信号与线性系统

第 10 讲

教材位置： 第5章 连续时间系统的复频域分析

§5.4-§5.5

内容概要： 拉普拉斯反变换

前讲回顾

一：拉普拉斯变换定义

$$F(s) = L(f(t)) = F(f(t)e^{-\sigma t})$$

若 t < 0 时，有f (t) = 0

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad = L(f(t))$$

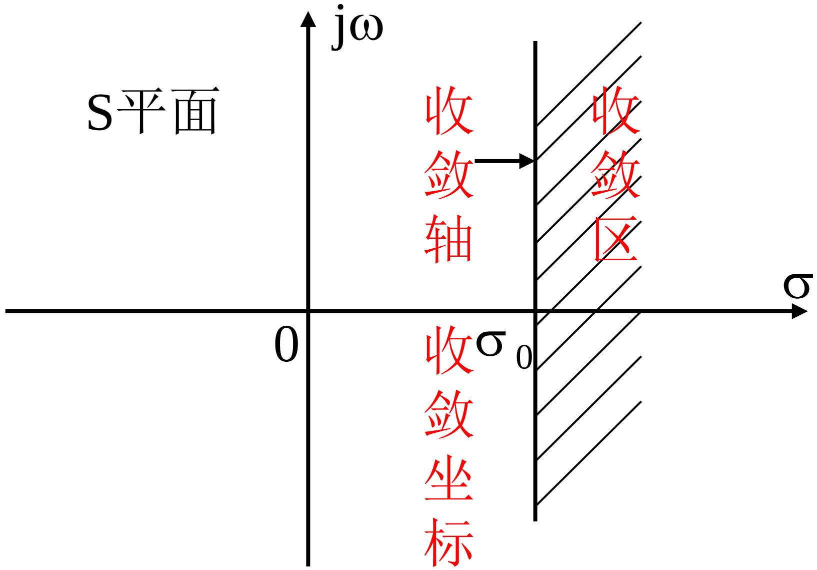
单边拉普拉斯变换

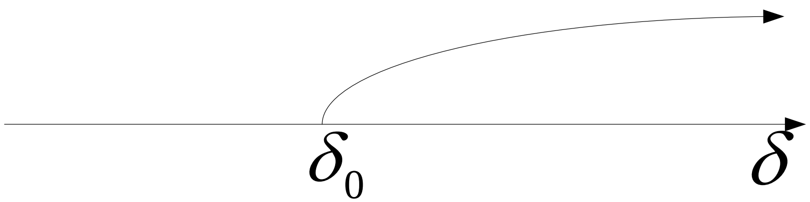
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds = L^{-1}(F(s))$$

$$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s)$$

二：收敛区间

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\delta t}=0 \qquad Re(s)=\delta>\delta_0$$





3：当 $\delta=0$ $\lim_{t\to\infty}(f(t)e^{-\delta t})=0$ 即 $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$

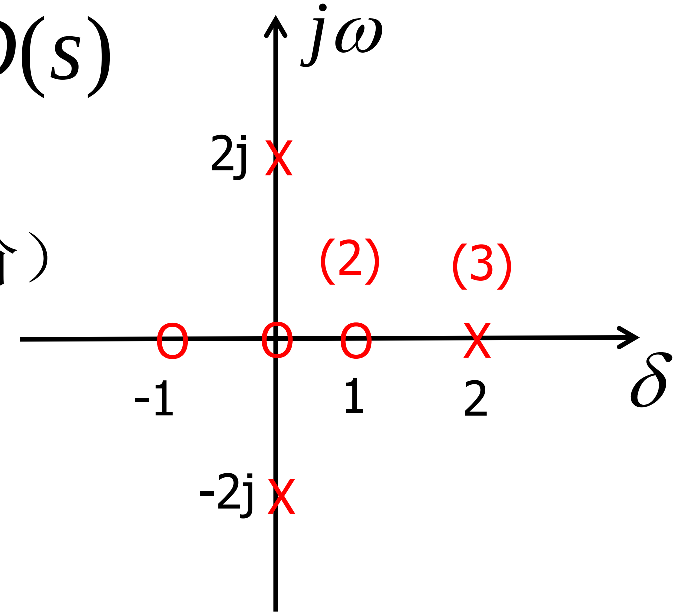
$$F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$$

三：极零图

$$F(s)=\frac{s(s+1)(s-1)^2}{(s^2+4)(s-2)^3}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

x 极点 $2j,\ -2j,\ 2$（三阶）

O 零点 $0, -1,\ 1$（二阶）



$$F(s)=a\frac{s(s+1)(s-1)^2}{(s^2+4)(s-2)^3}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

反变换求取的数学手段

- 依据反变换公式，这是复变函数广义积分问题

使用复变函数中围线积分和留数定理来解决

- 如函数是有理函数，也可通过部分分式展开的方式来求解。

一： 部分分式

设F(s)为有理函数，它可由两个s的多项式之比来表示。

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

(a_k，b_k为实数，m 及 n 为正整数)

如m ≥ n 时，应化为真分式，再分解为部分分式，

$$F(s)=\frac{3s^3-2s^2-7s+1}{s^2+s-1}$$

$$F(s)=3s-5+\frac{s-4}{s^2+s-1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 3s \quad -5 \\ \cline{2-2}
s^2+s-1 & 3s^3-2s^2-7s+1 \\
 & 3s^3+3s^2-3s \\ \cline{2-2}
 & \qquad -5s^2-4s+1 \\
 & \qquad -5s^2-5s+5 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad s-4
\end{array}$$

（1）m < n，D(s) = 0 的根无重根情况

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)=\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)}$$

$$F(s)=\left[\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\right]$$

两边乘（$s-s_k$）

$$(s-s_k)F(s)=\frac{(s-s_k)K_1}{s-s_1}+\frac{(s-s_k)K_2}{s-s_2}+\cdots+K_k+\cdots+\frac{(s-s_k)K_n}{s-s_n}$$

令$s=s_k$

$$K_k=\left[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_k}$$

$$K_k = \lim_{s \to s_k} \boxed{\left[\frac{(s-s_k)N(s)}{D(s)} \right]} = \lim_{s \to s_k} \left[\frac{\frac{d}{ds}(s-s_k)N(s)}{\frac{d}{ds}D(s)} \right]$$

罗彼塔法则

$$= \lim_{s \to s_k} \left[\frac{N(s)+(s-s_k)N'(s)}{D'(s)} \right] = \boxed{\left[\frac{N(s)}{D'(s)} \right]}_{s=s_k}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \Lambda + \frac{K_k}{s-s_k} + \Lambda + \frac{K_n}{s-s_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{s-s_k} \leftrightarrow e^{s_k t}\varepsilon(t)}$$

$$f(t) = (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \Lambda + K_k e^{s_k t} + \Lambda + K_n e^{s_n t})\varepsilon(t)$$

例1 求 $F(s)=\dfrac{s+4}{s(s+1)(s+2)}$ 的反变换 $f(t)$

解： $D(s)=s(s+1)(s+2)=0 \quad s_1=0, s_2=-1, s_3=-2$

$$F(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}$$

【方法一】

$$k_1=[\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}]_{s=0}=2, \quad k_2=[\frac{s+4}{s(s+2)}]_{s=-1}=-3,$$

$$k_3=[\frac{s+4}{s(s+1)}]_{s=-2}=1$$

【方法二】用微分求

$$D(s)=s(s+1)(s+2)=s^3+3s^2+2s,\quad D'(s)=3s^2+6s+2$$

$$\frac{N(s)}{D'(s)}=\frac{s+4}{3s^2+6s+2}$$

$$k_1=[\frac{s+4}{3s^2+6s+2}]_{s=0}=2,\quad k_2=[\frac{s+4}{3s^2+6s+2}]_{s=-1}=-3,$$

$$k_3=[\frac{s+4}{3s^2+6s+2}]_{s=-2}=1$$

3）求 $f(t)$**：** $F(s)=\dfrac{2}{s}+\dfrac{-3}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}$

$$f(t)=(2-3e^{-t}+e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例2 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$ **[$F(s)$为假分式，极点为实数]**

解： $F(s)=s+2+\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\overset{令}{=}s+2+F_1(s)$

求 $F_1(s)$ 的反变换：

$$F_1(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$f_1(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

求 $F(s)$ 的反变换：

$$f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+f_1(t)$$

$$=\delta'(t)+2\delta(t)+(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例3 求 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+5}$ 的反变换 **[极点为共轭复数]**

解:

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}\leftrightarrow e^{\alpha t}Cos\,\omega_0 t$$

1）

2）

$$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}\leftrightarrow e^{\alpha t}Sin\,\omega_0 t$$

*

3） $f(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}=\frac{1}{4}(2+j)e^{(-1+j2)t}+\frac{1}{4}(2-j)e^{(-1-j2)t}$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}[(e^{j2t}+e^{-j2t})+\frac{j}{2}(e^{j2t}-e^{-j2t})]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}(2Cos2t-Sin2t) \qquad t\geq 0$$

【方法二】$D(s)$为二次多项式

$$D(s)=s^2+2s+5=(s+1)^2+4=[(s-\alpha)^2+\beta^2]$$

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^2+4}$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}\leftrightarrow e^{\alpha t}Cos\omega_0 t$$

$$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}\leftrightarrow e^{\alpha t}Sin\omega_0 t$$

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{2}[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}]$$

$$\therefore\ f(t)=e^{-t}Cos2t-\frac{1}{2}e^{-t}Sin2t,t\ge 0$$

（2）m < n，D(s) = 0 的根有重根情况

$$D(s) = (s-s_1)^{p}(s-s_{p+1})\text{-------}(s-s_n)$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_{1p}}{(s-s_1)^p} + \frac{K_{1(p-1)}}{(s-s_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^2} + \frac{K_{11}}{s-s_1}$$

$$+ \frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

$$\boxed{(s-s_1)^p}$$

$$(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)} = K_{1p} + K_{1(p-1)}(s-s_1) + \cdots + K_{12}(s-s_1)^{p-2} + K_{11}(s-s_1)^{p-1}$$

$$+(s-s_1)^p\left(\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}} + \frac{K_{p+2}}{s-s_{p+2}} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n}\right)$$

令 $s = s_1$ $K_{1p} = \left[(s-s_1)^p \dfrac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_1}$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_1} = K_{1(p-1)} + K_{1(p-2)} 2(s-s_1) + \cdots + K_{11}(p-1)(s-s_1)^{p-2}$$

$$+ \frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p \left(\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n} \right) \right]$$

令 $s = s_1$

$$K_{1(p-1)} = \frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_1}$$

再次求导

令 $s = s_1$

$$K_{1(p-2)} = \frac{1}{2!}\left\{ \frac{d^2}{ds^2}\left[\left(s-s_1\right)^p \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s=s_1}$$

$$K_{1k} = \frac{1}{(p-k)!}\left\{ \frac{d^{p-k}}{ds^{p-k}}\left[\left(s-s_1\right)^p \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s=s_1}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K_{1k}}{(s-s_1)^k}\right\}=\frac{K_{1k}}{(k-1)\ !}t^{k-1}e^{s_1 t}$$

$$F(s)=[\frac{K_{11}}{s-s_1}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^2}+\mathrm{L}+\frac{K_{1(p-1)}}{(s-s_1)^{p-1}}+\frac{K_{1p}}{(s-s_1)^p}]$$

$$+\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}}+\mathrm{L}+\frac{K_n}{s-s_n}$$

$$f(t)=(K_{11}+K_{12}t+\frac{K_{13}}{2!}t^2+\Lambda+\frac{K_{1p}}{(p-1)!}t^{p-1})e^{s_1 t}+\sum_{q=p+1}^{n}K_q e^{s_q t}$$

例 求 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$ **的反变换**

解： $D(s)=(s+3)(s+5)^2=0$ $\begin{cases}1\text{个单根}s_1=-3\\2\text{重根}s_2=-5\end{cases}$

$$F(s)=\frac{k_1}{s+3}+\frac{k_{21}}{s+5}+\frac{k_{22}}{(s+5)^2}$$

1）求系数 k_1,k_{21},k_{22}

单根项 $k_1=[(s+3)F(s)]_{s=-3}=2$

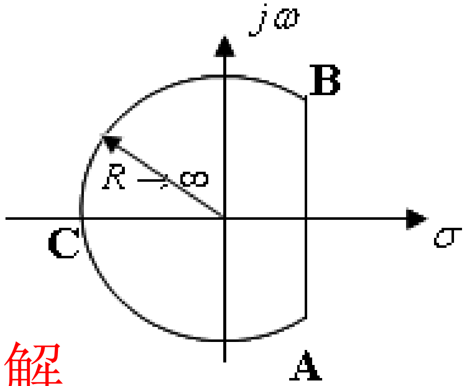
重根项 $k_{21}=[\dfrac{d}{ds}(s+5)^2F(s)]_{s=-5}=\{\dfrac{d}{ds}[\dfrac{s^2+2s+5}{s+3}]\}_{s=-5}=-1$

$$k_{22}=[(s+5)^2F(s)]_{s=-5}=-10$$

2) 求 $f(t)=2e^{-3t}-(1+10t)e^{-5t}\varepsilon(t)$

二：留数定理求解

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$



可以利用复变函数课程的围线积分进行求解

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(s)e^{st}ds=\sum_{i=1}^{n}F(s)e^{st}\text{在极点的}P_i\text{留数}$$

1： s_k 为 F(s)e st 的一阶极点

$$\operatorname{Re}s_k=\left[(s-s_k)F(s)e^{st}\right]_{s=s_k}$$

2： s_k 为 F(s)e st 的p阶极点

$$\operatorname{Res}_k=\frac{1}{(p-1)\ !}\left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^pF(s)e^{st}\right]_{s=s_k}$$

注意： 若 $f(t)$含$\delta(t)$及其导数时，需先将 $F(s)$分为多项式与真分式之和。

例1 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+3)^2}$ 的反变换 $(\sigma>0)$

解： $D(s)=s(s+3)^2$ $\begin{cases}\text{一阶极点}s_1=0\\ \text{二阶极点}s_2=-3\end{cases}$ **(均为左侧极点)**

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Re}\,s_k=\mathrm{Re}\,s_1+\mathrm{Re}\,s_2$$

$$\mathrm{Re}\,s_1=[(s-0)\frac{1}{s(s+3)^2}e^{st}]_{s=0}=\frac{1}{9}$$

$$\mathrm{Re}\,s_2=\frac{1}{1!}\{\frac{d}{ds}[(s+3)^2\frac{1}{s(s+3)^2}e^{st}]_{s=-3}=-\frac{1}{3}te^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-3t}$$

$$\therefore f(t)=(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}e^{-3t}-\frac{1}{3}te^{-3t})\varepsilon(t)$$

本讲小结

拉普拉斯反变换

- 部分分式展开方式求解
  - 系数的两种计算方式，洛比塔方法；
  - 无重根和有重根的系数计算。
- 围线积分的方式求解
  - 理解约当引理和熟练掌握留数计算方法。

信号与线性系统

第 **10** 次课外作业

教材习题: 5.4、 5.6