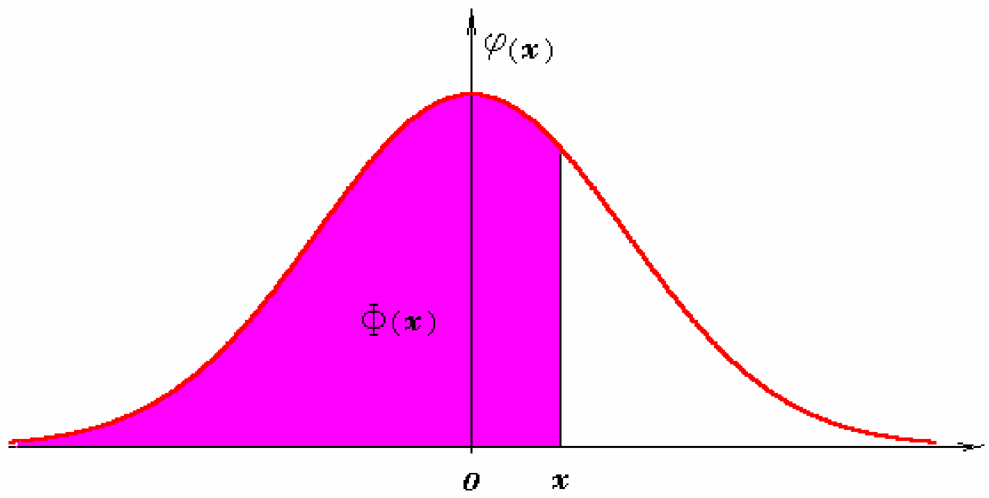
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

第四章 数字特征

X的概率分布$F(x)$：精确 $\longrightarrow$ $E(X)$：简洁

§4.1 数学期望

例1 设三个连队（各一百人）的射击成绩如下：

连队 \ 环数	⑩	⑨	⑧	⑦	平均环数
一连	**65**	**25**	**8**	**2**	$\frac{1}{100}[10\times65+9\times25+8\times8+7\times2]=9.53$
二连	**75**	**10**	**8**	**7**	$10\times\frac{75}{100}+9\times\frac{10}{100}+8\times\frac{8}{100}+7\times\frac{7}{100}=9.53$
三连	**65**	**20**	**10**	**5**	$10\times0.65+9\times0.2+8\times0.1+7\times0.05=9.45$

定义1 设D.R.V.X的分布律为 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\ldots$，若 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称 $\mathbf{E}(X)=\sum_i x_i p_i$ 为X的**数学期望**，简称为X的**均值**。

注：非绝对收敛级数的和与求和顺序有关，例如：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots=\ln 2$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$$

定义1 设D.R.V.X的分布律为 $P(X = x_i) = p_i$，$i=1,2,\ldots$，若 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称 $\mathbf{E(X)} = \sum_i \mathbf{x_i p_i}$ 为X的**数学期望**，简称为X的**均值**。

例2 设 $X \sim B(1, p)$，求$E(X)$。

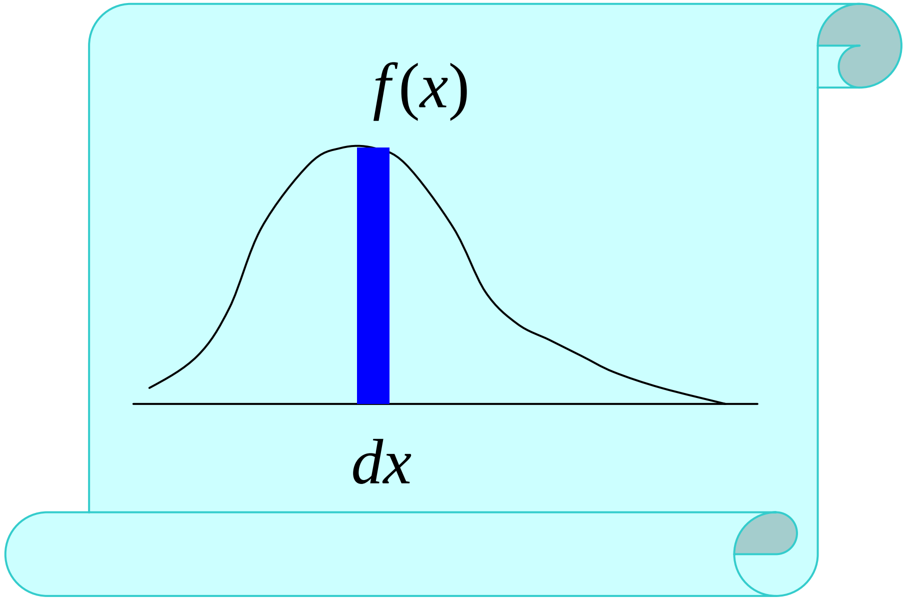
解 $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

例3 设 $X \sim P(\lambda)$，求$E(X)$。

解 $$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

定义2 设C.R.V. X的密度函数为$f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$收敛，

则称 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$ 为X的**数学期望(均值)**。



定义2 设C.R.V. X的密度函数为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$收敛，

则称 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$ 为X的**数学期望(均值)**。

例4 （P$_{59}$例4.6）设 $X\sim E(\lambda)$，求 $E(X)$（平均寿命）。

解 $$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

例5 （P$_{60}$例4.7）设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$。

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma u+\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma u}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \mu$$

一般 $f(\mu+x)=f(\mu-x)\Rightarrow E(X)=\mu$（P$_{60}$例4.9）。

定理1 设$g(x)$为连续函数，则

对D.R.V.： $P(X=x_i)=p_i \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\sum_i g(x_i)\,p_i$

对C.R.V.： $f(x) \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

例6 （P_{62}例4.12） 设 $X\sim P(\lambda)$，求$E(1+X)^{-1}$。

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

例7（P62例4.13）设某种商品每周的需求量 X 为随机变量，X~U[10,30]，而经销商进货数量为区间[10,30]中的某一整数，经销商每销售一单位商品可获利500元，若供大于求则削价处理，每处理1单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每销售1单位商品仅获利300元，为使商店所获利润的期望值不少于9280元，试确定最少进货量。

例7 需求量$X \sim U[10,30]$，正常销售获利500元/单位；削价处理亏损100元/单位；调剂销售获利300元/单位，求最少进货量，使所获利润的期望值不少于9280元。

解 设进货量为a，则利润额为

$$g(X)=\begin{cases} 500X-100(a-X)=600X-100a & 10\leqslant X<a \\ 500a+300(X-a)=300X+200a & a<X\leqslant 30 \end{cases}$$

$$E[g(X)]=\int_{10}^{30} g(x)\frac{1}{30-10}dx$$

$$=\int_{10}^{a}\frac{1}{20}(600x-100a)dx+\int_{a}^{30}\frac{1}{20}(300x+200a)dx$$

$$=-7.5a^2+350a+5250\geqslant 9280$$

$$\Rightarrow 20\frac{2}{3}\leq a\leq 26 \qquad \Rightarrow a=21$$

定理1 设$g(x)$为连续函数，则

对D.R.V.：　$P(X=x_i)=p_i \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i$

对C.R.V.：　$f(x) \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

定理2 设$g(x,y)$连续，则

对D.R.V.：　$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad \Rightarrow$

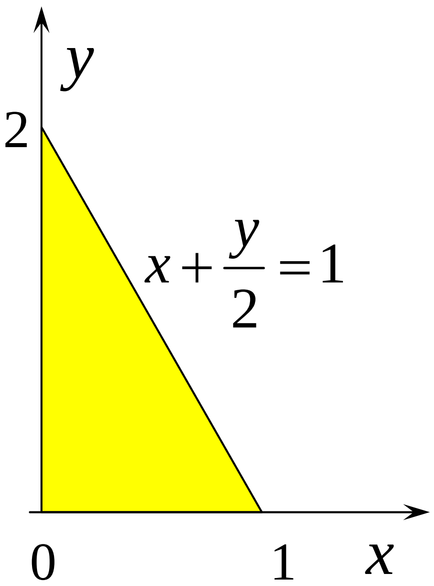
$$E[g(X,Y)]=\sum_i \sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

对C.R.V.：　$f(x,y) \quad \Rightarrow$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例8 设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A是由直线 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y/2=1$ 围成的三角形区域。求$E(X)$、$E(Y)$、$E(X+Y)$、$E(XY)$。

解 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$



$$E(X)=\int_0^1\int_0^{2(1-x)} x\,dy\,dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} y\,dx\,dy=\frac{2}{3}$$

$$E(X+Y)=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}}(x+y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} x\,dx\,dy+\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} y\,dx\,dy=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} xy\,dx\,dy=\int_0^2\frac{y}{2}\left(1-\frac{y}{2}\right)^2 dy=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$$

定理3　数学期望有下面基本性质:

1° 对任何 a，$b \in R$，有 $E(aX+b)=aE(X)+b$

2° $E(X+Y) = E(X)+ E(Y)$。 一般 $E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i)$

3° X与Y独立 $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\cdot yf_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(Y)dy$$

4° Cauchy-Schwarz不等式: $E^2(XY) \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

证明 $g(t) = E(tX-Y)^2 = t^2E(X^2) - 2tE(XY) + E(Y^2) \geqslant 0$

$$\Delta = 4E^2(XY) - 4E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$$

且等式成立 $\Leftrightarrow$ 存在 t_0 使 $E(t_0X-Y)^2 = 0$

例9 （P_{65}例4.16） 设$X \sim B(n,p)$，求$E(X)$.

解：记$X_i \sim B(1,p)$，$i=1,2,\ldots,n$，相互独立，则

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$$ 故 $$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} p = np$$

例10 设X与Y相互独立，其密度函数如下，求$E(XY)$.

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} e^{-(y-5)}, & y>5 \\ 0, & y\le 5 \end{cases}$$

解： $$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_5^{+\infty} ye^{-(y-5)}dy \xlongequal{t=y-5} \int_0^{\infty}(t+5)e^{-t}dt=1+5=6$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{2}{3}\times 6=4$$

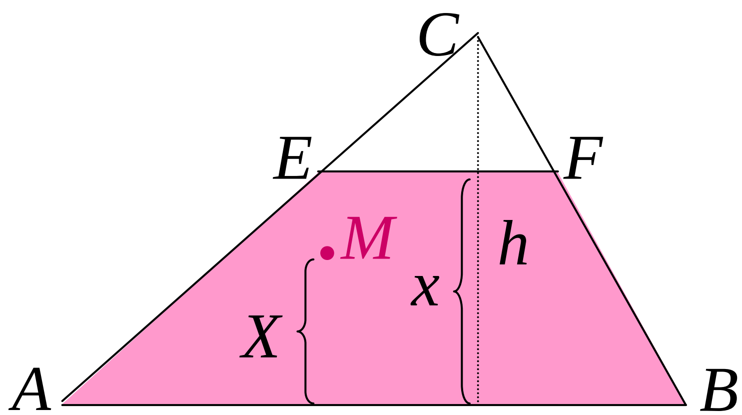
综合题选讲

在高为 h 的ABC 中任取一点M，点 M 到 AB 的距离为随机变量X，求其密度函数 $f(x)$.

解 I 设EF与AB间的距离为x，则

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{(h-x)^2}{h^2}, & 0 \leqslant x \leqslant h \\ 1, & x > h \end{cases}$$



$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(h-x)}{h^2}, & 0 \le x \le h \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

综合题选讲

在高为 h 的ABC 中任取一点M，点 M 到 AB 的距离为随机变量X，求其密度函数 $f(x)$.

解Ⅱ 设点$M(X,Y)$在$\triangle ABC$内均匀分布，即

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{bh}, & (x,y)\in\Delta ABC\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}p(x), & 0\le x\le h\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中

$$p(x)=\int_{\frac{y_h}{h}x}^{\frac{y_h-b}{h}x+b}\frac{2}{bh}dy=\frac{2(h-x)}{h^2}$$