教材位置: 第7章 离散时间系统的时域分析

§7.3-§7.4

一：离散系统的数学模型——差分方程

二：离散时间系统的零输入响应

开讲前言－前讲回顾

- 离散时间系统的概念
  - 离散时间信号
  - 离散时间信号的运算
  - 常见离散时间信号
  - 线性移不变离散时间系统
- 取样信号与取样定理
  - 信号的取样
  - 理想取样信号及其频谱分析
  - 信号的重建与取样定理
  - 信号取样的工程考虑

前讲回顾

1： $Sin(k\omega_0)\varepsilon(k)$ $e^{j\omega_0 k}$

$N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 是有理数

周期：$mN = m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 的最小自然数

2：离散信号的分解

$$f(k) = \Lambda + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \Lambda$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)\delta(k-j)$$

3：采样过程

连续时间信号

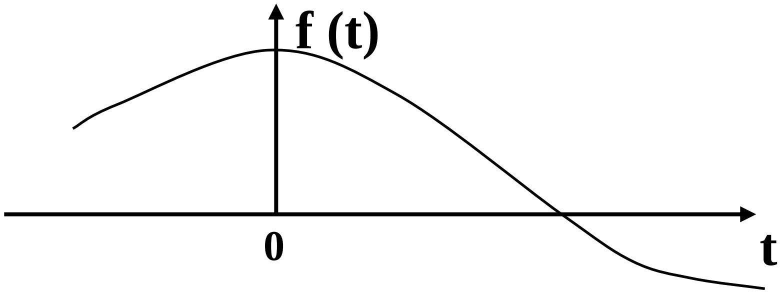
$$f_s(t) = f(t)s_\delta(t) = f(t)\lim_{\tau\to 0}\tau\delta_T(t)$$

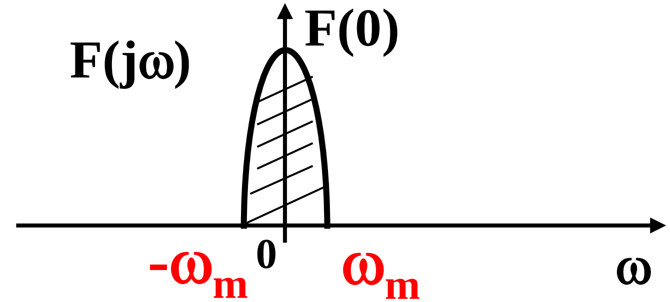
$$f_\delta(t) = \frac{1}{\tau}f_s(t) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$ 理想取样信号

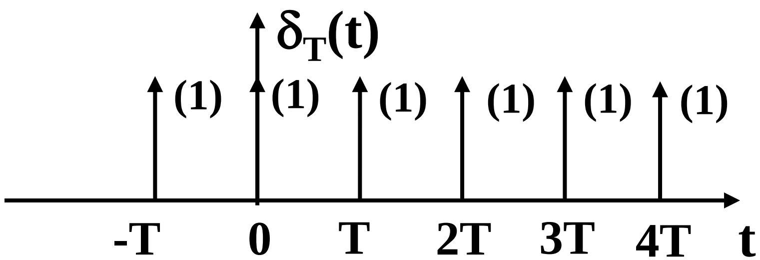
$$F_\delta(j\omega) = \frac{1}{T}F(j\omega) * \delta_{\omega s}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j(\omega - n\omega_s))$$

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$$

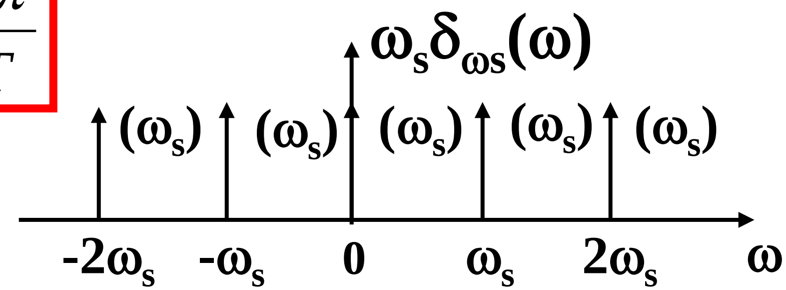
离散时间信号 $f(nT)$ $f(n)$



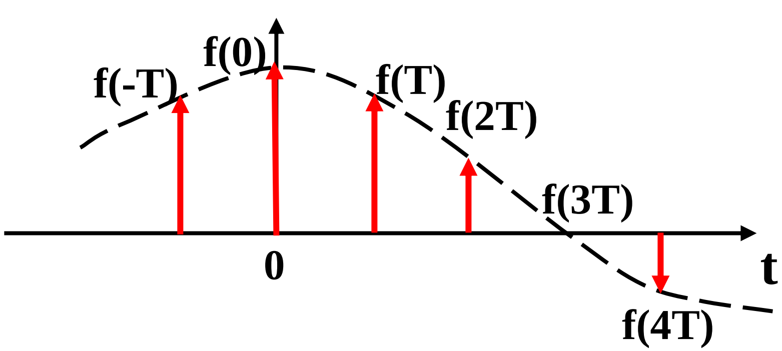


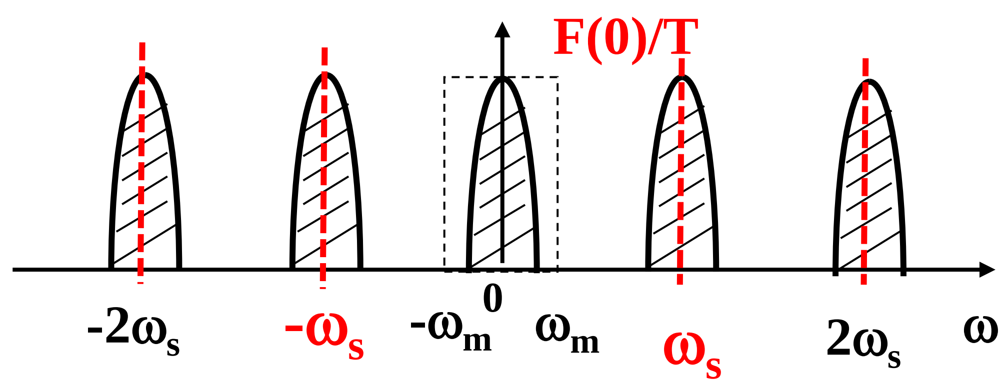


$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

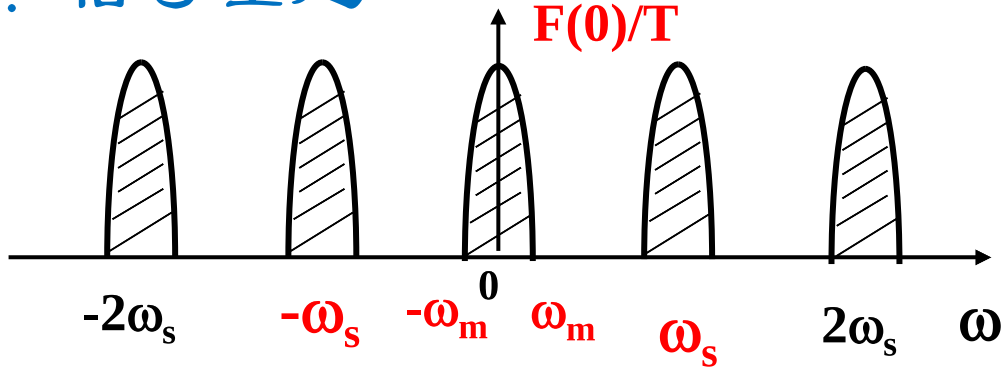


$$f_\delta(t) = \frac{1}{\tau} f_s(t) = f(t)\delta_T(t) \longleftrightarrow F_\sigma(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[(j(\omega - n\omega_s)]$$





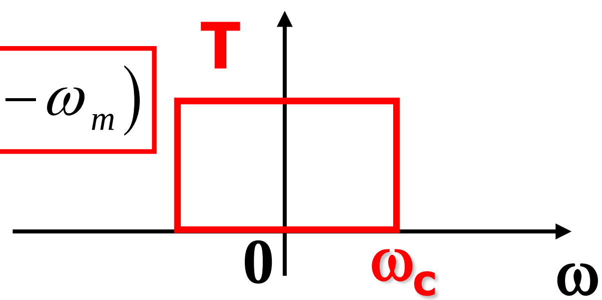
4：信号重建



$$f_\sigma(t) \leftrightarrow F_\sigma(j\omega)$$

$$F_\sigma(j\omega)\bullet H(j\omega)=F(j\omega)$$

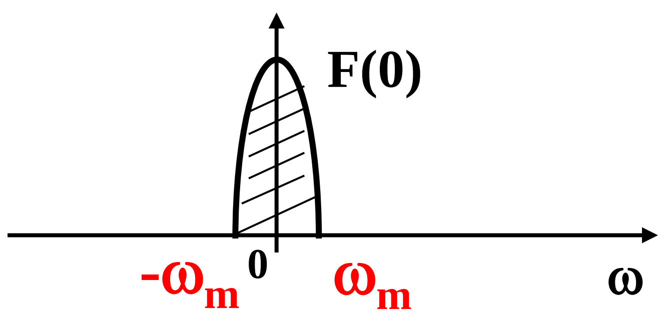
$$\boxed{\omega_m \le \omega_c \le \left(\omega_s - \omega_m\right)}$$



$$H(j\omega)$$

$$H(j\omega)=T\bullet G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$f(t)= f_\delta(t)*h(t)$$



$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

开讲前言－本讲导入

- 类比连续时间系统的分析
  - 建立时域方程－求解零输入响应、零状态响应
    - 基于物理意义的微分方程－（差分方程）
    - 引入微分算子对系统特性进行描述－（移序算子）
    - 根据系统自然特性的零输入响应求解－（零输入解）
    - 冲击响应和零状态响应的卷积求解－（卷积和求解）
  - 寻求简便、物理意义明确的变换域分析法
    - 傅立叶变换－拉普拉斯变换－（Z变换）
  - 分析系统的时域性质和频域性质
    - 系统的频域特性－频谱函数
    - 系统的时域特性－稳定性分析

一：离散系统的数学模型——差分方程

1：差分方程

例1　一质点沿水平方向作直线运动，其在某一秒内所走过的距离等于前一秒所走过距离的2倍，试列出该质点行程的方程式。

解： 设k秒末，质点的位移为y(k)

某一秒：　第（k+1）秒→第(k+2) 秒

位移 [y(k+2) － y(k+1)]

前一秒：　第 k 秒→第(k+1) 秒

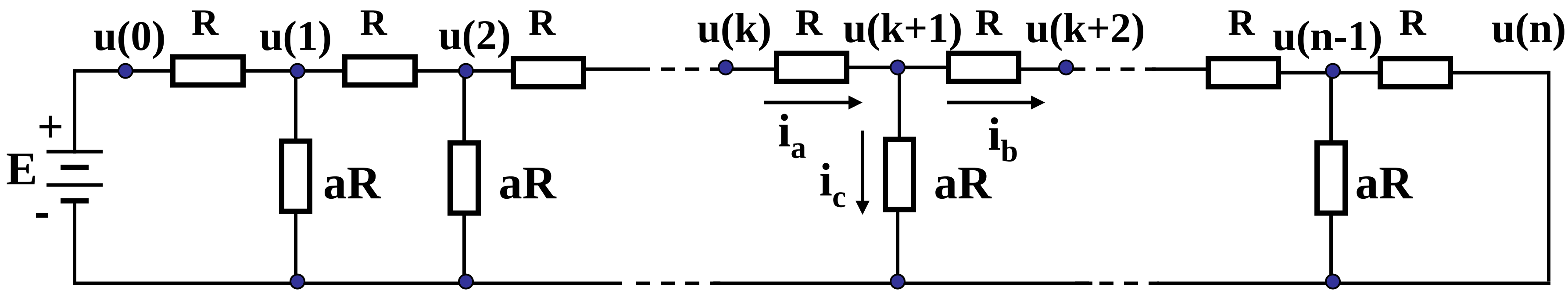
位移 [y(k+1) － y(k)]

依题意：
$$y(k+2)-y(k+1)=2[y(k+1)-y(k)]$$

即
$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=0$$

非时间变量的差分方程

电阻T形网络，求各个节点对公共地电压，差分方程形式表示



解：第 k+1 个节点中的电流关系 $i_a = i_b + i_c$

$$\frac{u(k)-u(k+1)}{R}=\frac{u(k+1)-u(k+2)}{R}+\frac{u(k+1)}{aR}$$

$$u(k+2)-\frac{2a+1}{a}u(k+1)+u(k)=0$$

再利用$u(0)=E$，$u(n)=0$两个边界条件，即可求得$u(k)$。

银行账户余额

你用 ¥100 在银行开了一个账户，以后每月存入 ¥100；银行每月的利息为 0.2% 。求第 n 个月末该账户的余额。

- 输出 $y[n]$：第 n 月末余额
- 输入 $x[n]$：第 n 月净存入的金额 $x[n] = 100u[n]$

$$y[n] = 1.002y[n-1] + x[n]$$

或， $$y[n] - 1.002y[n-1] = x[n]$$

n阶线性移不变系统

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k)$$

$$= b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \cdots + b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

差分方程的阶数：差分方程中未知函数中变量最高和最低序号的差数。

前向差分(最小序号K)

$$y(k+2) + ay(k+1)+cy(k) = be(k+1)+de(k)$$

后向差分(最大序号K)

$$y(k) + ay(k-1) = be(k)$$

$$y(k) + ay(k-1)+cy(k-2) = be(k-1)+de(k-2)$$

因果系统问题

连续时间系统：激励函数的导数阶数m一般低于响应函数的导数阶数n。 但是 m>n还是可以的，例如：

在激励电压作用于无耗电容器，响应电流为 $i(t)=C\frac{de(t)}{dt}$

离散时间系统m<=n：

不允许激励函数的最高序号大于响应函数的最高序号。

否则违背因果系统的原则。

i(k)=e(k+1)+e(k) n=0,m=1

差分方程表示 某时刻电流i(k)不仅与该时刻激励e(k)有关，还与未来的激励e(k+1)有关,违反因果相同的原则

因果性

在任何时刻的输出都只与当时这个时刻以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关，则该系统是因果的

实际的物理系统都是因果系统

一般说来，非因果系统是物理不可实现的

但对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。

2：移序算子及差分方程的算子表示

离散系统移序算子：S，1/S

定义：$Sy(k)=y(k+1),\quad S^n y(k)=y(k+n),\quad \frac{1}{S}y(k)=y(k-1)$

n阶差分方程的算子形式：

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0) y(k) = (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0) e(k)$$

$$D(S)y(k)=N(S)e(k)$$

$$H(S)=\frac{N(S)}{D(S)}$$

离散时间系统的转移算子

$$y(k)=H(S)e(k)$$

二：离散时间系统的零输入响应

一阶：$y(k+1) + a\,y(k) = e(k)$ ，已知 $y_{Zi}(0)$, 求 $y_{Zi}(k)$

$$y_{Zi}(k+1) + a\,y_{Zi}(k) = 0$$

$$y_{Zi}(k+1) = -\,a\,y_{Zi}(k)$$

$$\frac{y_{Zi}(k+1)}{y_{Zi}(k)} = -a \overset{令}{=\!=} \gamma$$

$$(S+a)\,y_{Zi}(k) = 0$$

$$S+a=0, \gamma=-a$$

$$\therefore y_{Zi}(k) = c\gamma^k$$

此式表明: $y_{Zi}(k)$是一个公比为 γ (= - a) 的等比序列

$$\therefore y_{Zi}(k) = c\gamma^k = c(-a)^k$$

求 c ： $y_{Zi}(0) = c(-a)^0 = c$

$$\therefore y_{Zi}(k) = y_{Zi}(0)(-a)^k$$

n阶： $y_{Zi}(k+n) + a_{n-1}y_{Zi}(k+n-1) + \dots + a_0 y_{Zi}(k) = 0$

$$(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0)\, y_{Zi}(k) = 0$$

单根： $(S-\gamma_1)(S-\gamma_2)\dots(S-\gamma_n)\, y_{Zi}(k) = 0$

$$(S-\gamma_i)\, y_{Zi}(k) = 0 \qquad y_{Zi\,i}(k) = c_i \gamma_i^{\,k}$$

$$\boxed{y_{Zi}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i^{\,k}}$$

$c_1, c_2, \dots c_n$ 由初始条件

$y_{Zi}(0), y_{Zi}(1), \dots y_{Zi}(n-1)$ 确定

m 阶重根的情况：

$$(S-\gamma_1)^m(S-\gamma_{m+1})\ldots(S-\gamma_n)\,y_{Zi}(k)=0$$

$$y_{Zi}(k)=(c_1+c_2k+\ldots+c_mk^{m-1})\,\gamma_1^{\,k}$$

$$+c_{m+1}\gamma_{m+1}^{\,k}+\ldots+c_n\gamma_n^{\,k}$$

$c_1, c_2, \ldots c_n$ 由初始条件

$y_{Zi}(0), y_{Zi}(1), \ldots y_{Zi}(n-1)$ 确定

例1　已知 $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+2)$，

$y_{Zi}(0)=1$，$y_{Zi}(1)=4$，　求$y_{Zi}(k)$

解：(1) 求特征根, 写出$y_{Zi}(k)$ 的表达式

$$S^2-5S+6=(S-2)(S-3)=0$$

$$\gamma_1=2,\ \gamma_2=3$$

$$y_{Zi}(k)=c_1 2^k+c_2 3^k$$

(2) 求 c_1, c_2：
$$\left.\begin{aligned} y_{Zi}(0)&=c_1+c_2=1\\ y_{Zi}(1)&=c_1 2+c_2 3=4 \end{aligned}\right\}\ c_1=-1,\ c_2=2$$

$$y_{Zi}(k)=(-1)(2)^k+2(3)^k=2(3)^k-(2)^k,\ k\geqslant 0$$

$$=[2(3)^k-(2)^k]\varepsilon(k)$$

例2　已知 $y_{Zi}(k+2) + 4\, y_{Zi}(k+1) + 4\, y_{Zi}(k) = 0$，

$y_{Zi}(0) = y_{Zi}(1) = 2$,　　求$y_{Zi}(k)$

解:　$S^2 + 4\,S + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2 = -2$

$$y_{Zi}(k) = (c_1 + c_2\,k)(-2)^k$$

$$\left.\begin{aligned} y_{Zi}(0) &= c_1 = 2 \\ y_{Zi}(1) &= (c_1 + c_2)(-2) = 2 \end{aligned}\right\} c_1 = 2\,,\ \ c_2 = -3$$

$$y_{Zi}(k) = [(2 - 3\,k)(-2)^k]\ \varepsilon(k)$$

本讲小结

- 离散时间系统描述和模拟
  - 经典差分方程
  - 电路差分方程
  - 非时间参数的差分方程
  - 前向差分、后向差分
  - 相同的模拟—延时器
- 离散时间系统的零输入响应
  - 迭代求解，确定解的形式—等比形式
  - 移序算子，特征方程，特征根，解的通式
  - 特征根与系统的稳定性

信号与线性系统

第 18 次课外作业

教材习题: 7.9、7.13、7.14（2、4）、7.17