

# 三维模型，动起来！

华中科技大学软件学院 万琳





## 提纲

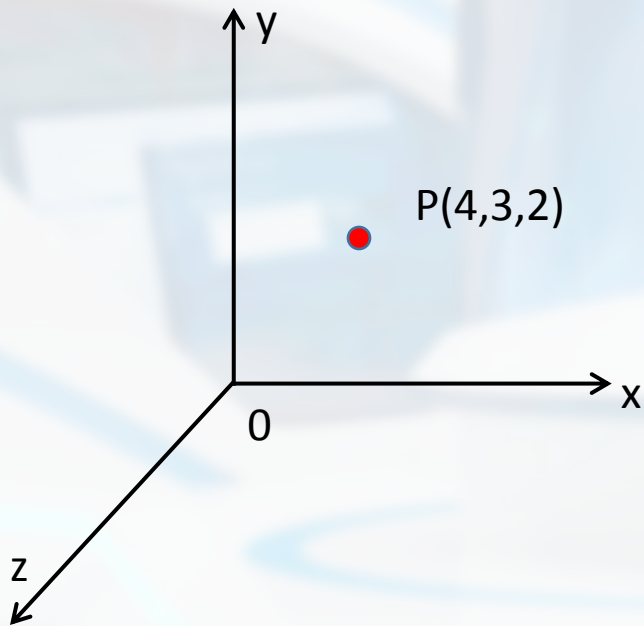
- ① 基本三维变换
- ② 逆变换
- ③ 复合变换

1

## 基本三维变换

三维齐次坐标：

❖ 齐次坐标表示就是用 $n+1$ 维向量表示一个 $n$ 维向量



三维坐标 $(x,y,z)$ 的齐次坐标表示 $(hx,hy,hz,h)$

以维坐标系下点 $p(4,3,2)$ 为例：

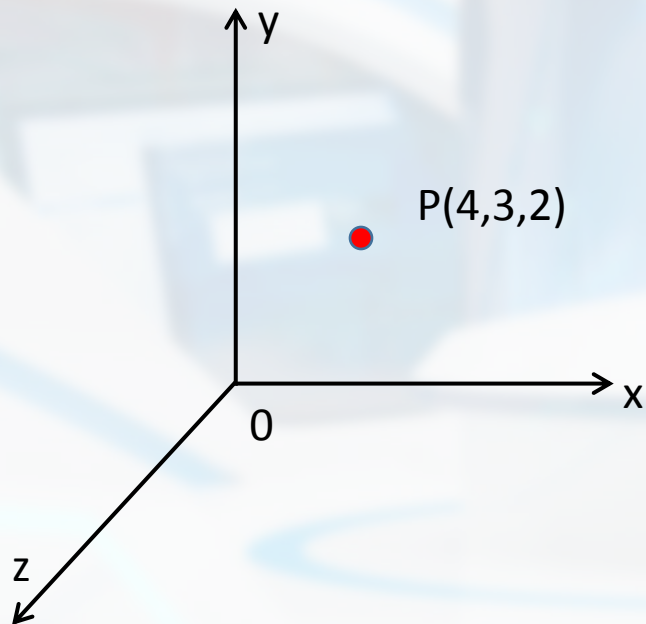
齐次坐标表示具体可以为 $P(4,3,2,1)$ ,  $P(8,6,4,2)$ 等

规范化齐次坐标表示为 $P(4,3,2,1)$

1

## 基本三维变换

基于三维齐次坐标的变换：



三维坐标系下点 $p(x,y,z)$ 变换后为 $p'(x',y',z')$ ：

则所有的变换可以用矩阵 $T_{3D}$ 来表示！

$$p' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = p \cdot T_{3D} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot$$

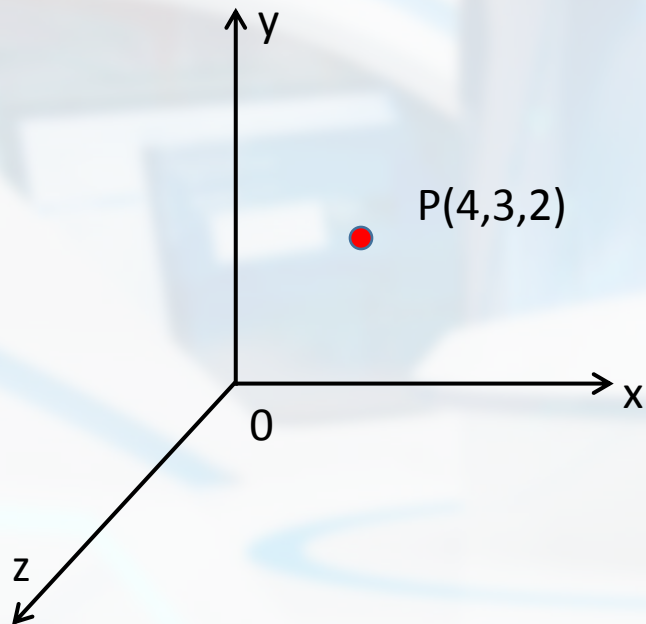
$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{T}_1 & & & \mathbf{T}_3 \\ \hline a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \\ \hline & \mathbf{T}_2 & & \mathbf{T}_4 \end{array}$$



1

## 基本三维变换

基于三维齐次坐标的变换：



三维坐标系下点 $p(x,y,z)$ 变换后为 $p'(x',y',z')$ ：

则所有的变换可以用矩阵 $T_{3D}$ 来表示！

$$p' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = p \cdot T_{3D} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{T}_1 & & & \mathbf{T}_3 \\ \hline a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \\ \hline & \mathbf{T}_2 & & \mathbf{T}_4 \end{array}$$

## 1

## 基本三维变换

根据 $T_{3D}$ 在变换中所起的作用，可将 $T_{3D}$ 分成四个子矩阵：

$T_1$ ：3×3阶子矩阵，作用是对点进行比例、对称、旋转、错切变换

$T_2$ ：1×3阶子矩阵，作用是对点进行平移变换

$T_3$ ：3×1阶子矩阵，作用是进行投影变换

$T_4$ ：1×1阶子矩阵，作用是进行整体比例变换

$$p' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = p \cdot T_{3D} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{array}{ccc|c} \begin{matrix} T_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \\ l & m & n \end{matrix} & \begin{matrix} T_3 \\ p \\ q \\ r \\ s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} T_2 \end{matrix} & \begin{matrix} T_4 \end{matrix} \end{array}$$

1

## 基本三维变换

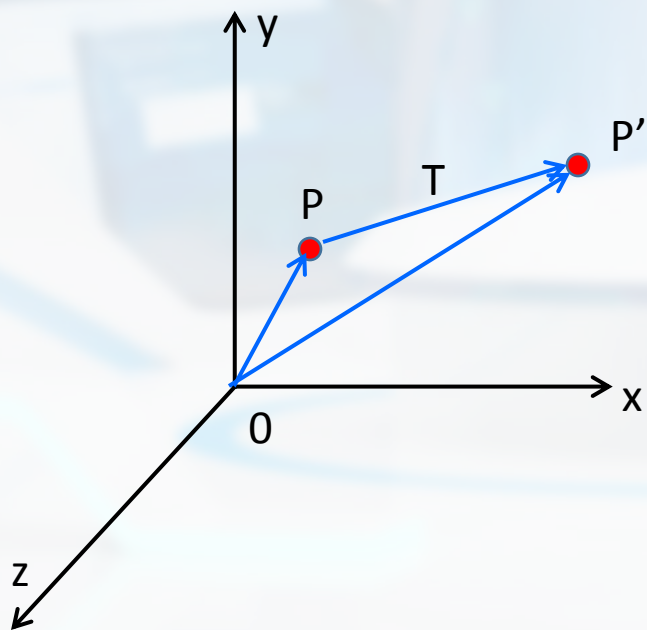
基本的三维变换包括：

- ◆ 平移
- ◆ 比例
- ◆ 旋转
- ◆ 对称
- ◆ 错切

## 1

# 基本三维变换

◆ **平移**: 指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程, 是一种不产生变形而移动物体的刚体变换 (rigid-body transformation)。



$$P(x,y,z) \rightarrow P'(x',y',z')$$

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

$$z' = z + T_z$$

$T_x$  : x方向的平移矢量

$T_y$  : y方向的平移矢量

$T_z$  : z方向的平移矢量

$$\rightarrow T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

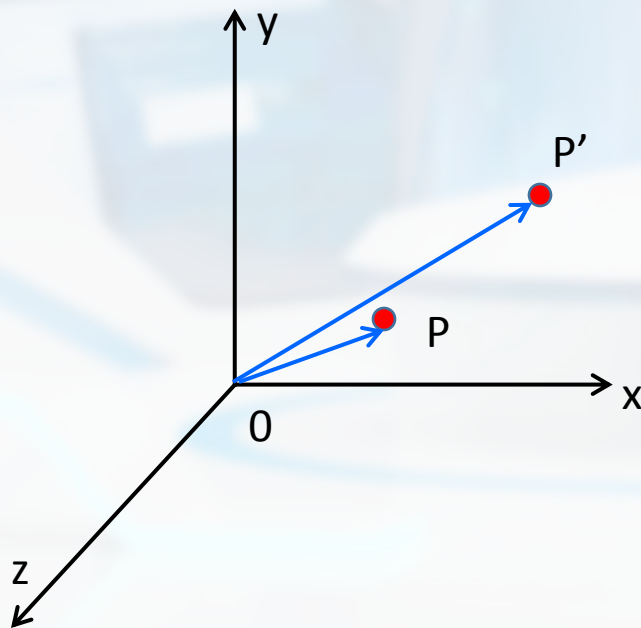
$T_1$   $T_2$   $T_3$   $T_4$



## 1

## 基本三维变换

◆ **比例**：对p点相对于坐标原点沿x方向放缩 $S_x$ 倍，沿y方向放缩 $S_y$ 倍，沿z方向放缩 $S_z$ 倍。其中 $S_x$ 、 $S_y$ 和 $S_z$ 称为比例系数。



$$P(x,y,z) \rightarrow P'(x',y',z')$$

$$x' = x \times S_x$$

$$y' = y \times S_y$$

$$z' = z \times S_z$$

$S_x$  : x方向的比例系数

$S_y$  : y方向的比例系数

$S_z$  : z方向的比例系数



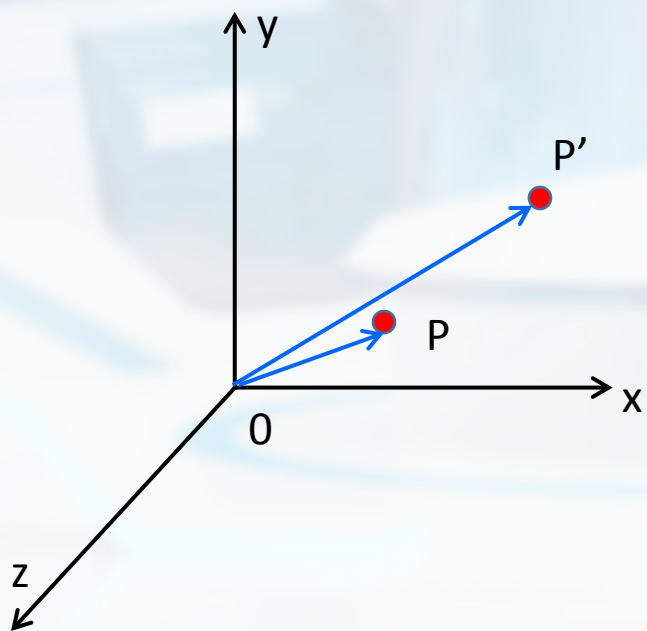
$$T_s = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The matrix is partitioned by red labels:  $T_1$  (top-left),  $T_3$  (top-right),  $T_2$  (bottom-left), and  $T_4$  (bottom-right).

# 1

## 基本三维变换

◆ **整体比例变换**：对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S倍。



$$T_s = \begin{array}{c} T_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \\ T_2 \end{array} \begin{array}{c} T_3 \\ T_4 \end{array}$$

$S > 1$  缩小  
 $S < 1$  放大  
 $S = 1$  不变

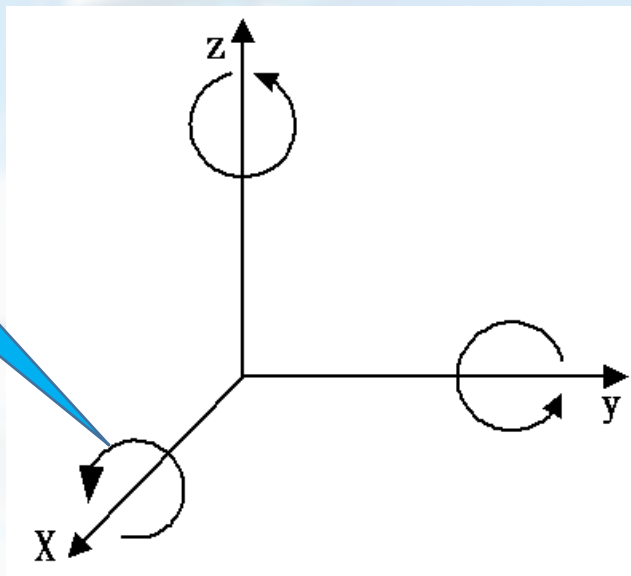
## 1

## 基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动 $\theta$ 角度得到新的点p' 的重定位过程。

正方向如何确定？

右手  
定则

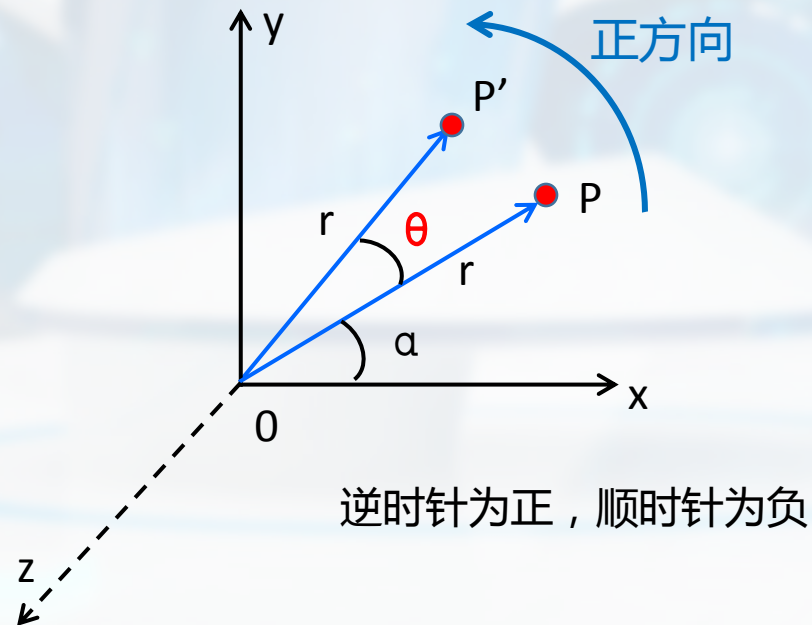


## 1

## 基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动 $\theta$ 角度得到新的点p' 的重定位过程。

正方向如何确定？与二维如何对应？



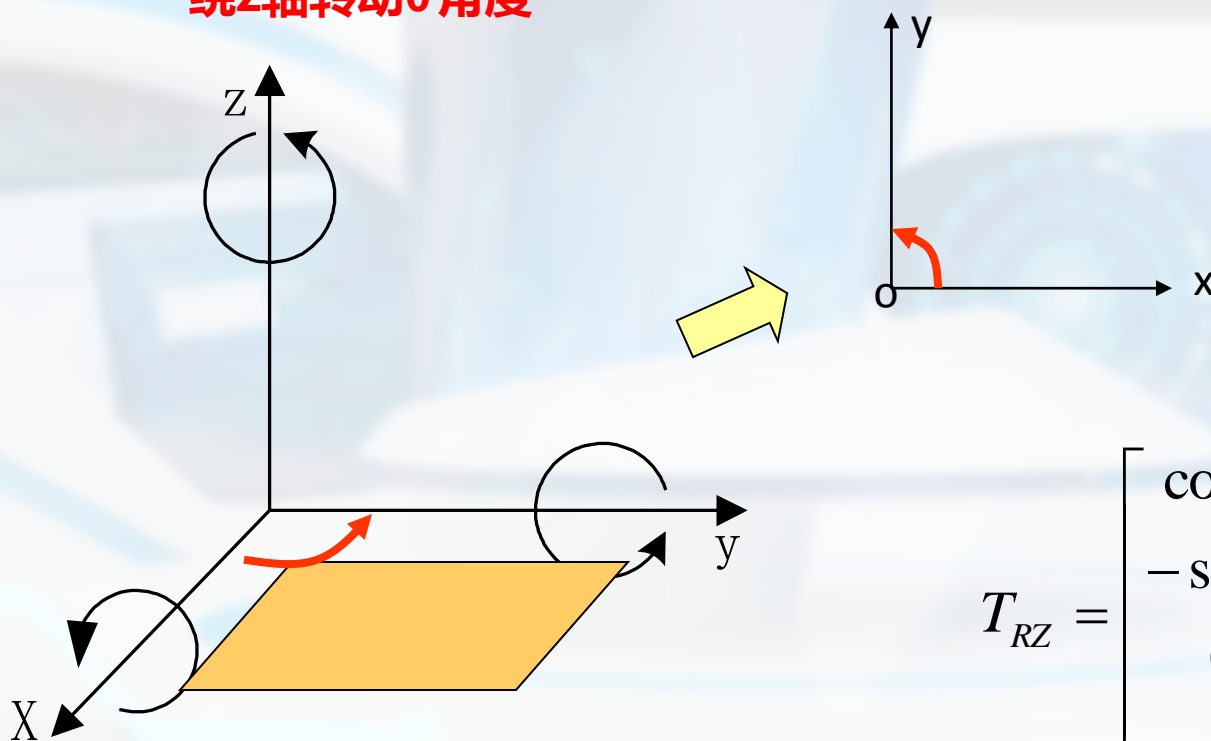


## 1

# 基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动 $\theta$ 角度得到新的点p' 的重定位过程。

**绕z轴转动 $\theta$ 角度**



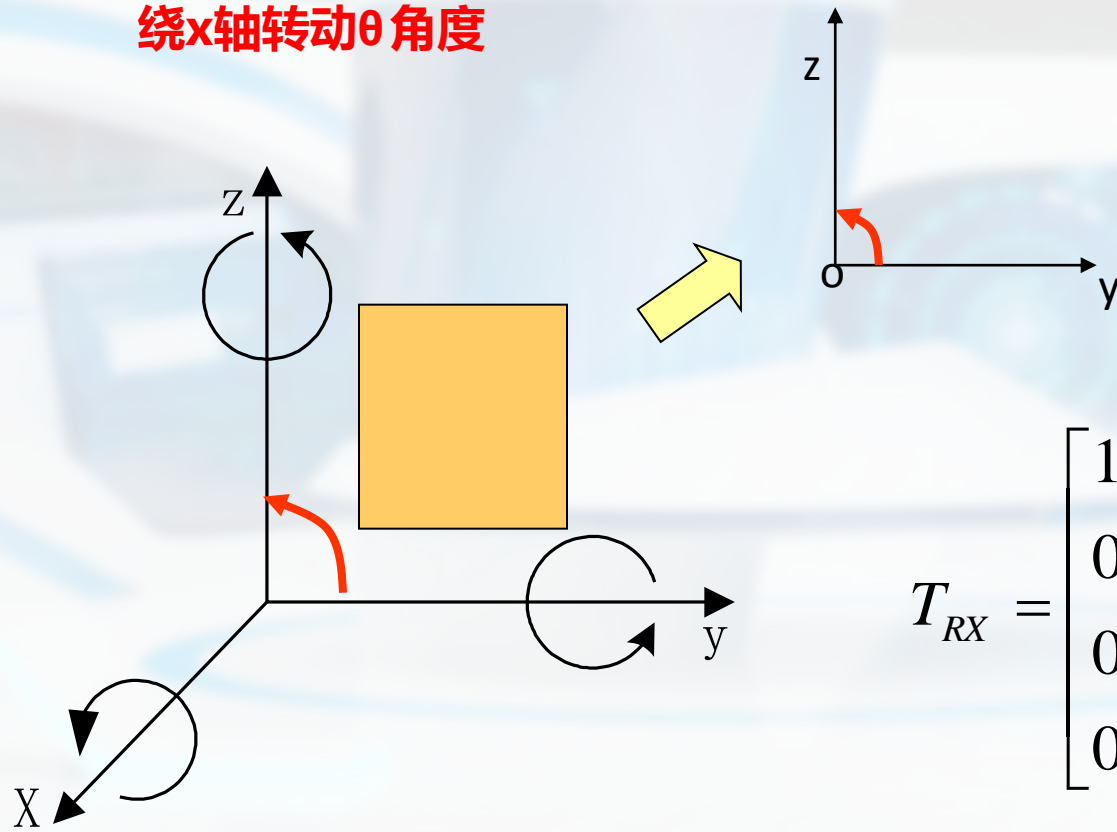
$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1

## 基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动 $\theta$ 角度得到新的点p' 的重定位过程。

**绕x轴转动 $\theta$ 角度**



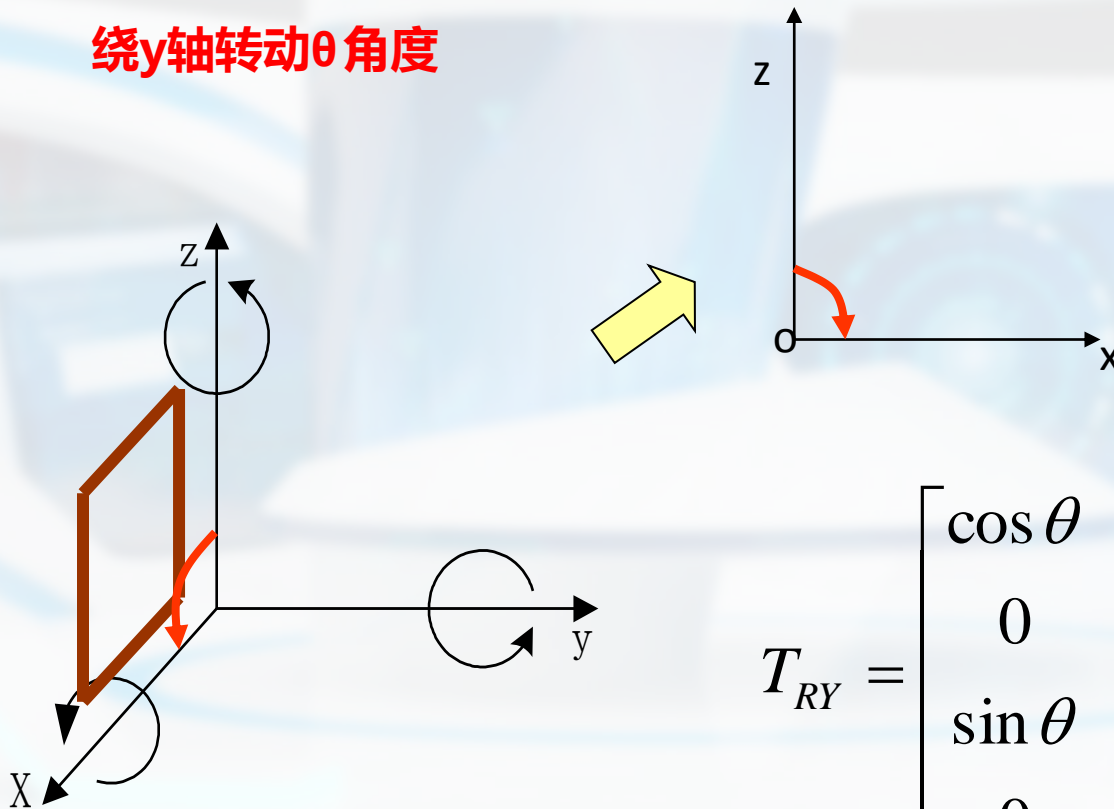
$$T_{RX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1

## 基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动 $\theta$ 角度得到新的点p' 的重定位过程。

**绕y轴转动 $\theta$ 角度**



$$T_{RY} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1

## 基本三维变换

**对称：**对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

### 关于坐标平面

$$T_{Fxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于xoy平面

$$T_{Fyz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于yoz平面

$$T_{Fzx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于zox平面

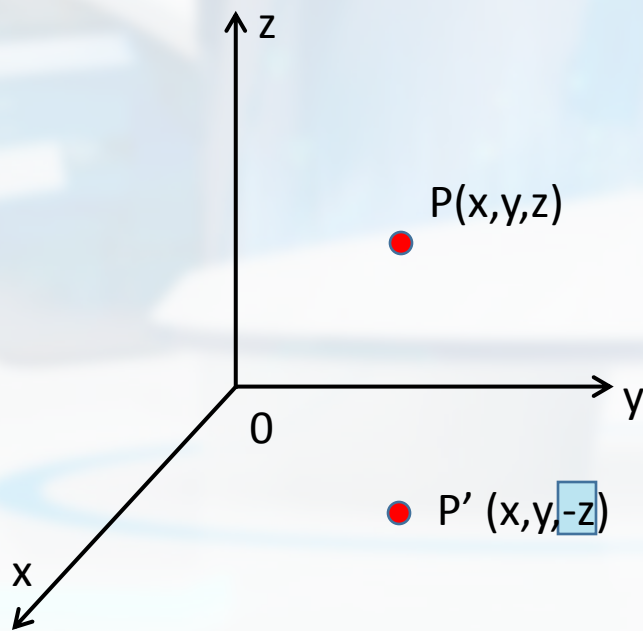


## 1

## 基本三维变换

**对称：**对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

**关于坐标平面**



$$T_{Fxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于xoy平面

## 1

## 基本三维变换

**对称：**对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

### 关于坐标轴

$$T_{Fx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于x轴

$$T_{Fy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于y轴

$$T_{Fz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于z轴

1

## 基本三维变换

**对称：**对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

**关于坐标原点**

## 1

## 基本三维变换

◆ **错切**：也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

➤ 二维空间中的错切变换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 三维空间中的错切变换矩阵

$$T_{SH} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设有一个x方向上的错切则： $x' = x + dy + gz$



## 2

## 逆变换

◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(1)平移的逆变换

平移的逆变换就是反向平移，将平移后的点移回到原处。

其变换矩阵为：

$$T_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

## 2

## 逆变换

◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(2)比例变换的逆变换

比例变换的逆变换就是将比例因子取为倒数。

其变换矩阵为：

$$T_s = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad T_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

## 2

## 逆变换

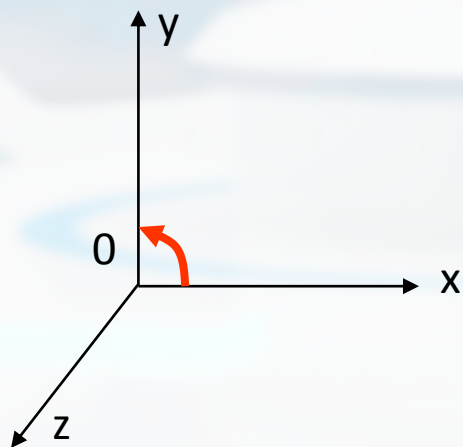
◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(3)旋转变换的逆变换

旋转变换的逆变换就是反向旋转，也就是将旋转角度由 $\theta$ 改为 $-\theta$ 。

其变换矩阵为：

以绕z轴转动为例



$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{RZ}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3

## 复合变换

◆ 三维复合变换是指图形作一次以上的变换，变换结果是每次变换矩阵相乘。

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n) \quad (n > 1)$$



### 3

## 复合变换

### ◆ 相对于任一参考点的变换

相对于参考点 $F(x_f, y_f, z_f)$ 作比例、旋转、错切等变换的过程分为以下三步：

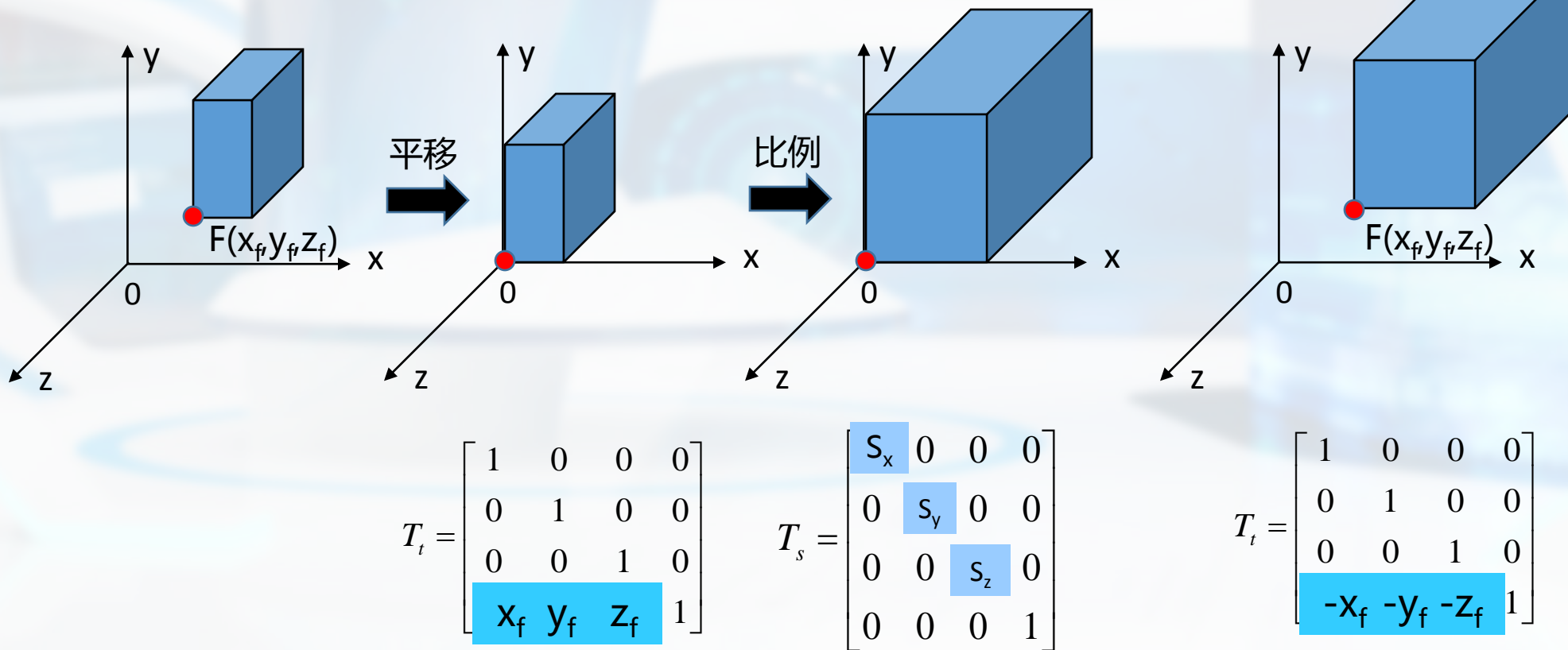
- (1) 将参考点 $F$ 移至坐标原点
- (2) 针对原点进行二维几何变换
- (3) 进行反平移

## 3

## 复合变换

## ◆ 相对于任一参考点的变换

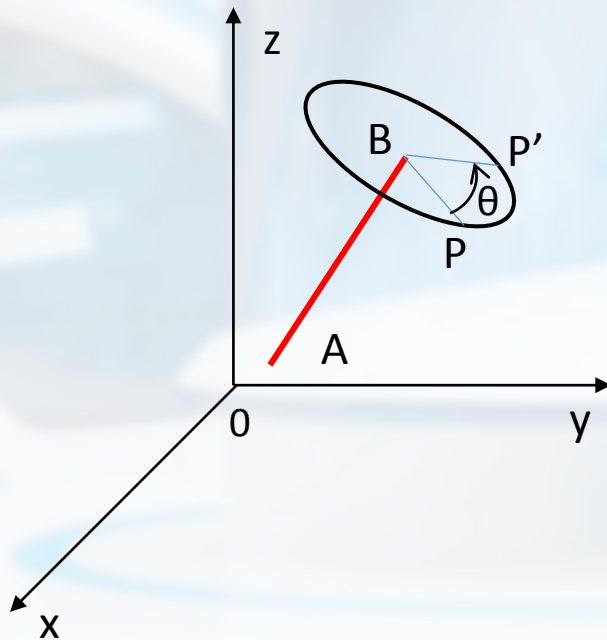
例子：相对于 $F(x_f, y_f, z_f)$ 点进行比例变换



## 3

## 复合变换

## ◆ 绕任意轴的三维旋转变换



问题：如何求出为 $T_{RAB}$ 。

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$$

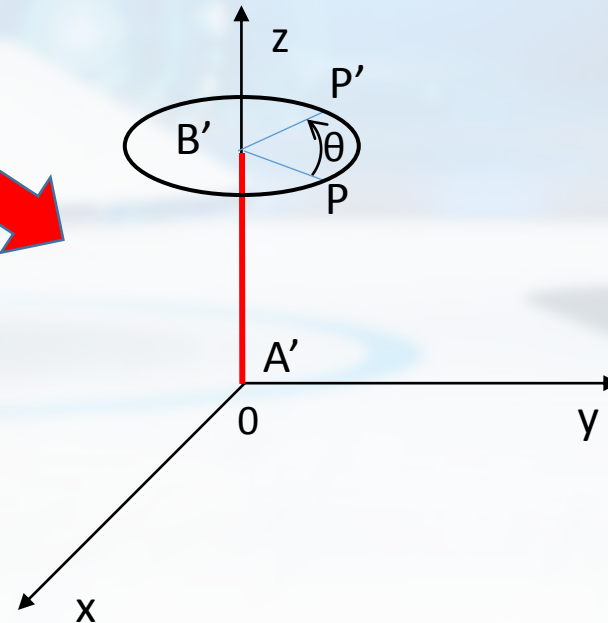
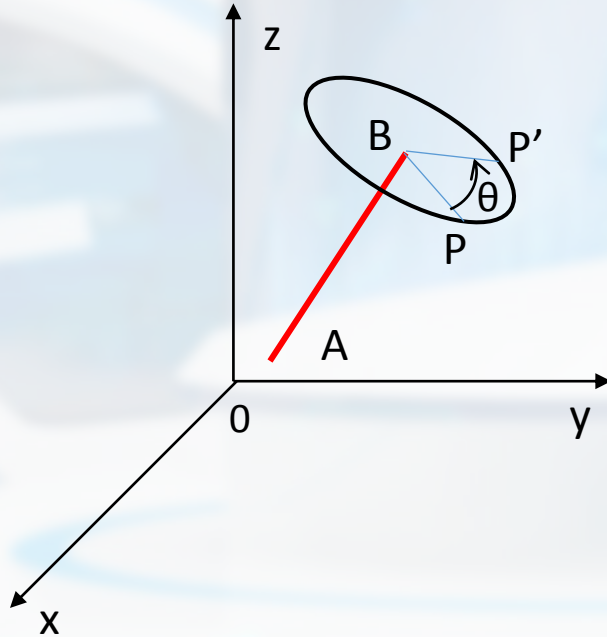
## 3

## 复合变换

## ◆ 绕任意轴的三维旋转变换

问题：如何求出为 $T_{RAB}$ 。

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{RAB}$$







# 谢谢

软件学院 万琳