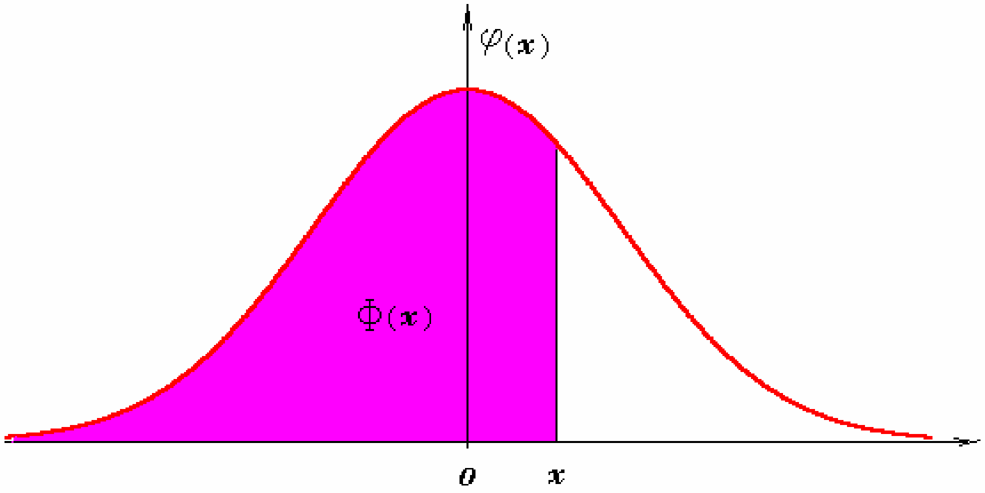
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

例1　设某种昆虫产卵的个数服从参数为λ的泊松分布，每个卵能孵化成幼虫的概率为p。求一只成虫繁衍出的幼虫只数的分布。

解　记X为一只成虫产卵的个数，则$X \sim P(\lambda)$；

记Y为一只成虫繁衍出的幼虫只数，则

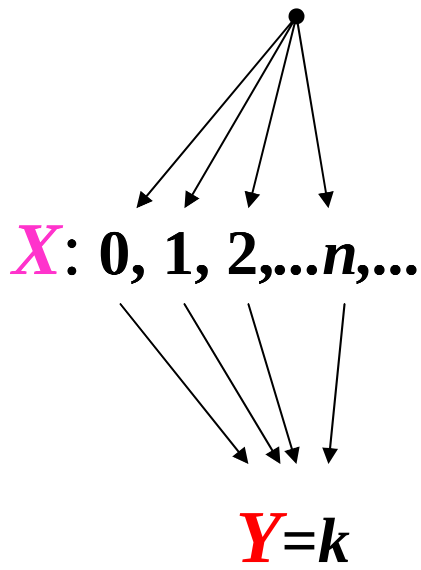
$Y|_{X=n} \sim B(n,p)$

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, P(Y=k\,|X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\ \ C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\ e^{\lambda(1-p)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}e^{-\lambda(1-p)}$$

$$k=0,1,\ldots$$



即 $Y \sim P(\lambda p)$

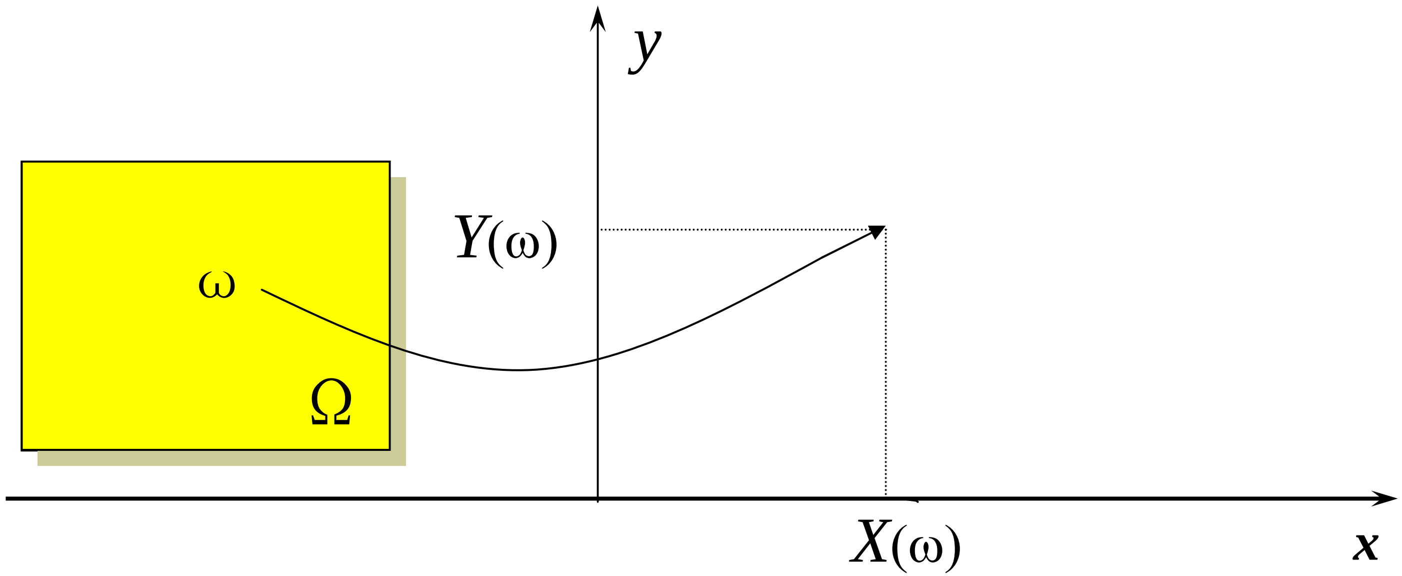
§3.1 多维随机变量

3.1.1 二维随机变量

定义3.1 设E为随机试验，Ω为其样本空间，$\mathscr{F}$为事件域，若Ω上的实函数 $X(\omega)$和 $Y(\omega)$满足：

$$\{\omega: X(\omega)\leqslant x,\ Y(\omega)\leqslant y\}\in \mathscr{F},\ \forall\ x,y\in R$$

则称$(X(\omega), Y(\omega))$为**二维随机变量**。



3.1.2　联合分布函数

$$F(x, y) = \mathrm{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y), \qquad -\infty<x,y<+\infty$$

1.有界性：　$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$，且

$F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=0$，　$F(+\infty, +\infty)=1$

2.单调性：　$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y)$

$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leqslant F(x, y_2)$

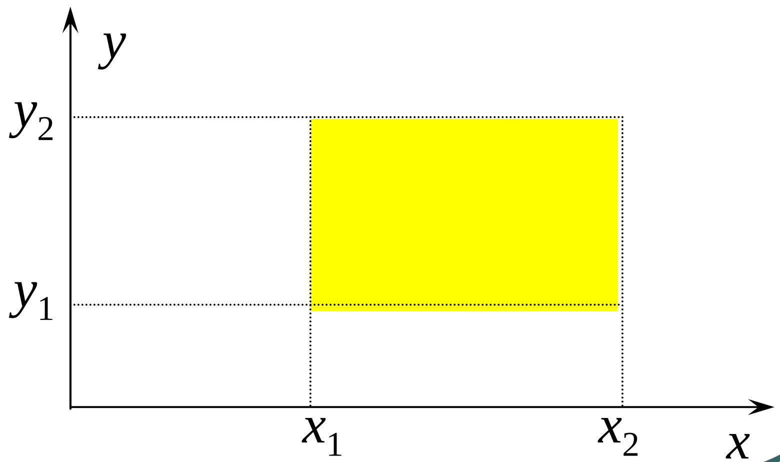
3.右连续性：$F(x+o, y)=F(x, y)$，$F(x, y+o)=F(x, y)$

4.相容性：对$x_1 \leqslant x_2$，$y_1 \leqslant y_2$有

$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$

$- F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

$= P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) \geqslant 0$



$F(x,y)$ 为联合分布函数 $\Leftrightarrow$

$F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=0 \leqslant F(x, y) \leqslant F(+\infty, +\infty)=1$

$x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1,y) \leqslant F(x_2,y)$, $y_1<y_2 \Rightarrow F(x,y_1) \leqslant F(x, y_2)$

$F(x+o, y)=F(x, y)$, $F(x, y+o)=F(x, y)$

$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geqslant 0$

例1 设 $F(x,y)=\begin{cases} 0, & x+y<1 \\ 1, & x+y\geq 1 \end{cases}$

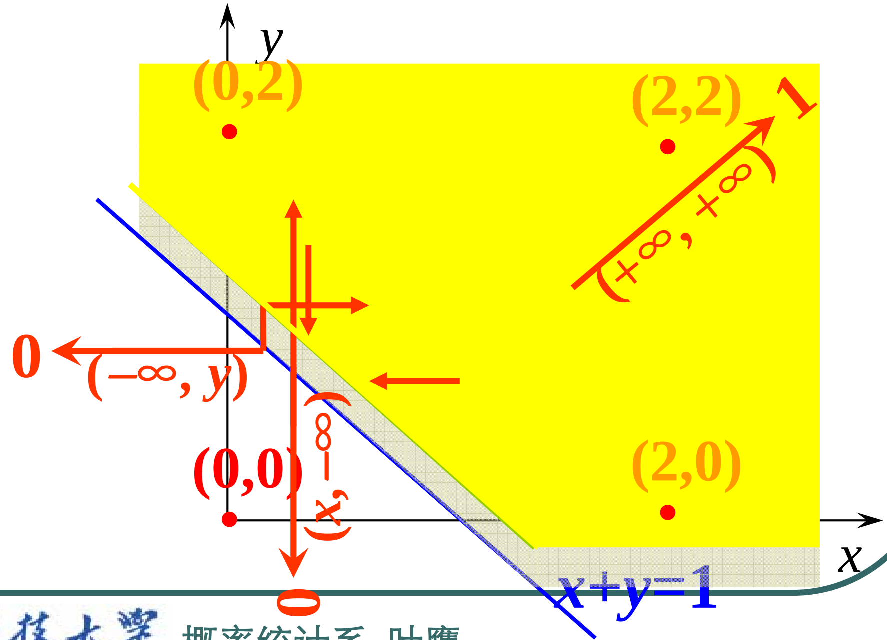
讨论$F(x, y)$能否成为二维$R.V.$的联合分布函数?

解 $F(2, 2) - F(0, 2)$

$- F(2, 0) + F(0, 0)$

$= \mathbf{1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0}$

故$F(x, y)$不能作为某二维 $R.V.$的联合分布函数.



3.1.3 二维D.R.V.的联合分布

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \qquad i,j=1,2,\ldots$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

(1) $p_{ij}\geqslant 0$; (2) $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$

例2（P_{72}例3.1）设整数X等可能地在1，2，3，4中取值，另一整数Y等可能地在1~X中取值，求$(X，Y)$的联合分布列。

解　$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1|X=1)=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1|X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(X=i,\ Y=j)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}$$

$$j\le i=1,2,3,4$$

例3 某校新选出的学生会 6 名委员，文、理、工科各有1、2、3名，现从中随机指定 2 人为学生会主席候选人. 令X，Y分别为候选人中来自文、理科的人数.求(X, Y) 的联合分布律.

解 X与Y的可能取值分别为0，1与0，1，2.

$$P(X=0,Y=0)=C_3^2/C_6^2=3/15,$$

$$P(X=0,Y=1)=C_2^1C_3^1/C_6^2=6/15,$$

$$P(X=0,Y=2)=C_2^2/C_6^2=1/15;$$

$$P(X=1,Y=0)=C_1^1C_3^1/C_6^2=3/15,$$

$$P(X=1,Y=1)=C_1^1C_2^1/C_6^2=2/15,$$

$$P(X=1,Y=2)=0.$$

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$
1	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0

3.1.4　二维C.R.V.的联合分布

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv \qquad -\infty< x\,,\,y <+\infty$$

称$f(x,y)$为(X,Y)的**联合密度函数**。

1. $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$　对$f(x,y)$的连续点成立；

2. $P(a<X<b,c<Y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$

一般　$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$

3. $f(x,y)\geq 0$；　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

例3（P$_{74}$例3.2）设随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax, & 0<x<1,\quad 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1)常数A；(2) $P(X>3/4)$；(3) $P(Y<\frac{1}{2})$；(4) $P(X<\frac{1}{4}, Y<\frac{1}{2})$；

(5) $P(X=Y)$. (6) $P(X+Y<1)$

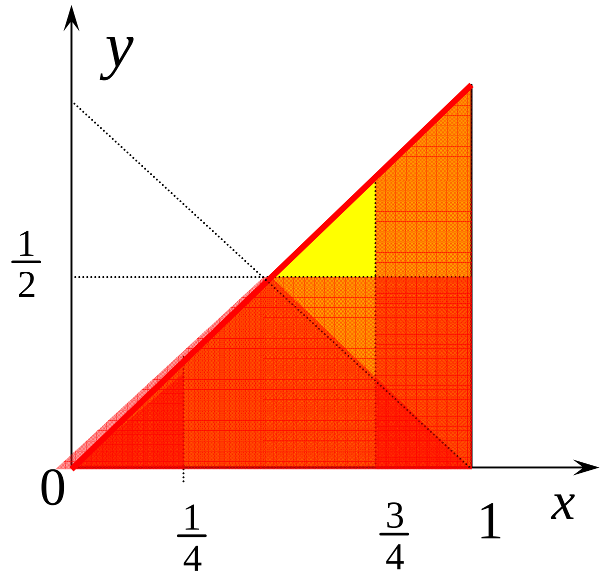
解 (6) $P(X+Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}[\int_y^{1-y}3xdx]dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1-2y)dy=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

(2) $P(X>\frac{3}{4})=\int_{\frac{3}{4}}^1[\int_0^x 3xdy]dx=1-(\frac{3}{4})^3=\frac{37}{64}$

(3) $P(Y<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}[\int_y^1 3xdx]dy=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

(4) $P(X<\frac{1}{4}, Y<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{4}}[\int_0^x 3xdy]dx=\frac{1}{64}$

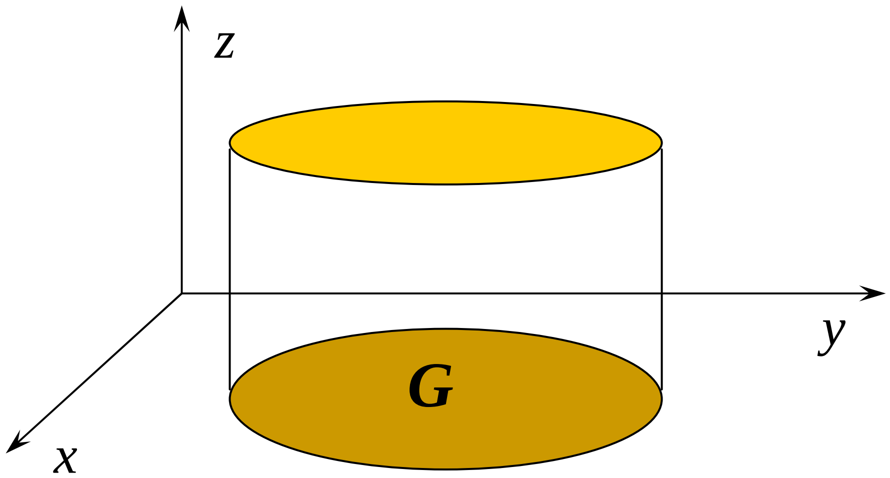
(5) $P(X=Y)$ =0



二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$C=\dfrac{1}{[G\text{的面积}]}$

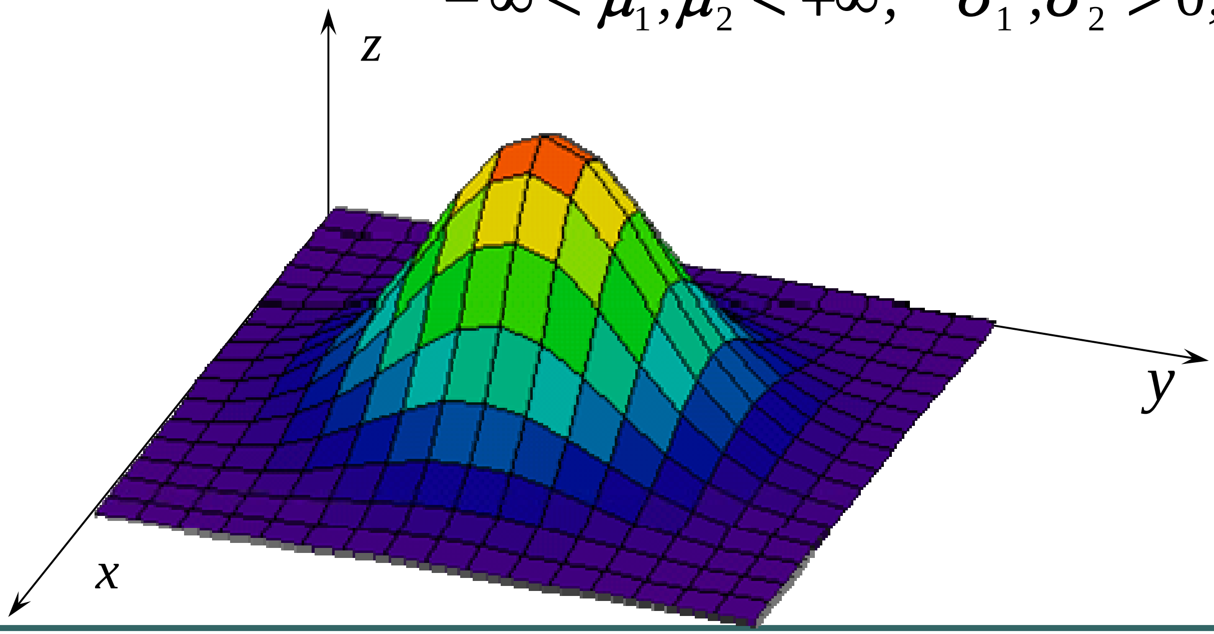


二维正态分布

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$$f(x,y)=\frac{exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\quad \sigma_1,\sigma_2>0,\quad -1<\rho<1$$



习题选讲

习题2.26（3） 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，且$f(-x)=f(x)$，$F(x)$是X的分布函数，则对任意实数a，有（**B**）

$(A)\ F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$，　$(B)\ F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$，

$(C)\ F(-a)=F(a)$，　$(D)\ F(-a)=2F(a)-1$.

解

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{-a} f(x)dx$$

$$\underline{\underline{x=-x}}\ \int_0^{+\infty} f(-x)dx-\int_0^a f(-x)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$$

习题选讲

练习4.1（1） 设随机事件A、B相互独立，已知只有A发生的概率和只有B发生的概率都等于1/4，则

$P(A)$=____**1/2**____，$P(B)$=____**1/2**____。

解 由题设

$$\begin{cases} P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P(A)[1-P(B)] = \dfrac{1}{4} \\ P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = P(B)[1-P(A)] = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = P(B) \overset{\wedge}{=} p \Rightarrow \quad p^2 - p + \tfrac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

习题选讲

练习8.5 设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^x+e^{-x}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

求随机变量$Y=g(X)$的概率分布，其中 $g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

解 $P(Y=1)=P(X\geq 0)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx\overset{u=e^x}{=}\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\pi}\arctan u\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

Y	**−1**	**1**
P	**0.5**	**0.5**