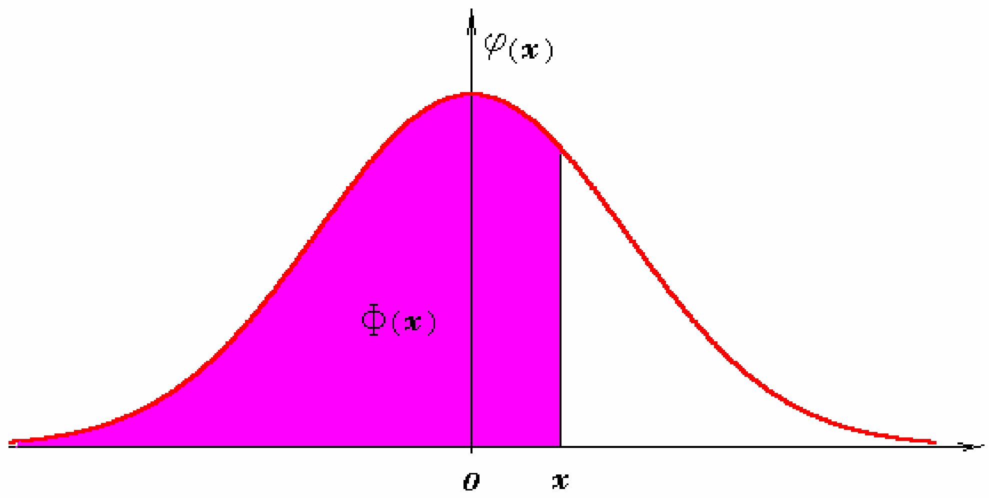
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

第五章　随机变量的极限

5.1　问题的提出

1）X_1，X_2，…，X_n为多次“测量”，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \text{（真值）}$$ 合理吗?

2）$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim$ ？

思路：$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$ 与 $\sum_{k=0}^{100}\frac{1}{k!}$ 谁更易算?

$$\sum_{k=0}^{100}\frac{1}{k!} \approx \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{x^n}{n!}\right|_{x=1} = \left.e^x\right|_{x=1} \approx 2.718$$

5.2 切比雪夫чебышев不等式（P_{67}定理4.4）

设R.V.X 有$\boldsymbol{E(X)=\mu}$，$\boldsymbol{D(X)}=\sigma^2$，则对任何$\varepsilon>0$有

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明 仅对 C.R.V.X 证明，设 $\boldsymbol{f(x)}$为$\boldsymbol{X}$ 的密度函数，则

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

5.3 大数定律（0-1律）

记 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，若 $\forall\, \varepsilon > 0$ 有 $\lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| < \varepsilon) = 1$

则称$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$服从大数定律。

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，且$E(X_n)=\mu$，$D(X_n)=\sigma^2$存在，则

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu\,,\quad D(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$1 \geq P(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

贝努利（Bernoulli）大数定律（P_{90}定理5.3）

设μ_n为n重贝努利试验中A发生的次数，且$P(A)=p$，则对任何$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

证明： 由题意 记$X_i \sim B(1, p)$, $i=1,2,\ldots$，相互独立，则

$$E(X_i)=p,\ D(X_i)=p(1-p),\quad \frac{\mu_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}_n$$

意义： 频率$\dfrac{\mu_n}{n}$趋于概率p

随机模拟演示

几个著名的大数定律

名　称	条　　件	结　　论
马尔科夫	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=0$	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)\rvert<\varepsilon)=1$
切比雪夫	$Cov(X_i, X_j)=0$，$i\neq j$， 且$D(X_n)<C$（有界）	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)\rvert<\varepsilon)=1$
伯 努 利	$\mu_n\sim B(n,p)$	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\left\lvert\frac{\mu_n}{n}-p\right\rvert<\varepsilon)=1$
辛　钦	$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_n,\ldots$ 独立同分布，且 $E(\boldsymbol{X}_n)=\mu$ (有限)	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\overline{X}_n-\mu\rvert<\varepsilon)=1$

$\{\overline{X}_n\}$依概率收敛于μ

例1（P_{90}例5.1） 设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量序列，且

$P\{X_n=\pm\sqrt{n}\} = 1/n$， $P\{X_n=0\} = 1-2/n$，$n=2,3,\ldots$

证明$\{X_n\}$服从大数定律。

证明 $$E X_n = 0\times(1-\frac{2}{n})+\sqrt{n}\times\frac{1}{n}+(-\sqrt{n})\times\frac{1}{n} = 0$$

$$D X_n = E X_n^2-[E X_n]^2 = 0^2\times(1-\frac{2}{n})+n\times\frac{1}{n}+n\times\frac{1}{n}=2$$

即$\{X_n\}$满足切比雪夫大数定律的条件，故$\{X_n\}$服从大数定律，即

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1}X_n \xrightarrow{P} 0$$

概率统计实验讲座

为了帮助同学们更好地掌握和应用《概率论与数理统计》理论方法，本课程组特安排**概率统计实验讲座**：

内　容：Matlab和Excel使用的基本方法及其在概率论与数理统计实验中的应用

时　间	地　点	主讲人
本月6日（周六）9~12节	西五楼217教室	周晓阳　教授
7日（周日）5~8节	西五楼217教室	周晓阳　教授
13日（周六）5~8节	西五楼417教室	叶鹰　副教授
14日（周日）5~8节	西五楼217教室	叶鹰　副教授

2009年6月5日

5.4　中心极限定理

独立同分布的中心极限定理(P_{92}定理5.4)

设$\{X_n, n=1,2,\ldots\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\ldots$，设标准化随机变量

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数为$F_n(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)$$

称 Y_n **依分布收敛于** $X\sim N(0,1)$.

随机模拟演示

德莫佛·拉普拉斯(De Moivre-Laplace)中心极限定理

(P93定理5.5)

设 $Y_n \sim B(n, p)$，$n=1,2,\ldots$，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

证明： 取 $X_i \sim B(1, p)$，$i=1,2,\ldots$，相互独立，则 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

而$E(X_i)=p$，$D(X_i)=p(1-p)$，由独立同分布的中心极限定理即得。

应用： $Y_n \sim B(n, p)$，当n充分大时

$$P(a < Y_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

例1 已知一批同型号的电子元件，次品率为1/6，试以99%的把握断定：从这批电子元件中任取6000只，其中次品所占的比例与1/6之差的绝对值不超过多少？这时6000电子元件中，次品数又落在一个什么范围内？

解 记X为6000只电子元件中的次品数，则$X\sim B(6000, 1/6)$，要求 ε 使

$$0.99 = P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right| \le \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{X-6000\times\frac{1}{6}}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}\right| \le \frac{\varepsilon 6000}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}\right)$$

$$\approx 2\Phi\left(\varepsilon\frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{6000}\right)-1 \Rightarrow \Phi\left(\varepsilon\times 60\sqrt{\frac{60}{5}}\right)=\frac{1.99}{2}=0.995$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2.576\times\frac{1}{60\sqrt{12}}=0.01239 \qquad \left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right| < 0.01239$$

$$926 < X < 1074$$

例2（P_{97}例5.6）设有某天文学家试图观测某星球与他所在天文台的距离D，他计划作出 n 次独立的观测$X_1, X_2, \ldots, X_n$ (单位：光年)，设这 n 次独立的观测的期望 EX_i=D，方差DX_i=4，i=1,2,…,n，现天文学家用$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$作为D的估计，为使对D的估计的精度在±0.25光年之间的概率大于0.98，问这位天文学家至少要作出多少次独立的观测?

解　当n充分大时　$\dfrac{\bar{X}-D}{\sqrt{4/n}} \sim N(0,1)$

$$0.98 < P(\left|\bar{X}-D\right| \le 0.25) = P(\left|\frac{\bar{X}-D}{2/\sqrt{n}}\right| \le \frac{0.25}{2}\sqrt{n}) \approx 2\Phi(\frac{0.25}{2}\sqrt{n})-1$$

$$\Phi(\frac{0.25}{2}\sqrt{n}) > \frac{1.98}{2} = 0.99 \Rightarrow 0.125\sqrt{n} > 2.3264 \Rightarrow n > 346.376765$$

故这位天文学家至少要作出347次独立的观测。

习题选讲

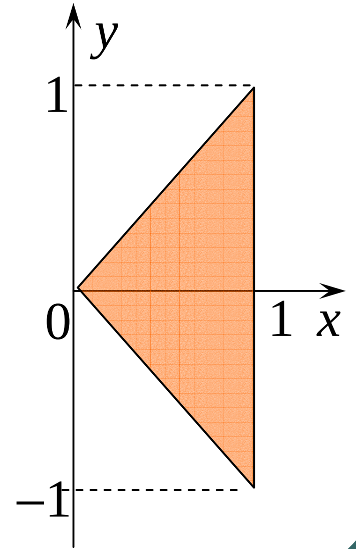
练习10.3 设二维随机变量(X,Y)具有下列联合密度函数为试求边缘密度函数:

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,-x<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{3}{2}x\,dy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{|y|}^{1}\frac{3}{2}x\,dx=\frac{3}{4}(1-y^2), & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



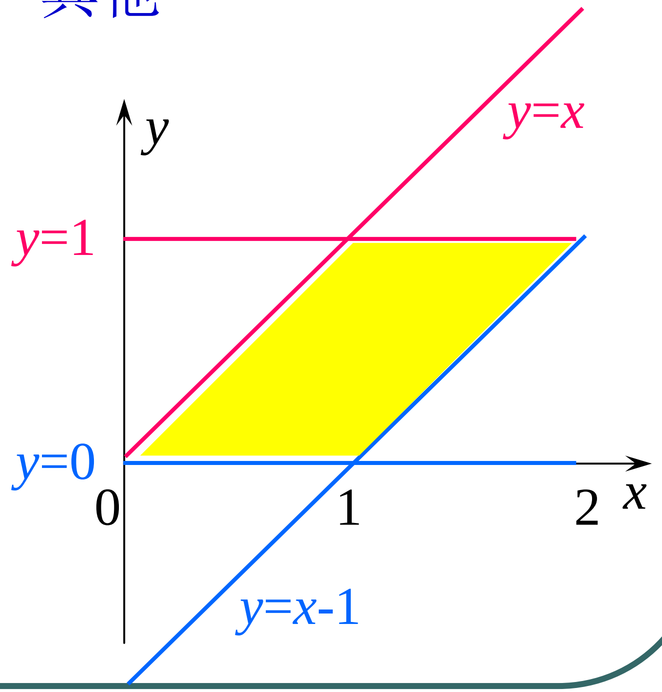
习题选讲

练习10.3 设二维随机变量(X,Y)具有下列联合密度函数为试求边缘密度函数:

$$(2)\quad f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2,\ \max\{0,x-1\}\le y\le \min\{1,x\},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x dy=x, & 0\le x\le 1,\\ \int_{x-1}^1 dy=2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{y+1} dx=1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

习题选讲

练习12.4 从一大批产品中逐个随机抽取检查，一旦发现废品就认为该批产品不合格而停止检查，若抽查到第n_0件仍未发现废品就认为该批产品合格而停止检查。设产品的废品率为p，问平均要检查多少件产品？

解 设X为所检查产品的件数，则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,\cdots,n_0-1$$

$$P(X=n_0)=(1-p)^{n_0-1}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n_0-1}k(1-p)^{k-1}p+n_0(1-p)^{n_0-1}$$

$$=p(\sum_{k=1}^{n_0-1}q^k)'+n_0q^{n_0-1}=p(\frac{1-q^{n_0}}{1-q}-1)'+n_0q^{n_0-1}$$

$$=\frac{1-(1-p)^{n_0}}{p}$$

习题选讲

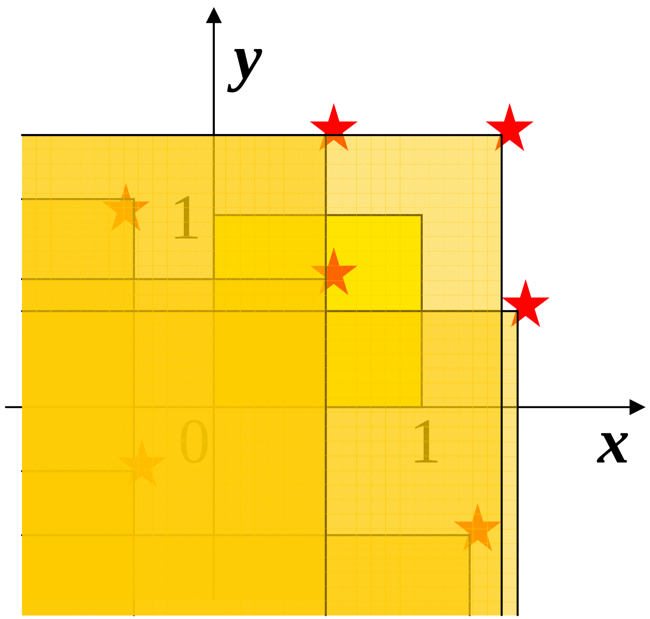
练习9.3 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布函数。

解

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0\\ x^2y^2, & 0<x,y<1\\ y^2, & x>1, 0<y<1\\ x^2, & 0<x<1, y>1\\ 1, & x>1, y>1\end{cases}$$



习题选讲

练习8.5 设楼房有六层，每个乘电梯的人在2,3,4,5,6层下的概率分别为0.08，0.14，0.20，0.26，0.32，试求在一楼乘上电梯的15人中，恰好有1,2,3,4,5人分别在2,3,4,5,6层下电梯的概率P。

解 记X_i为在第i层下电梯的人数，i=2,3,4,5,6，则

$$P(X_2=1, X_3=2, X_4=3, X_5=4, X_6=5) \quad =0.073$$

$$= C_{15}^1 C_{14}^2 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5 \ 0.08^1\, 0.14^2\, 0.20^3 0.26^4\, 0.32^5$$

$$P = C_{15}^1 0.08 \cdot 0.92^{14} \times C_{14}^2 \left(\frac{0.14}{0.92}\right)^2 \left(\frac{0.78}{0.92}\right)^{12} \times C_{12}^3 \left(\frac{0.20}{0.78}\right)^3 \left(\frac{0.58}{0.78}\right)^9$$

$$\times C_9^4 \left(\frac{0.26}{0.58}\right)^4 \left(\frac{0.32}{0.58}\right)^5 \times \left(\frac{0.32}{0.32}\right)^5$$