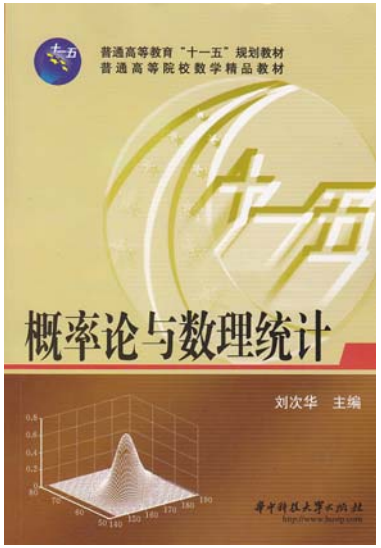
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

第二章 随机变量及其分布

§2.1 随机变量及其分布函数

2.1.1 随机变量

例子： E_1~掷骰子—— X：1，2，3，4，5，6

E_2~观察寿命——X：$[0,\ \infty]$

E_3~抛硬币—— X：0，1 $\Leftrightarrow$ Ω={反面，正面}

E_4~摸奖——Ω={空调，彩电，饮水器，香皂}

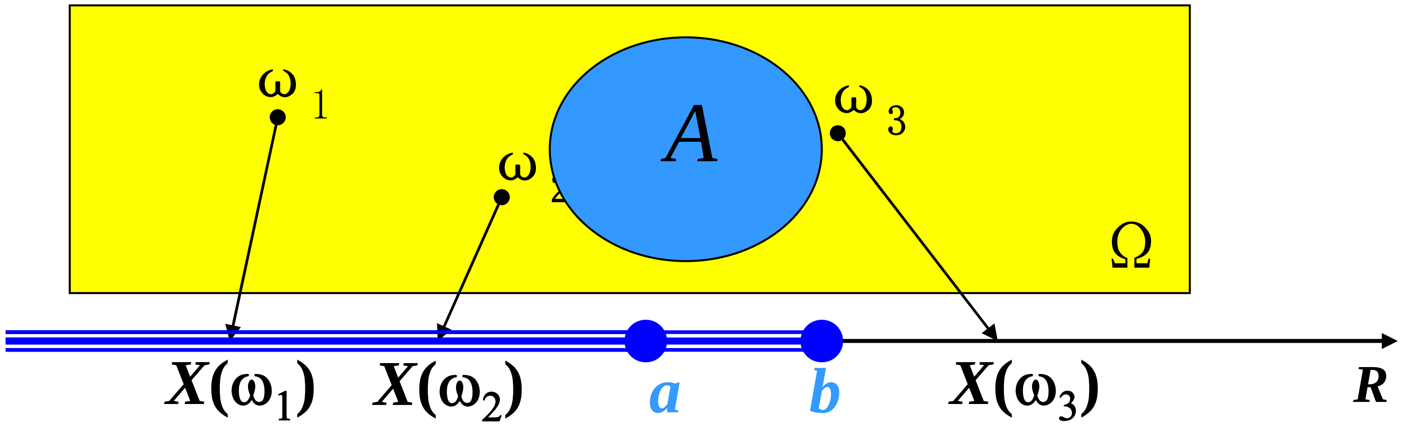
X：5000， 2500， 500， 3，

X 的特点：(1)是变量；(2)取值取决于ω，从而带有概率

定义1 设E为随机试验，Ω为其样本空间，$\mathscr{F}$为事件域，若Ω上的实函数 $X(\omega)$ 满足：

$$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in \mathscr{F}, \ \square \ x\in R$$

则称$X(\omega)$为**随机变量**，记为R.V.(Random Variable)。



$$P(A)=P(a<X\leqslant b)=P(\{-\infty<X\leqslant b\}-\{-\infty<X\leqslant a\})$$

$$=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a)$$

2.1.2 分布函数

定义 设X为随机变量，称实函数

$$F(x)=P(X\leqslant x),\quad -\infty<x<\infty$$

为随机变量X的**分布函数**，记为cdf。

性质

（1）有界性：$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

（2）单调(不减)性：$x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)\leqslant F(x_2)$

（3）右连续性： $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(a)$

证明：（1）$\because F(x)=P(X\leqslant x)$ $\therefore 0\leqslant F(x)\leqslant 1$

且$F(-\infty)=P(X\leqslant-\infty)=P(\varnothing)=0$，$F(+\infty)=P(X\leqslant+\infty)=P(\Omega)=1$

（2）$F(x_2)-F(x_1)=P(X\leqslant x_2)-P(X\leqslant x_1)=P(x_1<X\leqslant x_2)\geqslant 0$

（3）略。

注：$F(x)$是分布函数 $\Longleftrightarrow$ $F(x)$满足(1)、(2)、(3)

§2.2 离散型随机变量

2.2.1 定义

仅取有限或可列无限个值的随机变量称为**离散型随机变量**。记为D.R.V.(Discrete Random Variable).

2.2.2 概率分布

分布律： $P(X=x_i)=p_i$ ， $i=1,2,\ldots$

分布列：

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

2.2.3 性质

（1）非负性：$p_i\geqslant 0$； （2）规范性：$\Sigma_i\, p_i=1$

例1 记 X 为抛两枚硬币所出现的正面数，求 X 的分布律、分布列、分布函数以及 X 分别在区间(0, 3/2]、[1, 3/2]和(1, 3/2)的概率。

解 (1)分布列:

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

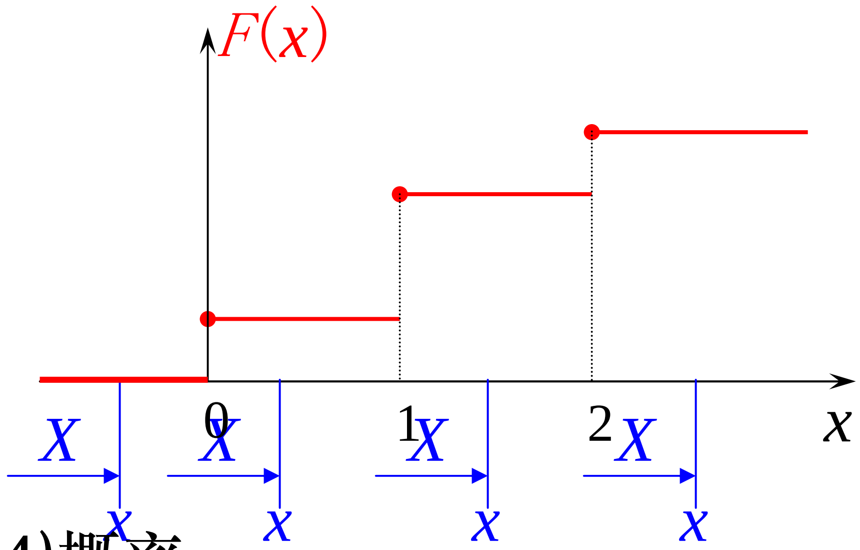
(2)分布律:

$$P(X=k) = C_2^k \frac{1}{4} \quad k = 0,1,2$$

(3)分布函数:

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 3/4, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$



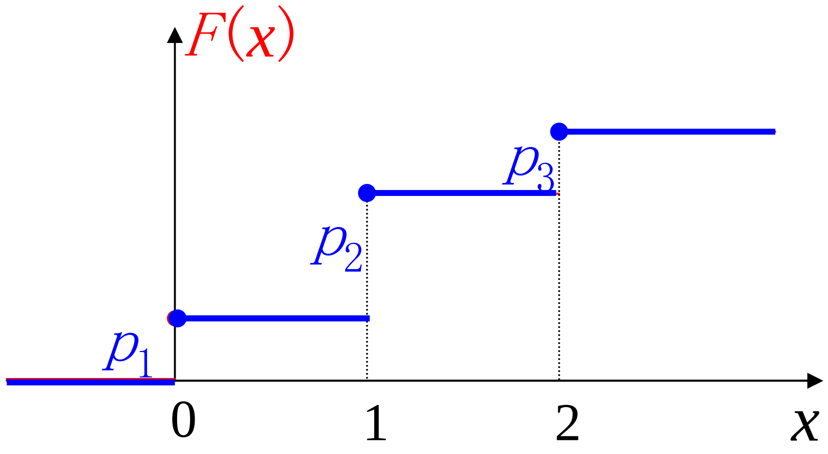
(4)概率:

$$P(0 < X \leqslant 3/2) = P(X = 1) = 1/2$$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3/2) = P(X = 1) = 1/2$$

$$P(1 < X < 3/2) = P(\varnothing) = 0$$

$$F(x)=\sum_{x_i\leqslant x} p_i$$



$$P(0<X\leqslant 3/2)=P(X=1)=1/2 \overset{or}{=} F(3/2)-F(0)=¾-¼$$

$$P(1\leqslant X\leqslant 3/2)=P(X=1)=1/2 \overset{or}{=} F(3/2)-F(1)+\mathrm{P}(X=1)$$

$$=¾-¾+½$$

$$P(1<X<3/2)=P(\varnothing)=0 \overset{or}{=} F(3/2)-F(1)-\mathrm{P}(X=3/2)$$

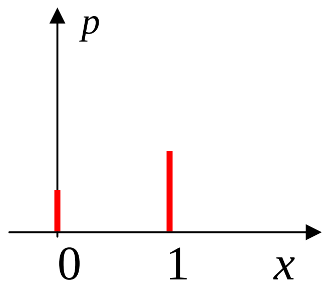
$$=¾-¾-0$$

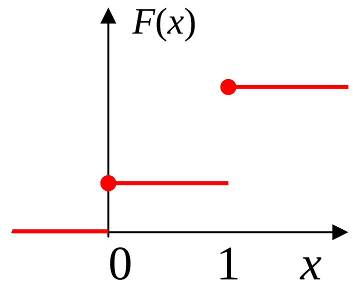
思考题：试用分布函数$F(x)$表示概率 $P(X=a)$。

2.2.4 常见 D.R.V.的分布

1.两点分布 （0–1分布）

X	0	1
P	$1-p$	p





2.二项分布

***n*重贝努利（Bernoulli）试验:**

(1)每次仅有A_i或$\overline{A}_i$两个结果，且$P(A_i)=p$， $i=1,2,\ldots,n$；

(2) $A_1, A_2,\ldots, A_n$相互独立。

$X\sim$ n重贝努利试验中A发生的次数。

n=3时

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$$

$$=3p(1-p)^2$$

一般，若随机变量X的分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

则称X服从参数为n,p的二项分布，记为 **$X\sim B(n,p)$**.

注意到 $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1$$

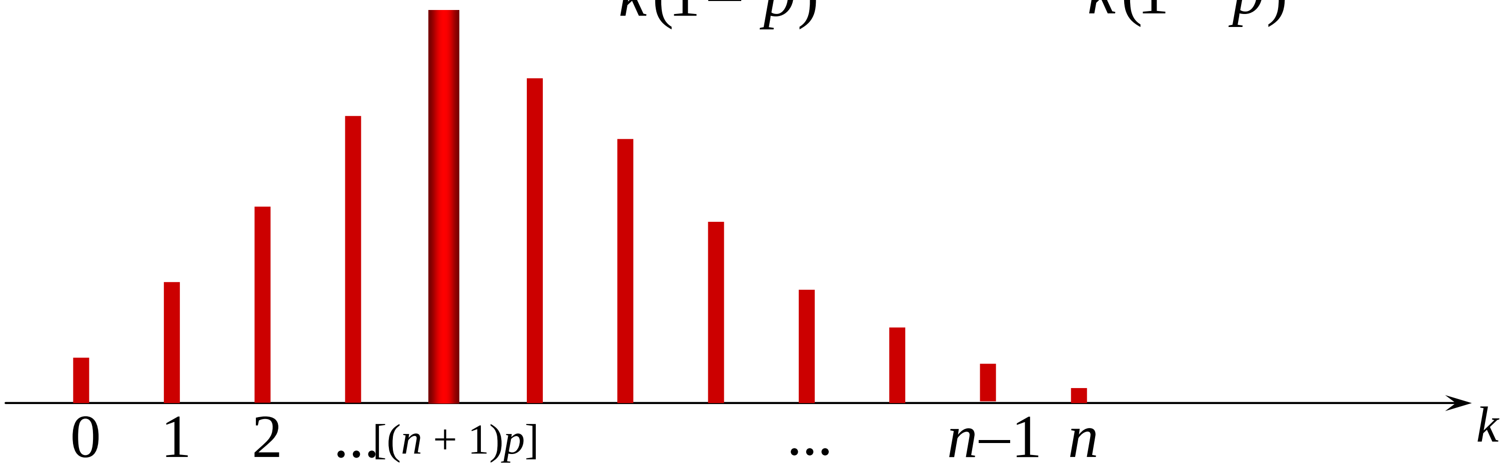
定理(二项分布的**众数**) 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 则

$$P(X = [(n+1)p]) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \{P(X = k)\}$$

其中$[(n+1)p]$为$(n+1)p$的整数部分。

证明 $$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_k^n p^k (1-p)^{n-k}}{C_{k-1}^n p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}}$$

$$= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}$$



例1(P$_{43}$例2.4)　设有一决策系统，其中每个成员作出决策互不影响，且每个成员作出正确决策的概率均为$p(0<p<1)$。当占半数以上的成员作出正确决策时，系统作出正确决策。问p多大时，5个成员的决策系统比3个成员的决策系统更为可靠?

解　记X_n为n个成员的决策系统中，作出正确决策的成员数。则

$$X_5 \sim B(5, p) \qquad P(X_5 \geqslant 3) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + p^5$$

$$X_3 \sim B(5, p) \qquad P(X_3 \geqslant 2) = C_3^2 p^2 (1-p) + p^3$$

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + p^5 > C_3^2 p^2 (1-p) + p^3$$

$$\Leftrightarrow \quad p > 1/2$$

例2(P_{19}例2.4) 设每台自动机床在运行过程中需要维修的概率均为$p = 0.01$, 并且各机床需要维修相互独立, 如果

(1) 每名维修工人负责看管20台机床;

(2) 3名维修工人共同看管80台机床,

求不能及时维修的概率.

解: 设X为需要维修的机床数，则

(1) $X \sim B(20，0.01)$,

$$P(X > 1) = 1 - 0.99^{20} - 20 \times 0.01 \times 0.99^{19} \approx 0.0169 .$$

(2) $X \sim B(80，0.01)$,

$$P(X > 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} \times 0.01^{k} \times 0.99^{80-k} \approx 0.0087 .$$

习题选讲

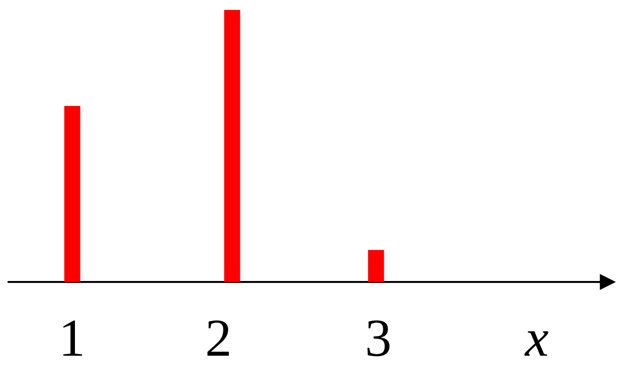
习题1.10 设有3个人4种就业机会，每人可随机选取任一个就业机会，求各个就业机会最多有1人、2人、3人选择的概率各是多少?

解 记X为选择人数最多的就业机会所含的人数，则

$$P(X=1)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^2\times3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$



习题选讲

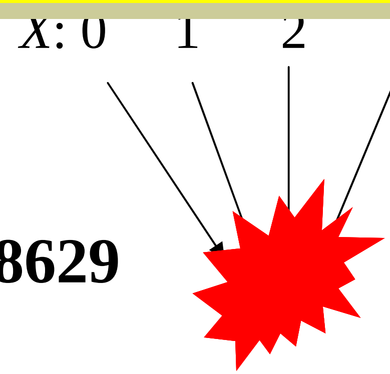
导弹问题　设某种导弹的命中率为99%，但过期后便只有5%。又设某目标被击中三枚导弹方可摧毁。现从混有4枚过期导弹的100枚导弹中任取3枚独立地向目标发射，求目标被摧毁的概率。

解　记X为取出的3枚导弹中含的过期导弹数，B={目标被摧毁}，则

$$P(X=k)=\frac{C_4^k C_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}\qquad k=0,1,2,3\qquad \text{超几何分布}$$

$$P(B)=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(B\mid X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\frac{C_4^k C_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}\times 0.05^k\times 0.99^{3-k}\quad =\mathbf{0.8629}$$



思考题

问题1:若目标已被击毁,发射的三枚导弹均为未过期导弹的概率为多大?

问题2:若记A_i为第i枚导弹击中目标,i=1,2,3，则本问题所求概率是否为 $P(B)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$?

问题3:若有两枚或一枚导弹击中目标也能以非零概率击毁目标,本问题的解又会怎样?

问题4:试写出超几何分布的一般表达式，并将它与二项分布比较。