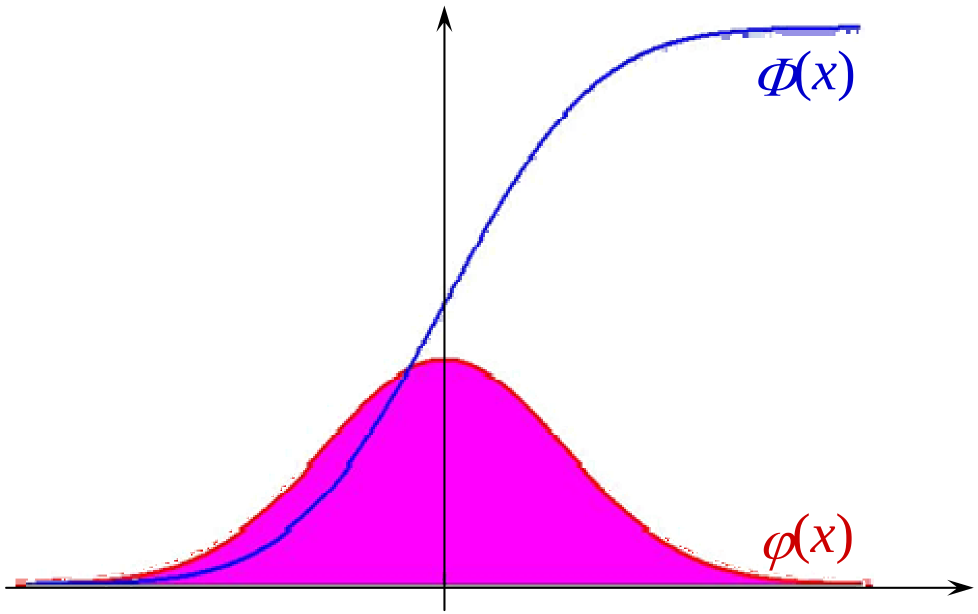
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

6.2.4　基本抽样定理

定理　设X_1，X_2，…，X_n是取自总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，则

(1)　$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$;

(2)　$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$;

(3)　$\bar{X}$与S^2相互独立。

证明(1)　$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n})^2\sigma_i^2) \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$;

说明(2)　$\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma} \sim N(0,?)$，且　$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{X}=0$

说明(3)　$\bar{X}\to\mu,\quad S^2\to\sigma^2$

推论1　$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

证明： 由定理知 (1) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$,

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, (3) 两者独立，故

$$T=\frac{(\bar{X}-\mu)/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/n-1}}\sim t(n-1)$$

推论2 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$： $\bar{X}$ S_1^2

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$： $\bar{Y}$ S_2^2

则

$$(1)\ F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$(2)\ \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Bigg/ \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \sim F(n_1, n_2)$$

证明： 由定理知 $\dfrac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(n_i-1)$，$i=1,2$, 且两者相互独立，

故

$$F = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/ n_1-1}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/ n_2-1} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

推论3 条件同推论2，且$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，则

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\text{，其中 } S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

证明： 因为$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n_1})$与$\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n_2})$ 相互独立，所以

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2})\quad\Rightarrow\quad U=\boxed{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}\sim N(0,1)$$

又由$\frac{(n_1-1)}{\sigma^2}S_1^2\sim\chi^2(n_1-1)$ 与 $\frac{(n_2-1)}{\sigma^2}S_2^2\sim\chi^2(n_2-1)$ 相互独立，

由χ^2分布可加性，$V=\boxed{\frac{1}{\sigma^2}[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2]}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$

故 $T=\dfrac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}}\sim t(n_1+n_2-2)$

例1 设 $\overline{X}$ 和 $\overline{X}$分别是取自正态总体N(μ,σ^2)的容量为n的两个样本（X_{11}，X_{12}，…，X_{1n}）和（X_{21}，X_{22}，…，X_{2n}）的样本均值。试确定n使两个样本均值之差的绝对值超过σ 的概率大于0.01。

解 由 $\overline{X}_i \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})\quad n=1,2$，相互独立知

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N(0,\ 2\frac{\sigma^2}{n})$$

$$P(\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|>\sigma)=P\{\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{\sqrt{2\sigma^2/n}}>\frac{\sigma}{\sqrt{2\sigma^2/n}}\}=2[1-\Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})]>0.01$$

$$\Rightarrow \Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})<0.995 \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}}<2.576 \Rightarrow \quad n<13.27$$

例2 (P$_{111}$例6.4) 分别从方差为20和35的两个独立的正态总体中抽取容量为8和10的两个样本，估计第一个样本方差S_1^2不小于第二个样本方差S_2^2两倍的概率。

解　由题意

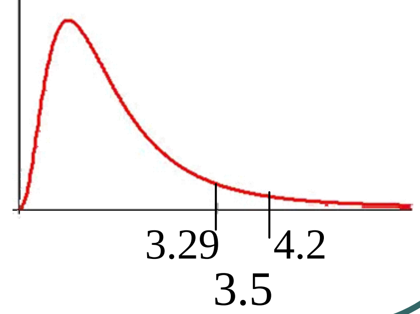
$$(X_1, X_2, \cdots, X_8) \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 20) \qquad (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, 35):$$

由推论2知 $\dfrac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \sim F(7,9)$ ，所以

$$P(S_1^2 \geqslant 2S_2^2) = P\left(\frac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \geq 2 \times \frac{35}{20}\right) = P(F \geqslant 3.5) = 0.0423$$

查表有，$F_{0.05}(7,9) = 3.29$，$F_{0.025}(7,9) = 4.20$，所以

$$0.025 < P(S_1^2 \geqslant 2S_2^2) < 0.05$$



第七章 参数估计

§7.1 参数估计的概念

θ 是$F(x, \theta)$中的未知参数

样本（X_1，X_2，…，X_n）

估计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

估计值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

θ

§7.2 点估计

7.2.1 矩估计法

(1) 理论依据：

大数定律 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(2) 基本原则：

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{估计}} \alpha_k = E(X^k) \qquad k = 1,2,\cdots$$

可实现　　　　未知

(3) 具体步骤：

例1（P_{116}例7.2）试求总体期望$\theta_1=E(X)$和方差$\theta_2=D(X)$的矩估计。

解 (1) $\theta_1 = E(X) = \alpha_1$， $\theta_2 = D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

(2) $\hat{\theta}_1 = A_1 = \overline{X}$， $\hat{\theta}_2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \tilde{S}^2$$

注1 此结论对一切（期望和方差存在）总体都适用，即

$$\hat{E}(X) = \overline{X}, \quad \hat{D}(X) = \tilde{S}^2$$

注2 估计不唯一，如对总体$P(\lambda)$有$\hat{\lambda} = \overline{X}$，$\hat{\lambda} = \tilde{S}^2$

注3 基本原则可增加，用$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$

估计 $\beta_k = \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^k$

例2（P_{116}例7.3）设总体$X\sim U(a,b)$，试由样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求未知参数a，b 的矩估计量。

解 (1) $\begin{cases}\alpha_1=E(X)=\dfrac{a+b}{2}\\ \beta_2=D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\alpha_1-\sqrt{3\beta_2}\\ b=\alpha_1+\sqrt{3\beta_2}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\hat{a}=A_1-\sqrt{3B_2}&=\overline{X}-\sqrt{3\widetilde{S}^2}\\ \hat{b}=A_1+\sqrt{3B_2}&=\overline{X}+\sqrt{3\widetilde{S}^2}\end{cases}$

［缺点］ 如 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{11}$为来自$X\sim U(a,b)$的样本观察值，则$a$，$b$的估计值为$\hat{a}=-0.01,\hat{b}=0.414$。注意到：$x_1=0.5>\hat{b}$

一般 $P(\hat{a}>\min X_i)>0,\ \ P(\hat{b}<\max X_i)>0$

随机模拟试验