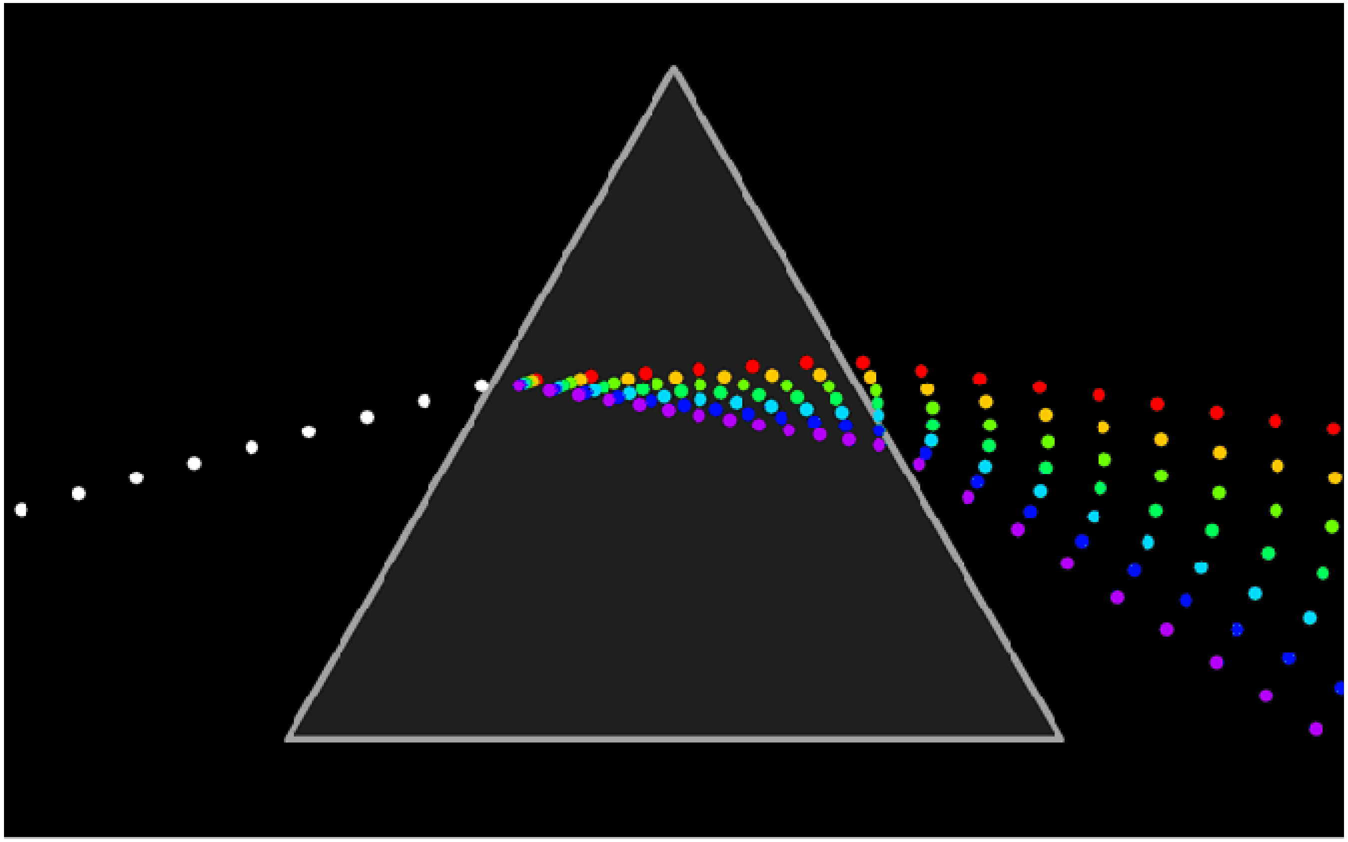
信号与线性系统

第 5 讲

教材位置： 第3章 连续信号的正交分解
§3.4-§3.5

内容概要： 周期信号的频谱，非周期信号的频谱，傅里叶变换



开讲前言-本讲导入

分析

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}$$

针对给定的信号分析其傅里叶系数(分量幅度和相位)

综合

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

利用给定的傅里叶系数(分量幅度和相位)重建信号

开讲前言-本讲导入

- 信号表示为傅里叶级数，即信号可由不同频率的正弦信号加权构成

- 要知道信号由哪些频率的正弦信号组成，知道其加权值，这就是关于信号的频谱问题

- 频谱：信号由不同频率的信号构成，各个频率信号的幅度，相位。

指数信号与正弦信号

$$(1)\ f(t)=Ce^{j\omega_0 t} \qquad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

一个周期的总能量 $\quad E_{period}=\int_0^{T_0}\left|Ce^{j\omega_0 t}\right|^2 dt=C^2T_0$

一个周期平均功率 $\quad P_{period}=\dfrac{E_{period}}{T_0}=C^2$

$$(2)\ f(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)=\frac{A}{2}\left(e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right)$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(t)\right|^2 dt=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)dt$$

$$=\frac{A^2\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}\frac{1}{2}[1+2\cos(2\omega_0 t+2\theta)]dt=\frac{A^2}{2}$$

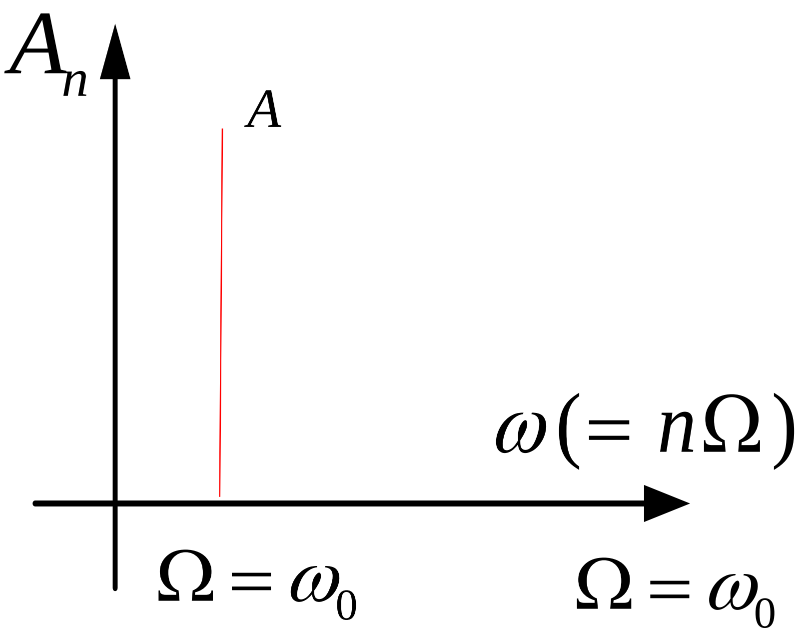
双边频谱

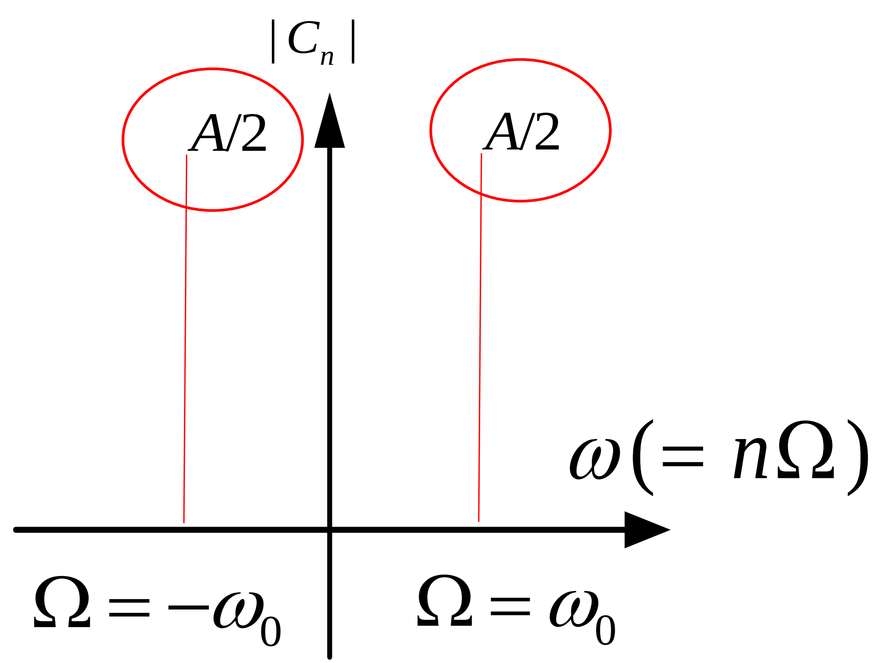
$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \quad = \frac{A}{2}(e^{j(\omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\omega_0 t+\theta)})$$

三角傅里叶级数

$$= \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t}$$

指数傅里叶级数





本讲内容

- 周期信号的频谱分析
- 对称周期信号的频谱分析
- 非周期信号的频谱分析
- 傅里叶变换

一：周期信号的频谱

周期信号的频谱的定义

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

各频率分量的振幅：振幅频谱　$A_n\to\omega(=n\Omega)$

各频率分量的相位：相位频谱　$\varphi_n\to\omega(=n\Omega)$

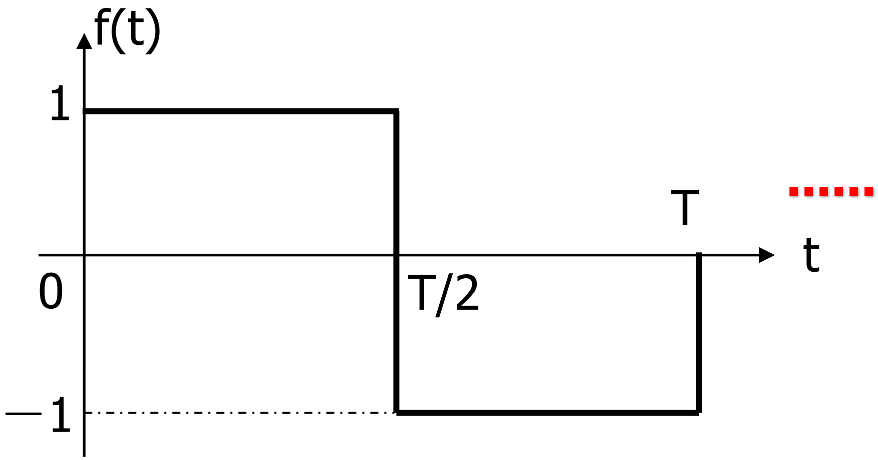
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)Sin(n\Omega t)dt$$

$$\begin{cases}A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\\ \varphi_n=-arctg\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

周期方波的三角傅里叶级数分解

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ f(t) &= -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{aligned}\right\} \cdots\cdots$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\Omega t)dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\Omega t)dt = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{n=1,3,5,...} \\ 0 & \end{cases}$$

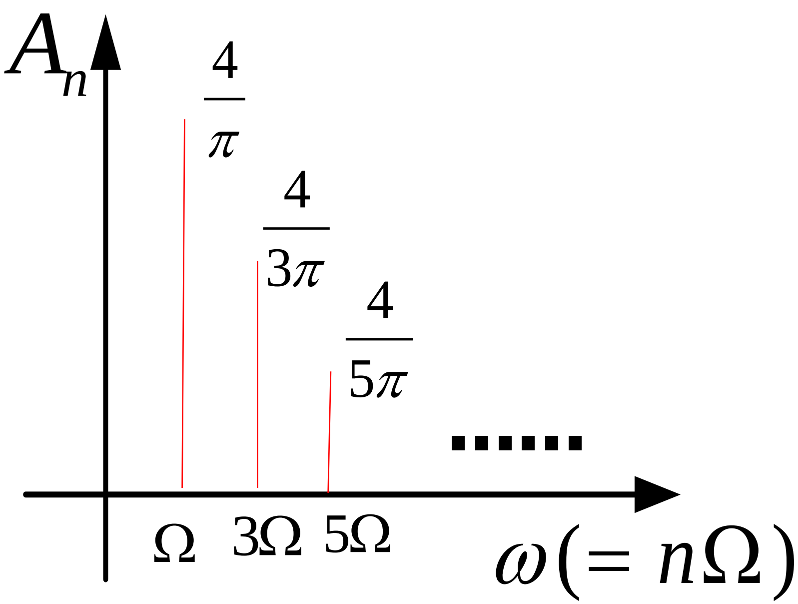
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\Omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\Omega t) + \ldots\right]$$

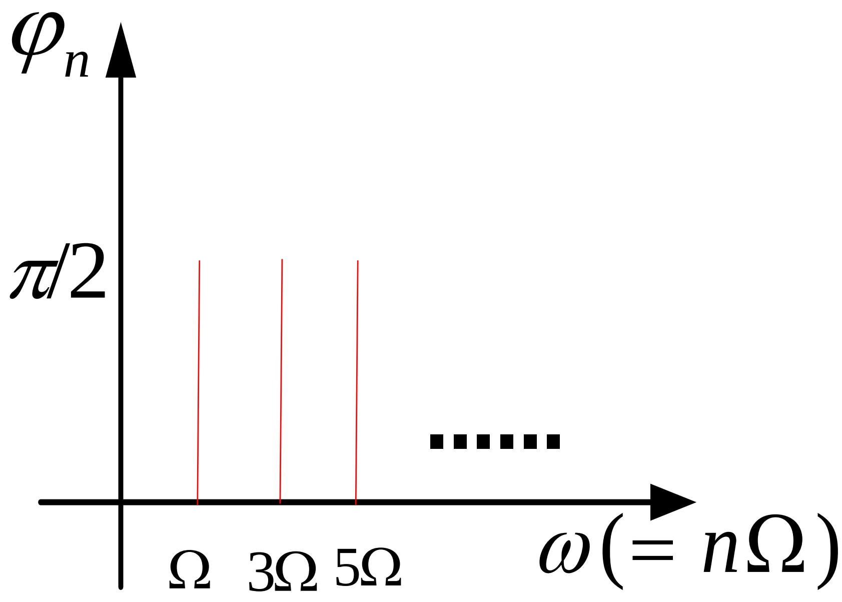
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

各频率分量的振幅：振幅频谱　$A_n \to \omega(=n\Omega)$

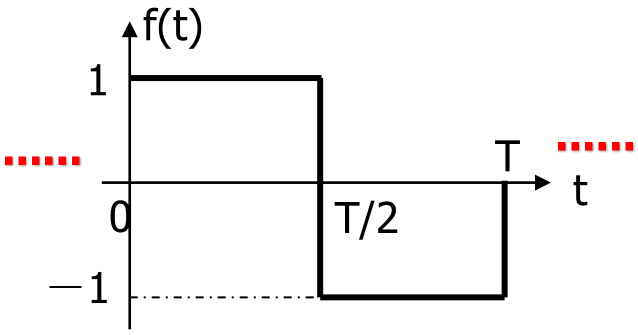
各频率分量的相位：相位频谱　$\varphi_n \to \omega(=n\Omega)$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\ldots\right]$$

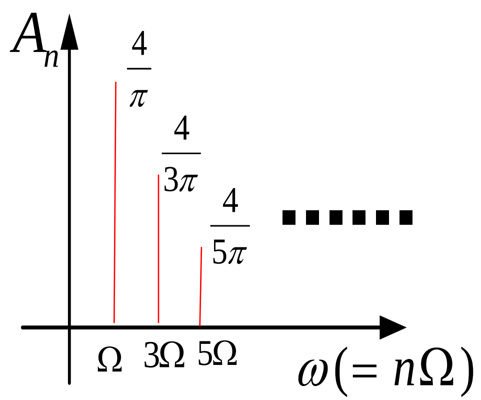


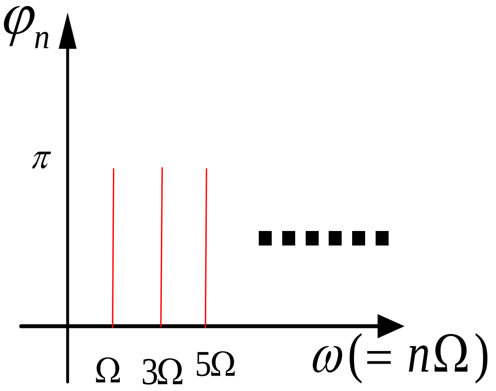


时域



频域





不同时刻的幅度

不同频率分量的幅度和相位

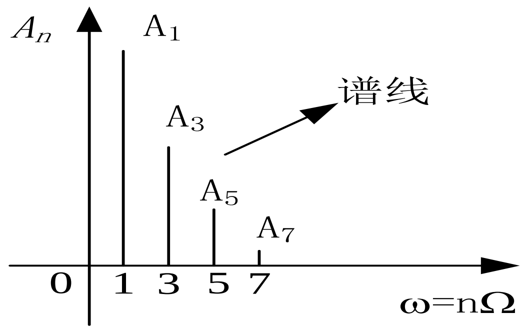
$$\left.\begin{array}{ll} f(t)=1 & 0<t<\frac{T}{2} \\ f(t)=-1 & \frac{T}{2}<t<T \end{array}\right\}$$

$$A_n \to \omega(=n\Omega)$$

$$\varphi_n \to \omega(=n\Omega)$$

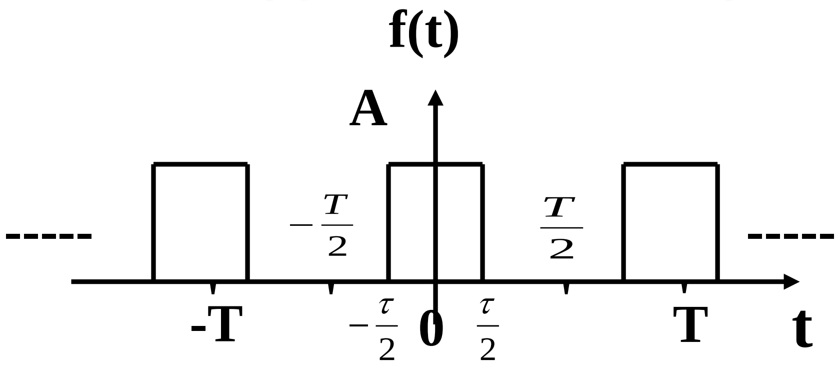
$$A_n Cos\,(n\Omega t+\varphi_n)$$

周期信号的频谱特点



- 离散性—频谱是不连续的线条。
- 谐波性—线条只出现在谐波位置。
- 收敛性—谱线高度为该谐波的振幅，总趋势是收敛的

周期性矩形脉冲函数频谱



$$f(t)=\begin{cases} A & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

周期性矩形脉冲信号

$$\dot{A}_n = 2C_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-jn\Omega t}dt \qquad \boxed{\Omega=\frac{2\pi}{T}}$$

$$=\frac{2A\tau}{T}\frac{1}{n\Omega\tau/2}Sin\frac{n\Omega\tau}{2}=\frac{2A\tau}{T}Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})$$

抽样函数 $Sa(x)=\dfrac{Sinx}{x}$

周期性矩形脉冲函数频谱

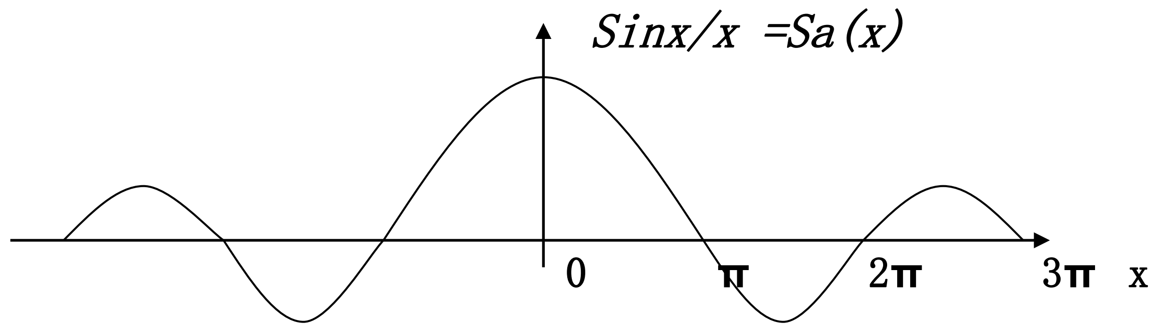
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A\tau}{T}Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})e^{jn\Omega t}$$

$$\boxed{\Omega=\frac{2\pi}{T}}$$

直流分量 $$\mathbf{C}_0=\frac{\mathbf{A}_0}{2}=\frac{A\tau}{T}$$

N次谐波振幅 $$A_n=\left|\dot{A}_n\right|=\frac{2A\tau}{T}\left|Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})\right|$$

与 $\frac{\tau}{T}$ 有关 $$=\frac{2A\tau}{T}\left|Sa(\frac{n\pi\tau}{T})\right|$$



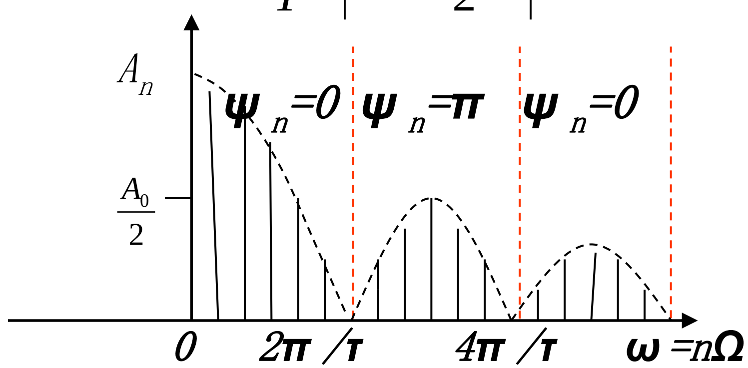
零点位置：

$$x = n\Omega\tau/2 = m\pi$$

$$n\Omega = m\cdot 2\pi/\tau$$

零点 $A_n=0$,$\omega=n\Omega=m\cdot 2\pi/\tau$ 时

$$\frac{2A\tau}{T}\left|Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\right|$$



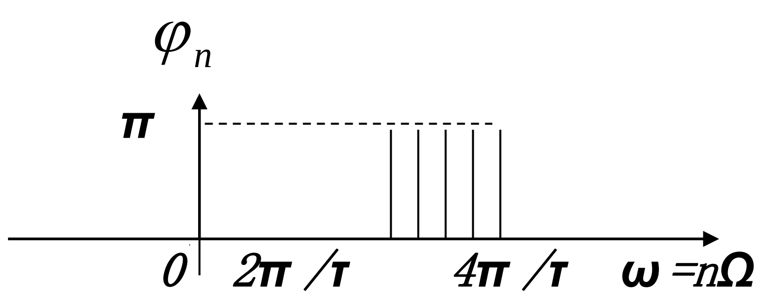
T=6τ ：

设 $T=6\tau$ ， 则 $A_0=(2/6)A$ ， $2\pi/\tau=6\Omega$,

即每个包络内有5根谱线

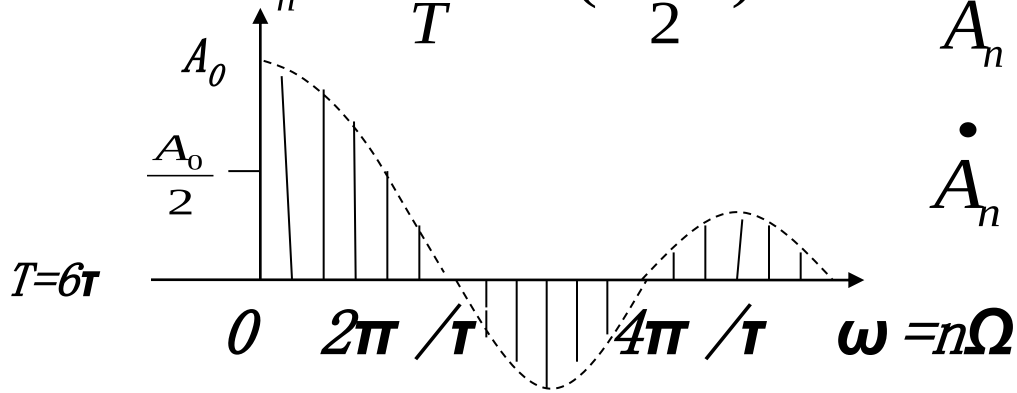
相位谱：$\varphi_n \sim \omega$ 图

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, \dot{A}_n = + \\ \pi, \dot{A}_n = - \end{cases}$$



复数振幅 $\dot{A}_n = A_n e^{j\varphi_n}$ 是实数

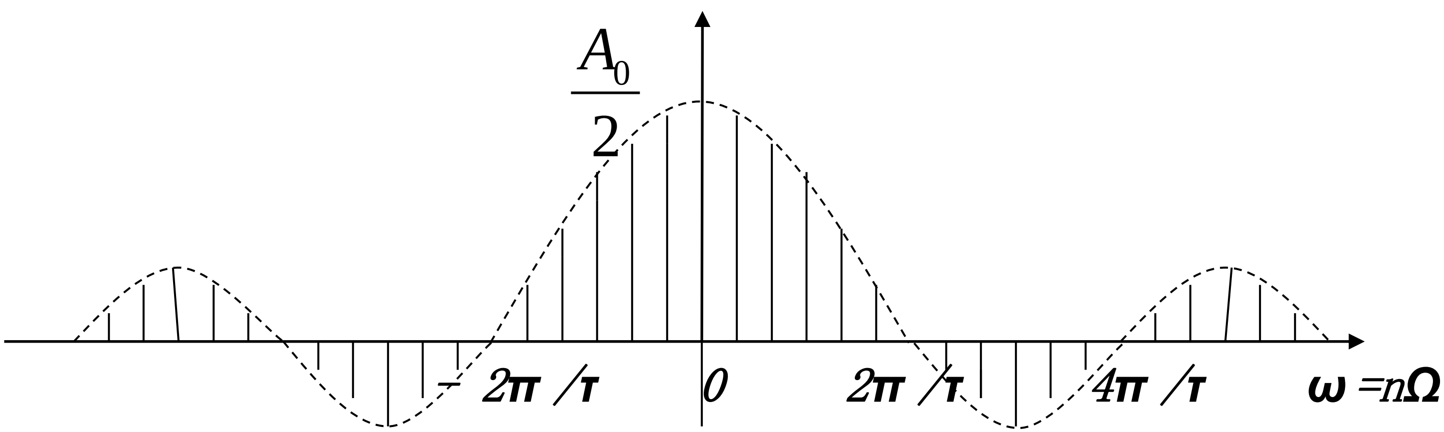
$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$



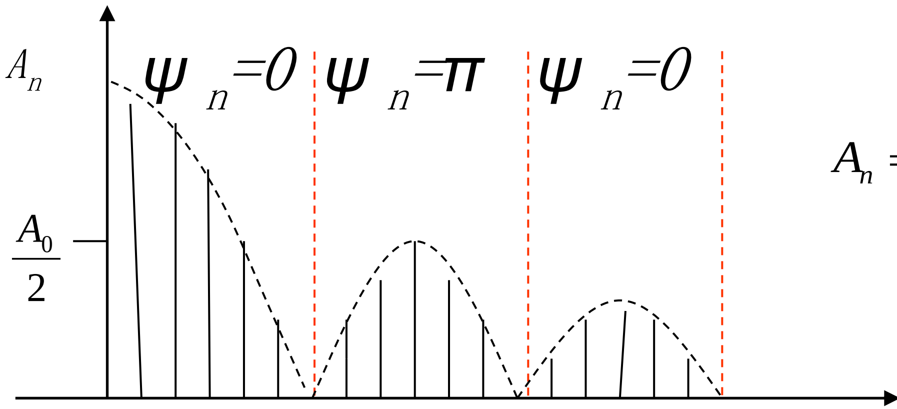
$$\dot{A}_n > 0, \varphi_n = 0$$

$$\dot{A}_n < 0, \varphi_n = \pi$$

$$C_n = \frac{1}{2}\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$



T、τ 对信号频谱结构的影响



$$A_n=\frac{2A\tau}{T}\left|Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\right|=\frac{2A\tau}{T}\left|Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\right|$$

① T一定时，（Ω一定）$\tau\downarrow\rightarrow\begin{cases}A_n\downarrow\text{且各谐波振幅渐趋减小的收敛速度也变慢了}\\ \dfrac{2\pi}{\tau}\uparrow\text{振幅为零的谐波次数提高了（但谱线疏密不变）}\end{cases}$

② τ一定时，（$\dfrac{2\pi}{\tau}$一定）$T\uparrow\rightarrow\begin{cases}A_n\downarrow\\ \Omega(=\dfrac{2\pi}{T})\downarrow\text{谱线间间隔减小，即谱线变密}\end{cases}$

T 无限趋大时，谱线间隔无限趋小，振幅也无限趋小，

周期脉冲 $\longrightarrow$ 非周期性单脉冲

非周期信号可看作 $T\rightarrow\infty$，$\Omega\rightarrow 0$ 的周期信号问题

二:对称周期信号的频谱分析

对称信号的傅里叶级数

- 周期函数展开为三角傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\underline{a_n\cos n\Omega t}+b_n\sin n\Omega t)$$

偶函数项　　　　奇函数项

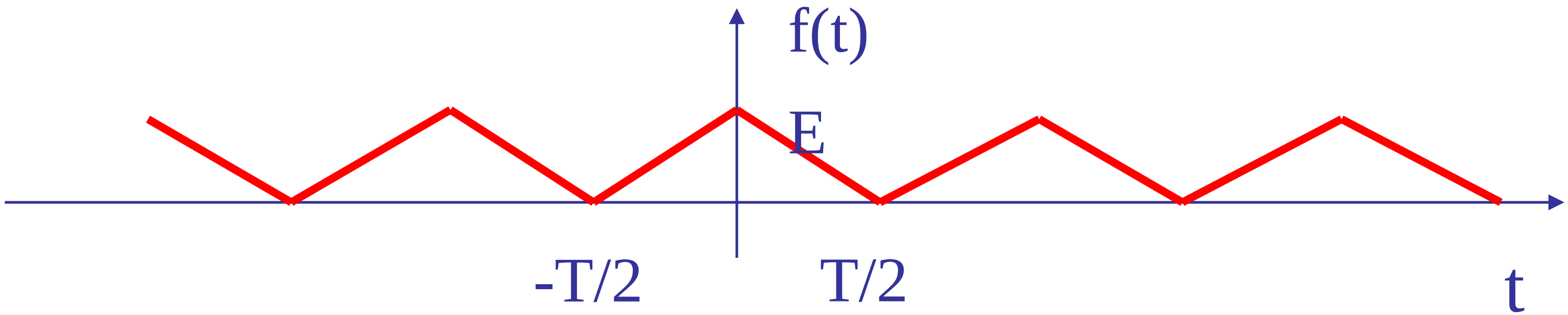
- 余弦函数为偶函数，正弦函数为奇函数

1: 偶函数 $f(t)=f(-t)$

$$b_n=0 \quad a_n=\frac{4}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$$ 只有直流分量和余弦项

C_n是实数 $C_n=C_{-n}=\frac{a_n}{2}$ $\qquad f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$



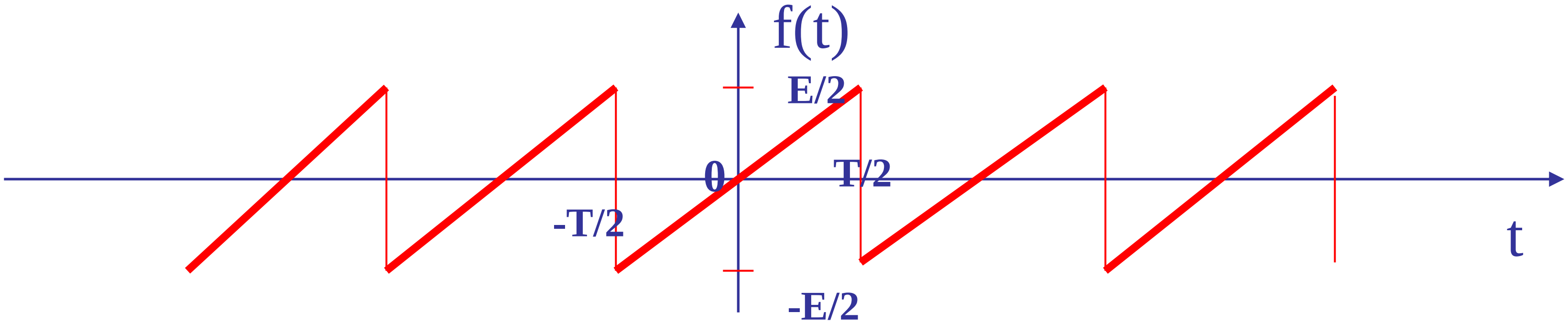
$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}(\cos\Omega t+\frac{1}{9}\cos 3\Omega t+\frac{1}{25}\cos 5\Omega t+.....)$$

2：奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{4}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t dt$$

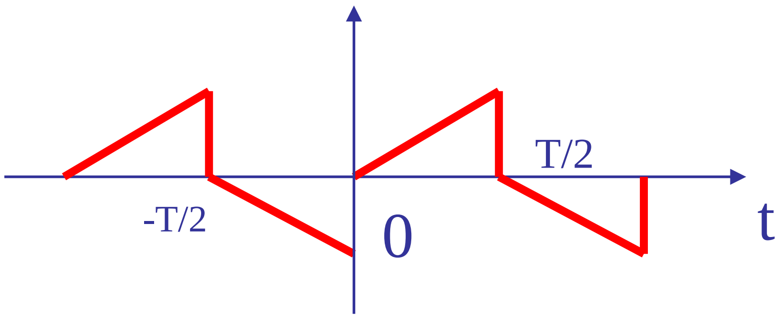
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$ 只有正弦项

C_n是虚数 $C_n = -C_{-n} = -\frac{b_n}{2} j \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$



$$f(t) = \frac{E}{\pi}(\sin \Omega t - \frac{1}{2}\sin 2\Omega t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega t - ....)$$

3：奇谐函数 $f(t) = -f(t \pm \frac{nT}{2})$



移动半周期横轴镜像对称

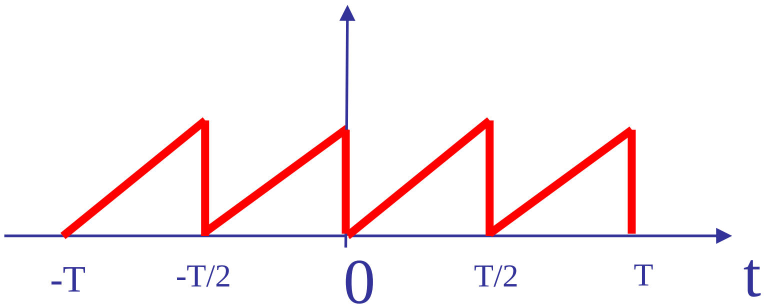
$$a_{2n} = b_{2n} = 0$$

只有奇数谐波项

$$a_{2n+1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2n+1)\Omega t.dt$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(2n+1)\Omega t.dt$$

4：偶谐函数 $f(t)=f(t\pm\frac{nT}{2})$



半周期重叠

周期T 只有偶数谐波项

$$a_{2n+1}=b_{2n+1}=0$$

$$a_{2n}=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2n\Omega t)dt$$

$$b_{2n}=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(2n\Omega t)dt$$

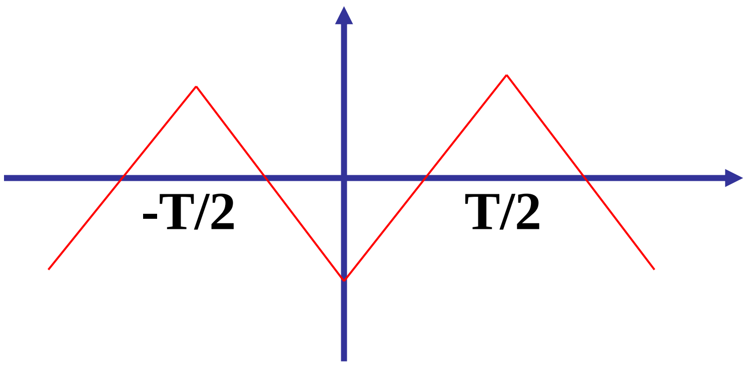
T_1=T/2 $\boxed{\Omega_1=2\Omega}$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt$$

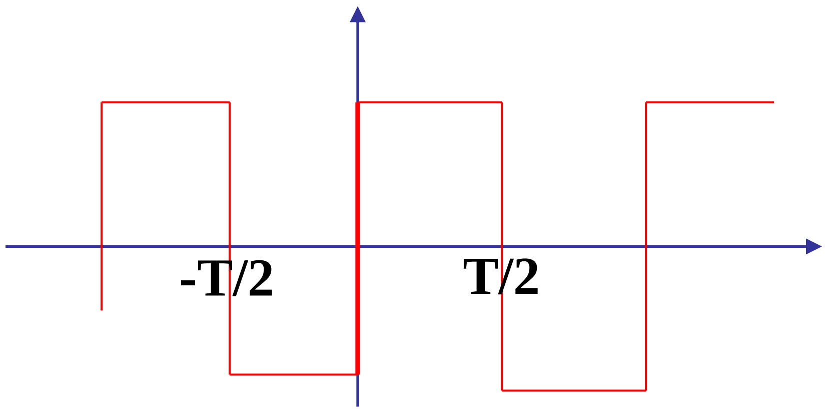
对称周期信号的频谱分析－举例

- 利用傅立叶级数的对称性判断信号含有的频率分量



函数为周期偶函数且奇谐函数

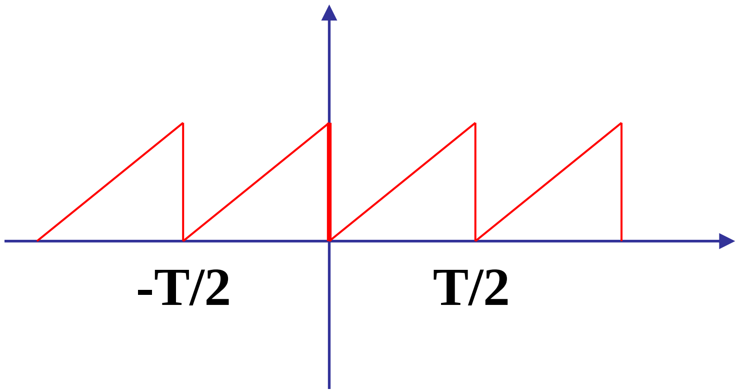
只含基波和奇次谐波的余弦分量



函数为周期奇函数且奇谐函数

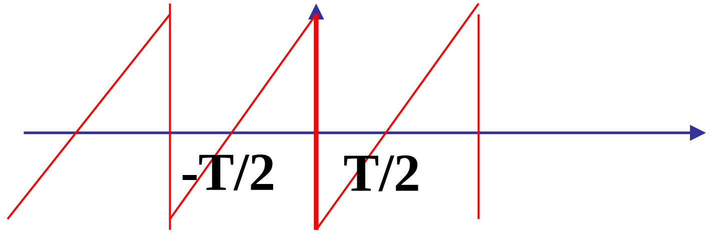
只含基波和奇次谐波的正弦分量

对称周期信号的频谱分析－举例



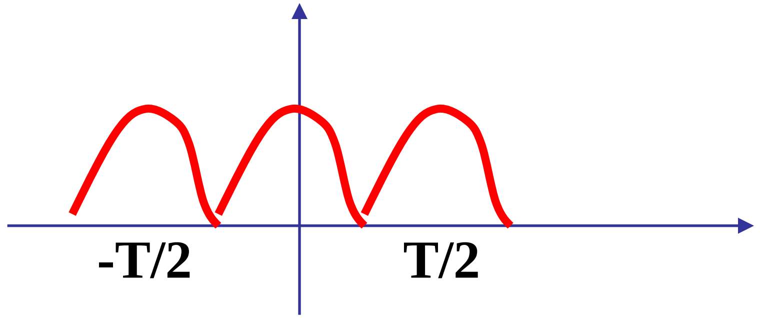
函数为偶谐函数

含有直流分量和偶次谐波分量



函数为奇函数

只含有正弦分量



函数为偶函数且偶谐函数

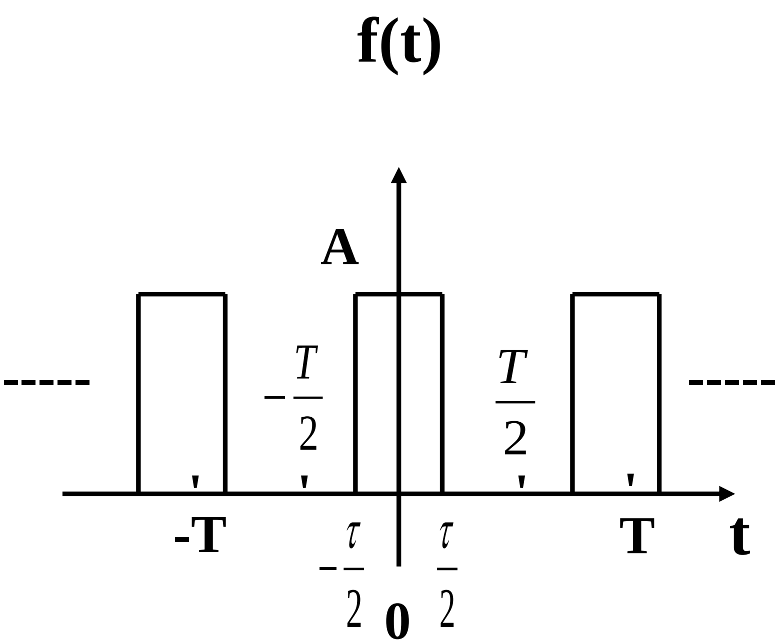
含有直流分量和偶次余弦分量

对称周期信号的频谱分析

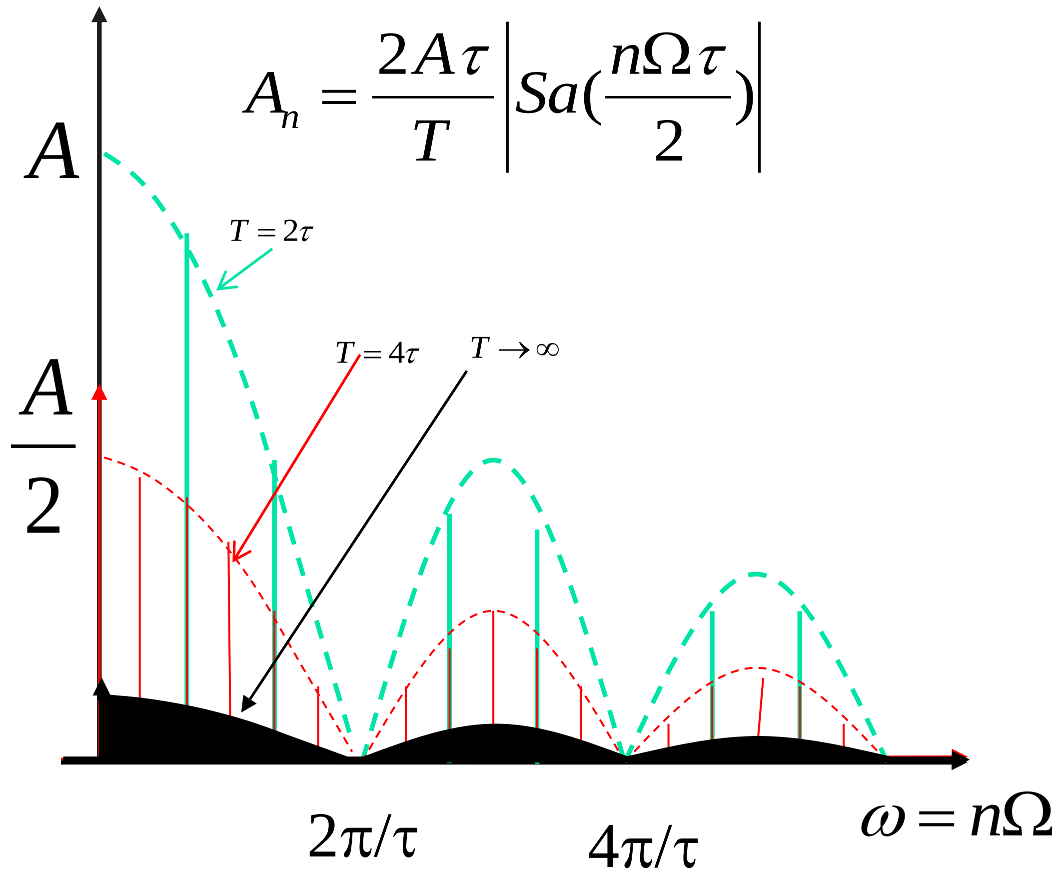
增加Cn

对称情况	性质	a_0	a_n (n≠0)	b_n
偶函数 f(t)=f(-t)	只有常数项及余弦项	$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega tdt$ n=1,2,3,…	0
奇函数 f(t)=-f(-t)	只有正弦项	0	0	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega tdt$ n=1, 2, 3, …
偶谐函数 f(t±T/2)=f(t)	只有偶次谐波	$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega tdt$ n=2，4，6，…	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega tdt$ n=2，4，6，…
奇谐函数 f(t±T/2)=-f(t)	只有奇次谐波	0	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega tdt$ n=1，3，5，…	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega tdt$ n=1，3，5，…

周期T趋穷大时的频谱



周期性矩形脉冲信号



$T \to \infty$

$\Omega = 2\pi / T \to 0$ 谱线离散变连续

$A_n \to 0$ 幅度谱”消失”？

所有频率分量的幅度变无穷小，但信号的能量肯定不为零

§3.5傅里叶变换与非周期信号的频谱

$$\dot{A}_n = 2C_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

扩大T/2倍

$$\frac{T\dot{A}_n}{2} = TC_n = T\times\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$T\to\infty \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T} \to 0 = d\omega \qquad n\Omega = \omega \quad f_T(t) \to f(t)$$

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} TC_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$T\to\infty \qquad \left|C_n\right| \to 0$$

频谱密度函数 单位频率间隔的幅度

$$F(j\omega) = TC_n = T\left|C_n\right|e^{j\varphi_n} = 2\pi\frac{C_n}{d\omega}$$ =非零值

§3.5傅里叶变换与非周期信号的频谱

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{C}_n e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt\right]e^{jn\Omega t}$$

$$\mathrm{T}\to\infty,\ \Omega\to d\omega, n\Omega\to\omega, T=\frac{2\pi}{\Omega}\to\frac{2\pi}{d\omega}$$

$$f(t)=\lim_{T\to\infty} f_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶变换式

$$\begin{cases} F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt & \text{正} \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega & \text{反} \end{cases}$$

连续时间信号傅里叶变换公式

傅里叶正变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

分析信号

$$F(j\omega)=F(f(t))$$

傅里叶反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

合成信号

$$f(t)=F^{-1}(F(j\omega))$$

傅里叶变换对

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

傅里叶正变换非周期信号的频谱特征

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$
$$=R(\omega)-jX(\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{-j\varphi(\omega)}$$

f(t)是实函数

$$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \\ X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|F(j\omega)\right|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)} & \omega \text{ 偶函数} \\ \varphi(\omega)=arctg\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)} & \omega \text{ 奇函数} \end{cases}$$

	f(t)偶函数	f(t)奇函数
$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$	$F(j\omega)$ 实数，偶函数	0
$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$	0	$F(j\omega)$ 纯虚数，奇函数

振幅频谱 $\left|F(j\omega)\right|$ 实信号幅度谱偶对称

相位频谱 $\varphi(\omega)$ 实信号相位谱奇对称

傅里叶反变换的三角形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|e^{j\varphi}\bullet e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|e^{j(\omega t+\varphi)}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|Cos(\omega t+\varphi)d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|Sin(\omega t+\varphi)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|Cos(\omega t+\varphi)d\omega$$

信号分解角度看傅里叶反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\left[F(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}\right]e^{j\omega t}$$

$$=\sum_{\omega=0}^{\infty}\left[|F(j\omega)|\frac{d\omega}{\pi}\right]\cos(\omega t-\varphi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t}\\&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n Cos(n\Omega t+\varphi_n)\end{aligned}}$$

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}TC_n=\frac{2\pi}{d\omega}C_n$$

$$F(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}=\lim_{T\to\infty}C_n$$

$e^{j\omega t}$

复振幅 $F(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}$

幅度 $|F(j\omega)|\frac{d\omega}{2\pi}$

幅度密度 $|F(j\omega)|$

$\cos\omega t$

幅度 $|F(j\omega)|\frac{d\omega}{\pi}$

§3.5傅里叶变换与非周期信号的频谱

- 傅里叶变换存在的条件
  - 非周期信号进行傅里叶积分也要满足狄利克雷条件。（有限间断点、有限极值和积分收敛）
  - 绝对可积条件的积分表达式，为以下积分收敛

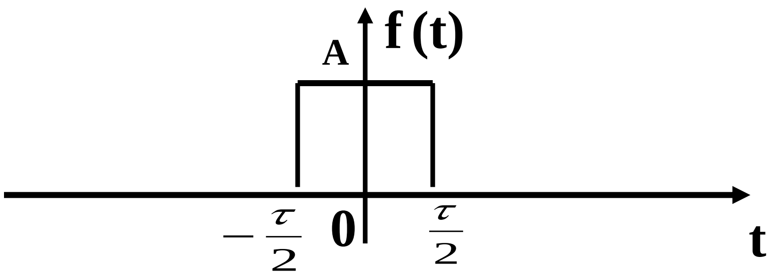
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \quad dt$$

  - 这是一个充分条件，不是必要条件；
  - 后面要介绍的周期函数的傅里叶变换表现出：函数虽然不是绝对可积，但存在傅里叶变换。

§3.5傅里叶变换与非周期信号的频谱

- 典型非周期信号的傅里叶变换分析
  - 宽度τ，幅度**A**的单脉冲信号（门函数）
  - 傅里叶变换

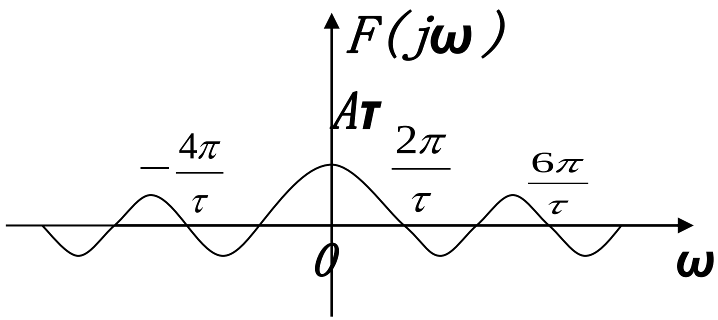
$$f(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

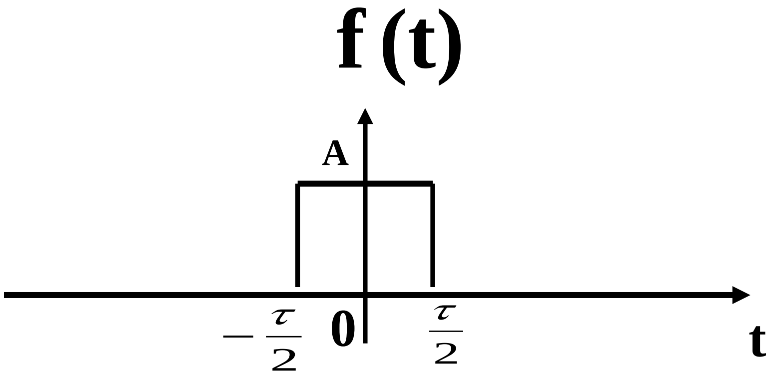


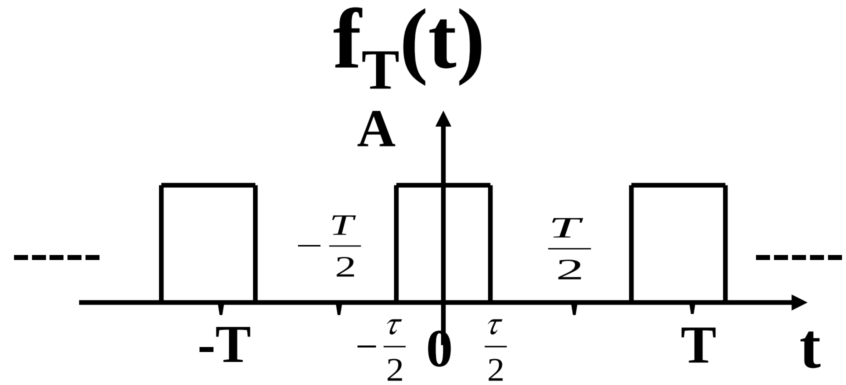
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{A}{j\omega}(e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}) = \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$$= A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$







$$F(j\omega) = A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})$$

$$\frac{\dot{A}_n}{2} = Cn = \frac{1}{T} F(j\omega)\Big|\omega = n\Omega$$

1：周期拓展具有普遍现象

2：周期拓展的时候不能够重叠：

◆原信号时间宽度有限

◆拓展周期大于宽度

宽度有限信号f(t)的F(jw)

信号以T为周期拓展后的信号f_T(t)的Cn

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$Cn=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\boxed{\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt}\,|\,\omega=n\Omega$$

$$\boxed{Cn=\frac{1}{T}F(j\omega)\big|\omega=n\Omega}$$

帮助(H)

里叶变换-lec... ×

13 / 41 67.2%

单脉冲FT与周期拓展后的周期脉冲FS之关系

- **Why** $F_k = \frac{1}{T} X_0(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_1}$ **?**

$$F_k = \frac{1}{T}\int_T x_T(t)e^{-jk\omega_1 t}dt \quad \Leftarrow \text{ FS analysis eqn.}$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x_0(t)e^{-jk\omega_1 t}dt \quad \Leftarrow \text{ in a single } T$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x_0(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega = k\omega_1} \quad \Leftarrow \text{ replace } k\omega_1$$

$$= \frac{1}{T} X_0(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_1} \quad \Leftarrow \text{ CT FT definition}$$

Ad
将 F
Exce
在

§ 3.5傅里叶变换与非周期信号的频谱

- 包络外形是抽样函数，幅度是A τ乘积
- 频谱具有收敛性，即信号的大部分能量都集中在低频段；
- 过0点在τ为周期对应的角频率的整数倍位置
- 与周期脉冲频谱的异同
  - 包络外形一致，
  - 原来以周期T的角频率作为基波，只在基波与谐波有值
  - 现在是连续函数
- 当τ减小时，频谱的收敛速度变慢，即脉宽与频宽成反比
- 当τ趋近0时，单脉冲近似为冲激函数，此时谱线趋近水平，幅度为脉冲面积，即A τ乘积。可预见冲激函数的傅里叶变换等于1。

频带宽度

- 频带宽度定义：

  对于一个信号，从零频率开始到需要考虑的最高分量的这一频率范围，是信号所占有的频带宽度，简称频宽。

  - 一般以振幅第一个过零点为频带宽度。
  - 若振幅没有过零点，则以振幅下降到最高幅度的**10%**所对应的频率点为频宽。

- 信号的时间特性和频率特性间的关系

  - 时间函数中变化较快的信号必定具有较宽的频带。

本讲小结

- 周期信号的频谱
  - 周期方波的频谱分析，
    - 频谱的离散性、谐波性、收敛性
  - 周期脉冲的频谱分析
    - 包络外形—抽样函数
    - 脉冲宽度与周期对谱线的影响
    - 周期无限大，非周期单脉冲情况的谱线
  - 对称周期函数的谱线成分
    - 奇函数、偶函数、奇谐函数、偶谐函数
- 非周期信号的频谱
  - 傅里叶变换

傅里叶变换式

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{正}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{反}$$

  - 门函数傅里叶变换分析

信号与线性系统

第 **5** 次课外作业

教材习题：3.7、 3.8