信号与线性系统

第 13 讲

教材位置: 第5章 连续时间系统的复频域分析

§5.10-§5.11

内容概要: 线性系统的模拟与信号流图

开讲前言－本讲导入

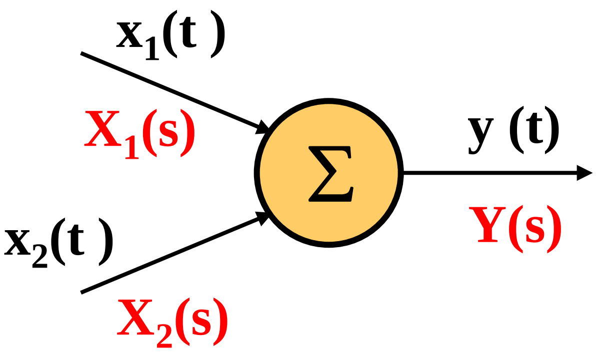
- 已学方法能解决基本的信号与系统分析问题
  - 时域微分积分方程
  - 频域傅立叶变换
  - 复频域拉普拉斯变换
- 较为复杂的系统怎样变得简单
  - 具体分析还是经典方法，但怎样面对复杂系统
  - 利用基本的电路运算功能对复杂系统模拟
  - 将复杂系统的功能关系作图表示并化简计算

一：基本模拟单元

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t)$$

$$= b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

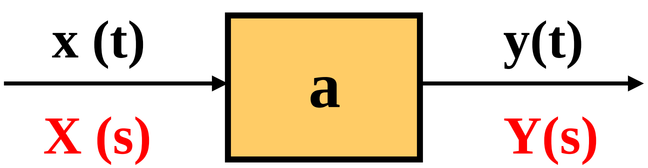
1:加法器



$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

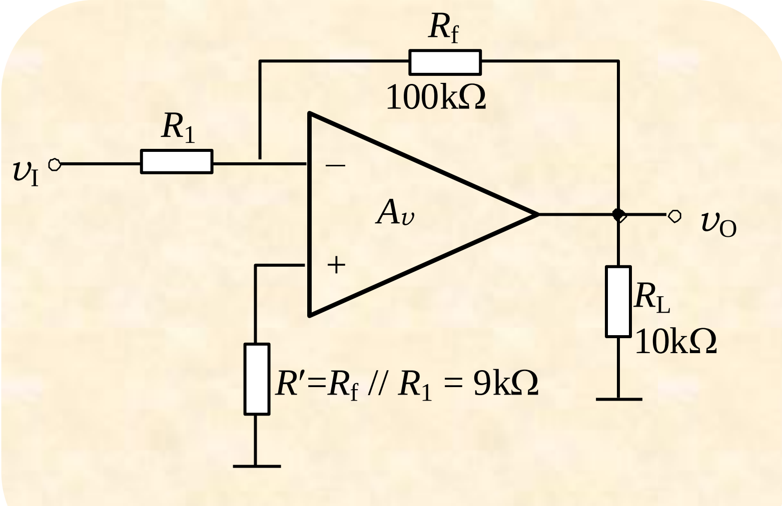
$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

2:标量乘法器



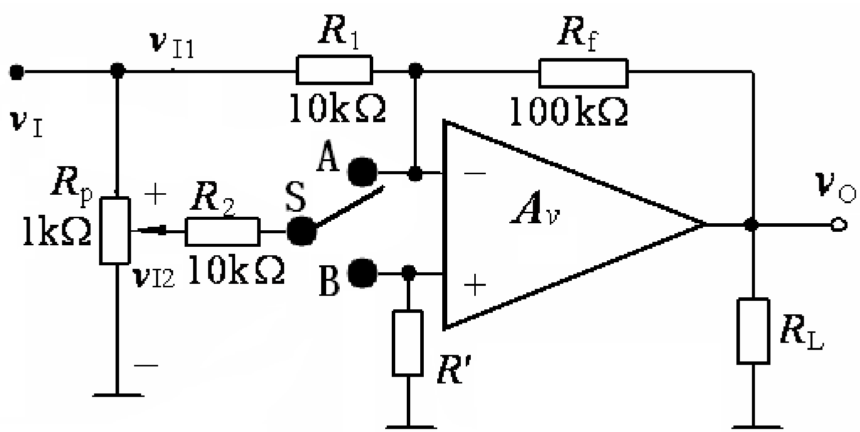
$$y(t) = a\,x(t)$$

$$Y(s) = a\,X(s)$$



反相比例运算电路

$$v_o = -\frac{R_f}{R_1} v_I$$



4.7.7反相比例加法、减法电路

A点 $v_o = -\frac{R_f}{R}(v_{i1} + v_{i2})$

B点 $v_o = -\frac{R_f}{R}(v_{i1} - v_{i2})$

3:积分器

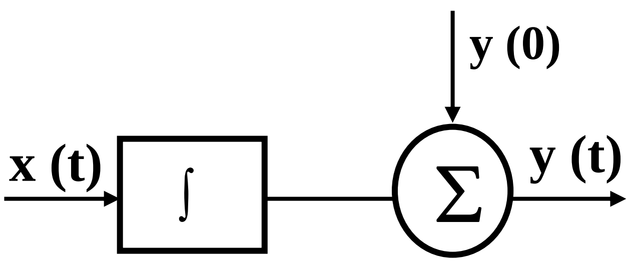
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau$$

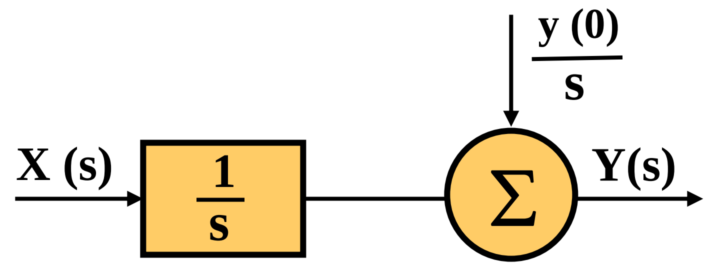
$$=y(0)+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau$$

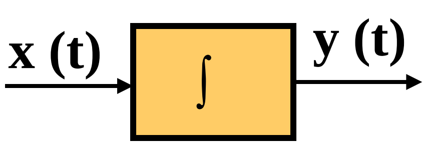
$$y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau \quad \boxed{(y(0)=0)}$$

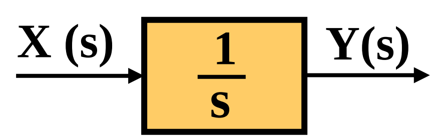
$$Y(s)=\frac{y(0)}{s}+\frac{X(s)}{s}$$

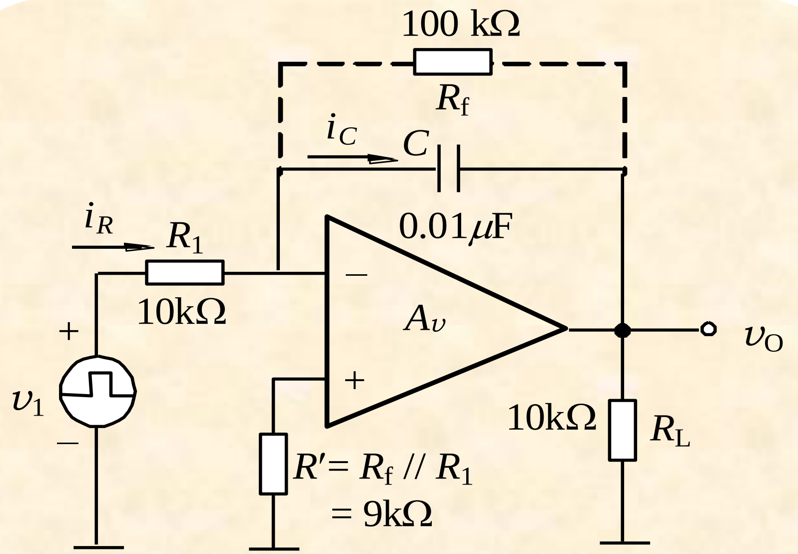
$$Y(s)=\frac{X(s)}{s}$$











比例积分运算电路

$$\upsilon_O(t) = -\frac{1}{R_1 C}\int_0^t \upsilon_1(t)dt$$

二：模拟框图

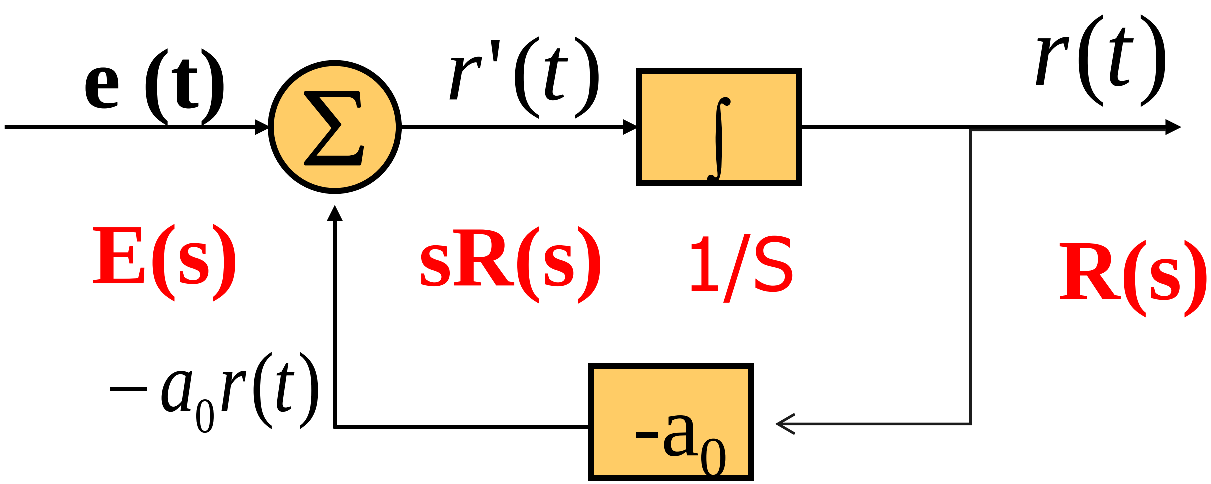
1：直接模拟

- 一阶系统模拟 $r'(t)+a_0r(t)=e(t)$ 初态为0

$$1:\int_0^t r'(t)dt=r(t)$$

$$2:r'(t)=e(t)-a_0r(t)$$

$$sR(s) = E(s) - a_0R(s)$$

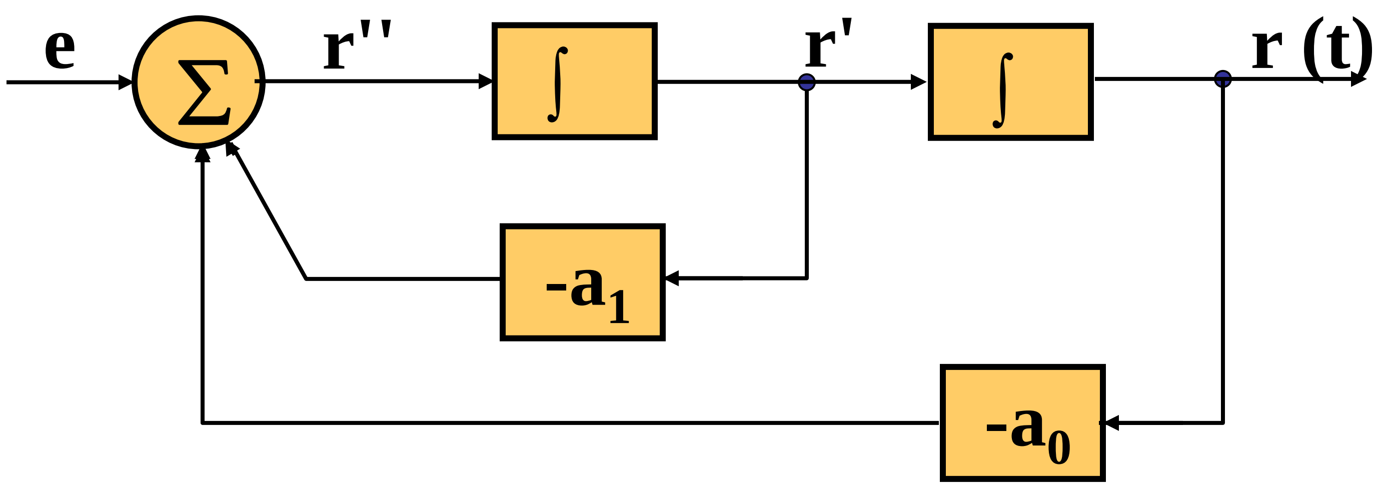


二阶系统模拟

$$r''(t)+a_1r'(t)+a_0r(t)=e(t)$$ 初态为0

$$1:\int_0^t r''(t)dt=r'(t),\qquad \int_0^t r'(t)dt=r(t)$$

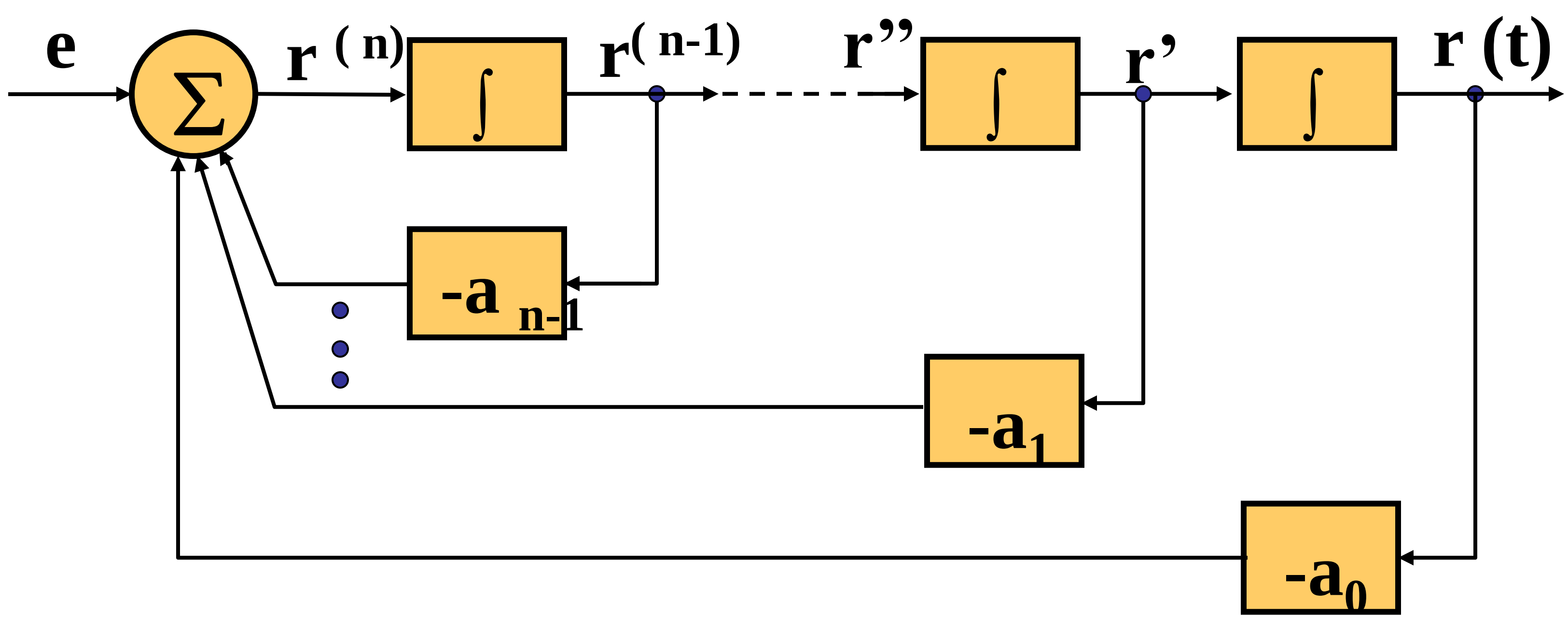
$$2: r''(t)=e(t)-a_1r'(t)-a_0r(t)$$



n阶系统框图

$$r^{(n)}+a_{n-1}r^{(n-1)}+\text{----}+a_1 r'+a_0 r=e$$

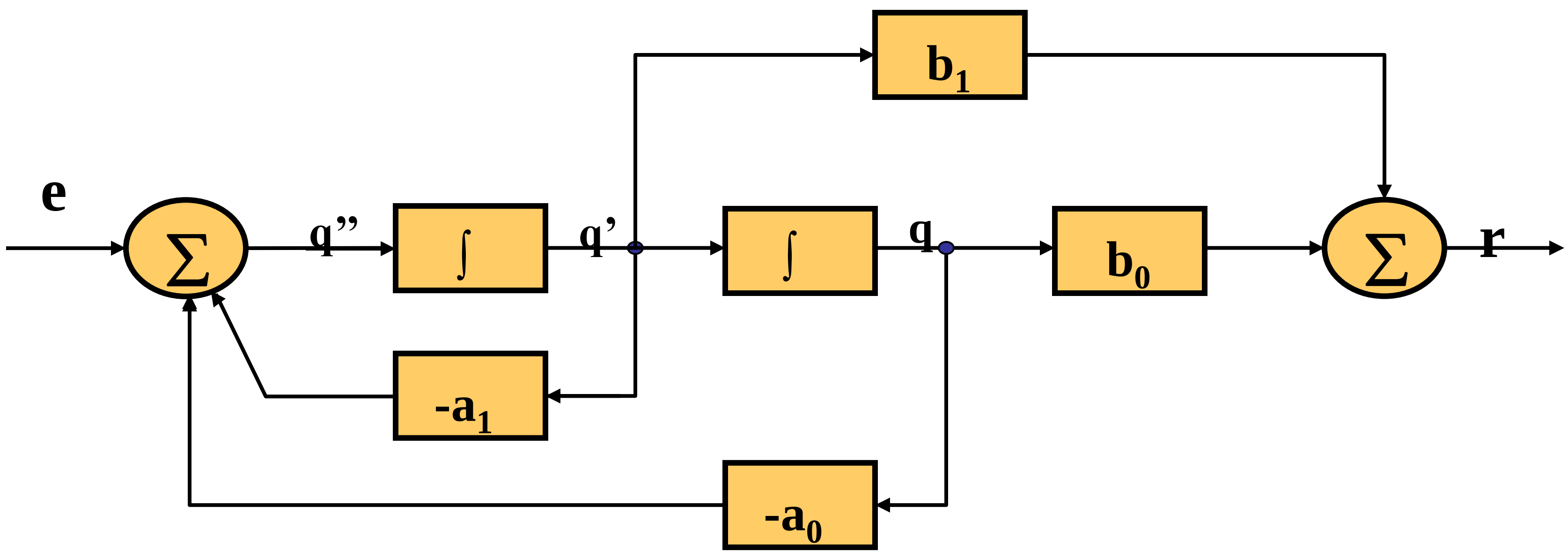
或 $$r^{(n)}=x-a_{n-1}r^{(n-1)}-\text{----}-a_1 r'-a_0 r$$



方程中含有 e 的导数的系统的模拟

$$r'' + a_1 r' + a_0 r = b_1 e' + b_0 e$$

- 引用一辅助函数 q (t)，使
- $e = q'' + a_1 q' + a_0 q$，并且$r = b_1 q' + b_0 q$



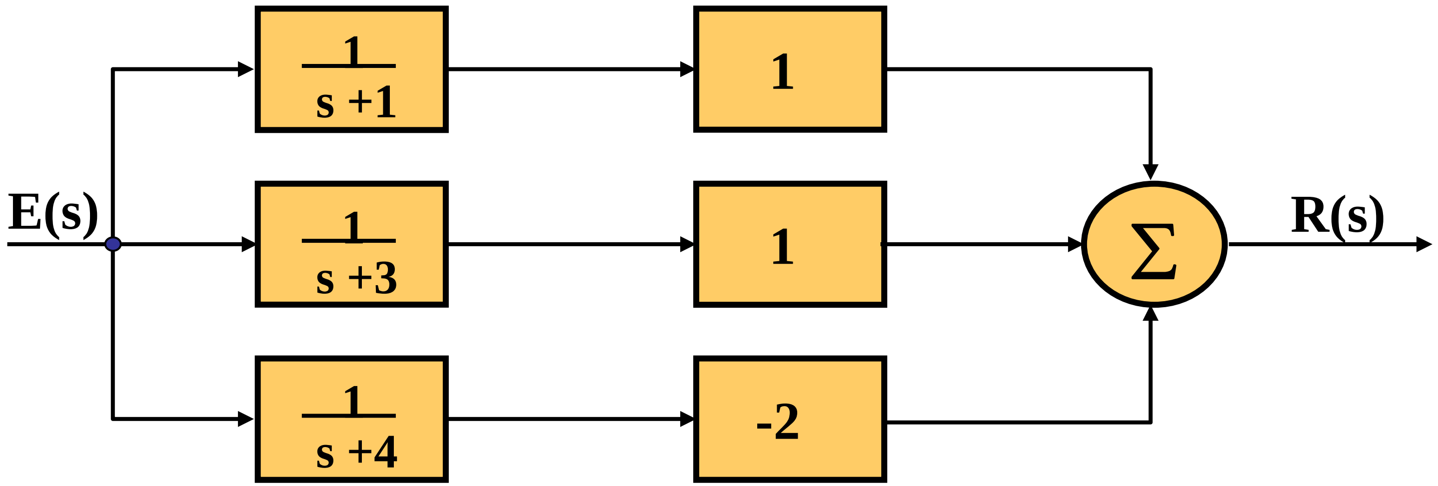
2、模拟框图－并联模拟

- 对于复杂系统，直接模拟网络复杂，隔离性不好
- 将系统函数进行部分分式展开，写成求和方式
- 模拟框图可以并联表示

- 例如

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{4s+10}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

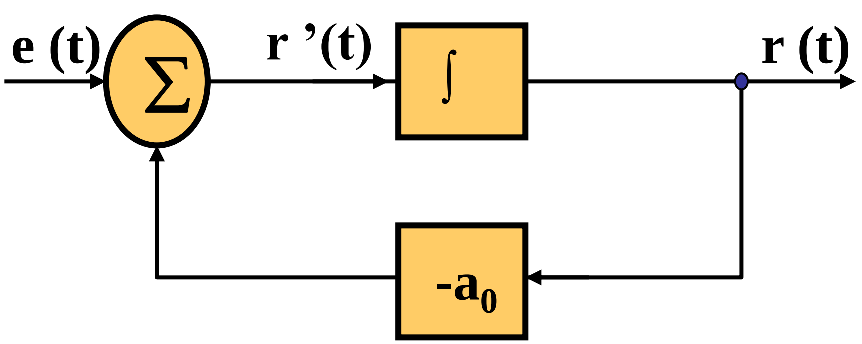


- 其中各个单元

$$R(s)=\frac{1}{s+a}E(s)$$

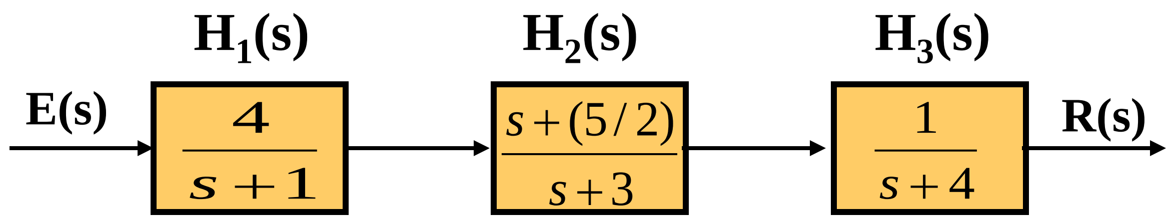
$$sR(s)+aR(s)=E(s)$$

r’ + ar = e



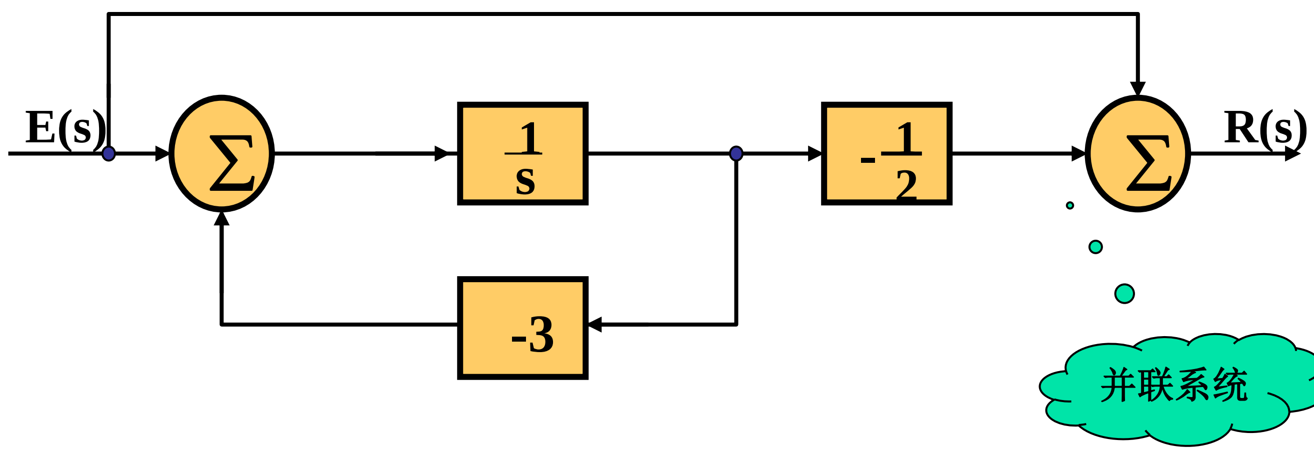
3、模拟框图－级联模拟

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{4(s+\frac{5}{2})}{(s+1)(s+3)(s+4)}=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{s+\frac{5}{2}}{s+3}\cdot\frac{1}{s+4}$$



$$H_2(s)=\frac{s+\frac{5}{2}}{s+3}$$

$$=1+\frac{-\frac{1}{2}}{s+3}$$



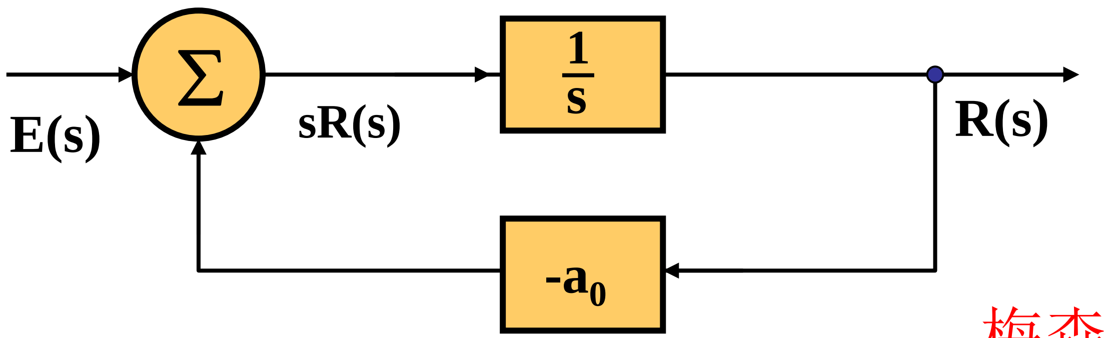
三：信号流图

问题提出

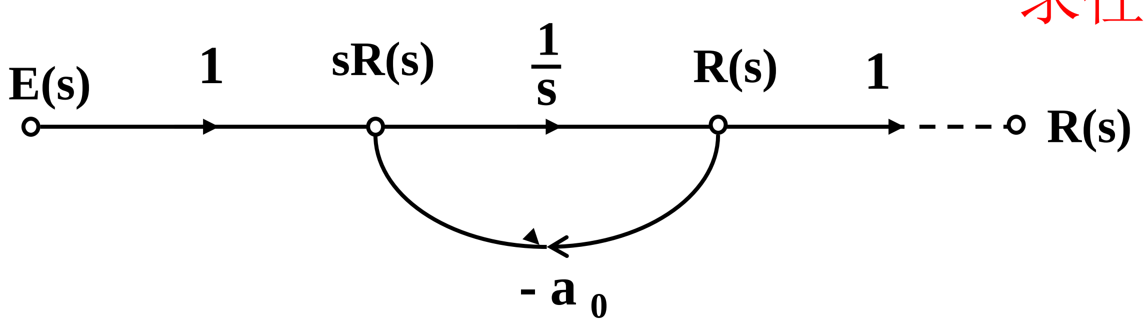
- 转移函数的求取是系统分析重要的问题
- 多回路、多节点复杂情况下，输入一输出法推导系统转移函数不易

1:信号流图定义结点、路径以及标注在路径上的传输值的模拟图

- 结点代表信号变量，同时兼有加法器功能
- 路径连接结点，变量间的因果关系，起点因，终点果
- 传输值是两个变量之间的转移函数



梅森（Mason）公式
求任意流图的的传输函数



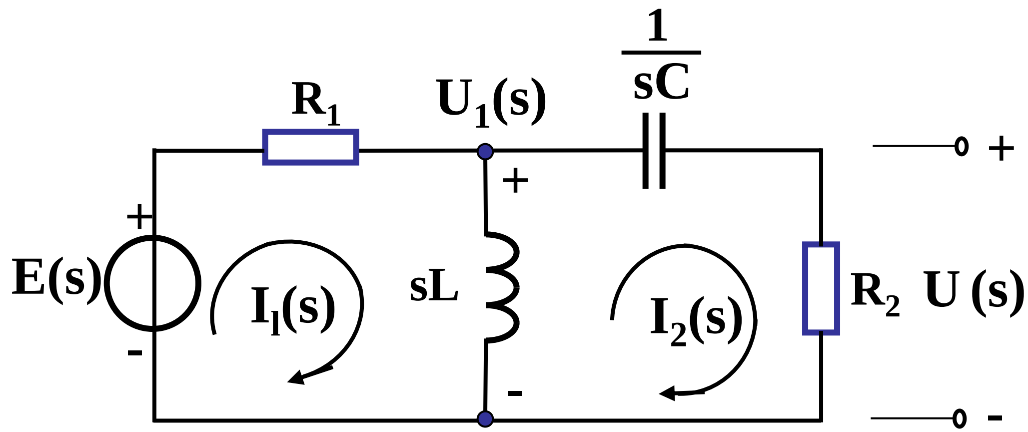
2、基本术语

- 结点－表示信号变量的点
- 支路－表示信号变量之间的因果关系
- 支路传输值－支路变量之间的转移函数
- 入支路－流向结点的支路
- 出支路－流出结点的支路
- 源结点－仅有出支路的结点，一般表示输入激励信号
- 汇结点－仅有入支路的结点，一般表示输出响应信号
- 闭环－信号流经的闭合路径
- 自环－仅有一条支路的闭环
- 前向路径－源结点到汇结点不含任何环路的信号流通路径

3、信号流图构造

- 由电路图找出从输入信号到输出信号的流程及流程中的各有关信号变量；
- 找出各信号变量间相互的传输函数；
- 用结点表示各信号变量。用支路表示信号流向及传输值并按信号的流程相连接。

- 例：
- 电路形式
- 信号变量与流程
- 传输函数
- 信号流图



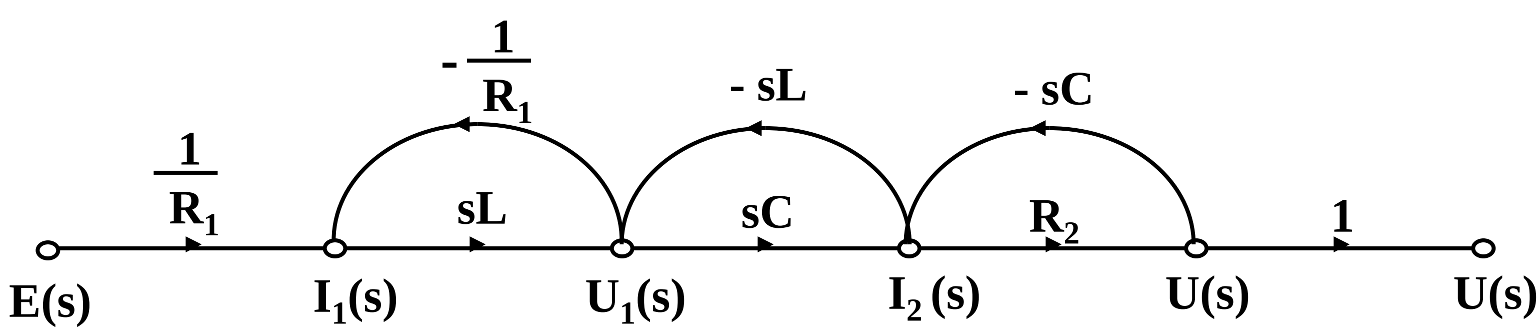
E(s)→I1(s)→U1(s)→I2(s)→U(s)

$$I_1(s)=\frac{E(s)-U_1(s)}{R_1}=\frac{E(s)}{R_1}-\frac{U_1(s)}{R_1}$$

$$U_1(s)=[I_1(s)-I_2(s)]Ls=LsI_1(s)-LsI_2(s)$$

$$I_2(s)=\frac{U_1(s)-U(s)}{\frac{1}{Cs}}=CsU_1(s)-CsU(s)$$

$$U(s)=R_2I_2(s)$$



5、梅森（Mason）公式

$$H_{XY} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} G_k \Delta_k$$

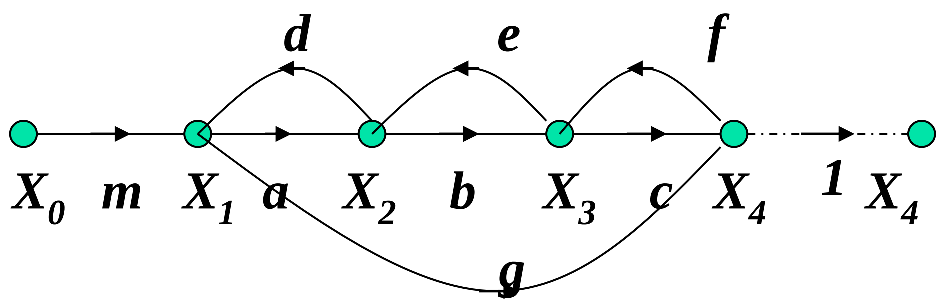
- H_{XY}—源结点X至非源结点Y的总传输值
- n—源结点X至非源结点Y的正向传输路径数
- G_K—源结点X至非源结点Y的第K条正向传输路径的传输值
- △—信号流图的特征行列式

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i \bullet L_j - \sum_{i,j,k} L_i \bullet L_j \bullet L_k + \cdots$$

  - ＝1—（各环的传输值之和）
  - ＋（所有的任取两个互不接触环的传输值乘积之和）
  - －（所有的任取三个互不接触环的传输值乘积之和）.....
- Δ_K—与第*k*条正向传输路径不接触部分的流图的△值

【互不接触】指图的两部分间没有公共的结点

- **例1 求** $H_{X_0X_4}=\dfrac{X_4}{X_0}$



- 共有**4**环

$L_1=ad \quad L_2=be \quad L_3=cf \quad L_4=gfed$

- 其中只有 **L_1** 和**L_3** 互不接触

$$\Delta=1-(ad+be+cf+gfed)+adcf$$

- 有**2**条正向传输路径：

$$G_1=mabc \qquad G_2=mg$$

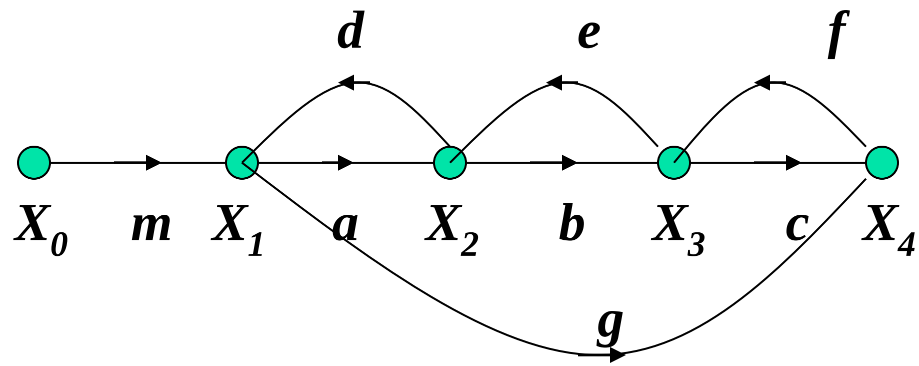
- 由于各环都与正向传输路径**G_1**相接触

$$\therefore \Delta_1=1 \qquad \therefore \Delta_2=1-be$$

- 只有环路**L_2**不与正向传输路径**G_2**相接触
- 总传输值

$$H_{X_0X_4}=\frac{X_4}{X_0}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2}G_k\Delta_k=\frac{1}{\Delta}(G_1\Delta_1+G_2\Delta_2)=\frac{mabc+mg(1-be)}{1-(ad+be+cf+gfed)+adcf}$$

- **例2 求** $H_{X_0X_3}=\dfrac{X_3}{X_0}$



- 流图没有变化，△不变

$$\Delta = 1-(ad+be+cf+gfed)+adcf$$

- 有2条正向传输路径
- △1＝1（各环都与正向传输路径***mab***有公共结点）
- △2＝1（各环都与正向传输路径***mgf***有公共结点）
- 所求传输值

$$\therefore H_{X_0X_3}=\frac{1}{\Delta}(G_1\Delta_1+G_2\Delta_2)=\frac{mab+mgf}{1-(ad+be+cf+gfed)+adcf}$$

本讲小结

- 系统的模拟
  - 3种基本运算器—加法、乘法、积分
  - 直接模拟作图
    - 仅有对输出信号的多阶处理
    - 对输入信号的多阶处理
  - 子系统串连、并联的模拟作图
- 信号流图
  - 视察直接作图
  - 矩阵方程作图
  - 支路的等效化简
  - 梅森公式计算总传输值

信号与线性系统

第 13 次课外作业

教材习题: 5.33、 5.34