信号与线性系统

第 4 讲

教材位置: 第3章 连续信号的正交分解
§3.1-§3.3

内容概要: 正交函数集与信号分解；傅里叶函数集与信号的傅里叶级数表示

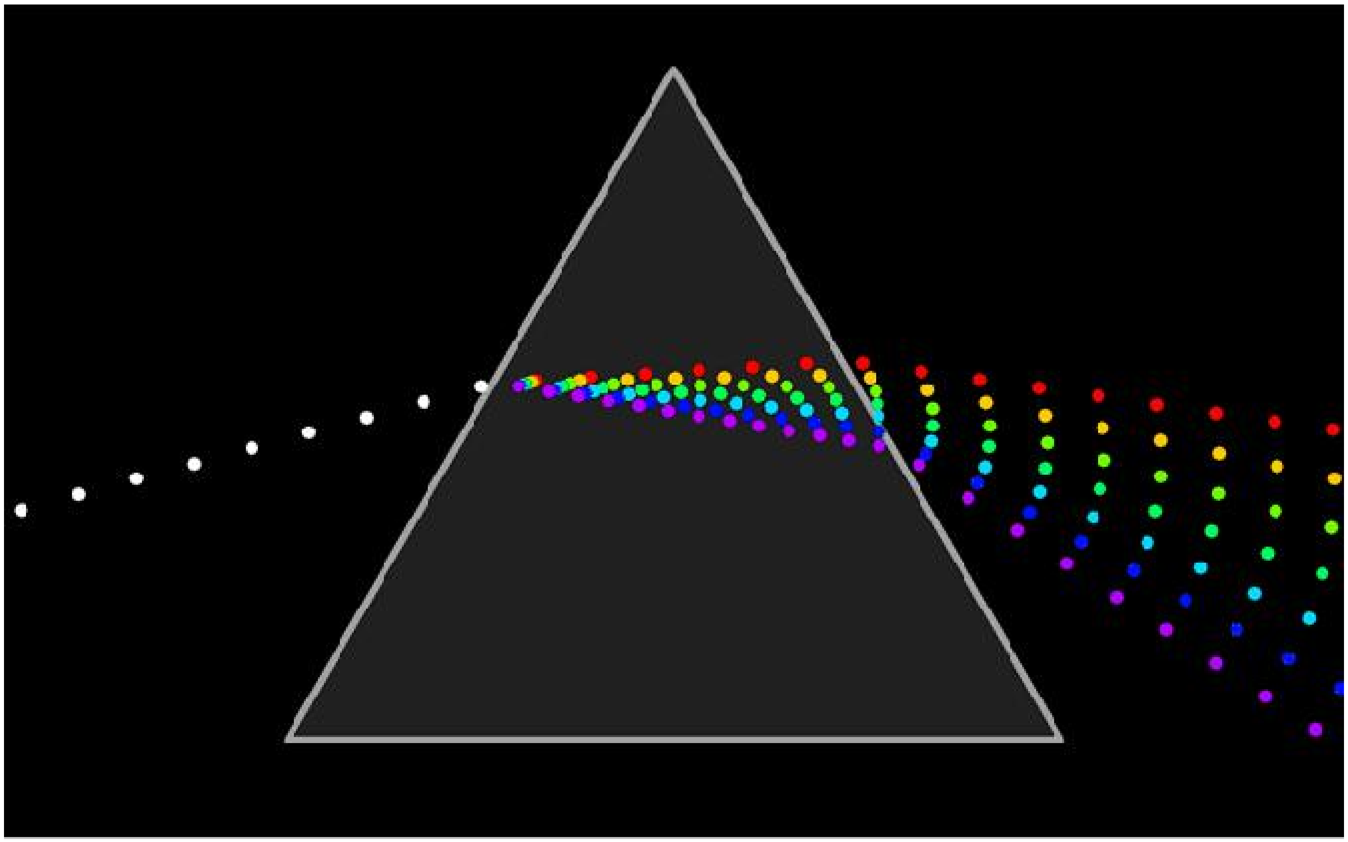
开讲前言－前讲回顾

- 连续线性时不变系统的时域求解
  - 响应的分解 零输入响应＋零状态响应
  - 零输入响应对应齐次方程通解－算子运算
  - 零状态响应通过信号分解求得
    - 激励函数表示为冲激函数的积分
    - 冲激响应的特解有标准的形式
    - 零状态响应通过激励函数与冲激响应卷积积分求得
- 时间域求解复杂，仅仅反应系统时域特征
  - 变换域求解
    - 简化求解难度
    - 拓展系统分析的非时域范畴

开讲前言-本讲导入（§3.1 引言）

- 线性系统中对信号的分解有利于系统分析
  - 分解激励与初始条件对应零状态与零输入的响应
  - 分解激励为冲激函数的积分得到通行的零状态解法
- 还有怎样的分解方式能带给我们分析系统的方便?
  - 简化计算
  - 引入更多的物理意义，便于对分析结果的物理解释
- 数学上关于信号分解的描述
  - 矢量的分解：多维空间的位置，可以通过各个坐标值定位
  - 能够构成坐标空间的矢量要满足什么条件？
  - 函数是不是也可以分解到一个所谓的函数空间？
- 具有分解价值的函数集
  - 如果能有建立函数空间的函数集，具有很好的物理解释的函数集是什么？

这些促成我们需要来研究学习关于信号的正交分解

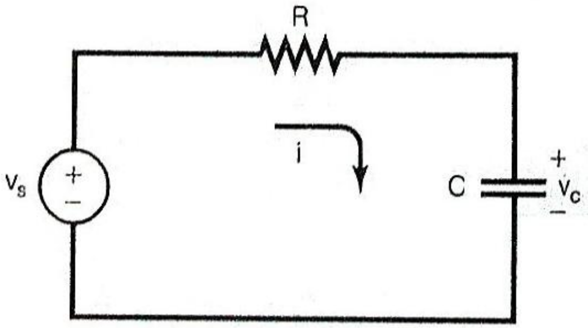


§3.1 历史回顾

三角函数和用于描述周期性过程

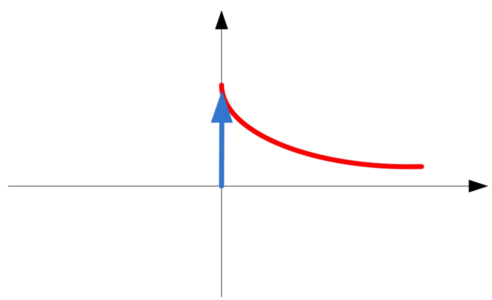
- **1768**出生
- **1807**傅里叶：任何周期信号都可以用正弦函数级数表示
- 拉格朗日强烈反对论文发表
- **1822**年，出版相关的著作，价值才得到应有的承认
- **1829**狄里赫利：给出能展开成正弦函数级数的收敛条件
- 傅里叶将周期信号的技术展开推广到非周期信号的正弦信号的加权积分

傅里叶分析方法在行星运动、天气变化、交流电信号分析等方面逐渐广泛得到应用



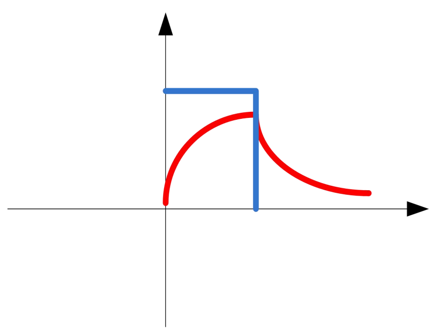
$$RC\frac{d}{dt}u_c(t)+u_c(t)=e(t)\quad RC=1$$

$$H(p)=\frac{1}{p+1}\qquad h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$

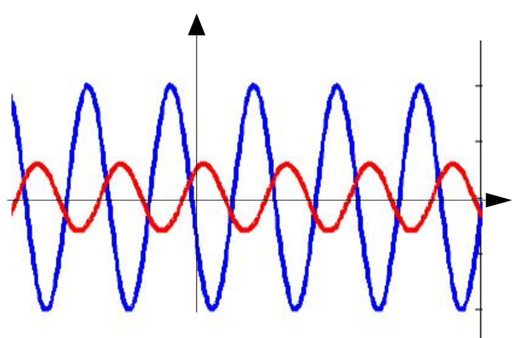


- 输入信号是冲击函数
- 输出波形发生非常严重的形变
- 无规律

$$e(t)=\int_0^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



- 输入信号矩形函数
- 输出波形发生非常严重的形变
- 无规律



- 输入信号余弦
- 输出波形同频率余弦
- 只是振幅和相位发生变化

在线性时不变系统中
频率是不变的性质

$$A_i \cos(\omega_1 t + \phi_i) \xrightarrow{(\Delta A, \Delta\varphi)|\omega_1} A_o \cos(\omega_1 t + \phi_o)$$

$$\sum_n A_{ni} \cos(\omega_n t + \phi_{ni}) \xrightarrow{(\Delta A, \Delta\varphi)|\omega_n} \sum_n A_{no} \cos(\omega_n t + \phi_{no})$$

如果：1：可以获得系统对任一频率余弦信号的影响规律

2：输入可以表示成不同频率余弦信号的线性组合

则：输出幅度/相位被改变的余弦信号的线性组合

傅里叶的两个主要观点

(1) 周期信号可表示为呈谐波关系余弦信号的加权和

(2) 非周期信号可表示为连续频率余弦信号的加权积分

- 傅立叶级数（积分）：数学
- 频谱：物理

本章内容：

- 周期信号表示为傅里叶级数
- 周期信号的频谱
- 傅里叶变换与非周期信号的频谱
- 傅立叶变换的性质
- 常用信号的频谱函数
- 帕塞瓦尔定理与能量频谱

傅立叶级数的三角和指数形式

- 三角形式

$$1, Cos\Omega t, Cos(2\Omega t), \ldots\ldots, Cos(n\Omega t), \ldots..$$

$$Sin\Omega t, Sin(2\Omega t), \ldots\ldots, Sin(n\Omega t), \ldots..$$

- 指数形式

$$\left\{ e^{jn\Omega t} \right\}_{|n| = 0, 1, 2, \ldots \infty}$$

§3.3 信号表示为付里叶级数

三角函数是一种完备正交函数集，周期信号展开为各三角函数分量的叠加。

Cos0° =1、cosΩt、 cos2Ωt、 …cosnΩt、……

…sinΩt、sin2Ωt、…sinnΩt、…合起来形成一正交函数集。

$$\int_{t_1}^{t_1+T} con^2 n\Omega t dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2 n\Omega t dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \cos m\Omega t \cdot \cos n\Omega dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\Omega t \cdot \sin n\Omega dt = 0$$ **m≠n**

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\Omega t \cdot \cos n\Omega t dt = 0$$ **m、n为任意整数**

其中 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ **为上述三角函数的公共周期，m和n均为正整数。**

§3.3信号表示为傅里叶级数

周期信号 $f(t)$： 周期T 角频率 $\Omega=\dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

a_n系数求解过程如下：

$$f(t)\underline{\cos m\Omega t}=\frac{a_0}{2}\underline{\cos m\Omega t}+\underline{\cos m\Omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$\int_{\mathrm{T}} f(t)\cos m\Omega t dt=\int_{\mathrm{T}}\frac{a_0}{2}\cos m\Omega t dt+\int_{\mathrm{T}}\cos m\Omega t\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)dt$$

$$\int_{\mathrm{T}} f(t)\cos m\Omega t dt=\int_{\mathrm{T}}\frac{a_0}{2}\cos m\Omega t dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\mathrm{T}}\cos m\Omega t(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\right)dt$$

$$\int_T f(t)\cos m\Omega t dt = \int_T \frac{a_0}{2}\cos m\Omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_T \cos m\Omega t(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)\right)dt$$

$$m = 0$$

$$\int_T f(t)dt = \int_T \frac{a_0}{2}dt \qquad \int_T f(t)dt = \frac{\mathrm{T}a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)dt$$

$$m = n$$

$$\int_T f(t)\cos n\Omega t dt = \int_T \frac{a_0}{2}\cos n\Omega t dt + \int_T a_n \cos n\Omega t \cos n\Omega t dt$$ （m=n部分）

$$+\sum_{m\neq n}^{\infty}\left(\int_T \cos m\Omega t(a_n \cos n\Omega\ t + b_n \sin n\Omega\ t)\right)dt$$

$$\int_T f(t)\cos n\Omega t dt = \int_T a_n \cos n\Omega t \cos n\Omega t dt \quad = \frac{T}{2}a_n$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

n取值范围为0到∞的正整数

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Sin(n\Omega t)dt$$

$$\begin{cases}A_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}\\ \varphi_n=-arctg\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

$$\boxed{A_0=a_0}$$

$$\begin{cases}a_n=A_n Cos\,\varphi_n\\ b_n=-A_n Sin\,\varphi_n\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}a_{-n}=a_n\\ A_{-n}=A_n\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}b_{-n}=-b_n\\ \varphi_{-n}=-\varphi_n\end{matrix}\right\}$$

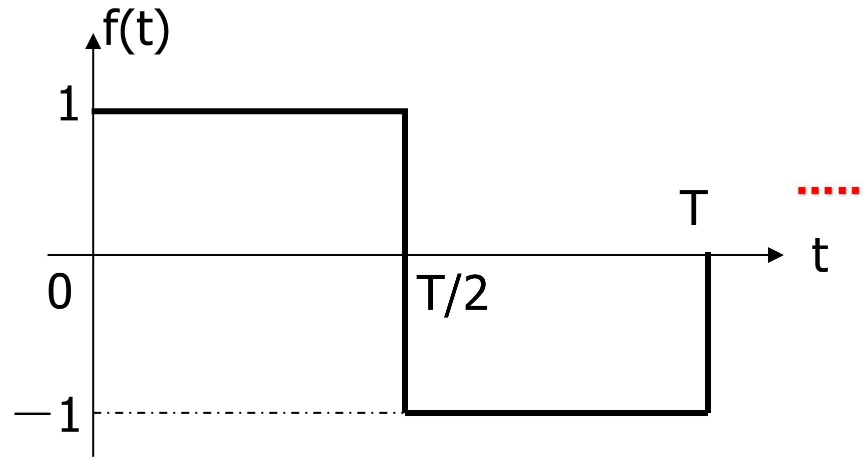
$\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{A_0}{2}$ 直流分量 $\omega=0$

$a_1\cos\Omega t+b_1\sin\Omega t=A_1Cos(\Omega t+\varphi_1)$ 基波分量 $\omega=\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 基波频率

$a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t=A_nCos(n\Omega t+\varphi_n)$ n次谐波 $\omega=n\Omega$ n次谐波频率

周期方波的三角傅里叶级数分解

$$\left.\begin{array}{ll} f(t)=1 & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ f(t)=-1 & \dfrac{T}{2}<t<T \end{array}\right\} \cdots\cdots$$



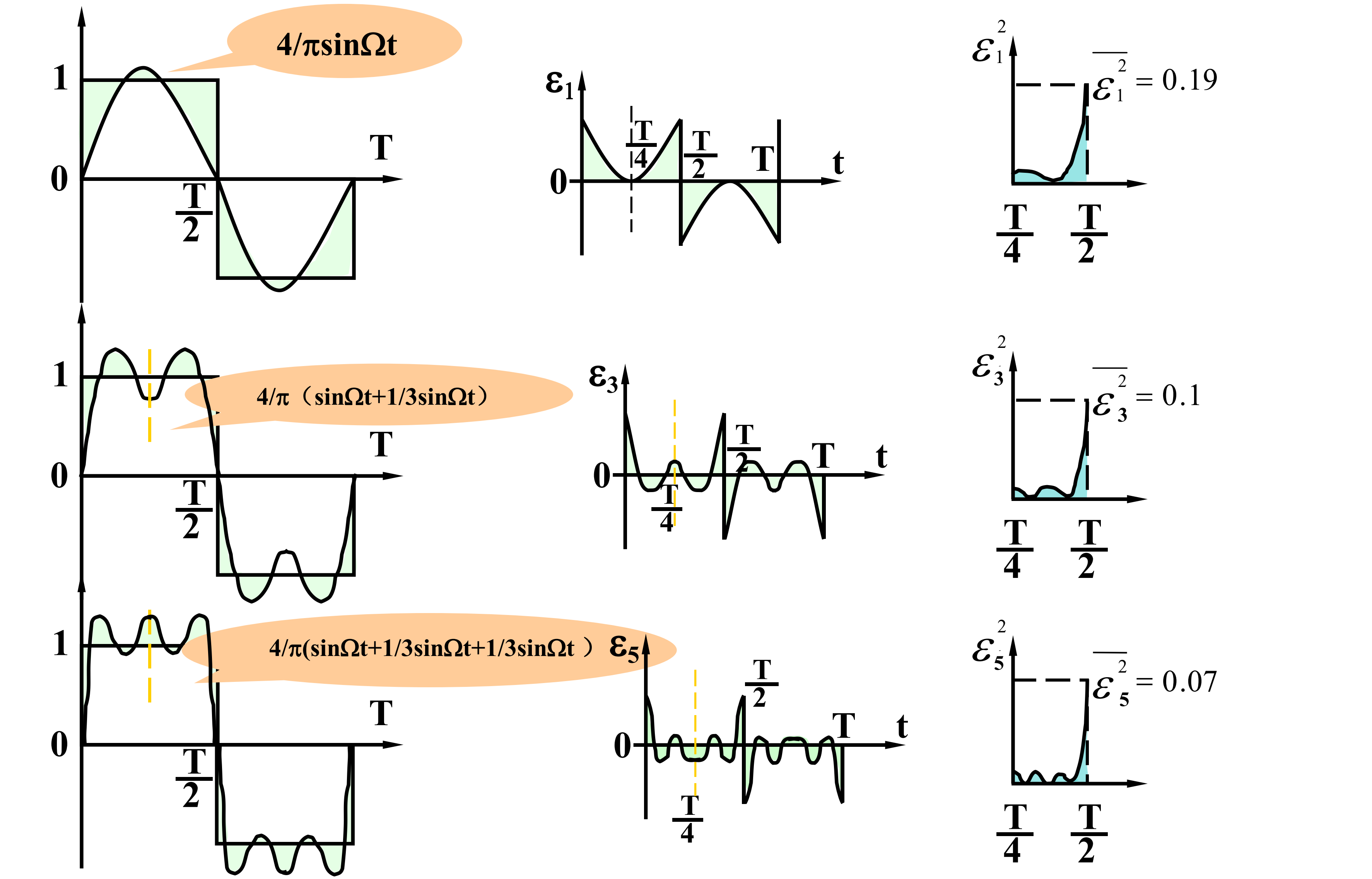
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\Omega t)dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\Omega t)dt=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\ldots \\ 0 & \end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\ldots\right]$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\ldots\right]$$



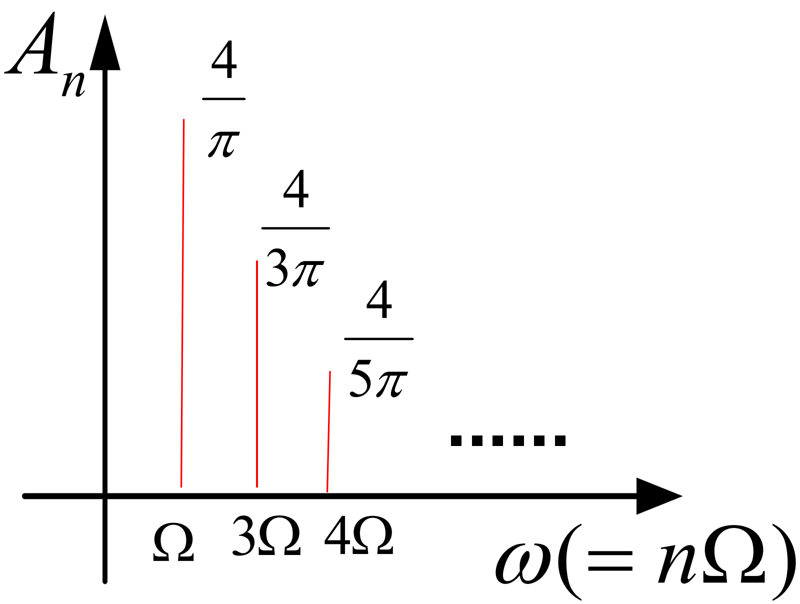
(a)近似函数与原信号的差别　(b)误差函数　(c)误差的平方及均方误差

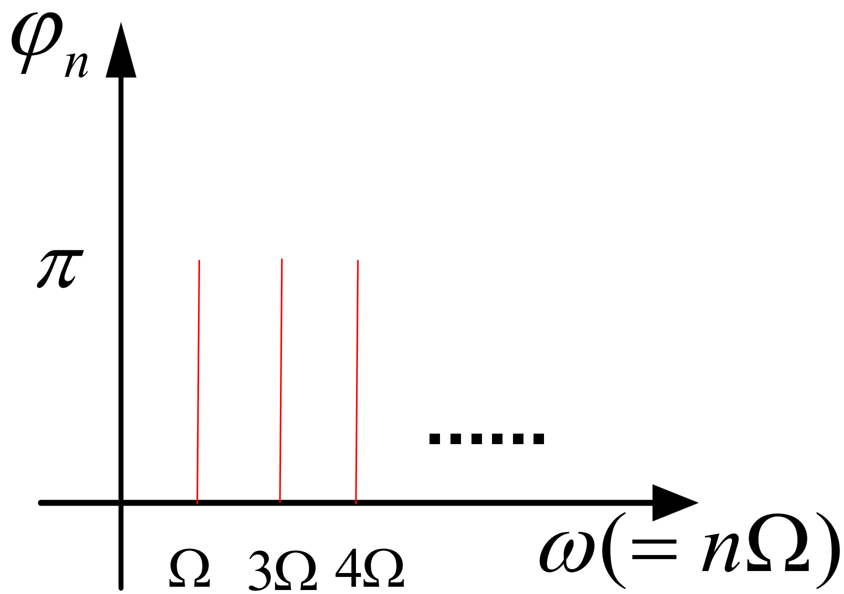
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

各频率分量的振幅：振幅频谱 $A_n \to \omega(=n\Omega)$

各频率分量的相位：相位频谱 $\varphi_n \to \omega(=n\Omega)$

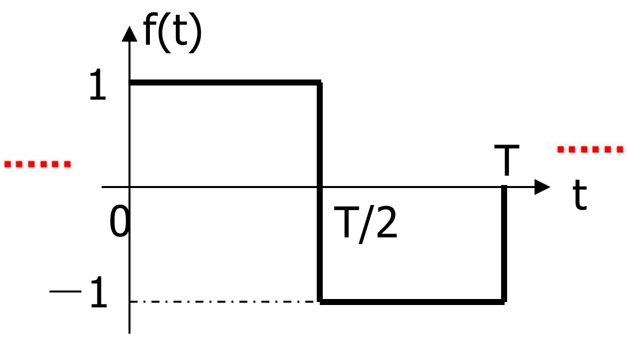
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\ldots\right]$$

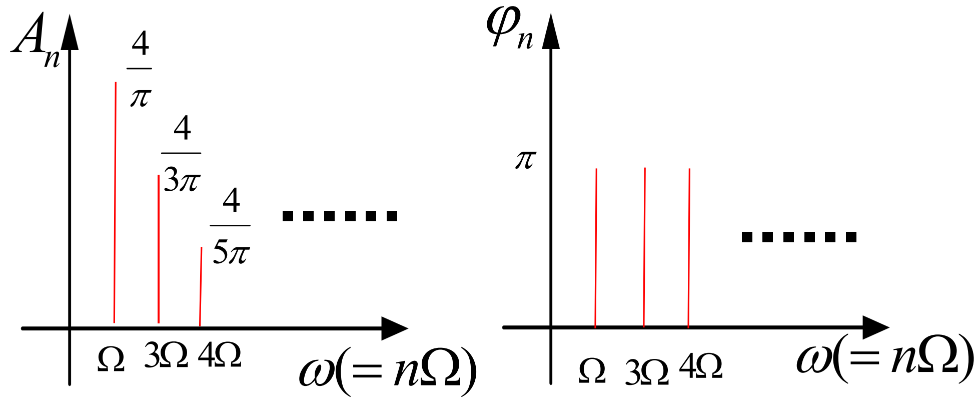




时域

频域





不同时刻的幅度

不同频率分量的幅度和相位

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1 \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ f(t) &= -1 \quad \frac{T}{2} < t < T \end{aligned}\right\}$$

$$A_n \to \omega(= n\Omega)$$

$$\varphi_n \to \omega(= n\Omega)$$

$$A_n Cos\ (n\Omega t + \varphi_n)$$

§3.4 傅里叶级数的收敛

- 连续周期信号用有限项傅里叶级数展开的误差
  - 根据展开表达式，只用前**N**项表示带来的误差

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

  - 一个周期内的误差能量为

$$E_N(t) = \int_T \left|e_N(t)\right|^2 dt, \text{当} a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, E_N(t)\text{最小}$$

    - 随着**N**的增加，误差减少，
    - 如信号能用级数展开表示，**N**趋于无穷大，误差应该为**0**
  - 周期信号能否用傅里叶级数表示的两个因素
    - 计算系数的积分是否收敛？
    - 即使系数都存在，带入到综合公式里是否收敛于原信号？
  - 如何判断周期信号可以用傅里叶级数表示
    - 有两类条件来说明这个问题

§3.4 傅里叶级数的收敛

- 从信号能量分析傅里叶级数的收敛
  - 连续周期信号都能用傅里叶级数表示
  - 不连续的周期信号需要特别讨论
    - 方波脉冲等周期信号在实际中应用广泛，值得讨论
  - 信号的能量，对分析傅里叶级数收敛很有用
    - 如果周期信号在一个周期内能量有限

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt < \infty, \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \text{ 存在}$$

  - 用这些系数构成的有限项傅里叶级数与原信号的误差
    - 误差随**N**增大而减小，**N**趋于无穷大，误差趋近于**0**
    - 表示两者的能量没有差别，但不代表在所有**t**值上相等
  - 结论：
    - 周期信号在周期内的能量有限就能保证傅里叶级数的系数收敛
    - 实际系统都是对能量做出响应，这一结论存在实用价值
    - 大部分周期信号在周期内能量有限，能用傅里叶级数表示

§3.4 傅里叶级数的收敛

- 狄里赫利条件判断傅里叶级数的收敛
  - （1）狄里赫利条件对级数收敛的保证
    - 这组条件保证在信号连续处等于傅里叶级数表示，
    - 在不连续点，傅里叶级数收敛于不连续两边值的平均值
  - （2）狄里赫利条件
    - 条件1：在任何周期内**x(t)**必须绝对可积 $\int_T |x(t)|\,dt < \infty$

      这一条件保证每个傅里叶级数系数的收敛

      $$|a_k| \le \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right| dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|\,dt < \infty$$

      不满足这一条件的函数举例 $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \le 1$
    - 条件2：在任意有限的区间，函数有有限的起伏变化

      即只有有限个最大最小值

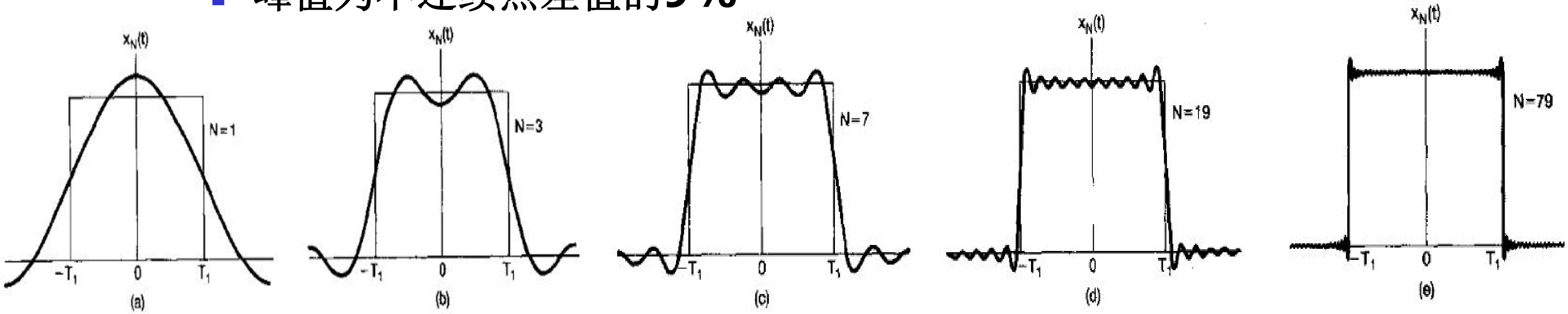
      满足条件1，不满足条件2的函数举例 $x(t) = \sin(\frac{2\pi}{t}), 0 < t \le 1$
    - 条件3：在任意有限的区间，只有有限个不连续点，且其函数值有限

      不满足这一条件的函数举例

      周期为8，后一个阶梯的高度和宽度都是前一个的一半

§3.4 傅里叶级数的收敛

- 关于不连续点的分析
  - 满足狄里赫利条件，保证级数收敛于原信号，只在有限的不连续点上收敛于不连续点的平均值
  - 在不连续点上，傅里叶级数的收敛趋势-吉伯斯现象
    - 不连续点上收敛于不连续点的平均值
    - 不连续点附近呈现起伏现象，起伏的峰值不随**N**增加而降低
    - 峰值为不连续点差值的**9%**



  - 吉伯斯现象的实际意义
    - 不连续信号的傅里叶级数截断近似在接近不连续点有高频起伏
    - 选择足够大的**N**，可以保证这些起伏的总能量可以忽略

图像的频率是表征图像中灰度变化剧烈程度的指标，是灰度在平面空间上的梯度。如：大面积的沙漠在图像中是一片灰度变化缓慢的区域，对应的频率值很低；而对于地表属性变换剧烈的边缘区域在图像中是一片灰度变化剧烈的区域，对应的频率值较高。

傅立叶变换在实际中有非常明显的物理意义，设f是一个能量有限的模拟信号，则其傅立叶变换就表示f的谱。从纯粹的数学意义上看，傅立叶变换是将一个函数转换为一系列周期函数来处理的。从物理效果看，傅立叶变换是将图像从空间域转换到频率域，其逆变换是将图像从频率域转换到空间域。换句话说，傅立叶变换的物理意义是将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数，傅立叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数。

傅立叶变换以前，图像（未压缩的位图）是由对在连续空间（现实空间）上的采样得到一系列点的集合，我们习惯用一个二维矩阵表示空间上各点，则图像可由z=f(x,y)来表示。由于空间是三维的，图像是二维的，因此空间中物体在另一个维度上的关系就由梯度来表示，这样我们可以通过观察图像得知物体在三维空间中的对应关系。为什么要提梯度？因为实际上对图像进行二维傅立叶变换得到频谱图，就是图像梯度的分布图，当然频谱图上的各点与图像上各点并不存在一一对应的关系，即使在不移频的情况下也是没有。

傅立叶频谱图上我们看到的明暗不一的亮点，实际上图像上某一点与邻域点差异的强弱，即梯度的大小，也即该点的频率的大小（可以这么理解，图像中的低频部分指低梯度的点，高频部分相反）。一般来讲，梯度大则该点的亮度强，否则该点亮度弱。这样通过观察傅立叶变换后的频谱图，也叫功率图，我们首先就可以看出，图像的能量分布，如果频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的（因为各点与邻域差异都不大，梯度相对较小），反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大的。对频谱移频到原点以后，可以看出图像的频率分布是以原点为圆心，对称分布的。将频谱移频到圆心除了可以清晰地看出图像频率分布以外，还有一个好处，它可以分离出有周期性规律的干扰信号，比如正弦干扰，一副带有正弦干扰，移频到原点的频谱图上可以看出除了中心以外还存在以某一点为中心，对称分布的亮点集合，这个集合就是干扰噪音产生的，这时可以很直观的通过在该位置放置带阻滤波器消除干扰。

在分析图像信号的频率特性时，对于一幅图像，直流分量表示预想的平均灰度，低频分量代表了大面积背景区域和缓慢变化部分，高频部分代表了它的边缘，细节，跳跃部分以及颗粒噪声

- 截取频率的低频分量，对其作傅立叶反变换，得到的就是模糊后的图像
- 截取频率的高频分量，对其作傅立叶反变换，得到的就是锐化后的图像

§3.3信号表示为傅里叶级数

- **2、周期信号表示为指数傅里叶级数**

$$\left\{e^{jn\Omega t}\right\}_{|n|=0,1,2,\ldots,\infty}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T}(e^{jn\Omega t})(e^{jn\Omega t})^* dt = \mathrm{T}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T}(e^{jn\Omega t})(e^{j\mathrm{m}\Omega t})^* dt = 0 \quad \mathrm{m} \neq \mathrm{n}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

周期信号$f(t)$： 周期 T 角频率 $\Omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$$

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)(e^{jn\Omega t})^* dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\Omega t}(e^{jn\Omega t})^* dt}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$\begin{cases} Cos\ \theta = \dfrac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ Sin\ \theta = \dfrac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{j\theta} = Cos\theta + jSin\theta \\ e^{-j\theta} = Cos\theta - jSin\theta \end{cases}$$

即<+> <−>指数项 $\Leftrightarrow$ 余弦波

于是 $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n Cos(n\Omega t) + b_n Sin(n\Omega t)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n}{2}(e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}) + \frac{b_n}{2j}(e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t})]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\Omega t}]$$

$$\frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}A_n(Cos\ \varphi_n + jSin\ \varphi_n) = \frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}\dot{A}_n$$

$$\frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}A_n(Cos\ \varphi_n - jSin\ \varphi_n) = \frac{1}{2}A_{-n} e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2}\dot{A}_{-n}$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\dot{A}_n e^{jn\Omega t}+\dot{A}_{-n}e^{-jn\Omega t}]=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}$$

$$f(t)=C_0+C_1e^{j\Omega t}+C_2e^{j2\Omega t}+\cdots+C_1e^{-j\Omega t}+C_2e^{-j2\Omega t}+\cdots$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$-n\Omega$ 并不代表负频率，各正、负指数项组成一个余弦（或正弦）波

$$\dot{A}_n=A_n e^{j\varphi_n}=2C_n \qquad C_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

复数振幅

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Sin(n\Omega t)dt$$

$$\begin{cases}A_n=\sqrt{a_n^{\,2}+b_n^{\,2}}\\ \varphi_n=-arctg\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

$$\boxed{A_0=a_0}$$

$$\begin{cases}a_n=A_n Cos\,\varphi_n\\ b_n=-A_n Sin\,\varphi_n\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}a_{-n}&=a_n\\ A_{-n}&=A_n\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}b_{-n}&=-b_n\\ \varphi_{-n}&=-\varphi_n\end{aligned}\right\}$$

分析

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}$$

综合

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

针对给定的信号分析其傅里叶系数(分量幅度和相位)

利用给定的傅里叶系数(分量幅度和相位)重建信号

§3.3信号表示为傅里叶级数

- 几点说明
  - 指数级数的负数项
    - 三角级数系数通过欧拉公式展开带来的数学表示
    - 没有具体物理意义（三角级数物理意义更直接）
  - 正交函数的范畴
    - 正交指数函数集中，**n**取值区间扩展到负数
    - 正交三角函数集中，**n**取值只能式整数范围
  - 函数可分解的区间
    - 正交傅里叶函数集构成的是以基波周期为周期的函数
    - 任意周期为**T**的函数，在（**t1,t1+T**）中分解为傅里叶正交函数表示，其结果可以拓展到全部函数定义范围

周期冲击序列的傅里叶级数

傅里叶级数的时间位移性质

延迟 $t_0: f(t-t_0)$则复系数为$C_n e^{-jn\Omega t_0}$

证明： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$

$$f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega(t-t_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\Omega t_0} \bullet e^{jn\Omega t}$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(n\Omega(t-t_0)+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(n\Omega t+(\varphi_n-n\Omega t_0))$$

说明：时间上延迟t_0对应于谐波分量的相位滞后$n\Omega t_0$

指数信号与正弦信号

■ 周期复指数和正弦信号

$$(1)\,f(t)=Ce^{j\omega_0 t}\qquad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

C可以是复数

一个周期的总能量 $E_{period}=\int_0^{T_0}\left|Ce^{j\omega_0 t}\right|^2 dt=C^2T_0$

一个周期平均功率 $P_{period}=\frac{E_{period}}{T_0}=C^2$

$$(2)\,f(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$$

A实数

$$=\frac{A}{2}(e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)})$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2 dt=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)dt=\frac{A^2}{2}$$

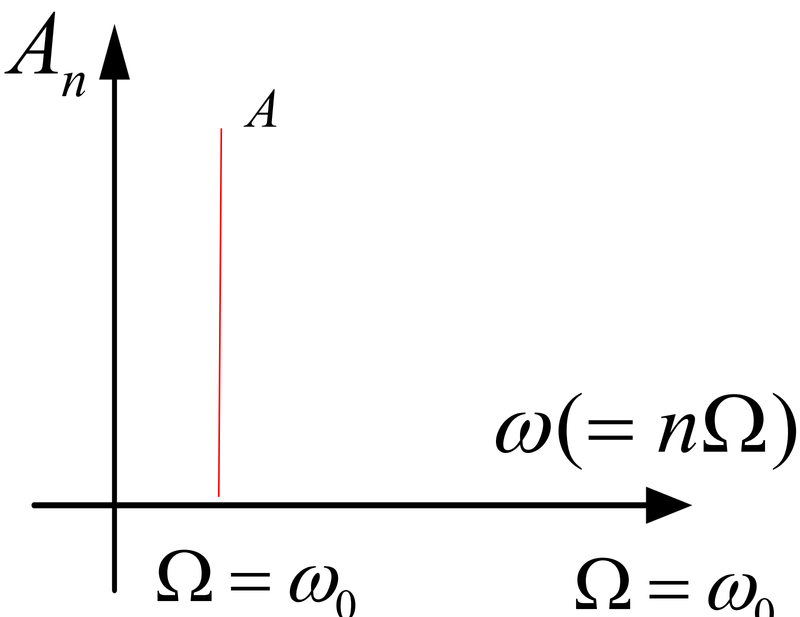
双边频谱

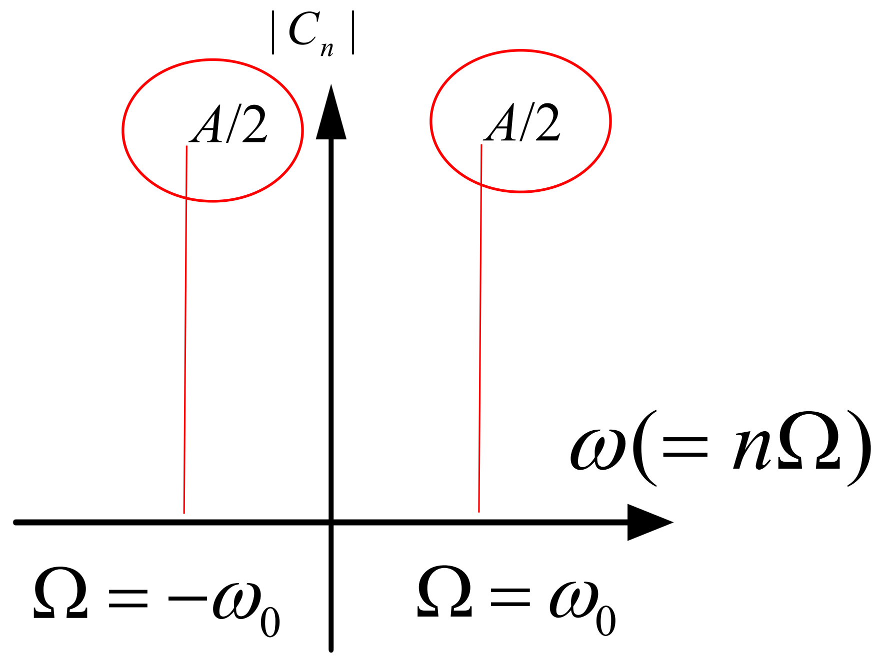
$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \quad = \frac{A}{2}(e^{j(\omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\omega_0 t+\theta)})$$

三角傅里叶级数

$$= \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t}$$

指数傅里叶级数



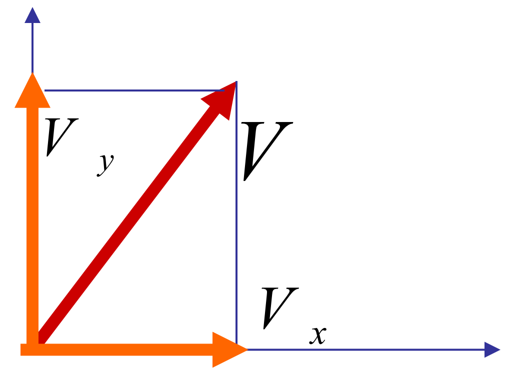


§3.3信号表示为傅里叶级数

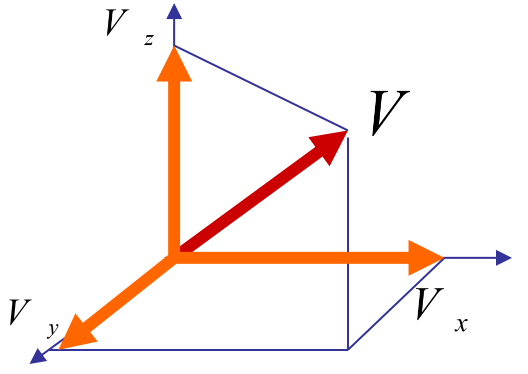
- 几点说明
  - 指数级数的负数项
    - 三角级数系数通过欧拉公式展开带来的数学表示
    - 没有具体物理意义（三角级数物理意义更直接）
  - 正交函数的范畴
    - 正交指数函数集中，**n**取值区间扩展到负数
    - 正交三角函数集中，**n**取值只能式整数范围
  - 函数可分解的区间
    - 正交傅里叶函数集构成的是以基波周期为周期的函数
    - 任意周期为**T**的函数，在（**t1,t1+T**）中分解为傅里叶正交函数表示，其结果可以拓展到全部函数定义范围

- 正交矢量空间
- 空间可以由正交矢量来定义
- 空间内的矢量可以通过分解到正交矢量方向的分量表示
- 要能对空间内任一矢量唯一分解，需要正交矢量集具有完备性
- 正交矢量集的数学定义
  - 集内不同矢量的点积为**0**
- 归一化正交矢量集
  - 矢量的模等于*1*

$$V = V_x + V_y$$



$$V = V_x + V_y + V_z$$



本讲小结

- 函数分解与正交函数集
  - 矢量分解与正交矢量空间
  - 正交函数集的定义,正交函数集的完备性
  - 函数在正交函数集的分解
  - 复变正交函数集的定义
  - 三角、指数函数集构成正交函数集
- 信号表示为傅立叶级数
  - 三角傅立叶级数，
  - 信号表示为三角傅立叶级数的分量表示
  - 信号可表示为傅立叶级数的条件
  - 指数傅立叶级数，复振幅系数，以及与三角级数系数的关系
  - 关于信号用傅立叶级数表示的几点说明
    - 物理意义、正交函数集的范畴、被表达函数的周期性

信号与线性系统