样条的魔力（下）：样条表示

华中科技大学软件学院　万琳

提纲

1. 样条描述方法
2. 实例：Bezier曲线和曲面

1

样条描述方法

曲线描述：

给定多项式的阶和控制点位置后，给出一条具体的样条表达式有三个等价方法：

（1）列出一组加在样条上的边界条件

（2）列出描述样条特征的行列式

（3）列出一组混合函数或基函数（blending functions or basic functions），确定如何组合指定的曲线几何约束，以计算曲线路径上的位置。

1 样条描述方法

第一种形式：

假设沿样条路径有下列关于坐标的三次参数多项式表达式：

$x(u)=a_x u^3+ b_x u^2 + c_x u^1 + d_x \qquad 0 \le u \le 1$

该曲线的边界条件可以设为端点坐标x(0)和x(1)及端点处的一次导数x′(0)和x′(1)这四个是确定a_x、b_x、c_x、d_x值的充分条件。

1 样条描述方法

第二种形式：

从边界条件中，通过将方程重写为矩形乘积形式，可以得到描述这个样条曲线的矩阵：

$$x(u)=[u^3\ \ u^2\ \ u^1\ \ 1]\begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}=U\cdot C$$

其中，U是参数u的幂次行矩阵，C是系数列矩阵。

1 样条描述方法

第二种形式：

运用方程，就可以写出矩阵形式的边界条件，并求得系数矩阵：

$$C=M_{spline}\cdot M_{geom}$$

其中：

M_{geom}——四元素列矩阵，包含了控制点的坐标值和其他已经指定的几何约束（边界条件）；

M_{spline}——4 x 4矩阵，该矩阵将几何约束值转化成多项式系数，并且提供了样条曲线的特征。

这样，可以使用矩阵表示来代替C，从而得到：

$$x(u) = U\cdot M_{spline}\cdot M_{geom}$$

1 样条描述方法

第三种形式：

扩展：

$$x(u) = U \cdot M_{spline} \cdot M_{geom}$$

得到：

$$x(u) = \sum_{k=0}^{3} g_k \cdot BF_k(u)$$

其中：

g_k——约束参数，类似控制点坐标和控制点处的曲线斜率；

多项式$BF_k(u)$——混合函数（blending functions）或基本函数（basic functions）。

1 样条描述方法

三种形式总结：

列出一组加在样条上的边界条件：

$$x(u)=a_x u^3+ b_x u^2 + c_x u^1 + d_x \qquad 0\le u\le 1$$

矩阵形式的边界条件

$$x(u) = U \cdot M_{spline} \cdot M_{geom}$$

列出一种混合函数或者基函数

$$x(u) = \sum_{k=0}^{3} g_k \cdot BF_k (u)$$

1 样条描述方法

曲面描述：

通过使用某个空间区域中的一个控制点网来指定两组样条曲线，可以定义一个样条曲面。

如果我们用$p_{ku,kv}$表示控制点位置，则样条曲面上的任意一点可用样条曲线混合函数的积来计算：

$$P(u, v) = \sum_{k_u, k_v} p_{ku,kv} BF_{ku}(u) BF_{kv}(v)$$

曲面参数u和v在0到1的范围内变化，但这个范围依赖于所使用的样条曲线类型。一种指定三维控制点位置的方法是在地平面二维网格位置选择高度值。

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

皮埃尔·贝塞尔（1910年9月1日——1999年11月25日）法语：Pierre Bézier，法国机械和电气工程师，计算机几何建模创始人之一。他先后于1930和1931年毕业于法国国立高等工程技术学校（Artset Métiers ParisTech，旧称ENSAM）和高等电力学院（Supélec），1977年获巴黎大学数学博士学位。

因发明以其名字命名的贝塞尔曲线而著名，这种样条逼近方法是Pierre Bézier为雷诺汽车公司设计汽车车身开发的。

② 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线公式：

假设给出n+1个控制点位置：p_k=（x_k,y_k,z_k），这里k可以取0到n。

这些坐标点将混合产生下列位置向量p（u），用来描述p_0和p_n间逼近Bezier多项式函数的路径：

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

其中：$BEZ_{k,n}$ (u) 是Bernstein多项式

$$BEZ_{k,n}(u)=C(n,k)u^k(1-u)^{n-k}$$

其中：参数C(n,k)是二次项系数

$$C(n,k)= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线公式：

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

可以表示单个曲线坐标三个参数方程的集合：

$$x(u) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

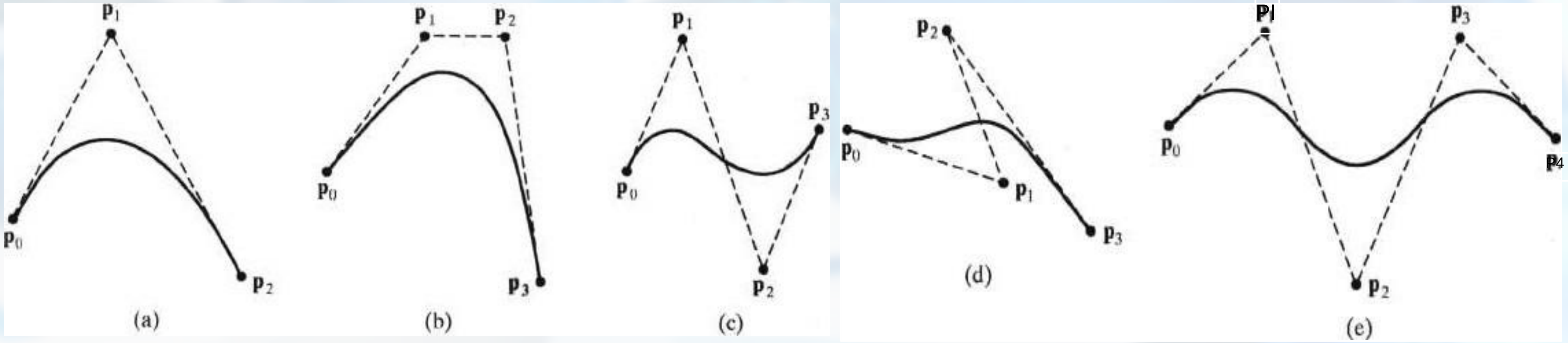
$$y(u) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

$$z(u) = \sum_{k=0}^{n} z_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线公式：

不同数量控制点生成的Bezier曲线

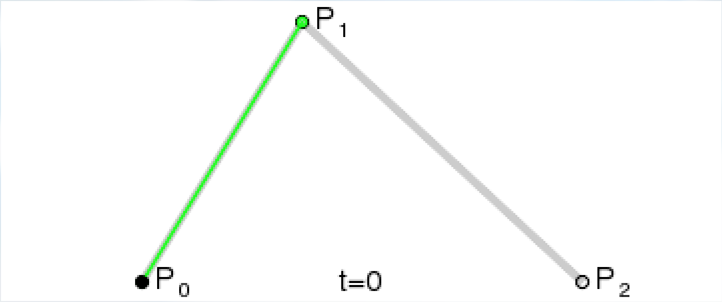


3个控制点　　4个控制点　　4个控制点　　4个控制点　　5个控制点

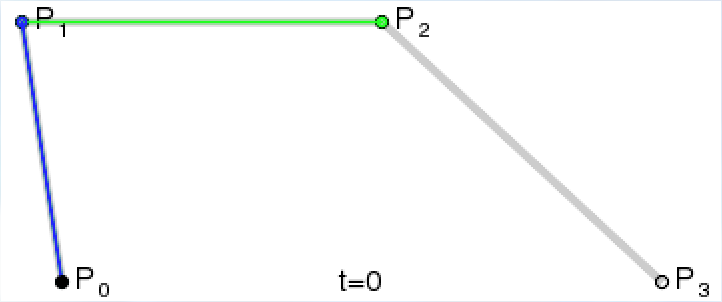
2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线公式：

不同数量控制点生成的Bezier曲线



3个控制点



4个控制点

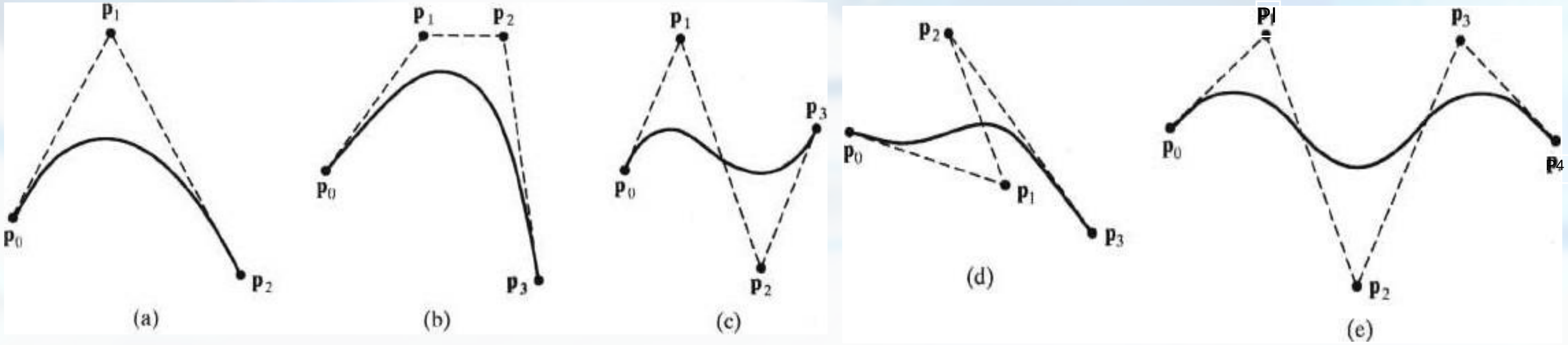
2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线特性分析：

（1）曲线总是通过第一个和最后一个控制点

即：曲线在两个端点处的边界条件是

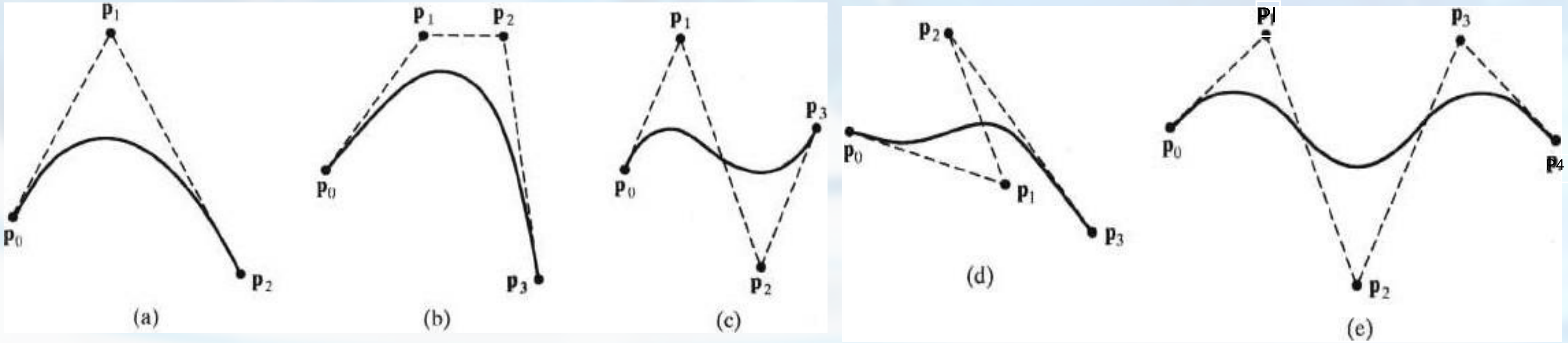
$$P(0)=p_0$$
$$P(1)=p_n$$



2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线特性分析：

（2）曲线始点处的切线落在头两个控制点的连线上，曲线终点处的切线落在后两个控制点的连线上

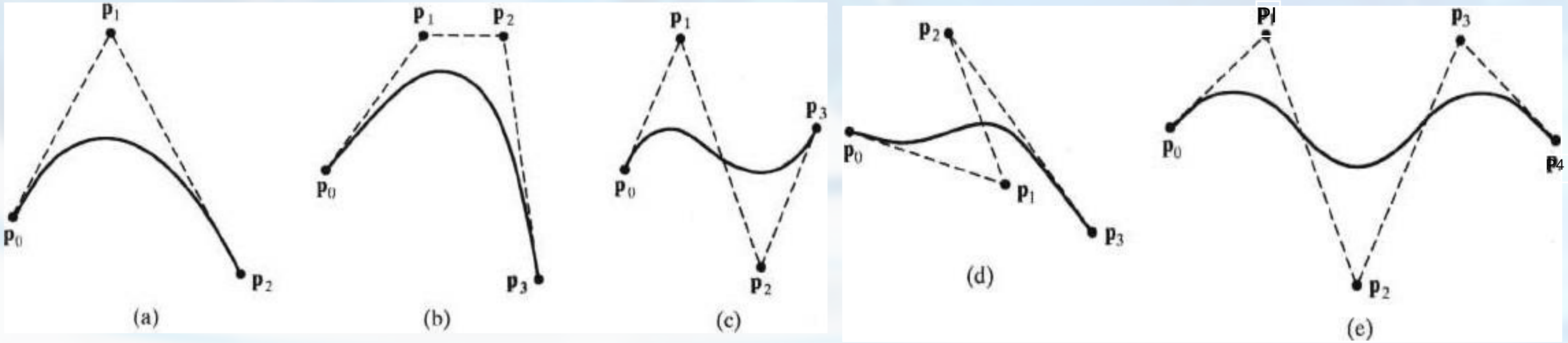


2

实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线特性分析：

（3）曲线落在控制点的凸壳内

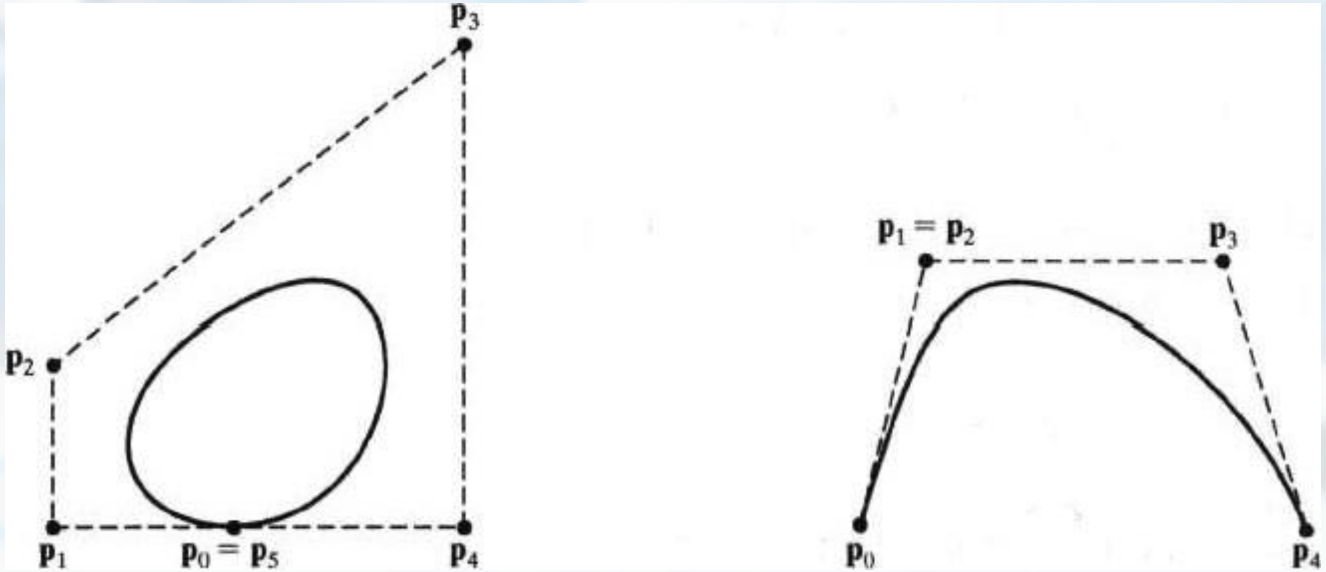


2

实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线的设计技术：

（1）封闭曲线，第一个和最后一个点重合　（2）多个控制点位于同一个位置可以更多加权

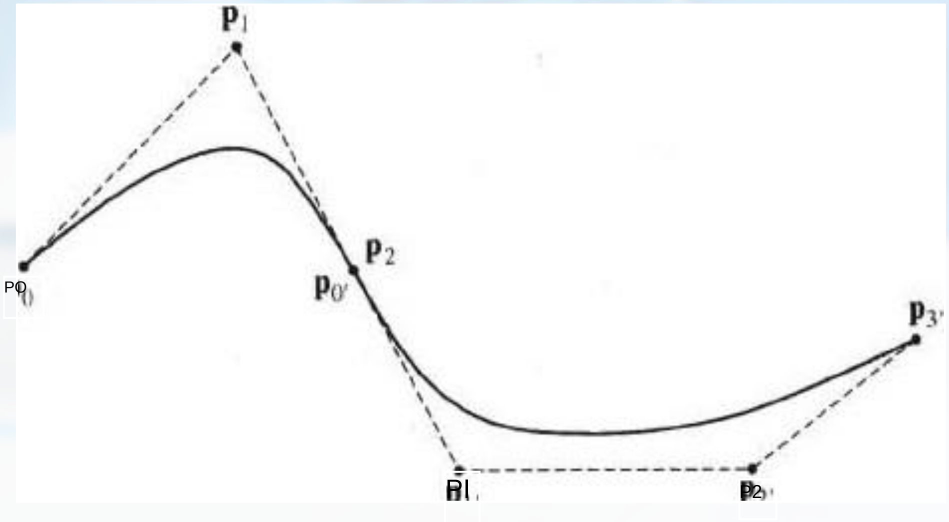


实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲线的设计技术：

（3）两段的拼接

由两个Bézier曲线段形成的分段逼近曲线。让$p_{0'}$ =p_2，使得p_1、p_2和$p_{1'}$ ，共线可以得到两条曲线段之间的0阶和一阶连续性。



2 实例：Bezier样条曲线和曲面

典型Bezier曲线——三次Bezier曲线

$BEZ_{k,n}(u)=C(n,k)u^k(1-u)^{n-k}$　其中：参数C(n,k)是二次项系数 $C(n,k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

把n=3带入得到：

$BEZ_{0,3}(u)=(1-u)^3$

$BEZ_{1,3}(u)=3u(1-u)^2$

$BEZ_{2,3}(u)=3u^2(1-u)$

$BEZ_{3,3}(u)=u^3$

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

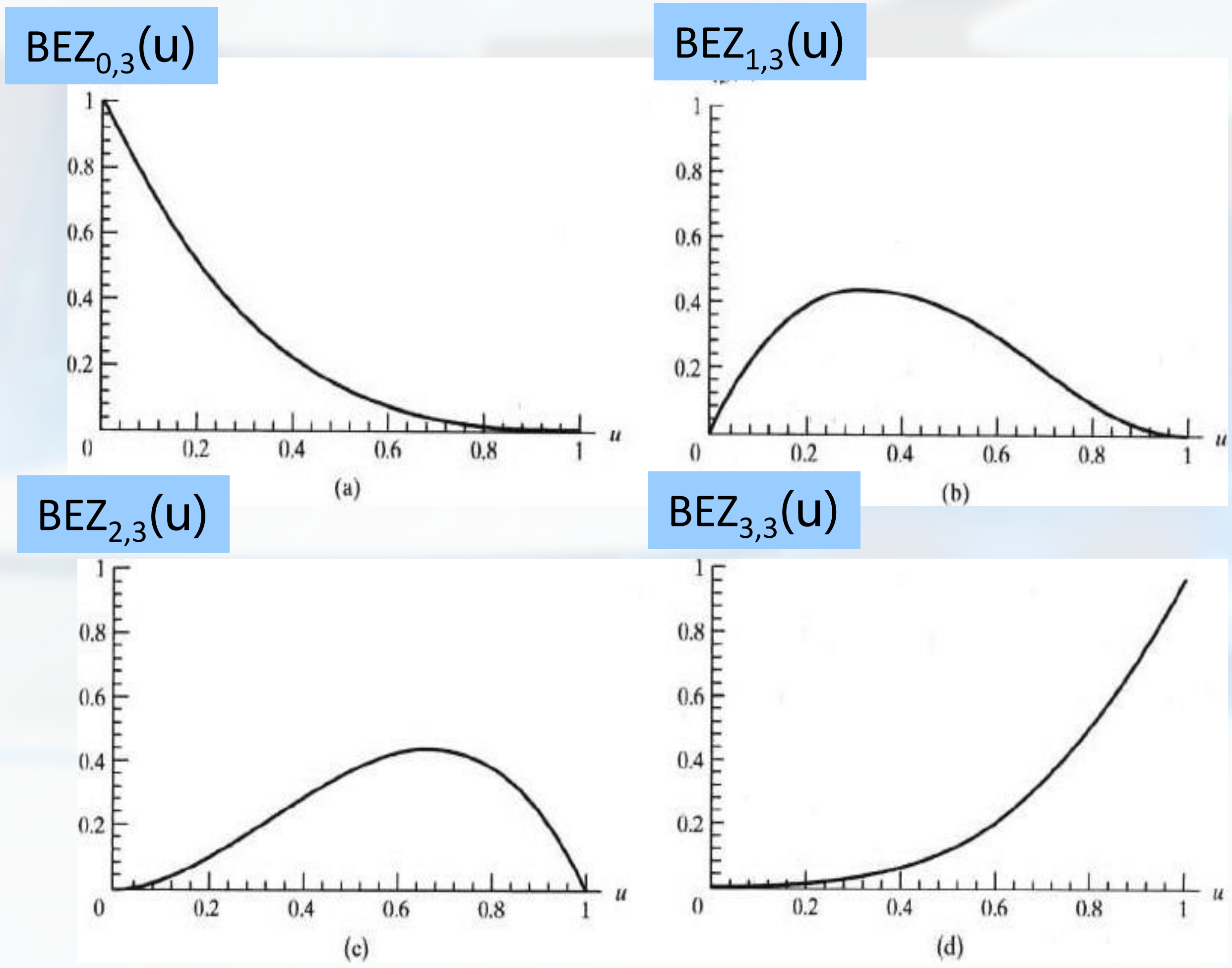
典型Bezier曲线——三次Bezier曲线

$BEZ_{0,3}(u)=(1-u)^3$

$BEZ_{1,3}(u)=3u(1-u)^2$

$BEZ_{2,3}(u)=3u^2\,(1-u)$

$BEZ_{3,3}(u)=u^3$



2 实例：Bezier样条曲线和曲面

典型Bezier曲线——三次Bezier曲线

表示单个曲线坐标三个参数方程的集合：

$$x(u) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

$$y(u) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

$$z(u) = \sum_{k=0}^{n} z_k \cdot BEZ_{k,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

$$x(u) = x_0 \cdot BEZ_{0,3}(u) + x_1 \cdot BEZ_{1,3}(u) + x_2 \cdot BEZ_{2,3}(u) + x_3 \cdot BEZ_{3,3}(u)$$

$$= x_0 \cdot (1-u)^3 + x_1 \cdot 3u(1-u)^2 + x_2 \cdot 3u^2(1-u) + x_3 \cdot u^3 \qquad 0 \le u \le 1$$

$$y(u) = y_0 \cdot (1-u)^3 + y_1 \cdot 3u(1-u)^2 + y_2 \cdot 3u^2(1-u) + y_3 \cdot u^3 \qquad 0 \le u \le 1$$

$$z(u) = z_0 \cdot (1-u)^3 + z_1 \cdot 3u(1-u)^2 + z_2 \cdot 3u^2(1-u) + z_3 \cdot u^3 \qquad 0 \le u \le 1$$

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

典型Bezier曲线——三次Bezier曲线

表示单个曲线坐标三个参数方程的集合：

$$x(u) = x_0 \cdot (1-u)^3 + x_1 \cdot 3u(1-u)^2 + x_2 \cdot 3u^2(1-u) + x_3 \cdot u^3 \quad 0 \le u \le 1$$

$$y(u) = y_0 \cdot (1-u)^3 + y_1 \cdot 3u(1-u)^2 + y_2 \cdot 3u^2(1-u) + y_3 \cdot u^3 \quad 0 \le u \le 1$$

$$z(u) = z_0 \cdot (1-u)^3 + z_1 \cdot 3u(1-u)^2 + z_2 \cdot 3u^2(1-u) + z_3 \cdot u^3 \quad 0 \le u \le 1$$

说明：
这里的$x_0y_0z_0$到$x_3y_3z_3$分别是控制点p_0到p_3的坐标。

显然：
u=0的时候，（x,y,z）为（x_0,y_0,z_0），也就是p_0
u=1的时候，（x,y,z）为（x_3,y_3,z_3），也就是p_3

三次Bezier曲线特性：
（1）总是通过控制点p0和p3
（2）其他两个函数$BEZ_{1,3}$和$BEZ_{2,3}$影响参数u取中间值时的曲线形状，因此生成曲线靠近p1和p2

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲面的定义：

利用两组正交的Bezier曲线可以生成Bezier曲面，Bezier曲面的数学描述由Bezier基函数作笛卡尔积而得：

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}BEN_{i,m}(u)BEN_{j,n}(v) \qquad (\mathrm{u},\mathrm{v})\in[0,1]\times[0,1]$$

其中：

$p_{i,j}(i=0,1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,n)$ 是(m+1)×(n+1)个控制顶点的位置矢量。所有的控制顶点构成的空间的一张网格称为控制网格或Bezier网格。$BEN_{i,m}(u)$与$BEN_{j,n}(v)$是Bernstein基函数，其定义如下：

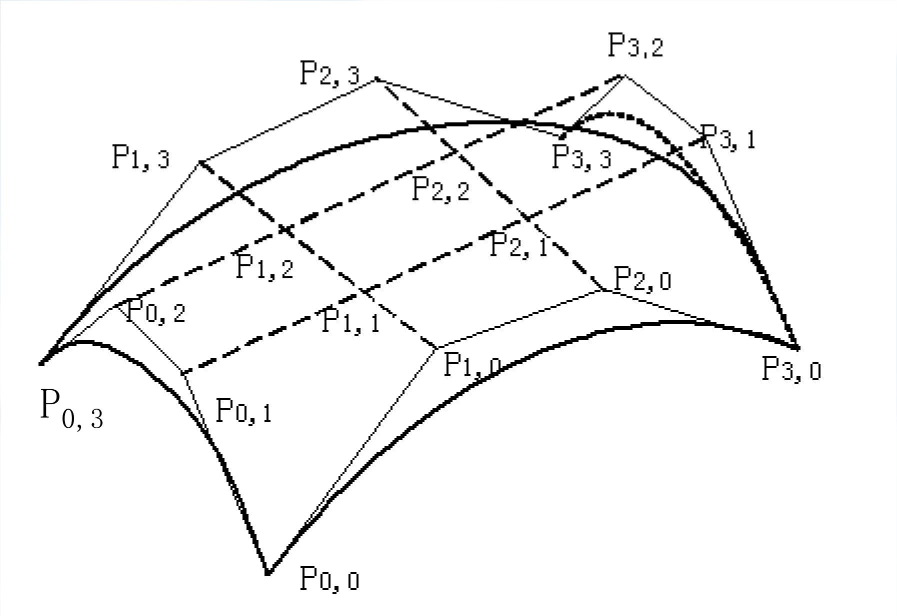
$$BEN_{i,m}(u)=C_m^i\cdot u^i\cdot(1-u)^{m-i}$$

$$BEN_{j,n}(v)=C_n^j\cdot v^j\cdot(1-v)^{n-j}$$

显然m和n不一定相等。

2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲面的实例：



m=3，n=3时构造的Bezier曲面（又叫做双三次Bezier曲面）

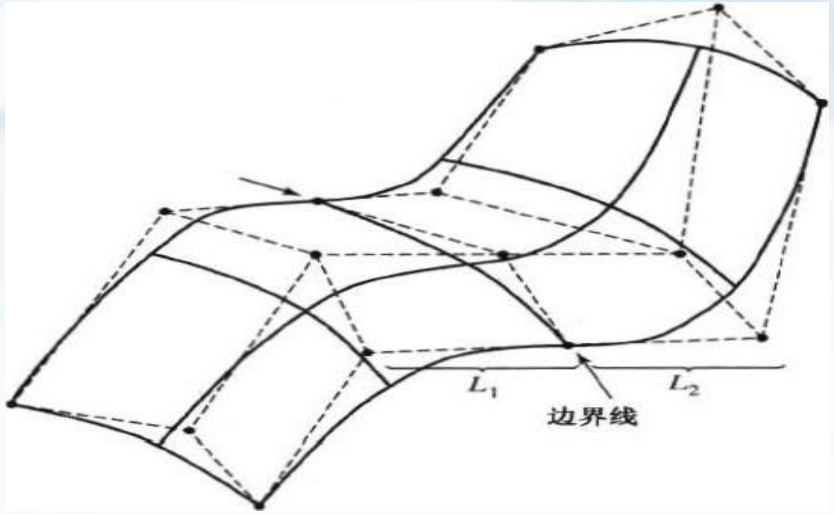
2 实例：Bezier样条曲线和曲面

Bezier曲面的拼接：

类似于在曲线中通过在边界线上建立 0阶和1阶连续性，可以确保从一个部分平滑转换到另一部分。

建立0阶连续性：在边界上匹配控制点。

建立1阶连续性：需要选取穿过边界的直线上的控制点，并且对穿过边界的一组指定控制点形成的共线线段保持一个常数比例。



谢谢

软件学院　万琳