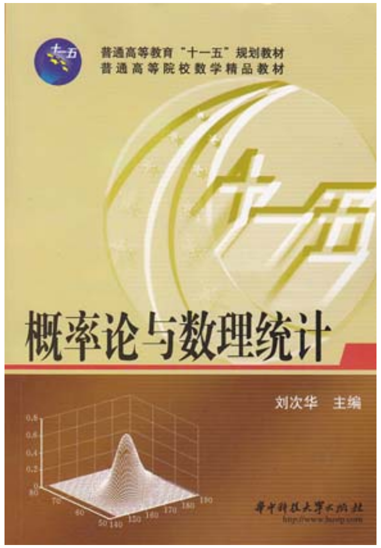
概率论与数理统计



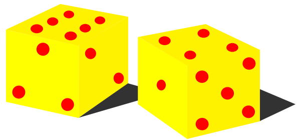
华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

引言

1.不光彩的起源

--------骰



1654年7月至10月，巴斯卡（Pascal）与费马（Fermat）通信的有关问题：

(a) 将两只骰子掷24次，至少掷出一个“66”的机遇小于 1 / 2 ，但两只骰子只有36种(等)可能的情况，而24占了36的2/3，如何解释?

（b）假定A、B在每局取胜的概率各为 1 / 2 ，而在赌博中断时，A、B各缺少a、b个胜局以取得最后胜利，如何分配赌注?

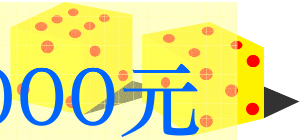
引言

1.不光彩的起源

1654年7月至10月，巴斯卡（Pascal）与费马（Fermat）通信的有关问题：

(a) 将两只骰子掷24次，至少掷出一个"66"的机遇小于1/2，但两只骰子只有36种(等可能的)情况，而24占了36的2/3，如何解释？

(b) 假定甲、乙在每局取胜的概率各为1/2，而在赌博中断时，甲、乙各缺少a、b个胜局以取得最后胜利，如何分配赌注？



赌注：甲500+乙500=1000元

规则：五局三胜

现状：甲 甲 乙

甲甲
甲乙
乙甲
乙乙

分配？ 甲:乙=3:1

甲500、乙500

甲750、乙250

2.几个有趣而又“头晕”的问题

例1 设有n个质点，每个点都以1/N的概率落于N(N>n)个盒子中的任何一个里，求某指定的n个盒子各有一点的概率。

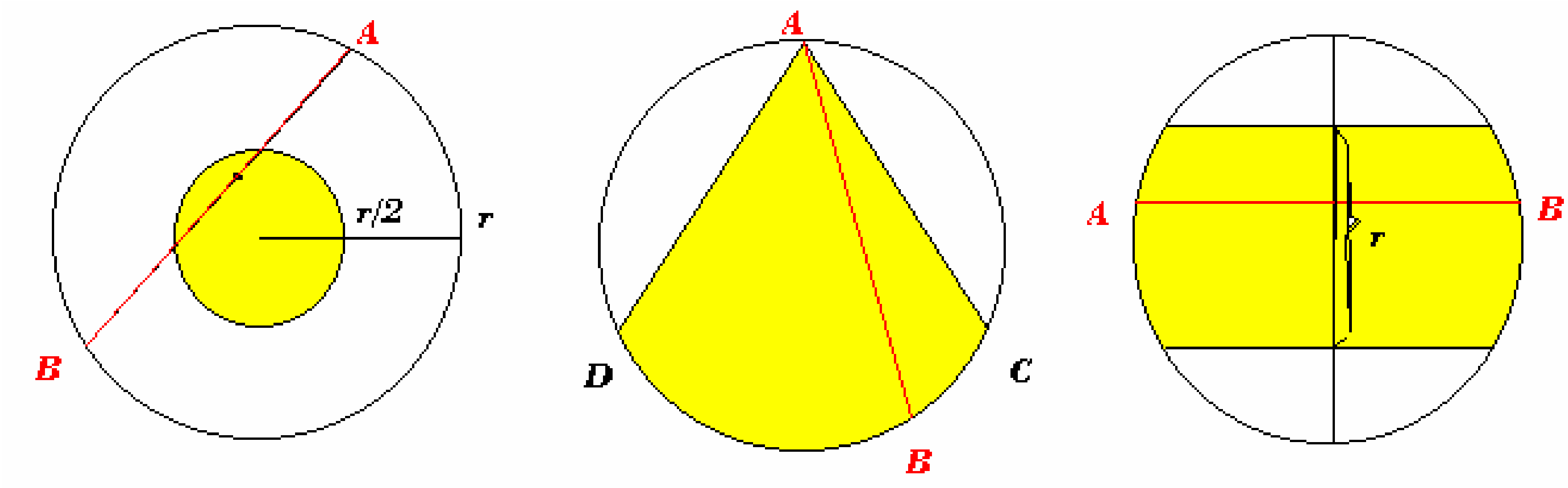
解 I (Maxwell-Boltzmann) $p=\dfrac{n!}{N^n}$

解 II (Bose-Einstein) $p=\dfrac{1}{C_{n+N-1}^{n}}$

解 II (Fermi-Dirac) $p=\dfrac{1}{C_N^n}$

2.几个有趣而又“头晕”的问题

例2　在一半径为r的圆C内任意作弦，试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形边长的概率 p。



$$p=\frac{(\frac{r}{2})^2\pi}{r^2\pi}=\frac{1}{4}$$

$$p=\frac{1}{3}$$

$$p=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$$

引言

3、概率统计的研究对象

- 必然现象 水 $\xrightarrow{0℃}$ 冰 $\xrightarrow{100℃}$ 蒸气
- 随机现象 --------统计规律

4、定义

概率统计 ~ 研究随机现象的统计规律的数学学科

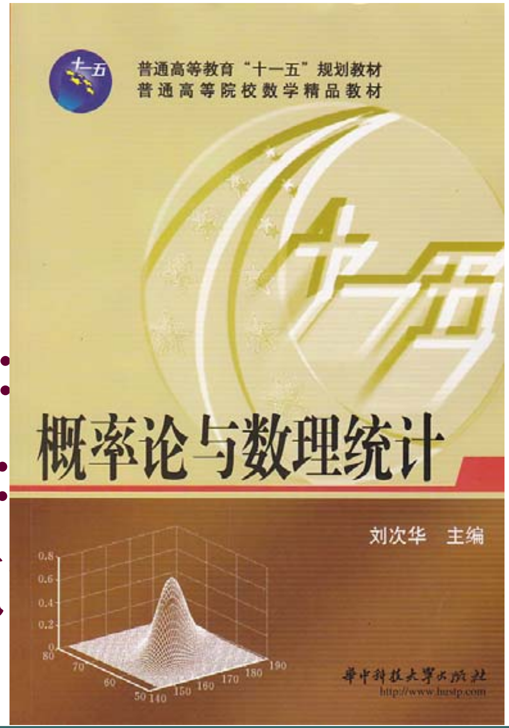
5、参考书：

1. 王福保 «概率论与数理统计» 同济大学出版社
2. 陈希孺 «概率论与数理统计» 中国科技大学出版社
3. 盛骤 等 «概率论与数理统计» 高等教育出版社

信息短波

- 关于教材:
- 以班为单位在华科大出版社二楼发行部购买，18元/册（72折）
- 关于练习册:
- 购买方式---以班为单位购买
- 价格—5.00元/册
- 时间---本周三下午2:30 ~ 5:

  晚上6:30 ~ 9:
- 地点---科技楼南715(概率统



第一章 随机事件与概率

§1.1 随机事件和样本空间

一、随机试验(E)：

1. 试验前不可知其结果；
2. 所有可能的结果可知；
3. 可在相同条件下重复进行。

二、随机事件 ~ 随机实验的结果，记为：$A, B, C, \ldots\ldots$

- 基本事件 ~ 不可分的最简单事件，记为ω
- 复合事件 ~ 若干基本事件组成的事件。
- 必然事件 ~ 必定发生的事件，记为 Ω
- 不可能事件 ~ 不可能发生的事件，记为$\varnothing$

三、样本空间 ~ 全体基本事件的集合，记为 Ω

例：E_1： 掷一只骰子 $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$

$\boldsymbol{A}=\{1，3，5\}$~出现奇数点， $\boldsymbol{B}=\{5,6\}$~点数超过4

E_2： 抛两枚硬币 $\Omega=\{$正正，正反，反正，反反$\}$

$\boldsymbol{A}=\{$正反，反正$\}$~ 恰出现一个正面

或$\Omega=\{$正正，正反，反反$\}$

$\boldsymbol{A}=\{$**正反**$\}$~ 恰出现一个正面， ϕ ~ 出现三个正面

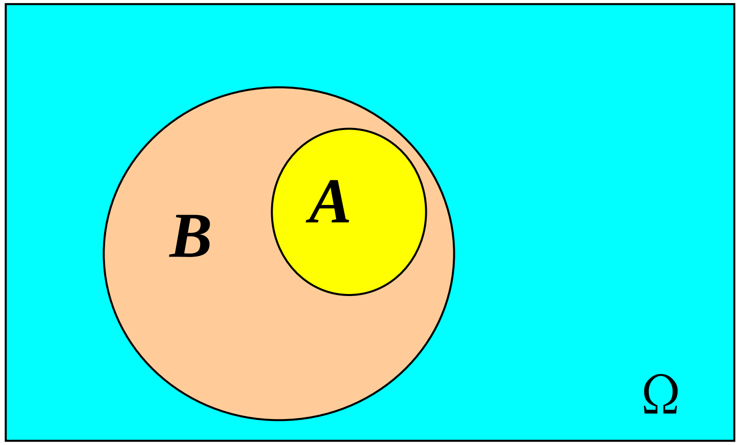
E_3： 电脑无故障运行时间 $\Omega=\{t:\ t\geqslant 0\}$

$\boldsymbol{A}=\{t: t\geqslant 500\}$~合格品 $\boldsymbol{B}=\{t: t<50\}$~废品

§ 1.2 事件的关系和运算

一、事件的关系

1. 包含 ~ A发生则B必然发生，记为：$A \subset B$



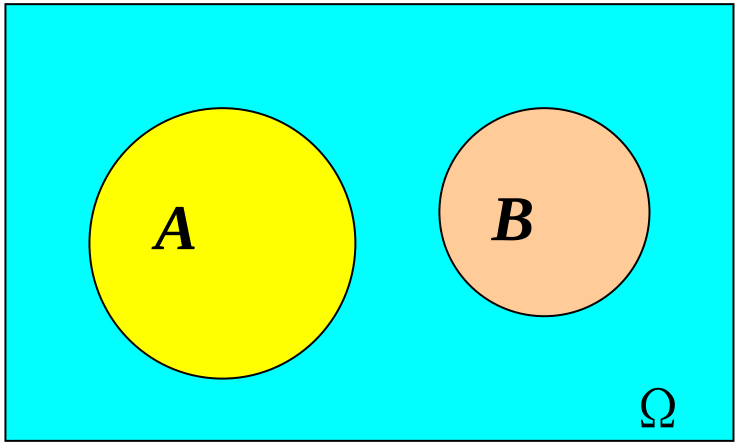
如E_1中，$A=\{1\}$，$B=\{1，3，5\}$，则 $A \subset B$

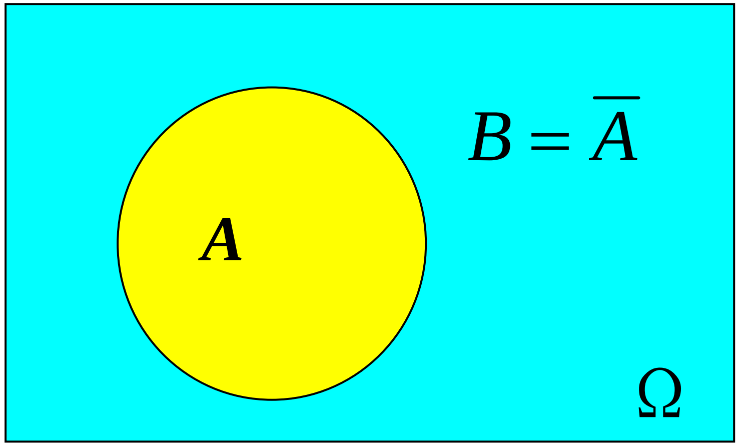
2. 等价 ~ $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，记为 $A=B$

§1.2 事件的关系和运算

一、事件的关系

3. 不相容（互斥）~ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不能同时发生，记为$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$





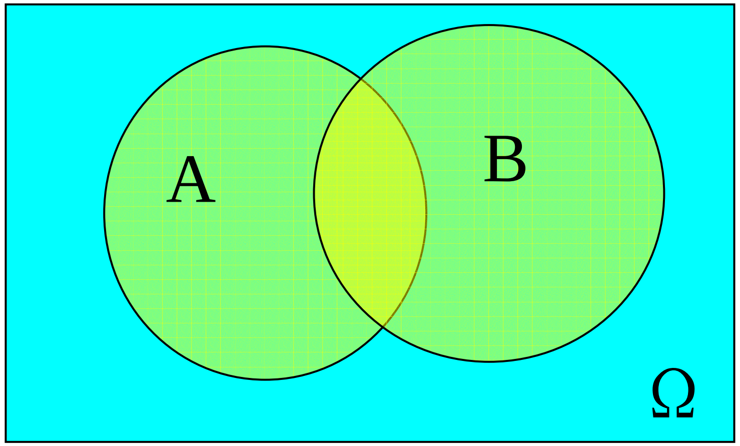
如E_1中，$\boldsymbol{A}=\{2\}$，$\boldsymbol{B}=\{1，3，5\}$，则 $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$互不相容

4．互逆 ~ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$互不相容，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$必有一个发生，记为：

$A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$

二、事件的运算

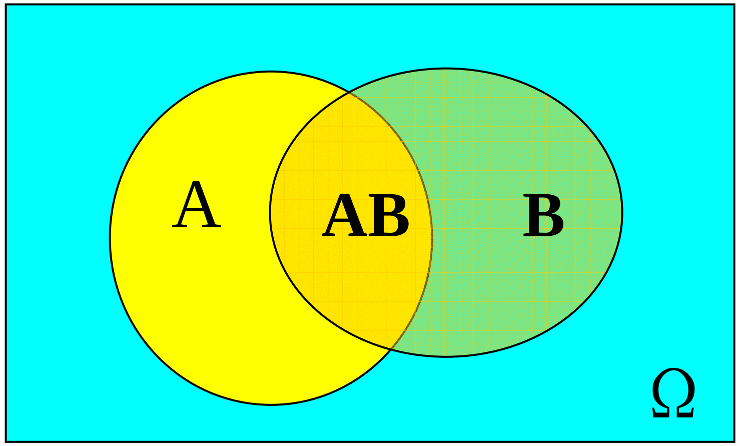
1．和（并）～$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$至少有一个发生，记为：$A\cup B$



如E_1中，$\boldsymbol{A}$={5,6}，$\boldsymbol{B}$={1,3,5}，

则$\boldsymbol{A}\cup B$={1，3，5，6}

2．积（交）～$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同时发生，记为：$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{AB}$



如E_1中，$\boldsymbol{A}$={3，4，5，6}，

$\boldsymbol{B}$={1，2，3，4}，则$\boldsymbol{AB}$={3，4}

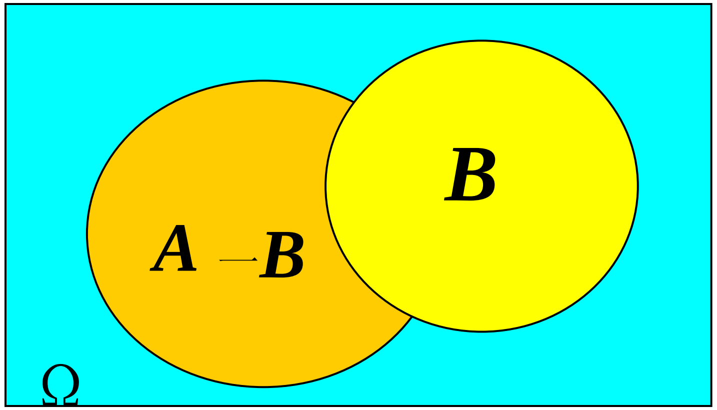
推广：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \quad \sim A_1, A_2,\ldots, A_n\text{中至少有一个发生}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \quad \sim A_1, A_2,\ldots, A_n\text{同时发生}$$

二、事件的运算

3．差～A发生但B不发生，记为$A-B=A\overline{B}$



如E_1中，

A={3，4，5，6}，

B={1，2，3，4}，

则　**A**−*B*={5，6}

三、运算法则

1．交换律：　$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$

2．结合律：　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　　$(AB)C=A(BC)$

3．分配律：　$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$　　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

4．对偶律：　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(De Morgan)　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

课堂练习

设某人向一个目标连射三次，以A_i表示“第 i 次命中目标”，i=1,2,3，试用A_1，A_2，A_3及其运算式表示下面事件：

(1) 前两次至少命中一次； $B_1 = A_1 \cup A_2$

(2) 只有第一次命中； $B_2 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

(3) 只有第一次未命中； $B_3 = \overline{A_1}A_2A_3$

(4) 第一次命中且后两次至少命中一次； $B_4 = A_1(A_2 \cup A_3)$

(5) 至少命中两次； $B_5 = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1$

(6) 至多命中一次。 $B_6 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

$= \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_3}\,\overline{A_1} = \overline{B_5}$

思考：$\Omega = ?$