信号与线性系统

第 9 讲

教材位置： 第5章 连续时间系统的复频域分析
§5.1-§5.3

内容概要： 引言、拉普拉斯变换、拉普拉斯变换收敛区

前讲回顾

1：信号通过线性系统的频域分析

$$e^{j\omega t} \leftrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\cos(\omega_0 t+\theta) \leftrightarrow |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\theta+\varphi)}$$

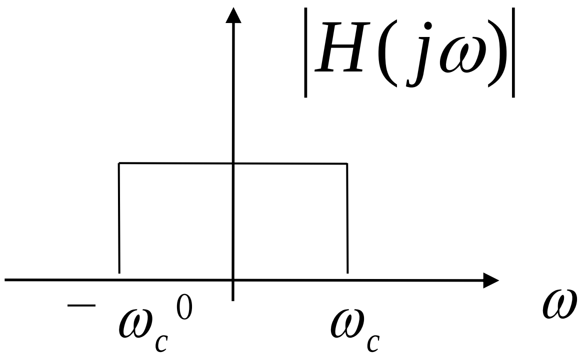
$$\boxed{\sin(\omega_0 t+\theta) \leftrightarrow |H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\theta+\varphi)}$$

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

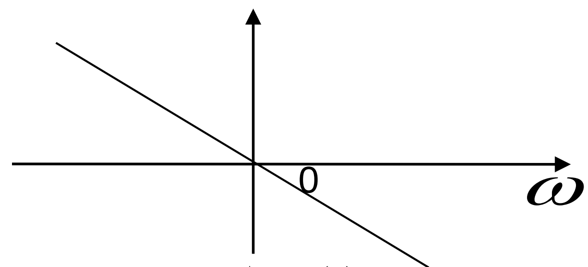
$$h(t) \to H(j\omega)=R(j\omega)/E(j\omega)$$

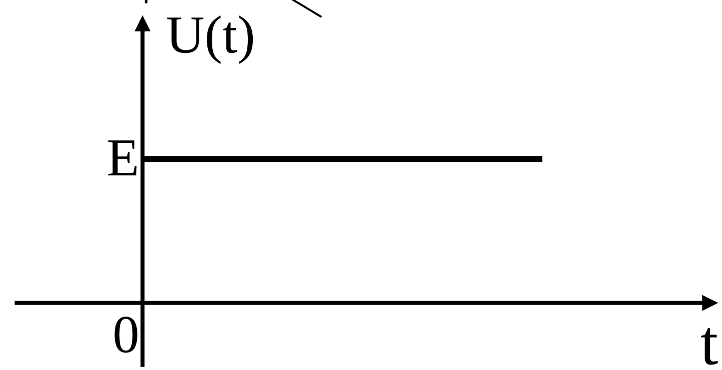
2：理想低通滤波器阶跃响应

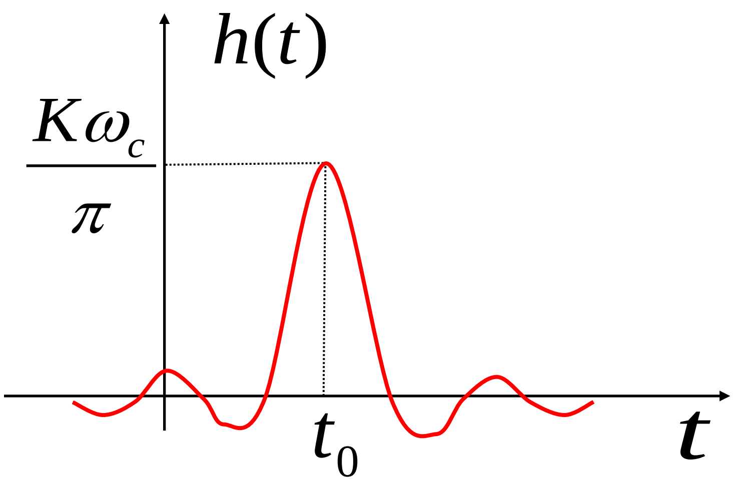
- 响应建立时间与通频带成反比

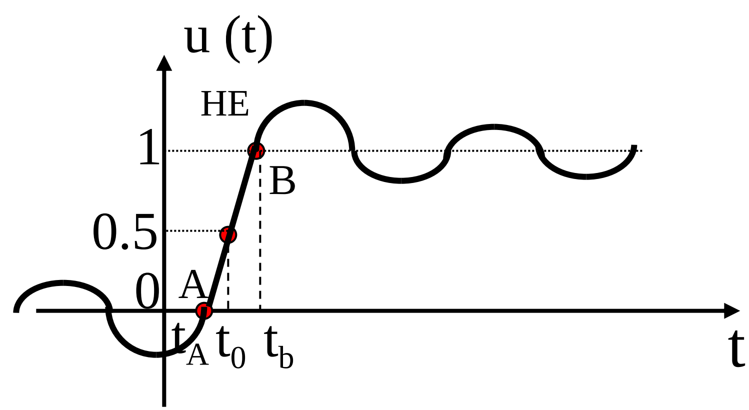


$$\varphi_K(\omega) = -\omega t_0$$



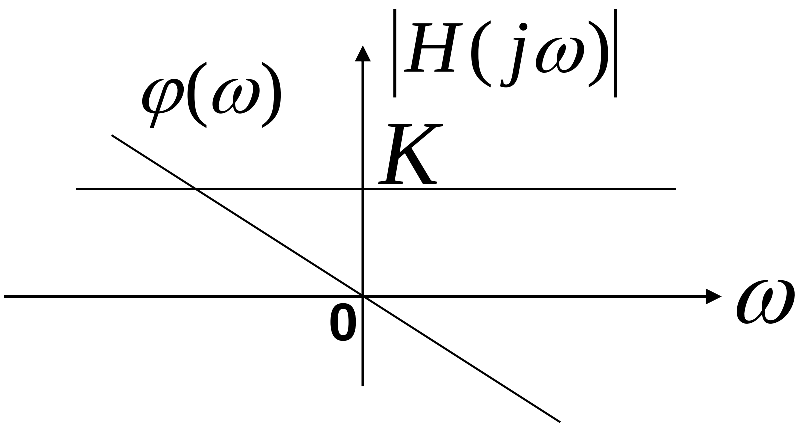






开讲前言－前讲回顾

- **3：因果系统的条件**
  - **h(t)=0,t<0。**
  - 系统函数不能在有限频带为**0**
  - 衰减速度限制在指数衰减内
- **4：线性不失真系统**
  - 幅频特性：常数
  - 相频特性：过原点直线



为什么需要拉普拉斯变换？

- 连续时间傅里叶变换是一个非常强大的工具：

  1.信号分析：深入剖析信号的构成

  2.系统分析和设计：信号变换

  3.物理含义清晰、直观

- 但是，傅里叶变换的应用受限于：

  1. 系统处于初始条件为0，只能够求零状态响应。

  2. 冲击响应绝对可积分 $h(t)$

某线性系统的 $H(p)=\dfrac{1}{p^2-3p+2}$，求单位冲击响应 。

1：时域求解方法

$$H(p)=\frac{1}{p^2-3p+2}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}$$

$$h(t)=(e^{2t}-e^{t})\varepsilon(t)$$

2：频域求解方法

$$(1):(p2-3p+2)r(t)=e(t)$$

$$r''(t)-3r'(t)+2r(t)=e(t)$$

$$(j\omega)^2R(j\omega)-3(j\omega)R(j\omega)+2R(j\omega)=E(j\omega)$$

$$(2):H(j\omega)=H(p)\big|p=j\omega$$

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2-3j\omega+2}=\frac{1}{j\omega-2}-\frac{1}{j\omega-1}$$

在经典控制理论中，对控制系统的分析和综合，都是建立在拉普拉斯变换的基础上的。

1:可采用传递函数代替微分方程来描述系统的特性。

2:采用直观和简便的图解方法来确定控制系统的整个特性（见信号流程图、动态结构图）

3:分析控制系统的运动过程（见奈奎斯特稳定判据、根轨迹法），

4:以及综合控制系统的校正装置（见控制系统校正方法）提供了可能性

本章内容：

- 拉普拉斯变换及其收敛域
- 常用函数的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的基本性质
- 拉普拉斯反变换
- 线性系统的拉普拉斯变换分析法
- 线性系统的模拟
- 信号流图

本讲内容

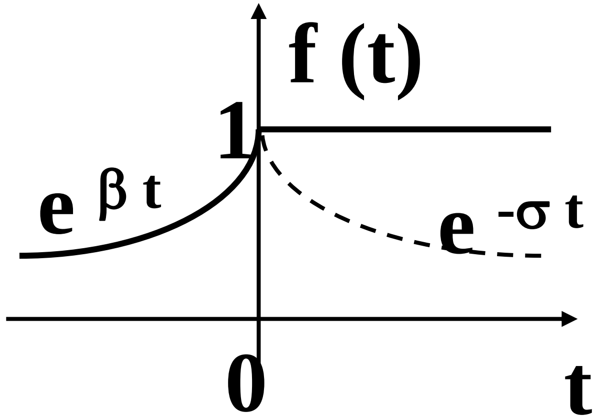
一:拉普拉斯变换定义

二:拉普拉斯变换的收敛区

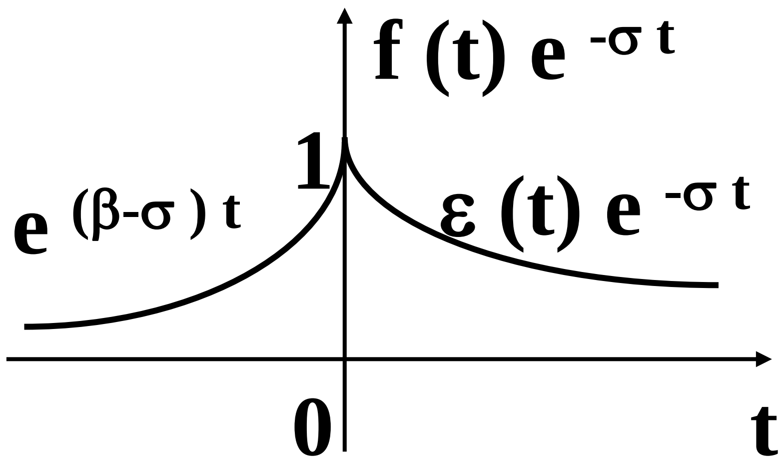
三:常用函数拉普拉斯变换

四:极点零点

1：拉普拉斯变换定义



$$f(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ e^{\beta t} & t<0\end{cases}$$



$$f(t)e^{-\sigma t}=\begin{cases}e^{-\sigma t} & t>0\\ e^{(\beta-\sigma)t} & t<0\end{cases}$$

$$\boxed{0<\delta<\beta}$$

$$F(f(t)e^{-\delta t})=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\delta+j\omega)t}dt$$

$$F(f(t)e^{-\delta t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t}dt$$

$\boxed{令\ s = \delta + j\omega}$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\delta + j\omega)t}dt$$

复频率

$$f(t)e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t}d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(\delta + j\omega)\ t}d\omega$$

$$\omega: -\infty \rightarrow \infty \Rightarrow s = \sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty \quad d\omega = \frac{1}{j}ds$$

双边拉普拉斯变换（广义傅氏变换）

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

双边拉普拉斯变换

$$F_d(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=L_d(f(t))$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_d(s)e^{st}ds \quad =L^{-1}{}_d(F_d(s))$$

原函数 $f(t)\xleftrightarrow{L_d}F_d(s)$ 象函数

若 t < 0 时，有f (t) = 0

单边拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad =L(f(t))$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=L^{-1}(F(s))$$

$$f(t)\xleftrightarrow{L}F(s)$$

2：拉普拉斯变换与傅里叶变换

1：拉普拉斯变换本质上是傅里叶变换

$$F(s)=L(f(t))=F(f(t)e^{-\delta t})$$

只要有合适δ的存在，就可以使不满足绝对可积条件的信号在衰减后变成绝对可积，实现积分变换。

2：拉氏变换与傅氏变换一样存在积分收敛问题

- 不是任何 δ 都会使 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(f(t)e^{-\delta t})=0$ 。
- 也可能找不到使原信号收敛，即不存在拉氏变换。

3：当 $\delta=0$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(f(t)e^{-\delta t})=0$ 即 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$

$$F(j\omega)=F(s)\big|s=j\omega$$

2：拉普拉斯变换与傅里叶变换

3：拉普拉斯变换是一个复变函数的问题，引入复变函数的理论可以用留数的方法简化计数。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

4：傅里叶变换分解单元：函数$e^{j\omega t}$ 或$\cos\omega t$。

拉普拉斯变换分解单元：复幂指数函数e^{st} 或$e^{\sigma t}\cos\omega t$。

拉普拉斯变换与傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(j\omega)|Cos(\omega t+\varphi)d\omega=\boxed{\sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}|F(j\omega)|d\omega\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$F(\sigma+j\omega)=F(f(t)e^{-\delta t})=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$f(t)e^{-\delta t}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\sigma+j\omega)|\cos(\omega t+\varphi)d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}e^{\delta t}\int_{0}^{\infty}|F(s)|\cos(\omega t+\varphi)d\omega=\boxed{\sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}|F(s)|d\omega e^{\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

3：基本单元函数e^{jwt}和e^{st}的零状态响应

系统的冲激响应h(t)。

$$e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega t-j\omega\tau}d\tau=e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

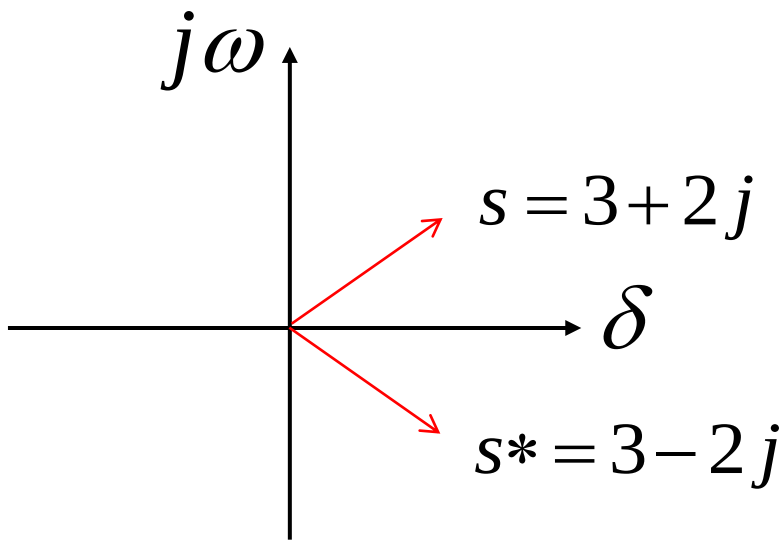
$$e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{st-s\tau}d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

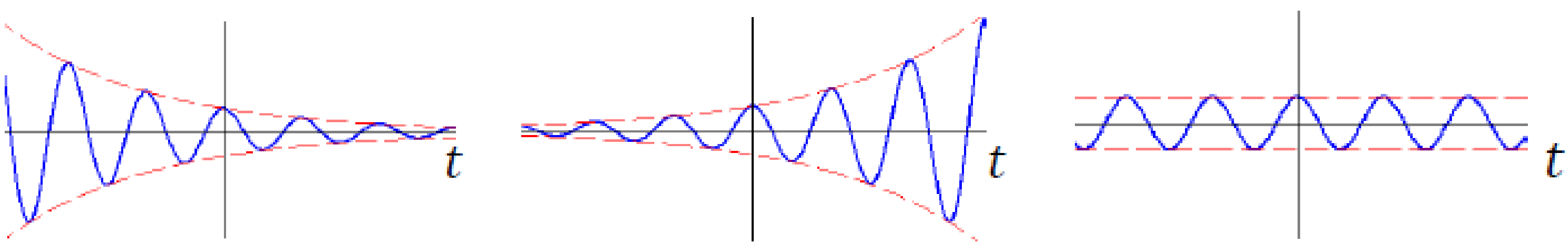
$$=e^{st}H(s)$$

4：s平面(复频率和复平面)

$$\boxed{s=\delta+j\omega} \qquad e^{st}=e^{\delta t}e^{j\omega t}\begin{cases}\delta & \text{决定信号的衰减/振幅速率}\\ \omega & \text{决定信号的振荡快慢}\end{cases}$$

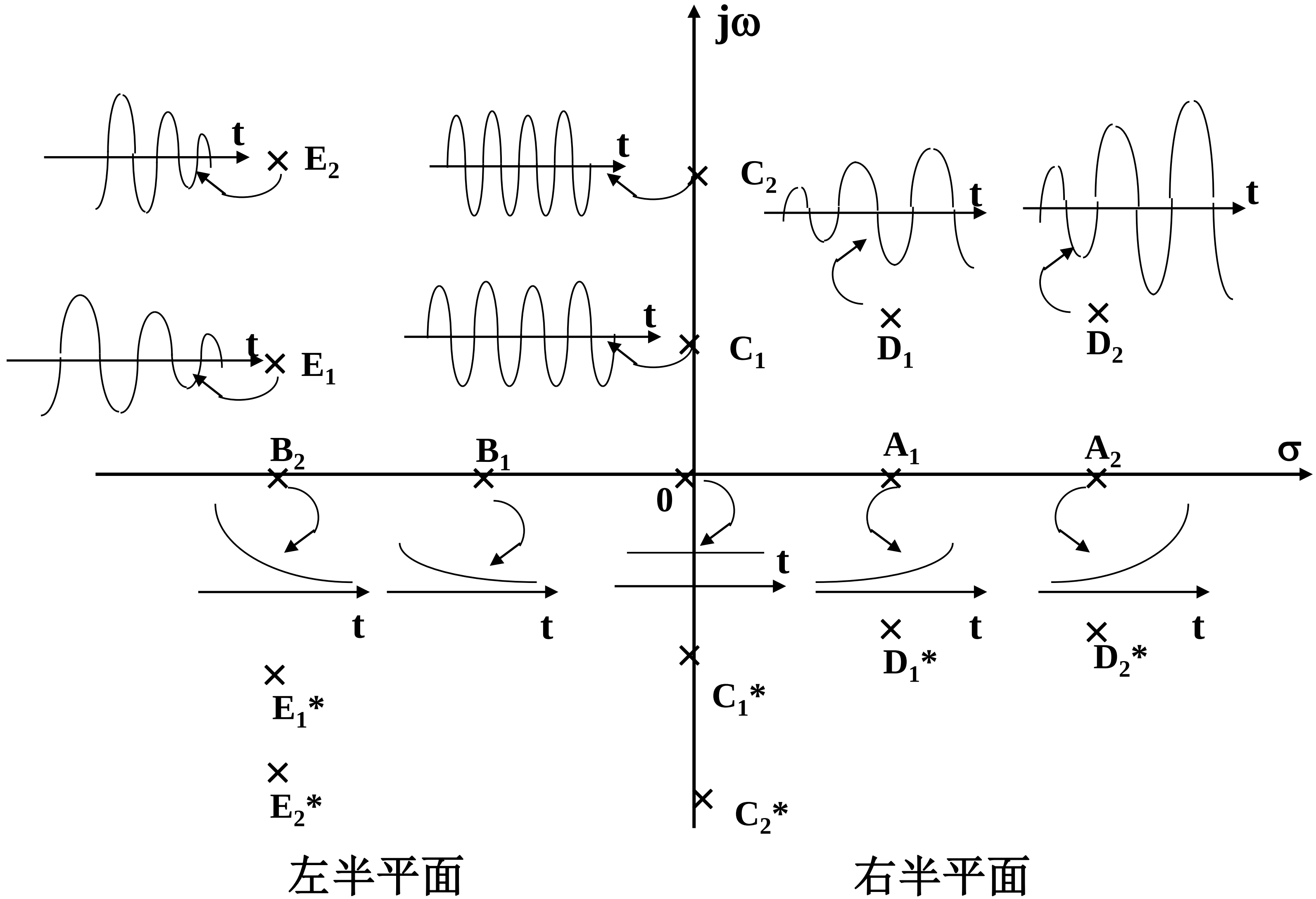


$$\boxed{\begin{matrix} e^{3t}e^{j2t} & \\ + & \Delta e^{3t}\cos 2t \\ e^{3t}e^{-j2t} & \end{matrix}}$$



$\sigma<0$ $\qquad$ $\sigma>0$ $\qquad$ $\sigma=0$

4、复频率和复平面



二：单边拉普拉斯变换的收敛区

1：收敛区定义

$$F(s)=L(f(t))=F(f(t)e^{-\delta t})=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t}dt$$

单边LT,积分存在的条件 $\int_{0}^{\infty}|f(t)e^{-\delta t}|dt<\infty$

δ 满足一定的条件下，才使得F(s)存在

1：充分条件：f(t)是指数阶函数且分段连续。

2：指数阶函数：

存在常数σ_0, 使得$f(t)e^{-\sigma t}$在$\sigma>\sigma_0$，对所有大于定值T的时间t有界

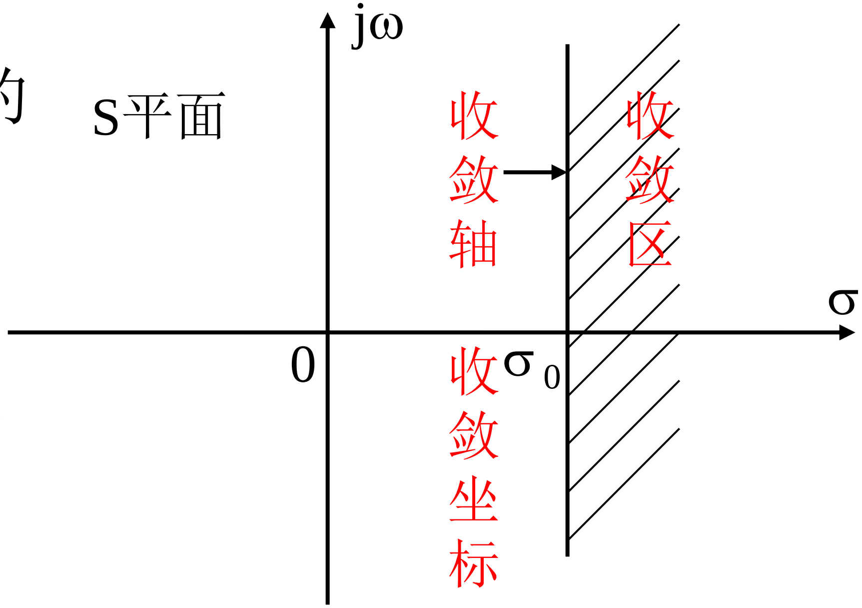
$$\boxed{\lim_{t\to\infty}f(t)e^{-\delta t}=0\quad \delta>\delta_0}$$

3、收敛区 $\delta > \delta_0$

收敛轴:通过σ_0并且平行纵轴的直线为收敛边界。

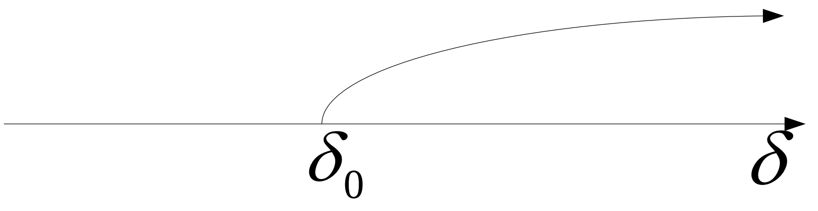
σ_0：收敛坐标

收敛区:S平面上，收敛轴右侧



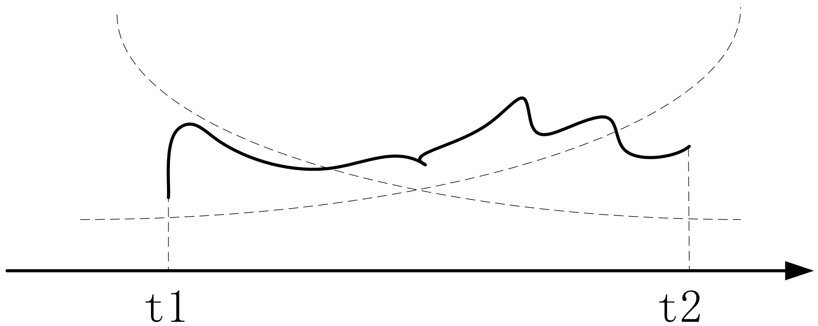
与S的实部的取值有关

与S的虚部没有关系



4、几个典型函数的收敛区

单脉冲信号

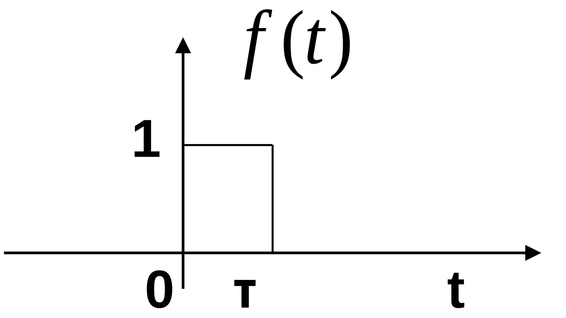


$$\lim_{t\to\infty}\left[f_{\tau}(t)e^{-\delta t}\right]=\lim_{t\to\infty}\left[0\bullet e^{-\delta t}\right]=0 \quad \sigma>-\infty$$

- 收敛区为整个s平面
- 凡有始有终，能量有限的信号，其收敛坐标位于-∞ 。

例1 求单脉冲的收敛域

$$f(t)=\begin{cases}1,0<t<\tau\\0,\text{其它}\end{cases}$$



解： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}0\bullet e^{-\sigma t}=0$ 对所有的 σ 值成立

$\therefore \sigma>-\infty$ 即在全平面收敛

例2 求 $f(t)=e^{t^2}$ 的收敛域

解：$\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2}e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{(t-\sigma)t}=0$

$t-\sigma<0\Rightarrow\sigma>t\to\infty$ 即在全平面发散，因此没有收敛域

三：常用函数的拉普拉斯变换

（一）指数函数 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$（$\alpha$ 为常数）

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}dt=\frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)\bullet\infty}+\frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)\bullet 0}$$

当 $\mathrm{Re}(s)+\mathrm{Re}(\alpha)>0$ $\quad \frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)\bullet\infty}=0$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+\alpha},\quad \mathrm{Re}(s)=\sigma>\mathrm{Re}(\alpha)$$

α为实数且$\alpha>0$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$\boxed{F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}}$$

1、阶跃函数 $\varepsilon(t)$

$$\alpha = 0 \quad \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\mathrm{Re}[s] = \sigma > 0(\text{不包含} j\omega \text{轴})$$

$$\boxed{\varepsilon(t) \overset{\text{付氏}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad \boxed{F(j\omega) \neq F(s)\big|_{s=j\omega}}}$$

2、单边虚指数函数 $e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$

$$\alpha = j\omega_0 : e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \mathrm{Re}[s] = \sigma > 0(\text{不包含} j\omega \text{轴})$$

$$e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t) \overset{\text{付氏}}{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j\omega - j\omega_0} \quad \text{（不能对换）}$$

$$\boxed{f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_c))}$$

3、单边正、余弦函数 $Sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$、$Cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$

$$F(s)=L\{Sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)\}=\frac{1}{2j}L\{e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)-e^{-j\omega_0 t}\varepsilon(t)\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^{\ 2}}$$

即 $$Sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^{\ 2}},\sigma>0$$

同理: $$Cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega_0^{\ 2}},\sigma>0$$

$$\left.\begin{array}{l} Sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)\overset{\text{付氏}}{\leftrightarrow}\dfrac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{\omega_0}{\omega_0^{\ 2}-\omega^2} \\ Cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)\overset{\text{付氏}}{\leftrightarrow}\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{j\omega}{\omega_0^{\ 2}-\omega^2} \end{array}\right\}$$

（不能对换）

（二）t的正幂函数 t^n(n为正整数)

$$F(s)=L\{t^n\varepsilon(t)\}=\int_0^{\infty}t^n e^{-st}dt=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}},\sigma>0$$

n=1时： $t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2},\sigma>0$ （不能对换）

（三）冲激函数 $\delta(t)$

$$\delta(t)\overset{\text{拉氏}}{\leftrightarrow}1$$

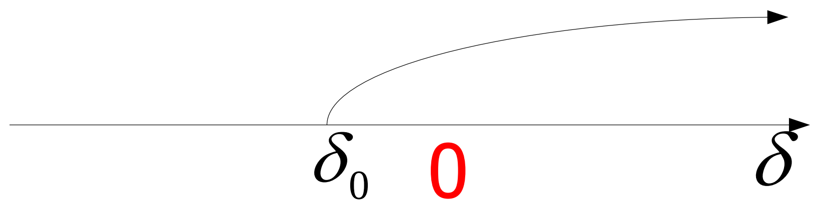
$$\delta(t)\overset{\text{付氏}}{\leftrightarrow}1$$

（收敛域为全s平面即包括虚轴，故可对换）

拉普拉斯变换与傅里叶互换条件

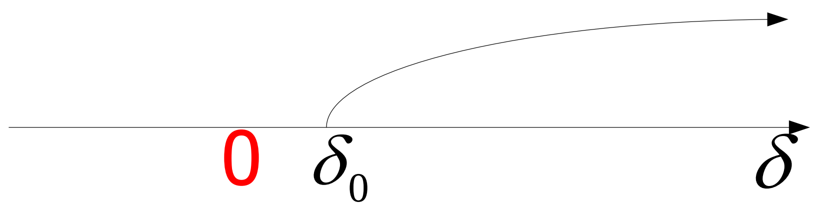
$\delta > \delta_0$

$1: \delta_0 < 0, F(j\omega) = F(S)\big|_{S=j\omega}$

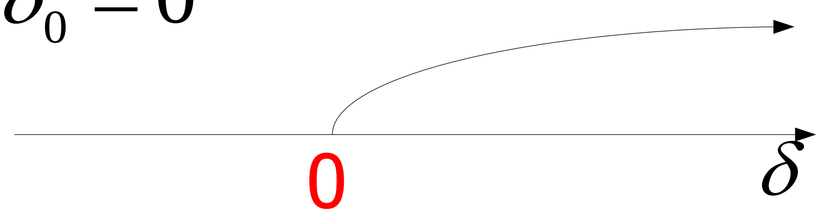


只有收敛条件包含0点才能互换

$2: \delta_0 > 0,\ F(j\omega)$



$3: \delta_0 = 0$



四：极点零点

1：极点零点定义

大多数拉氏变换是关于的有理函数，可表示为：

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\Lambda+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\Lambda+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

1：F(s)的极点　：使得F(s)无穷大的S，作图用X表示

D(s)=0的n个根Pi

2：F(s)的零点　：使得F(s)等于0的S，作图用O表示

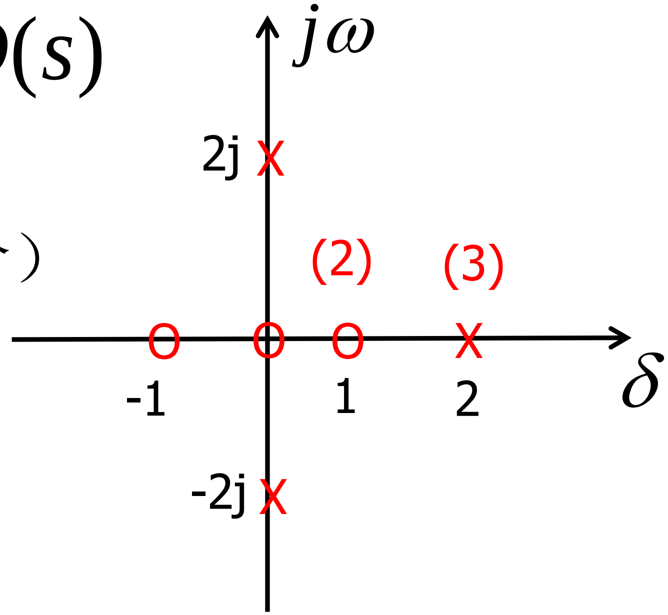
N(s)=0的m个根Zi

2：极零图

$$F(s)=\frac{s(s+1)(s-1)^2}{(s^2+4)(s-2)^3}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

X 极点 $2j,\ -2j,\ 2$（三阶）

O 零点 $0,-1,\ 1$（二阶）



$$F(s)=a\frac{s(s+1)(s-1)^2}{(s^2+4)(s-2)^3}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

本讲小结

- 傅里叶变换到拉普拉斯变换
  - 信号的非绝对可积条件的放松，衰减因子引入
  - 拉普拉斯变换的计算公式，s对jω的替代
  - 单边拉普拉斯变换与双边拉普拉斯变换
  - 复频域的概念$s=\sigma+j\omega$，虚部、实部物理意义
- 拉普拉斯变换的收敛区
  - 讨论收敛的意义
  - 单边拉普拉斯变换收敛区
  - 几种典型信号拉普拉斯变换的收敛区
  - 双边拉普拉斯变换的收敛区

信号与线性系统

第 9 次课外作业

教材习题: 5.1、5.2