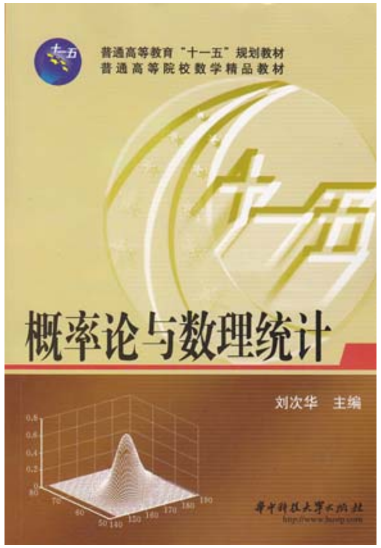
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

§1.3 事件的概率及其计算

1.3.1 事件域

定义 设$\mathscr{F}$是样本空间Ω的一些子集组成的集合，满足

（1） $\Omega \in \mathscr{F}$

（2） $A \in \mathscr{F} \Rightarrow \overline{A} = \Omega - A \in \mathscr{F}$

（3） $A_i \in \mathscr{F}$， $i=1,2,\ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

则称$\mathscr{F}$是Ω的一个事件域(或σ域,或σ代数)。

1.3.2 概率的公理化定义

定义 设$\mathscr{F}$是样本空间Ω的一个事件域，P=P(·)定义在$\mathscr{F}$上的实函数，满足

1° 非负性： $P(A)\geqslant 0$，$\forall A\in\mathscr{F}$；

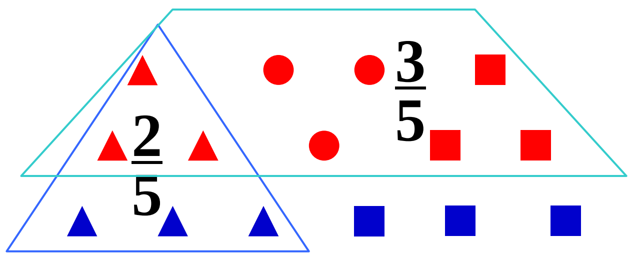
2° 规范性：$P(\Omega)=1$；

3° 可列可加性：若$A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

则称P是$\mathscr{F}$上的一个**概率**（测度），$P(A)$称为事件A的**概率**。

概率空间

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$



1.3.3 概率的两个计算方法

古典概型 设 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_n\}$，$\mathscr{F}$ 是 Ω的一个事件域，定义

$$P(A)=\frac{k}{n}, \quad \forall A=\{\omega_{i1}, \omega_{i2},\ldots,\omega_{ik}\}\in\mathscr{F}$$

则P是$\mathscr{F}$上的一个概率。

几何概型 设 Ω 为测量值有限的几何体，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一个事件域，定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测量值}}{\Omega\text{ 的测量值}}, \quad \forall A\in\mathscr{F}$$

则P是$\mathscr{F}$上的一个概率。

注：上述方法的本质是(1)有限性(2)等可能性。

$1^{o}P(\boldsymbol{A})\geqslant 0$；

$2^{o}P(\Omega)=1$；

$3^{o}\ P(\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\boldsymbol{A}_i)$

1.3.4 概率的性质

（1） $P(\varnothing)=0$

证： 取 $\boldsymbol{A}_i=\varnothing$，$i=1,2,\ldots$，则$P(\varnothing)=P(\sum_{i=1}^{\infty}\varnothing)\overset{3^0}{=\!=}\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing)=0$

$1^o P(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$；

$2^o P(\Omega) = 1$；

$3^o P(\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\boldsymbol{A}_i)$

1.3.4 概率的性质

（1） $P(\varnothing) = 0$

（2）有限可加性： $A_i A_j = \varnothing \ (i \neq j)$，则 $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

证：取 $A_{n+i} = \varnothing$， $i = 1, 2, \ldots$， 则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i + \varnothing + \ldots + \varnothing + \ldots)$$

$$\overset{3^0}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\varnothing) + \ldots + P(\varnothing) + \ldots$$

$$\overset{(1)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$1^{\circ} P(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$；

$2^{\circ} P(\Omega)=1$；

$3^{\circ} P(\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\boldsymbol{A}_i)$

1.3.4 概率的性质

（1） $P(\varnothing)=0$

（2） 有限可加性：$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

（3） 逆事件概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$

证：$1 \overset{2^0}{=\!=\!=} P(\Omega)=P(A+\overline{A}) \overset{(2)}{=\!=\!=} P(A)+P(\overline{A})$

例1 求n个人中至少两人在同一天过生日的概率。

解 $P(A)=1-P(\overline{A}) =1-\dfrac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365\times 365\times\cdots\times 365}=1-\dfrac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$

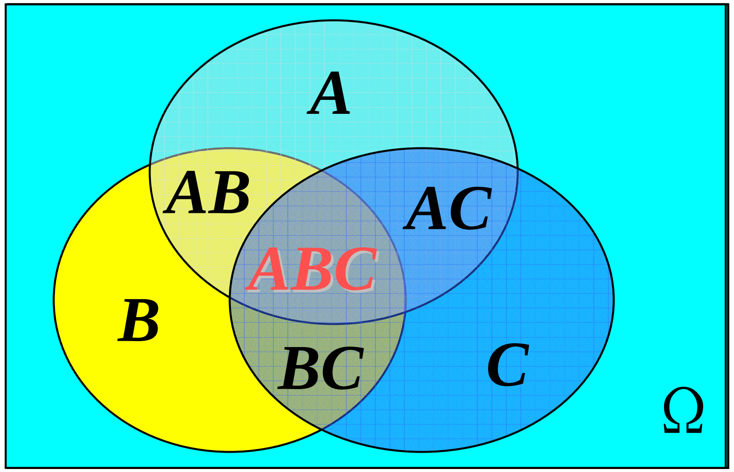
人数	10	20	30	40	50	55	90
P	0.12	0.41	0.71	0.89	0.97	0.99	$1-3\times 10^{-95}$

（4）差公式　$A\subset B \;\Rightarrow\; \mathbf{P(B-A)=P(B)-P(A)}$

证　$P(B)=P(B-A+A)$

$$\overset{(2)}{=} P(B-A)+P(A)$$

推论　$A\subset B \;\overset{(4)}{\Rightarrow}\; P(A)\leqslant P(B)$



（5）加法公式

$$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

证　$P(A\cup B)=P(A+B\bar{A})\overset{(2)}{=}P(A)+P(B-AB)\overset{(4)}{=}P(A)+P(B)-P(AB)$

推广：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

一般：

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)+\sum_{i\neq j\neq k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例2（P_{18}例1.12）已知 $AB=\varnothing$，$P(A)=p$，$P(B)=q$，求下列概率：

解　(1)　$P(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(AB)= p+q$

(2)　$P(\overline{A}\cup B) \xlongequal{\overline{A}\supset B} P(\overline{A}) =1-p$

(3)　$P(\overline{A}B)=P(B-AB) =P(B) = q$

(4)　$P(\overline{A}\,\overline{B})= 1-P(A\cup B) =1-p-q$

例3　从5双不同的鞋子中任意取4只，求这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率。

解　记A为所求事件

~~法I~~ $P(A)=\dfrac{10\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{1}{9}$　　~~法II~~ $P(A)=\dfrac{10\times8\times7\times C_4^2}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{2}{3}$

法III　$P(\overline{A})=\dfrac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}\overset{\text{或}}{=\!=\!=}\dfrac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，　$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{13}{21}$

法IV　记A_1={只有2只配成一双}　A_2={4只恰好配成两双}

$P(A_1)=\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{12}{21}$，$P(A_2)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{21}$　$\overset{A_1A_2=\varnothing}{\Longrightarrow}$ $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{13}{21}$

法V　记B_i={取到第i双鞋}　i=1,2,3,4,5　则 $A=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5$

$P(B_i)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^4}$，$i=1,2,3,4,5$　$P(B_iB_j)=\dfrac{1}{C_{10}^4}$，$i\neq j$　$P(B_iB_jB_k)=0$　$i\neq j\neq k$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)-\sum_{i\neq j}P(B_iB_j)+0-0+0=5\times\frac{2}{15}-10\times\frac{1}{210}=\frac{14}{21}-\frac{1}{21}=\frac{13}{21}$$

§1.5 条件概率与事件的独立性

1.5.1 条件概率

1．**问题**　E~随机点名。

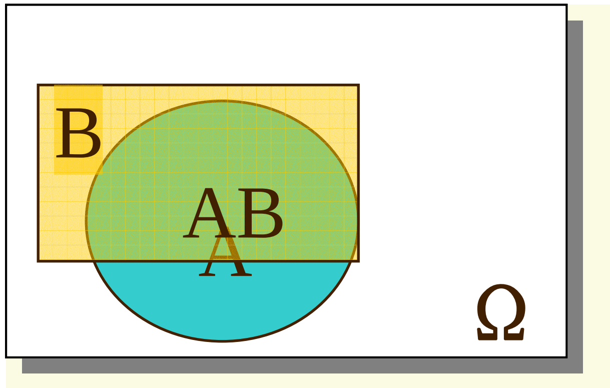
A={点到女生}　　$P(A)=\dfrac{\text{女生人数}}{\text{全班人数}}$

B={该生名中含有“芳”字}　　$\Rightarrow P(A|B) \geqslant P(A)$

C={该生是球迷}　　$\Rightarrow P(A|C) \leqslant P(A)$

2．定义　设A、B为两随机事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



为在B发生的条件下，A发生的**条件概率**。

注1．$P(A|B)$是将样本空间Ω压缩成B后计算概率；

注2．当B取成样本空间Ω时，$P(A|B)$就是无条件概率$P(A)$；

注3．条件概率确实是概率，既实数$P(A|B)$满足三条公理。

例1（P_9例1.16）设加工产品20件，其中有15件一等品，5件二等品，一等品、二等品混放。现不放回地随机取两件，求在第一次取到一等品的条件下第二次仍取到一等品的概率。

解 记***A***={第一次取到一等品}， ***B***={第二次取到一等品}，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{15\times14}{20\times19}}{\dfrac{15}{20}}=\frac{14}{19}$$

在缩减的样本空间下计算

$$P(B|A)=\frac{14}{19}$$

例2 (P$_{22}$例1.17) 设某地区历史上从某次特大洪水发生以后在30年内发生特大洪水的概率为80%，在40年内发生特大洪水的概率为85%，现已知该地区已经30年未发生特大洪水，问未来10年内将发生特大洪水的概率是多少?

解 记A={30年内无特大洪水}， B={40年内无特大洪水}，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.2}=0.75$$

故所求概率为

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=0.25$$

习题选讲

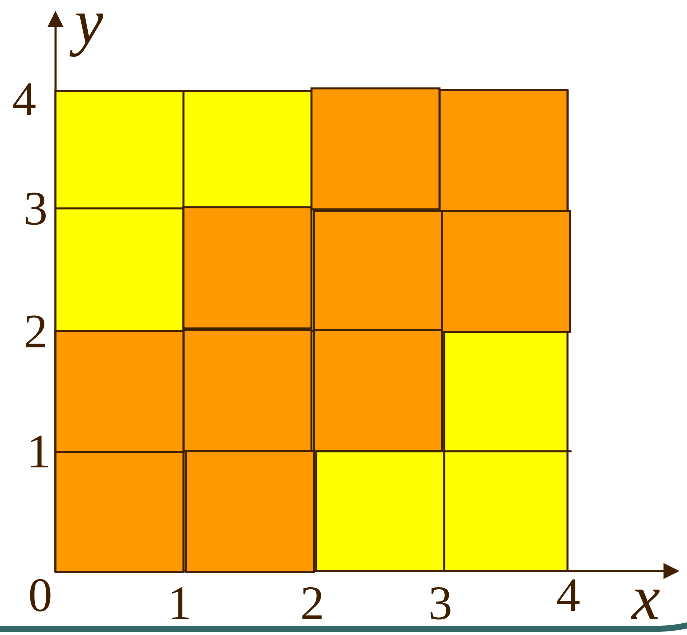
习题1.12 甲、乙下午1时至2时到某车站乘高速巴士，这段时间内有4班车，开车时间分别为1:15，1:30，1:45，2:00。如果约定：(1)见车就乘；(2)最多等一班车。求甲、乙同乘一车的概率。假定甲、乙两人到达车站的时刻互不牵连，且每人在1时至2时内的任何时刻到达车站是等可能的。

解 设x,y分别为甲、乙到达车站的时刻（刻钟），则

$$\Omega=\{(x,y):0\le x,y\le 4\}$$

$$A_2=\{(x,y):k-1\le x\le k\cap$$
$$k-2\le y\le k+1,$$
$$k=1,2,3,4\}$$

$$P(A_2)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$



习题选讲

习题1.7 利用互不相容事件的概念及加法原理、乘法原理证明恒等式:

$$(1)\quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};\qquad (2)\quad \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

解 (2)考虑E：从含有n个黑球和n个白球的袋中任取n个球，记A_k={取到k个白球}，k=1,2,…,n, 则

$$P(A_k)=\frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n}=\frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}\qquad k=1,2,\cdots,n$$

由 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)\overset{A_iA_j=\phi}{=}P(\sum_{k=0}^{n}A_k)=P(\Omega)=1$ 即得(2)式。

用类似方法可解新教材习题1.9