拉普拉斯变换的性质

开讲前言－前讲回顾

- 常用拉普拉斯变换
  - 收敛区包括虚轴的拉普拉斯变换可通过傅里叶变换直接得到；
  - 指数函数拉普拉斯变换；
  - t的正整幂次函数的拉普拉斯变换。
- 拉普拉斯反变换
  - 部分分式展开方式求解
    - 系数的两种计算方式，洛比塔方法；
    - 无重根和有重根的系数计算。
  - 围线积分的方式求解
    - 理解约当引理和熟练掌握留数计算方法。

开讲前言－本讲导入

- 拉普拉斯变换定义
  - 复频率的概念，可积条件的放宽
- 拉普拉斯变换收敛区概念和意义
  - 收敛区与可积条件，反变换与收敛区关系
- 拉普拉斯正变换计算方法
  - 频域函数的替代法，常用函数的计算
- 拉普拉斯反变换计算方法
  - 部分分式展开、系数计算、重根解的形式
  - 留数计算方法、围线积分补充路径与解的关系
- 拉普拉斯变换计算方法讨论
  - 拉普拉斯变换的计算力求简单
  - 掌握其性质对于简化计算有重要的作用。

（一）线性

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \quad ROC = R_1$

$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) \quad ROC = R_2$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$ROC = R_1 \cap R_2$$

- 新的ROC 可以是 $R_1 \cap R_2$
- 也可能比 $R_1 \cap R_2$ 范围更大(出现零极点相消时)
- 如果R_1,R_2没有交集，则拉氏变换不存在

例 $f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)\quad f_2(t)=(e^{-3t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$

求 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ 拉普拉斯变换

$$F_1(s)=\frac{1}{s+2},\mathrm{Re}(s)=\delta>-2=R_1$$

$$F_2(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}(s)=\delta>-2$$

$$\boxed{\mathrm{Re}(s)=\delta>-3\ \cap\ \mathrm{Re}(s)=\delta>-2}$$

$$=\frac{-1}{(s+3)(s+2)}$$

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{-1}{(s+3)(s+2)}=\frac{\cancel{s+2}}{(s+3)\cancel{(s+2)}}=\frac{1}{s+3}$$

$$\mathrm{Re}(s)=\delta>-3$$

可能会发生零极点抵消的现象。当被抵消的极点恰好是决定原ROC边界的极点时，就会使收敛域扩大

（二）延时特性

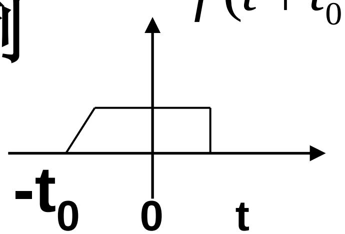
则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$ 收敛区域不变

波形时域平移不会改变其衰减/振幅性质，故收敛域不变

*** 时移：** $f(t+t_0)\varepsilon(t+t_0) \leftrightarrow F(s)e^{st_0}$ **（只对双边拉氏变换成立）**

例

$f(t+t_0)\varepsilon(t+t_0)=g(t)$

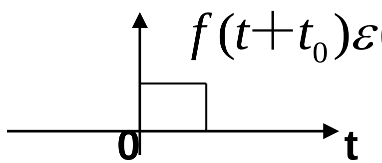


$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} f(t+t_0)\varepsilon(t+t_0)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t+t_0)\varepsilon(t)e^{-st}dt \text{（单边）}$$

$$\neq F(s)e^{st_0}$$

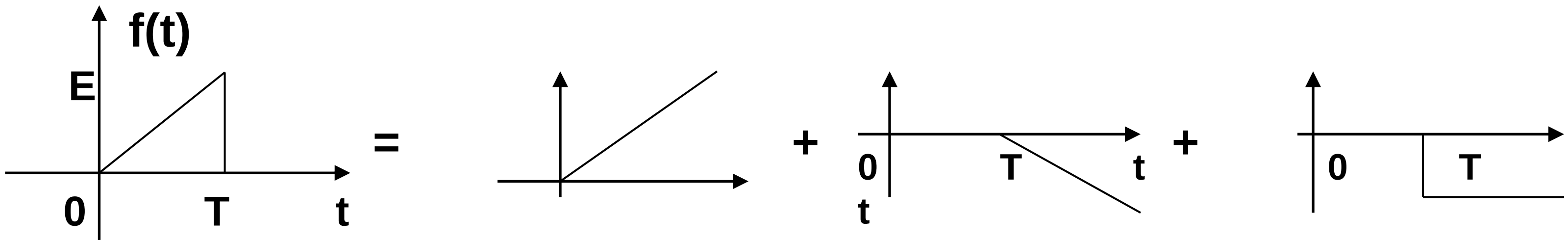
$f(t+t_0)\varepsilon(t)=g(t)\varepsilon(t)$



$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \neq f(t-t_0)\varepsilon(t)$$

例1 求锯齿波$f(t)$的$F(s)$

解:【方法一】将锯齿波分解为三个函数之和

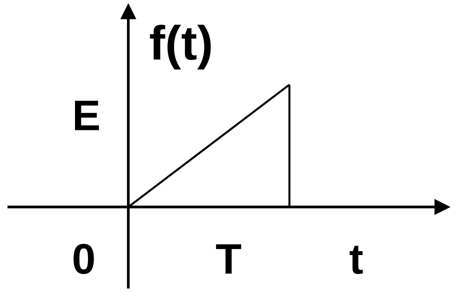


$$f(t) = f_a(t) + f_b(t) + f_c(t)$$

$$f(t) = \frac{E}{T} t\varepsilon(t) - \frac{E}{T}(t-T)\varepsilon(t-T) - E\varepsilon(t-T)$$

$$\therefore F(s) = \frac{E}{T} \bullet \frac{1}{s^2} - \frac{E}{T} \bullet \frac{1}{s^2} e^{-sT} - E \bullet \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{E}{Ts^2}[1-(1+sT)e^{-sT}]$$

例1 求锯齿波$f(t)$的$F(s)$



$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

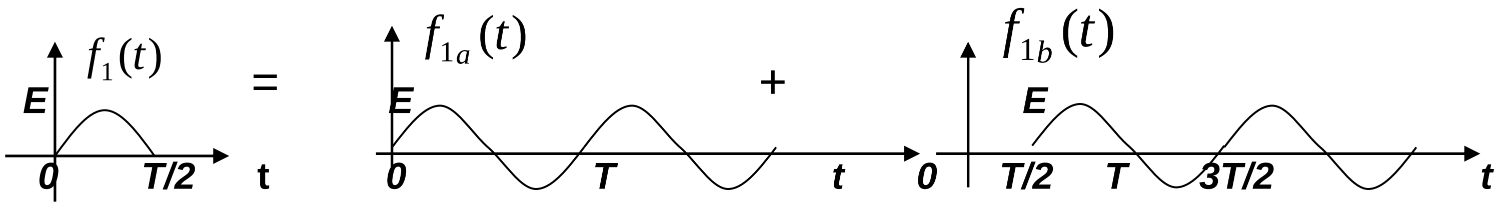
【方法二】$f(t)=f_1(t)\bullet G_T(t)$

$$f(t)=\frac{E}{T}t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)] \quad =\frac{E}{T}t\varepsilon(t)-\frac{E}{T}t\varepsilon(t-T)$$

$$=\frac{E}{T}t\varepsilon(t)-\frac{E}{T}(t-T)\varepsilon(t-T)-\frac{E}{T}T\varepsilon(t-T)$$

例2 求单个半周正弦波$f_1(t)$的拉氏变换$F_1(s)$

解：

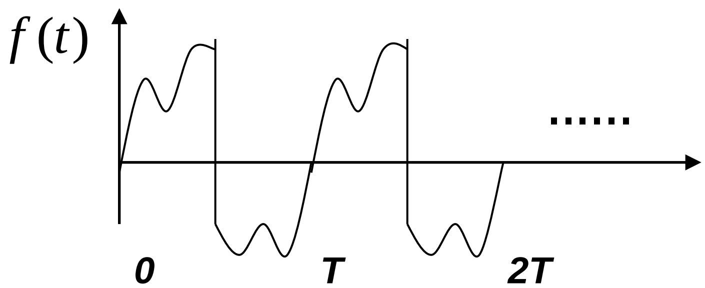


$$f_1(t) = f_{1a}(t) + f_{1b}(t) = ESin\,\omega t\varepsilon(t) + ESin\,\omega(t-\frac{T}{2})\varepsilon(t-\frac{T}{2})$$

$$f_{1a}(t) \leftrightarrow \frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\ ,\qquad f_{1b}(t) \leftrightarrow \frac{E\omega}{s^2+\omega^2}e^{-s\frac{T}{2}}$$

$$\therefore F_1(s) = \frac{E\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\frac{T}{2}})$$

例3 求$t=0$时接入周期函数 $f(t)$的拉氏变换$F(s)$



解：$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+\cdots$

$$=f_1(t)+f_1(t-T)\varepsilon(t-T)+f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T)+\cdots$$

$$F(s)=L\{f_1(t)+f_1(t-T)\varepsilon(t-T)+f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T)+\cdots\}$$

$$=F_1(s)[1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots]=F_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}} \qquad \delta>0$$

有始周期信号的变换

$$f(t)=f_T(t)+f_T(t-T)+f_T(t-2T)+\cdots$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F_T(s)+F_T(s)e^{-sT}+F_T(s)e^{-2sT}+\cdots$$

$$=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

周期为 **T** 的有始函数 **f (t)** 的拉普拉斯变换等于第一周期单个函数的拉普拉斯变换乘以因子 $(1-e^{-sT})^{-1}$

有始周期信号的变换

- 例题 计算半波正弦函数的拉普拉斯变换（**P241**例题**5－7**）
- 一个半波分解为两个相差半个周期（**T/2**）的正弦函数之和
- 周期半波为上述合成函数的周期**(T)**重复

$$\text{单个半波：}\ \mathscr{L}\left\{ f_s(t) + f_s(t-\frac{T}{2}) \right\} = F_s(s)(1+e^{-\frac{sT}{2}})$$

$$\text{周期半波：}\ \mathscr{L}\{ f(t) \} = F_s(s)(1+e^{-\frac{sT}{2}})(1-e^{-sT})^{-1} = F_s(s)(1-e^{-\frac{sT}{2}})^{-1}$$

$$F(s)=\frac{1}{1+e^{-2s}}$$

$$F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-2)\leftrightarrow e^{-2s}$$

$$\boxed{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}}$$

$$\delta(t)-\delta(t-2)\leftrightarrow 1-e^{-2s}$$

$$\boxed{F_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}}$$

$$L^{-1}(F(s))=f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[\delta(t-nT)-\delta(t-2-nT)]$$

$$T=4$$

（三）复频率平移

$$\boxed{f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0)}$$

例4 $te^{-\alpha t}\varepsilon(t)=[t\varepsilon(t)]e^{-\alpha t}$

$$f(t)=t\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$L\{[t\varepsilon(t)]e^{-\alpha t}\}=F(s+\alpha)=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

例5 $e^{-\alpha t}[Sin\,\omega_0 t\varepsilon(t)]$

$$f(t)=Sin\,\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$$

$$L\{[Sin\,\omega_0 t\varepsilon(t)]e^{-\alpha t}\}=F(s+\alpha)=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0{}^2}$$

(四) 尺度变换

$$\boxed{f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})}$$

例6 $f(at-b)\varepsilon(at-b), a>0, b>0$

【方法一】 先延时后尺度变换

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

延时 $f(t-b)\varepsilon(t-b) \leftrightarrow F(s)e^{-sb} = F_1(s)$

再尺度变换 $f(at-b)\varepsilon(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a}F_1(\frac{s}{a}) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$

【方法二】先尺度变换后延时

尺度变换 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = F_a(s)$

再延时 $f(at-b)\varepsilon(at-b)$

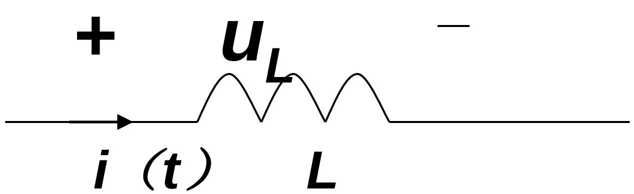
$$= f[a(t-\frac{b}{a})]\varepsilon[a(t-\frac{b}{a})] \leftrightarrow F_a(s)e^{-\frac{b}{a}s} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$$

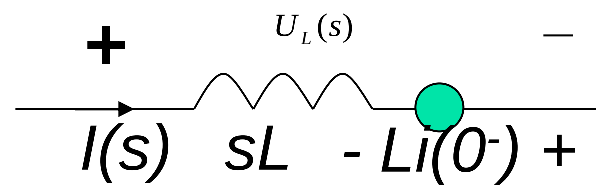
五、时域微分

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

例7 纯*L*电路 已知 $i(t) \leftrightarrow I(s)$，求 $U_L(s)$





解： $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

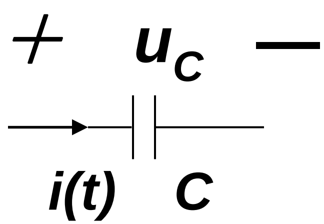
S域运算电压

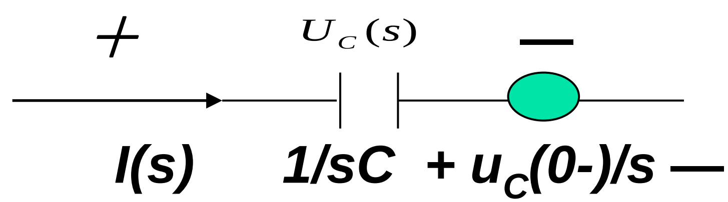
$$U_L(s) = L\{L\frac{di(t)}{dt}\} = L[sI(s) - i(0^-)] = LsI(s) - Li(0^-)$$

（六）时域积分

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \qquad \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$$

例8 纯电容电路，已知 $i(t) \leftrightarrow I(s)$, 求 $U_C(s)$



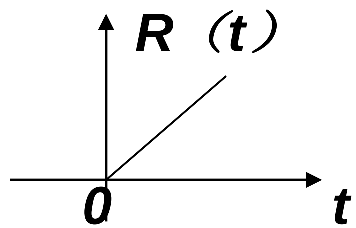


S域运算电压

解：$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau \qquad u_C(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i(\tau)d\tau$

$$U_C(s) = \frac{1}{C}L\{\int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau\} = \frac{1}{C}[\frac{I(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 i(\tau)d\tau}{s}] = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0^-)}{s}$$

例9 求 $R(t)=t\varepsilon(t)$的拉氏变换$R(s)$



解：$R'(t)=\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}=F(s)$

$$R(s)=L\{R(t)\}=L\{\int_0^t R'(\tau)d\tau\} =L\{\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\}=\frac{1}{s}F(s) =\frac{1}{s^2}$$

(七) 复频域微分和积分

$$tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(x)dx$$

例**10** 求 $tSin\omega_0 t\varepsilon(t)$的拉氏变换

解：$f(t) = Sin\omega_0 t\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2} = F(s)$

$$tSin\omega_0 t\varepsilon(t) = tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0{}^2)^2}$$

*例：试求$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$的拉氏变换

解：$\sin t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$　基本公式

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = arctgx\Big|_s^\infty \qquad \boxed{\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(x)dx}$$

$$= \frac{\pi}{2} - arctgs = arctg\frac{1}{s}$$

$$\therefore \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \leftrightarrow \frac{1}{s} arctg\frac{1}{s} \qquad \boxed{\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}}$$

九、对参变量微分与积分

设 $\mathscr{L}\{f(t,a)\}=F(s,a)$，$a$为参变量

则 $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\partial f(t,\ a)}{\partial a}\right\}=\dfrac{\partial F(s,a)}{\partial a}$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da\right\}=\int_{a_1}^{a_2} F(s,a)da$$

$$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

十 初值定理 终值定理

初值定理 $$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$F(s)$必须为真分式，若不是真分式，则必须将$F(s)$化为一个整式和一个真分式$F_0(s)$之和，此时

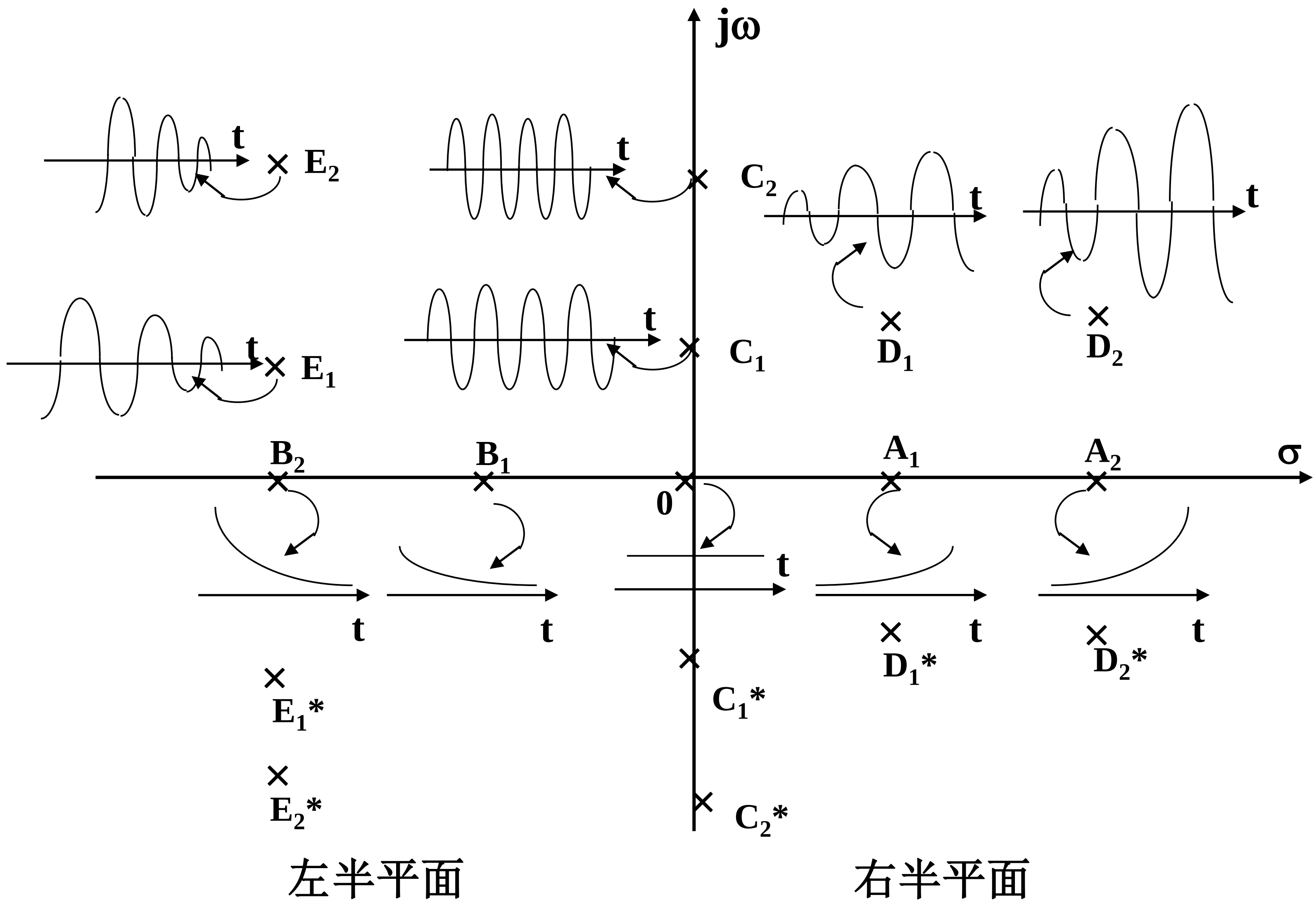
$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f_0(t) \quad =\lim_{s\to\infty} sF_0(s)$$

终值定理 $$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

1）所有极点都位于S左半平面

2）在$S=0$处若有极点也只能是一阶极点

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s} \qquad t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$


jω
σ
0
t
E2
E1
C2
C1
D1
D2
B2
B1
A1
A2
D1*
D2*
E1*
E2*
C1*
C2*
左半平面
右半平面

$$f(t)=\delta(t)+f_a(t)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\left[s(1+F_a(s))\right]\to\infty$$

$$f(0^+)=\delta(0^+)+f_a(0^+)=f_a(0^+)$$

$$f(0^+)=f_a(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF_a(s)$$

同理，若 f (t) 在 t=0 处有冲激及其导数，设其形式为

$$f(t)=a_0\delta(t)+a_1\delta^1(t)+\cdots+a_\mathrm{p}\delta^p(t)+f_p(t)$$

$$L\left\{f_p(t)\right\}=F_p(s)$$

则$L\left\{f(t)\right\}=a_0+a_1\mathrm{s}+\cdots+a_p s^p+F_p(s)$

$$\boxed{f(0^+)=f_p(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF_p(s)}$$

例 $F(s)=\dfrac{-s}{s+1}$　求初值f(0⁺)

$$F(s)=\frac{-s}{s+1}=-1+\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore \quad \cancel{\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\left[-s+\frac{s}{s+1}\right]}\to\infty$$

$$\boxed{f(0^{+})=f_a(0^{+})=\lim_{s\to\infty} sF_a(s)=\lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1}{s+1}\right)=1}$$

例12 求 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ **的终值**（$\alpha>0$）

解： $F(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$

极点 $s=-\alpha<0$　**——满足条件**

$$sF(s)=\frac{s}{s+\alpha}$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+\alpha}=0$$

例13 求 $f(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$ 的终值

解： $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{1}{s(s+1)}$

极点 $s_1=0, s_2=-1<0$ ——满足条件

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+1}=1$$

例14 求 $f(t)=e^{t}\varepsilon(t)$ 的终点值

解： $F(s)=\dfrac{1}{s-1}$

极点 $s=1>0$ ——不满足条件

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s-1}=0 \neq f(\infty)$$

f(t)为随***t***增长的函数，不存在终值，故不能用终值定理

十一、卷积定理

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t)\, f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

本讲小结

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \quad t_0 > 0$$

$$f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}), a > 0$$

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

时域
微分
积分

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$$

S域
微分
积分

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{s}^{\infty} F(x)dx$$

$$tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

信号与线性系统

第 **11** 次课外作业

教材习题: 5.7、 5.10、 5.13