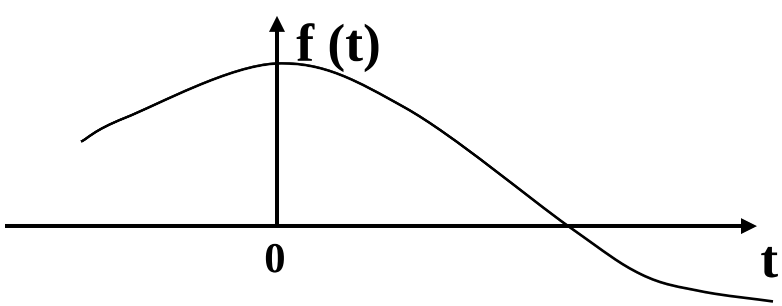
2:取样定理(香农抽样定理)

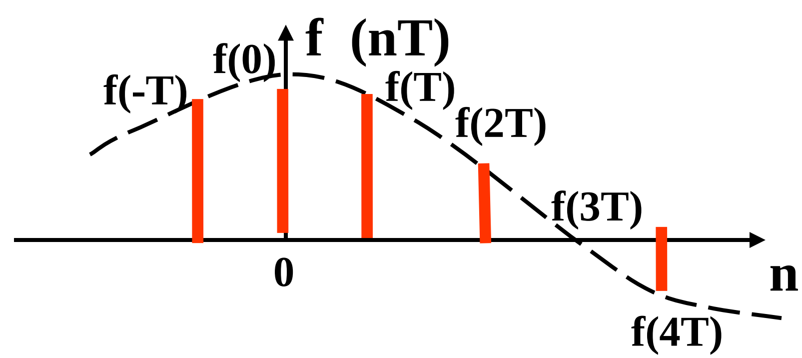
- 一个有限频带的连续时间信号，可以用一个取样的离散信号序列来代替，而不失去原信号的任何信息
- 其唯一的条件是：$\omega_S \geq 2\omega_m$ 或 $T_S \leq 1/2f_m$ $f_s > 2f_m$，

即 $$T_{s\max} = \frac{1}{2f_m}$$ —— 奈奎斯特(香农)抽样间隔

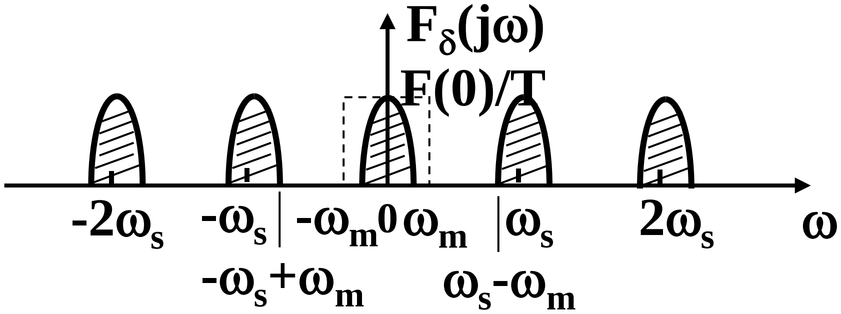
$$f_{s\min} = 2f_m$$ ——奈奎斯特(香农)抽样频率

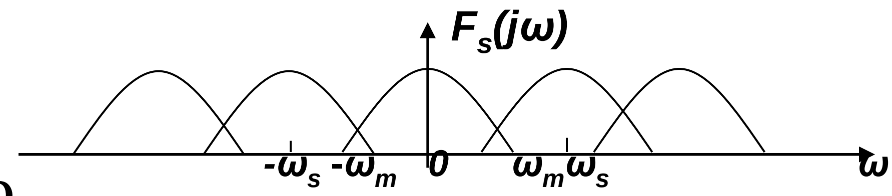
$$f(t) \longleftrightarrow f(nT) \text{ 即 } f(n)$$





3、信号重建



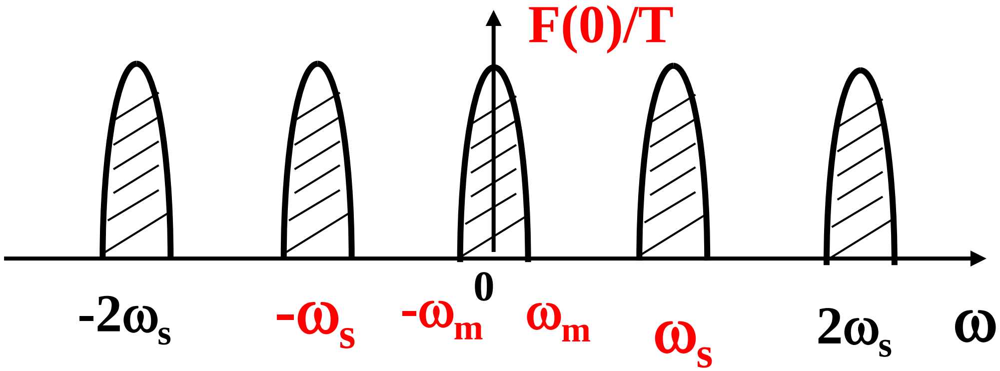


$\omega_S \geq 2\omega_m$

$\omega_S < 2\omega_m$

不失真重建原信号必要条件：$F_\delta(j\omega)$相邻部分不重叠

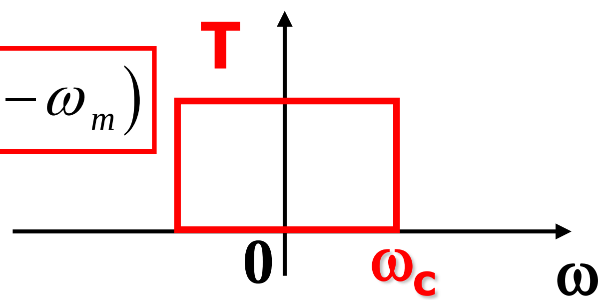
- $F(j\omega)$ 的频带有限，没有$\omega \geq \omega_m$ 的分量。
- 取样频率大于或等于最高信号频率两倍，即$\omega_s \geq 2\omega_m$



$$f_\sigma(t) \leftrightarrow F_\sigma(j\omega)$$

$$F_\sigma(j\omega) \bullet H(j\omega) = F(j\omega)$$

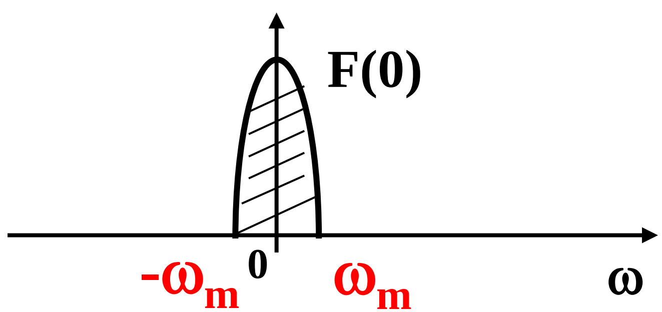
$$\boxed{\omega_m \le \omega_c \le (\omega_s - \omega_m)}$$



$$H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = T \bullet G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$f(t) = f_\delta(t) * h(t)$$



$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = F_\sigma(j\omega) \bullet H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = T \bullet G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} T 2\omega_c Sa(\omega_c t) = Sa(\frac{\omega_s t}{2})$$

设$\omega_c = \omega_s / 2$

$$f(t) = f_\delta(t) * h(t)$$

$$f_\delta(t) * h(t) = (f(t) \bullet \delta_T(t)) * h(t)$$

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)\right] * Sa(\frac{\omega_s t}{2})$$

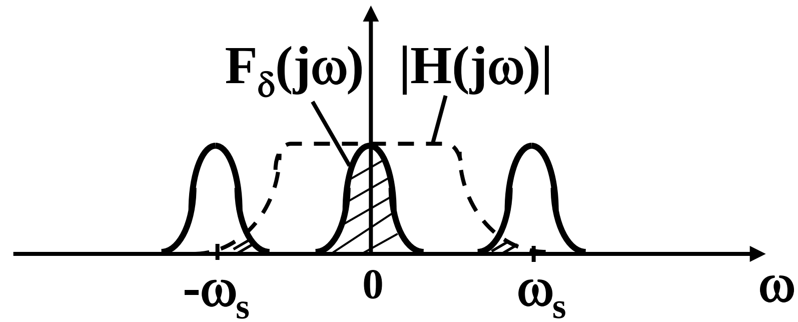
$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) Sa(\frac{\omega_s (t-kT)}{2})\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t-kT) * Sa(\frac{\omega_s t}{2}) \\ &= Sa(\frac{\omega_s (t-kT)}{2}) \end{aligned}}$$

物理意义： 原信号f(t)，可以看作用取样点信号值，通过取样函数Sa()进行插值来重建。

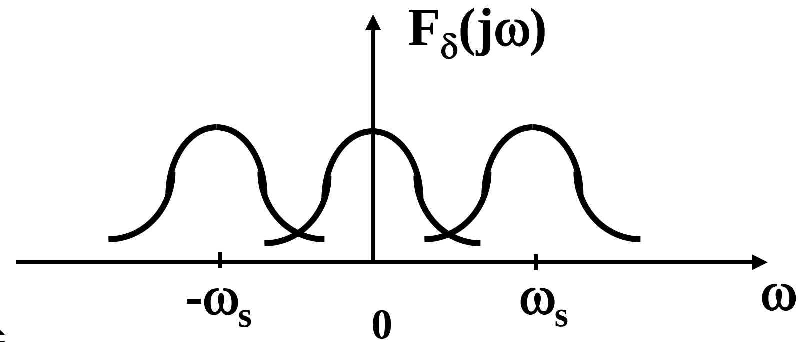
5、信号重建的工程处理

- 非理想低通滤波器问题。
  - 解决办法
  - 提高取样频率
  - 使用高阶数的滤波器



抽样信号通过非理想低通滤波器

- 非有限频带信号
  - 解决办法
  - 在信号抽样前加低通滤波器，滤除$\omega \geq \omega_m$部分的可忽略的分量。



非有限频带信号抽样后频谱的混迭现象

- 数字信号的时分复用

用一开关函数去乘以连续函数得到脉冲信号的过程 → 脉冲幅度调制 → 量化、编码 → 数字信号

↓

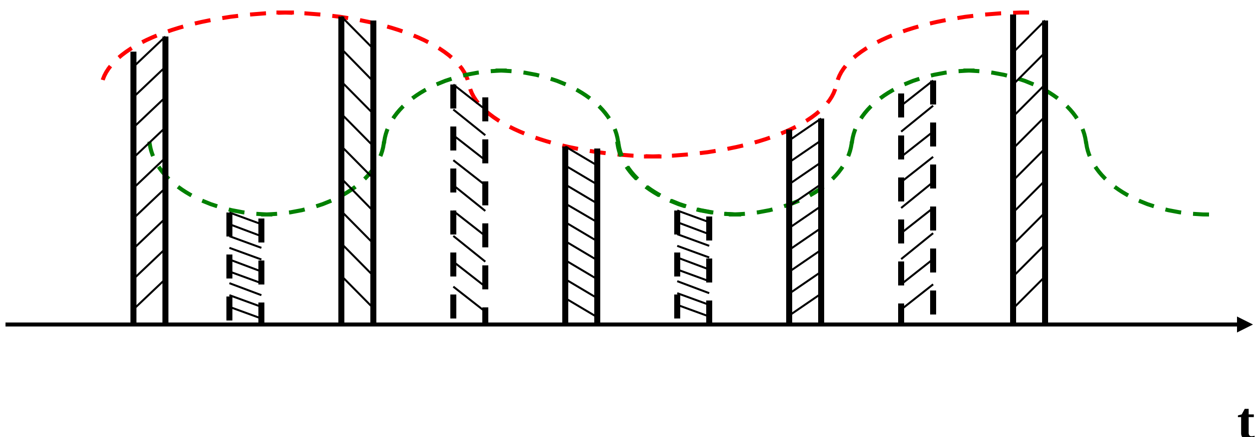
用于数字通信

↓

利用脉冲信号宽度窄的特点可以同时传送多个抽样信号

↓

时分复用系统



用时分复用法传送两个信号

本讲小结

- 离散时间系统的概念
  - 离散时间信号
  - 离散时间信号的运算
  - 常见离散时间信号
  - 线性移不变离散时间系统
- 取样信号与取样定理
  - 信号的取样
  - 理想取样信号及其频谱分析
  - 信号的重建与取样定理
  - 信号取样的工程考虑

信号与线性系统

第 17 次课外作业

教材习题: 7.2、 7.6、 7.8、