信号与线性系统

第 15讲

教材位置: 第6章 连续时间系统的系统函数

§6.6

内容概要: 系统的稳定性

开讲前言-前讲回顾

- 系统函数的定义
- 系统函数的表示方法
  - 频率特性、复轨迹、极点零点图
  - 重点介绍极零图的表示方法
- 系统函数极点零点分布与系统稳定性
  - 右半平面极点系统不稳定
  - 左半平面极点系统稳定
  - 虚轴极点特殊考虑
- 系统函数极点零点分布与系统频率特性
  - 系统函数极点零点的矢量表示
  - 极点零点附近的幅度、相位特征

开讲前言－本讲导入

- 系统稳定性判断的意义
  - 无源系统稳定
  - 有源系统不一定稳定
  - 有源反馈系统，稳定性是设计中重要问题
- 稳定性的定义
  - 从直观感性的认识到严格数学的定义
- 稳定性的判定
  - 响应形式的分析
  - 工程判定方法

一：系统的稳定性

1：定义和条件

1）定义：对于有限（有界）激励只能产生有限（有界）响应的系统称为稳定系统，也叫有界输入有界输出（BIBO）稳定系统，即

若激励 $$|e(t)| \le M_e, 0 \le t < \infty$$

则响应函数 $$|r(t)| \le M_r, 0 \le t < \infty$$

2）条件: 系统稳定的充分和必要条件是：系统的冲激响应绝对可积，即

$$\int_0^\infty |h(t)| dt \le M$$ **(M为正常数)**

根据稳定条件：$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ （绝对可积）

故在时域

$(1): t \to \infty, h(t) \to 0$ (消失) 系统稳定

$(2): t \to \infty, h(t)$ 继续增长， 系统不稳定

$(3): t \to \infty, h(t) \to$ 有限值或等幅振荡，系统临(边)界稳定

在复频域：

（1）系统稳定：全部极点均分布在 s 左半平面

（2）系统不稳定：只要有一个极点分布在 s 右半平面, 或虚轴上二节极点

（3）临界稳定：单阶极点分布在虚轴上

复变函数理论：S为0和无穷大都是在虚轴上

2. 稳定系统的性质

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

若$n<m$, $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{b_m s^m}{a_n s^n}\to\infty$

即在无穷大处有一（*m-n*）阶极点

m > n +1：系统可能不稳定

m = n +1：系统可能处于临界稳定

对于稳定系统，m 和 n 须满足 m ≤ n

若 m > n， s 在无穷大处有（m – n ）阶极点，而无穷大在虚轴上，稳定系统在虚轴上不能有重阶极点，故有 m – n ≤ 1，既得 m ≤ n +1。

二：系统的稳定性————判断

1：稳定的必要条件

将H(s)的分母D(s)多项式分解，稳定系统只出现：

(s+a)—实根，(s^2+bs+c)—复根。（a、b、c为正）

$$D(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

多项式系数a_n～a_0都应为正值(或全部为负值)

2：系统临界稳定的必要条件

- 有一零根：有因子S

D(s)无缺项，仅允许a_0=0。

- 一对共轭复根：有因子S^2+d

D(s)缺全部的偶次项(包括a_0项)，或缺全部的奇次项。

稳定系统 $H(s)$ 表示式中 $D(s)$ 系数 a_i 具有以下性质：

（ i ） a_i 全为正或负号

（ ii ） $D(s)$ 无缺项（可以 $a_0=0$）

缺 s 的全部奇数项或全部偶数项——临界稳定

例 （1）$H_1(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s^3+4s^2-3s+2}$ 不满足（ i ） ——不稳定

（2）$H_2(s)=\dfrac{s^3+s^2+s+2}{2s^3+7s+9}$ 不满足（ ii ） ——不稳定

（3）$H_3(s)=\dfrac{s^2+4s+2}{3s^3+s^2+2s+8}$ 满足（ i ）、（ ii ）可能稳定

进一步确定：

$$D(s)=3s^3+s^2+2s+8=(s^2-s+2)(3s+4)$$

$$s^2-s+2=(s-p_1)(s-p_2)$$

$$p_{1,2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$$ 在右半平面

$$3s+4=0\rightarrow p=-\frac{4}{3}$$

$\therefore H_3(s)$ 系统不稳定

以上两个性质是判断系统稳定的必要条件

罗斯—霍维茨（Routh-Hurwitz）准则（判据）

内容:若 $D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$

则 $D(s)=0$**的根全部位于s左半平面的充要条件是：**

（ i ）$D(s)$ **的全部系数** a_i **为正，无缺项；**

（ ii ）**罗斯—霍维茨阵列中第一列数字**(A_i)**符号相同**

第一列称为罗斯数列。

罗斯定理：在罗斯数列中，若各数字符号不尽相同，
则顺次计算符号变化的次数等于方程所具有的实部为正的根数。

R—H阵列：

第1行	A_n a_n	B_n a_{n-2}	C_n a_{n-4}	D_n a_{n-6}	… …
第2行	A_{n-1} a_{n-1}	B_{n-1} a_{n-3}	C_{n-1} a_{n-5}	D_{n-1} a_{n-7}	…
第3行	A_{n-2}	B_{n-2}	C_{n-2}	D_{n-2}	…
第4行	A_{n-3}	B_{n-3}	C_{n-3}	D_{n-3}	…
⋮					
第(n-1)行	A_2	B_2	0		
第n行	A_1	0	0		
第(n+1)行	A_0	0	0		

$$A_{i-1} = \frac{A_i B_{i+1} - A_{i+1} B_i}{A_i},$$

$$B_{i-1} = \frac{A_i C_{i+1} - A_{i+1} C_i}{A_i},$$

$$\cdots$$

$$A_{n-2} = \frac{A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1}}{A_{n-1}}, \quad B_{n-2} = \frac{A_{n-1} C_n - A_n C_{n-1}}{A_{n-1}}, \quad C_{n-2} = \frac{A_{n-1} D_n - A_n D_{n-1}}{A_{n-1}},$$

$$A_{n-3} = \frac{A_{n-2} B_{n-1} - A_{n-1} B_{n-2}}{A_{n-2}}, \quad B_{n-3} = \frac{A_{n-2} C_{n-1} - A_{n-1} C_{n-2}}{A_{n-2}}, \quad \cdots$$

$$\cdots$$

例1 $D(s)=(s+1)(s^4+s^3+2s^2+2s+3)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+5s+3=0$

***R*一*H*阵列：**

1	**3**	**5**
2	**4**	**3**
$\dfrac{2\times3-1\times4}{2}=1$	$\dfrac{2\times5-1\times3}{2}=\dfrac{7}{2}$	**0**
$\dfrac{1\times4-2\times\frac{7}{2}}{1}=-3$	$\dfrac{1\times3-2\times0}{1}=3$	**0**
$\dfrac{-3\times\frac{7}{2}-1\times3}{-3}=\dfrac{9}{2}$	$\dfrac{-3\times0-1\times0}{-3}=0$	**0**
3	**0**	**0**

***R*一*H*阵列第一列系数两次变换符号（1→-3→9/2），**

故方程有两个正实部根，

由此可以判定与此特征方程对应的系统不稳定。

例2 $D(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$

R —H阵列：

1	2	3	0
1	2	0	0
(0)	3	0	0
ε	3	0	0
$2-3/\varepsilon$	0	0	
3	0		

特例1：首项为0，用无穷小ε 代替

排完阵列后再令$\varepsilon \to 0$从而加以判别

当$\varepsilon \to 0+$时，$2-3/\varepsilon$ 为负值，R —H数列变号两次，

即该系统有两个正实部根，故系统不稳定。

例3 $D(s)=s^5+s^4+3s^3+3s^2+2s+2=0$

s^5	**1**	**3**	**2**
s^4	**1**	**3**	**2**
s^3	**(0**	**0)**	**0**
	4	**6**	**0**
s^2	**3/2**	**2**	**0**
s^1	**2/3**	**0**	
s^0	**2**	**0**	

特例2:行元素全部为0，说 明虚轴上可能有极点

处理：由全“0”的上一行组成辅助多项式：s^4+3s^2+2　对其求导得$4s^3+6s$ 以其系数代替全“0”

***R*－*H*数列无符号变化，说明*s*右半平面无极点，再来判断虚轴上的极点是否单阶极点。**

原理：辅助多项式必为原系统特征多项式的一个因式，令它等于零所求得的根也必是原系统函数的极点，这些极点可能分布于虚轴上（缺奇次幂项）。

由　$s^4+3s^2+2=0 \Rightarrow (s^2+1)(s^2+2)=0$

$s^2=-1,-2$

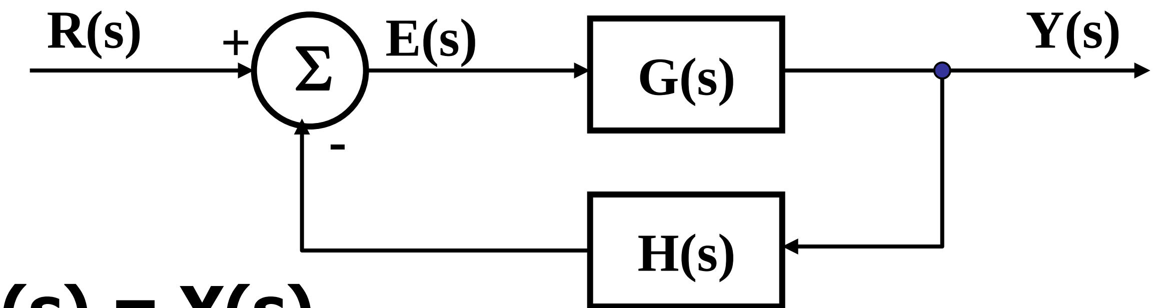
故而　$s_{1,2}=\sqrt{-1}=\pm j$　　$s_{3,4}=\sqrt{-2}=\pm j\sqrt{2}$

即系统函数在虚轴上有4个单阶极点，故系统临界稳定。

事实上：$D(s)=s^5+s^4+3s^3+3s^2+2s+2=(s^4+3s^2+2)(s+1)=0$

反馈系统

- 反馈系统

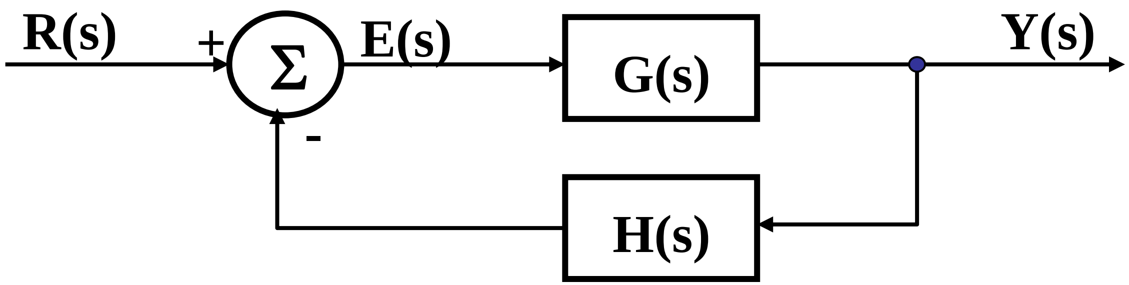


- **E(s) G(s) = Y(s)**
- **[R(s) – H(s)Y(s)]G(s) =Y(s)**
- **R(s)G(s) = Y(s)[1+H(s)G(s)]**

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$$

- 这里 **T(s)** 是整个反馈系统的系统函数，**G(s) H(s)** 为开环转移函数。

- 例题：有反馈系统如图所示，其中$G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+4)}$ ，$H(s)=1$



H(s) =1 时，称为全反馈。问**K**为何值系统稳定？

- 解：该反馈系统的系统函数为

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{K}{s(s+1)(s+4)}}{1+\dfrac{K}{s(s+1)(s+4)}}=\frac{K}{s^3+5s^2+4s+K}$$

$$s^3 + 5s^2 + 4s + K = 0$$

S^3	1	4
S^2	5	K
S^1	$\frac{20-K}{5}$	0
S^0	K	0

$\frac{20-K}{5} > 0$　　及　　$K > 0$

$$0 < K < 20$$

本讲小结

- 稳定性定义
- 稳定性时域分析
  - 冲击响应满足绝对可积条件
- 稳定性复频域分析
  - 系统函数极点在复频域位置与系统稳定
- 根据系统函数判断稳定性
  - 特征方程系数与系统稳定的必要性条件
- R-H判断方法
  - 系统稳定性的充要条件

信号与线性系统

第 15 次课外作业

教材习题: 6.14、 6.15, 6.20