观察者也能动

华中科技大学软件学院　万琳

提纲

1. 绕任意轴的旋转
2. 观察变换
3. 模型变换与观察变换

1 绕任意轴的旋转

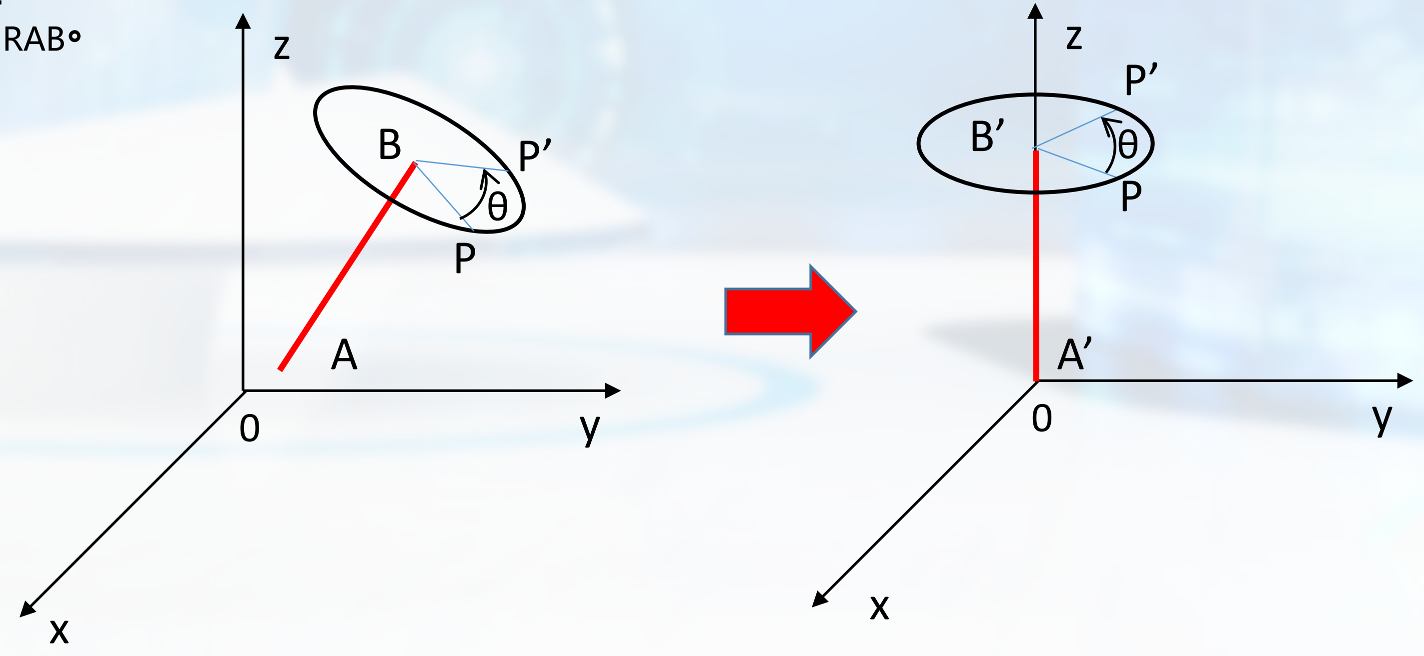
◆ 绕任意轴的三维旋转变换

假设已知空间有任意轴AB，A点的坐标为$A(x_A,y_A,z_A)$，AB的方向数为(a,b,c)。

现有空间一点$p(x,y,z)$，绕AB轴逆时针旋转θ角后成为$p'(x',y',z')$，若旋转变换矩阵为 T_{RAB} 。

则：$[x' \quad y' \quad z' \quad 1]=[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot T_{RAB}$

问题：如何求出T_{RAB}。



1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

步骤：

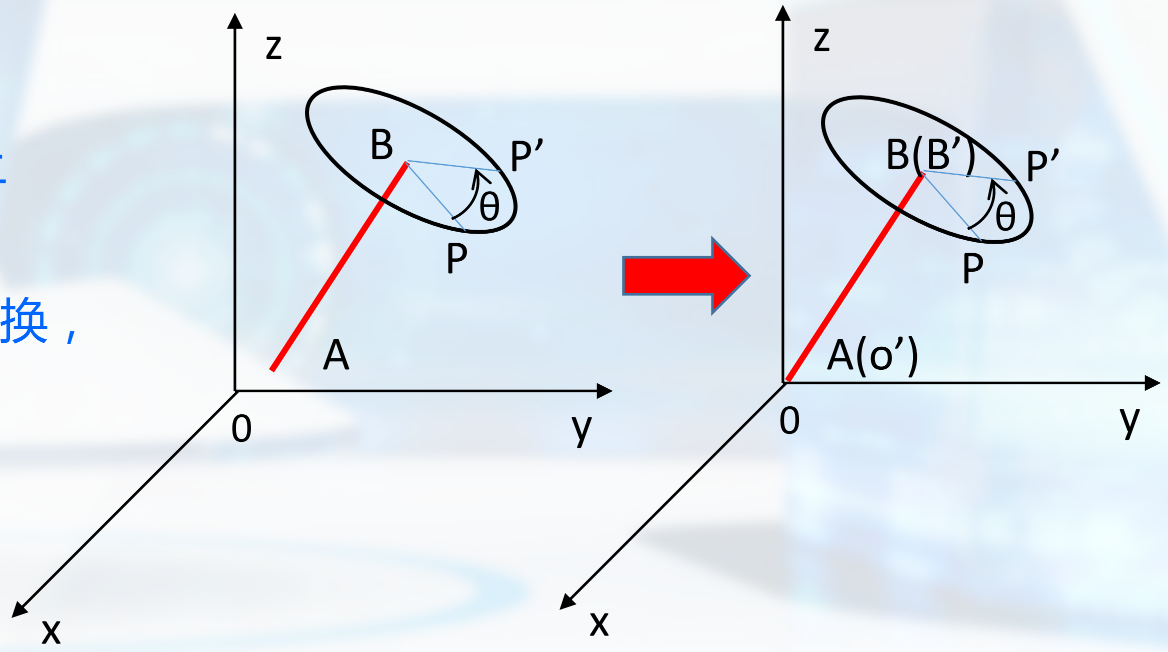
（1）把A点移动到坐标原点

（2）把AB轴绕到某个坐标轴上

（3）旋转

（4）求（1）（2）变换的逆变换，回到AB原来的位置

$$T_A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-x_A&-y_A&-z_A&1\end{bmatrix}$$



1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

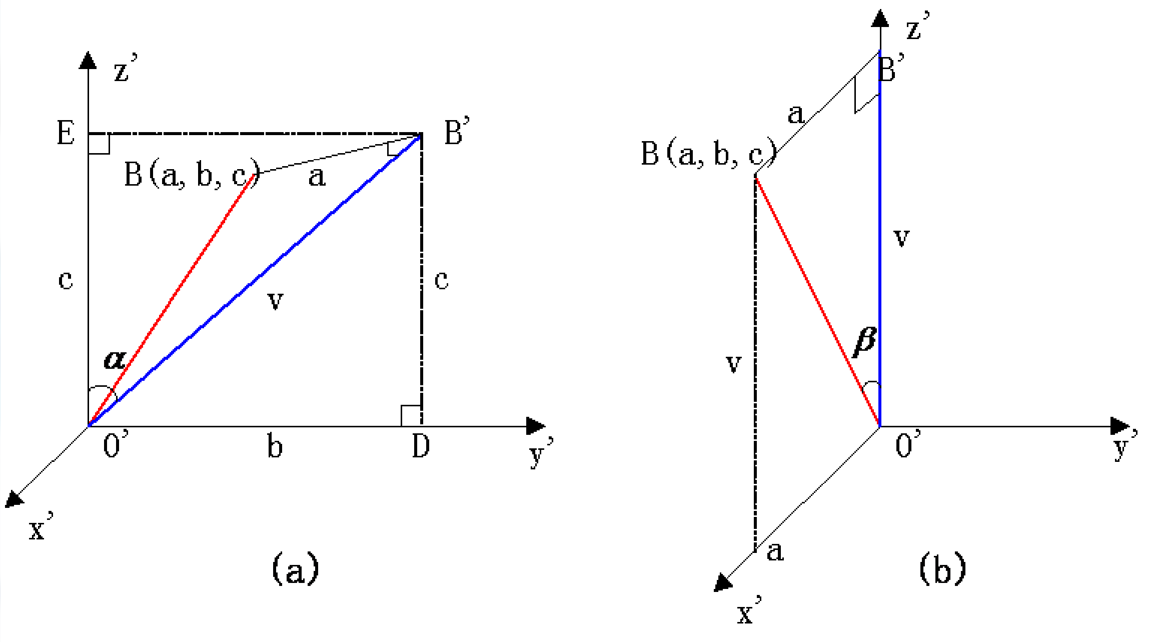
步骤：

（1）把A点移动到坐标原点

（2）把AB轴绕到某个坐标轴上

（3）旋转

（4）求（1）（2）变换的逆变换，回到AB原来的位置

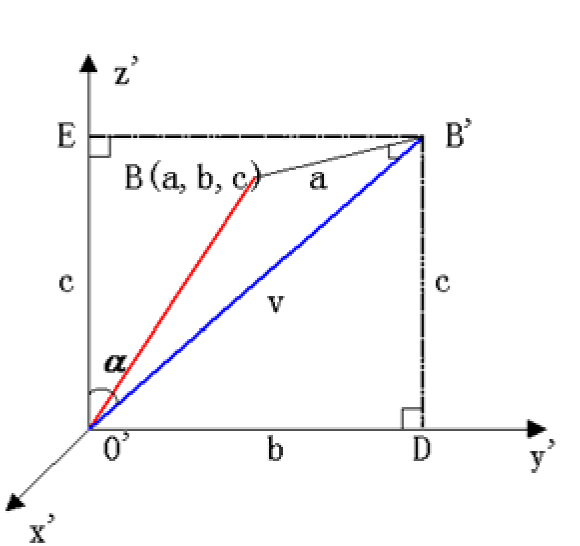


➢绕x轴正转α角，将O'B'转动到XOZ平面上

➢绕y轴反转β角，将O'B'转动到z轴上

1 绕任意轴的旋转

➢绕x轴正转α角，将O’B’转动到XOZ平面上



(a)

B’ B‘为点B在平面y’o‘z’上的投影，则平面O‘BB’与z‘轴的夹角为α。沿点分别对y‘轴和z’轴作垂线，垂点为D和E，则：

$$\cos\alpha=\frac{O'E}{O'B'},\sin\alpha=\frac{EB'}{O'B'}$$

考虑到O‘B的方向数为(a,b,c)，有 $O'E=c, EB'=b, O'B'=v=\sqrt{b^2+c^2}$

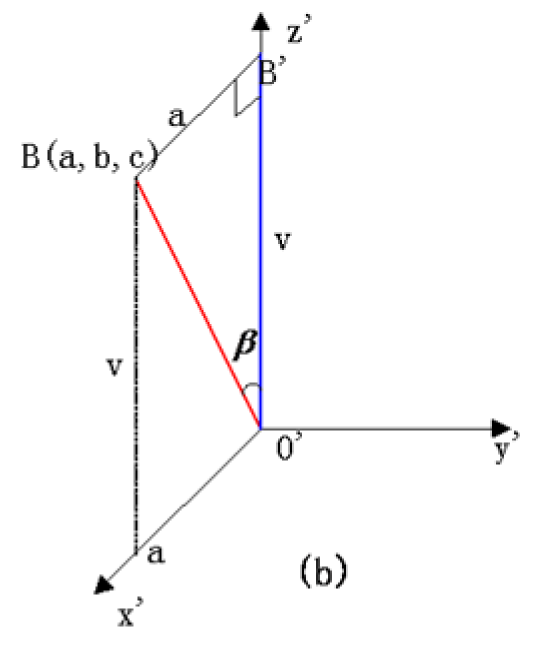
$$\cos\alpha=\frac{c}{v},\sin\alpha=\frac{b}{v}$$

将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角的旋转变换矩阵为：

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{c}{v} & \frac{b}{v} & 0\\ 0 & -\frac{b}{v} & \frac{c}{v} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1 绕任意轴的旋转

➢绕y轴反转β角，将O’B’转动到z轴上



O'B旋转到x'o'z'平面上后，O'B与z'的夹角为β

$$\cos\beta=\frac{O'B'}{O'B}=\frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}}=\frac{v}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\sin\beta=\frac{BB'}{O'B}=\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

此时，将O'B绕y'轴顺时针旋转β角，则O'B旋转到z'轴上。令

$$u=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

则O‘B绕y’轴顺时针旋转β角的变换矩阵为：

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v}{u} & 0 & \frac{a}{u} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{a}{u} & 0 & \frac{v}{u} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

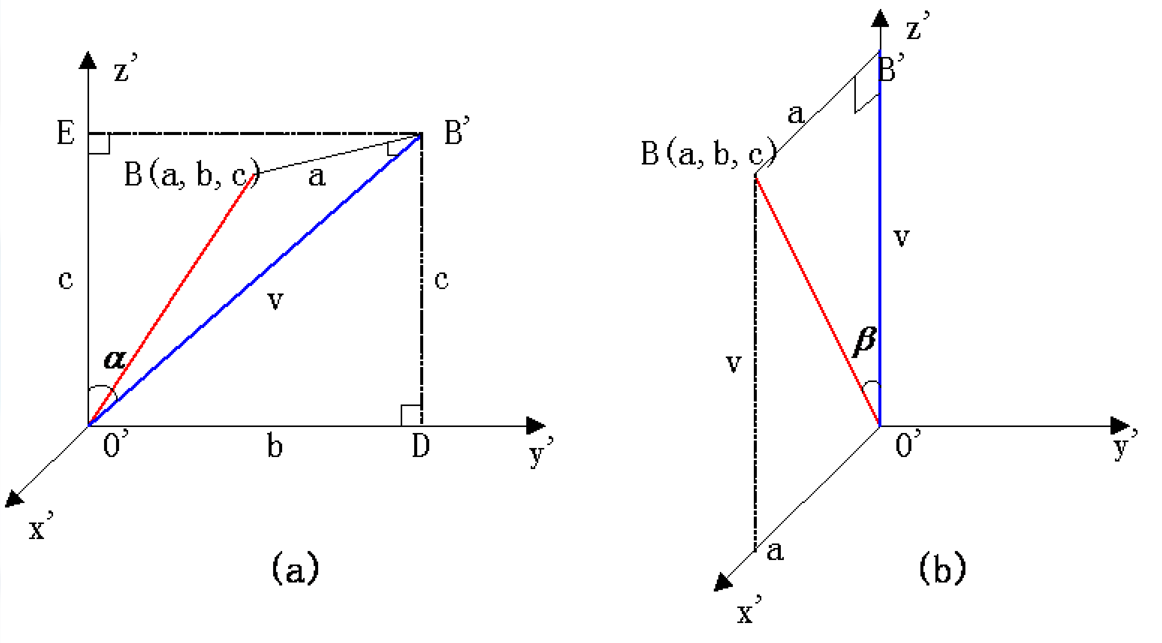
步骤：

（1）把A点移动到坐标原点

（2）把AB轴绕到某个坐标轴上

（3）旋转

（4）求（1）（2）变换的逆变换，回到AB原来的位置



此时，AB轴与z'轴重合，此时绕AB轴的旋转转换为绕z轴的旋转。绕z轴旋转θ角的旋转变换矩阵为：

$$T_{Rz}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

步骤：

（1）把A点移动到坐标原点

（2）把AB轴绕到某个坐标轴上

（3）旋转

（4）求（1）（2）变换的逆变换，回到AB原来的位置

也就是求 T_{tA}, T_{Rx}, T_{Ry} 的逆变换

1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

求 T_{tA}, T_{Rx}, T_{Ry} 的逆变换

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & -z_A & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_{tA}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \end{bmatrix}$$

1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

求 T_{tA}, T_{Rx}, T_{Ry} 的逆变换

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha&0\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{c}{v}&\frac{b}{v}&0\\0&-\frac{b}{v}&\frac{c}{v}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

⬇

$$T_{Rx}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos(-\alpha)&\sin(-\alpha)&0\\0&-\sin(-\alpha)&\cos(-\alpha)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{c}{v}&-\frac{b}{v}&0\\0&\frac{b}{v}&\frac{c}{v}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

求 T_{tA}, T_{Rx}, T_{Ry} 的逆变换

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v}{u} & 0 & \frac{a}{u} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{a}{u} & 0 & \frac{v}{u} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_{Ry}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v}{u} & 0 & -\frac{a}{u} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{a}{u} & 0 & \frac{v}{u} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

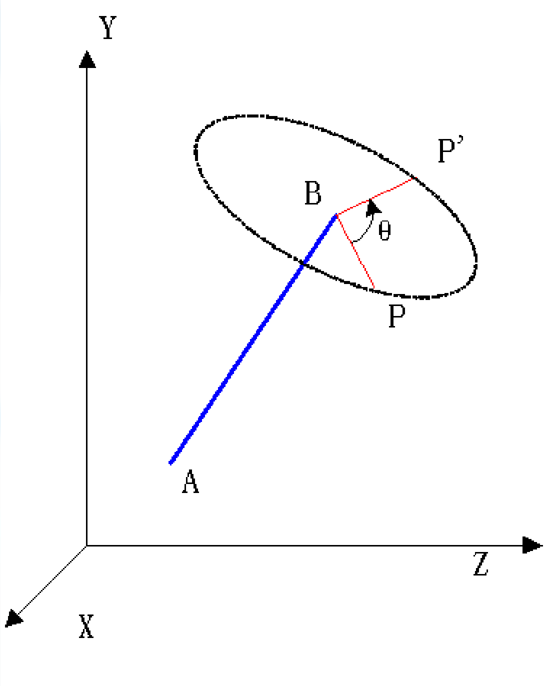
1 绕任意轴的旋转

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

假设已知空间有任意轴AB，A点的坐标为$A(x_A, y_A, z_A)$，AB的方向数为(a,b,c)。

现有空间一点$p(x, y, z)$，绕AB轴逆时针旋转θ角后成为$p'(x', y', z')$，若旋转变换矩阵为T_{RAB}。

则：$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$



问题：如何求出T_{RAB}。

步骤：

（1）把A点移动到坐标原点

（2）把AB轴绕到某个坐标轴上

（3）旋转

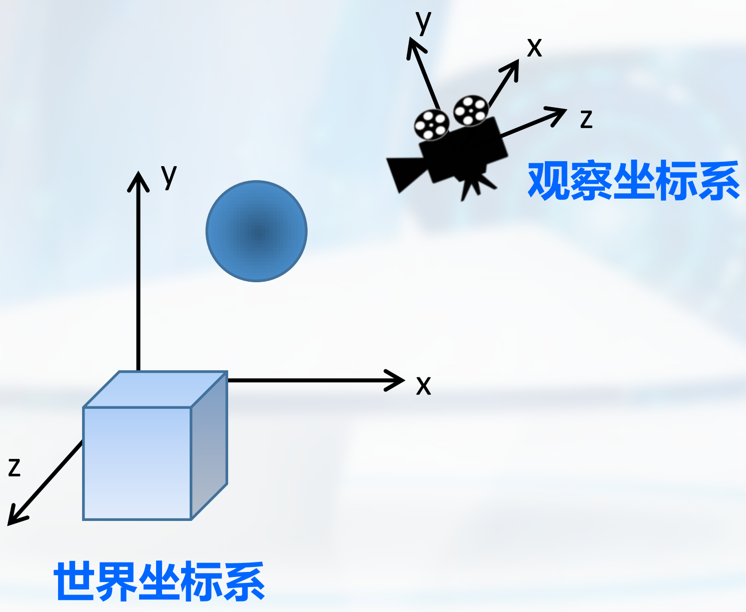
（4）求（1）（2）变换的逆变换，回到AB原来的位置

$$T_{RAB} = T_{tA} T_{Rx} T_{Ry} T_{Rz} T_{Ry}^{-1} T_{Rx}^{-1} T_{tA}^{-1}$$

2 观察变换

观察变换的概念：

- 观察变换：从世界坐标系到观察坐标系的转换

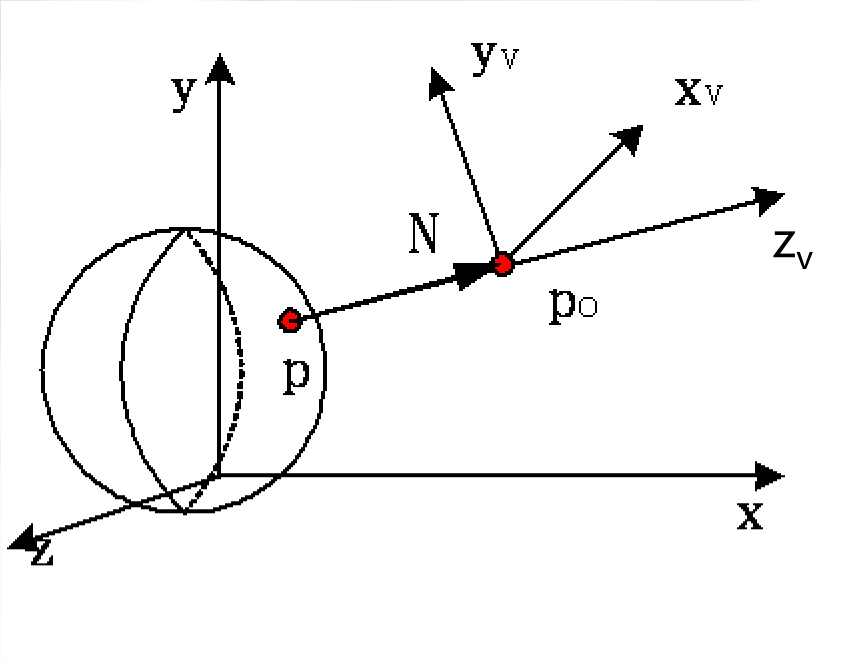


2

观察变换

观察坐标系的概念：

❖ 观察坐标系：



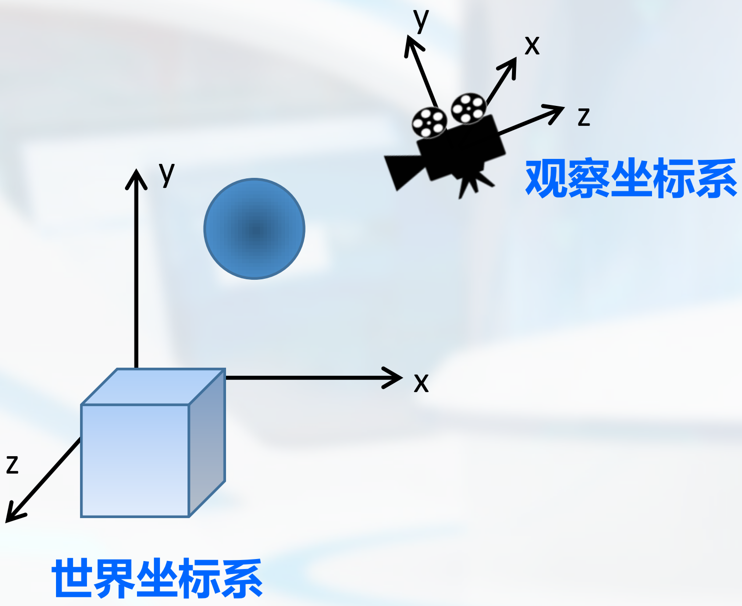
坐标原点：观察者所在的位置

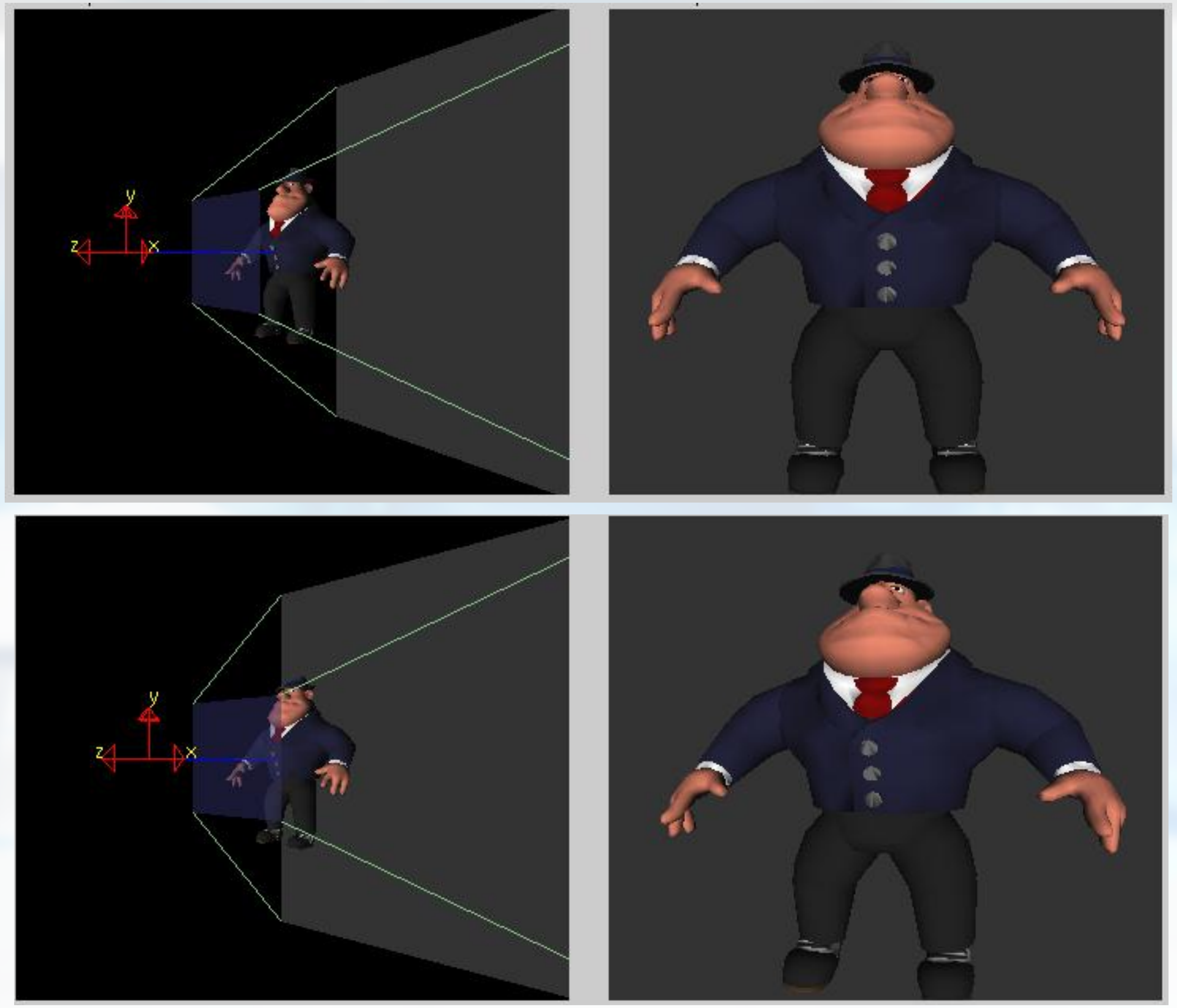
z_v ：视点和观察物体上焦点的连线

y_v ：向上的方向

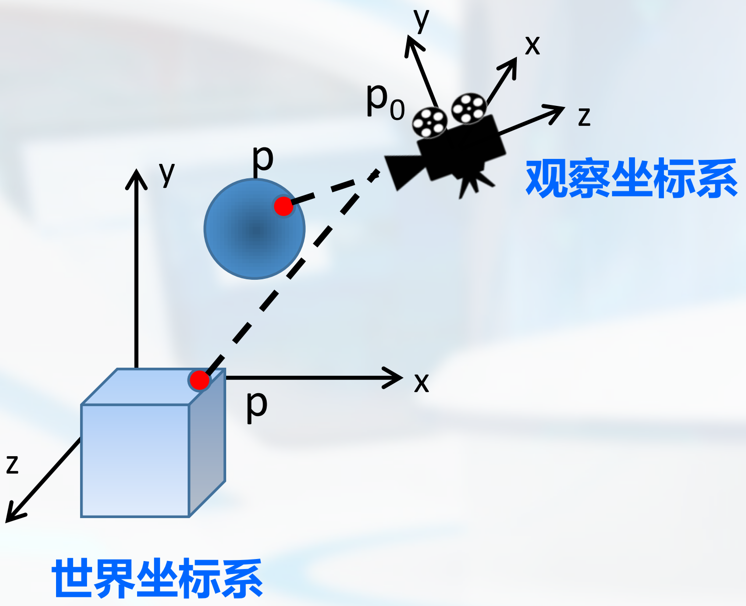
x_v ：按照右手定则确定的方向

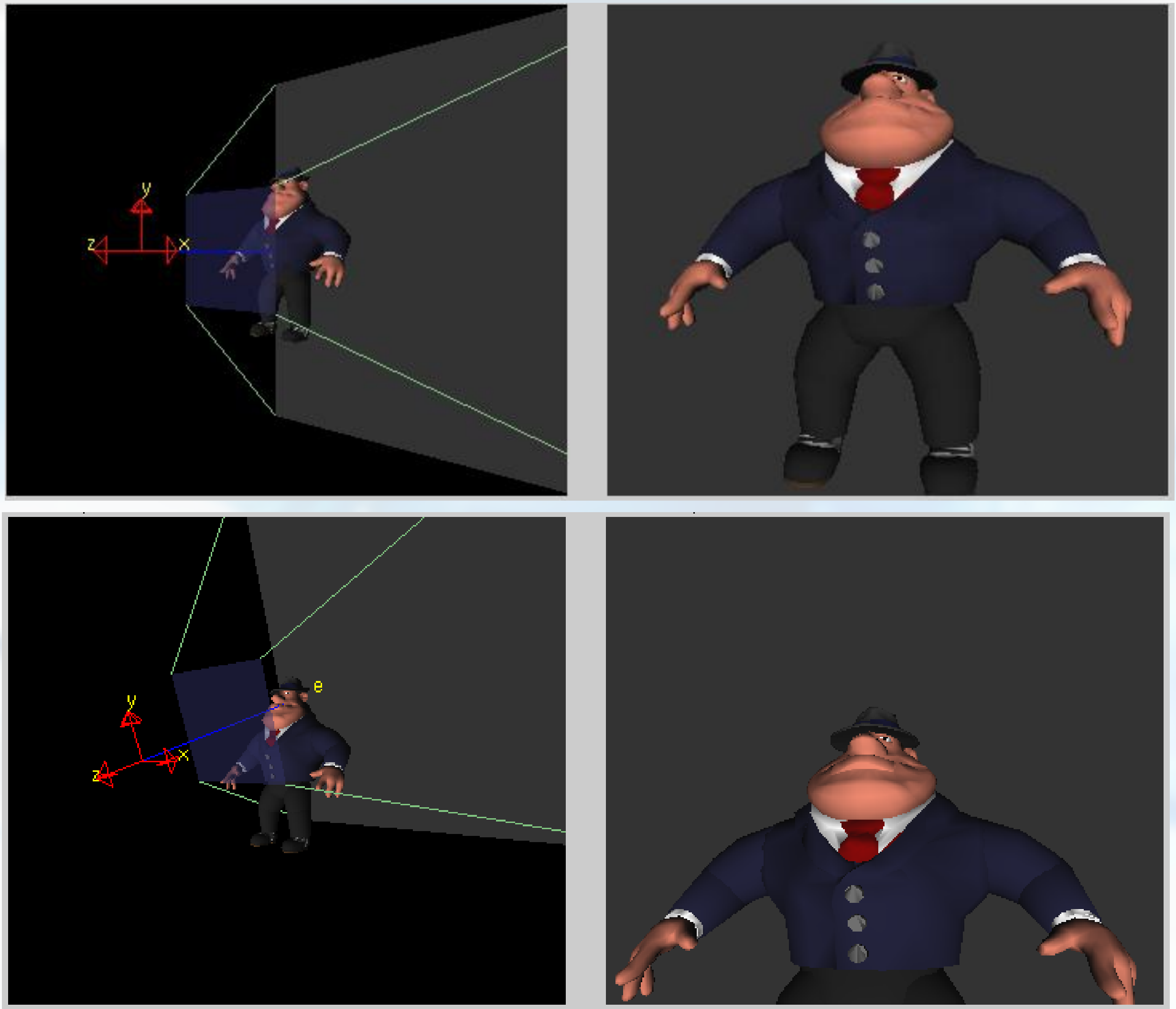
2 观察变换



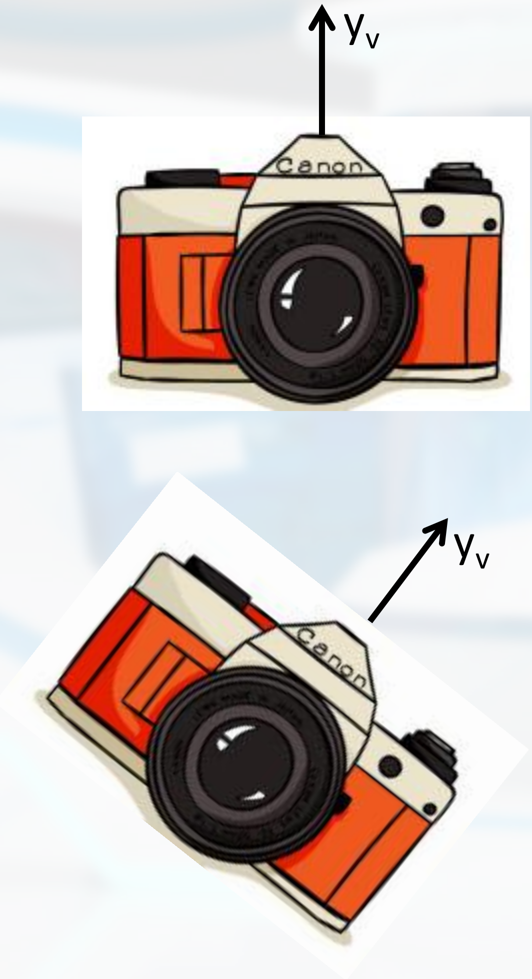


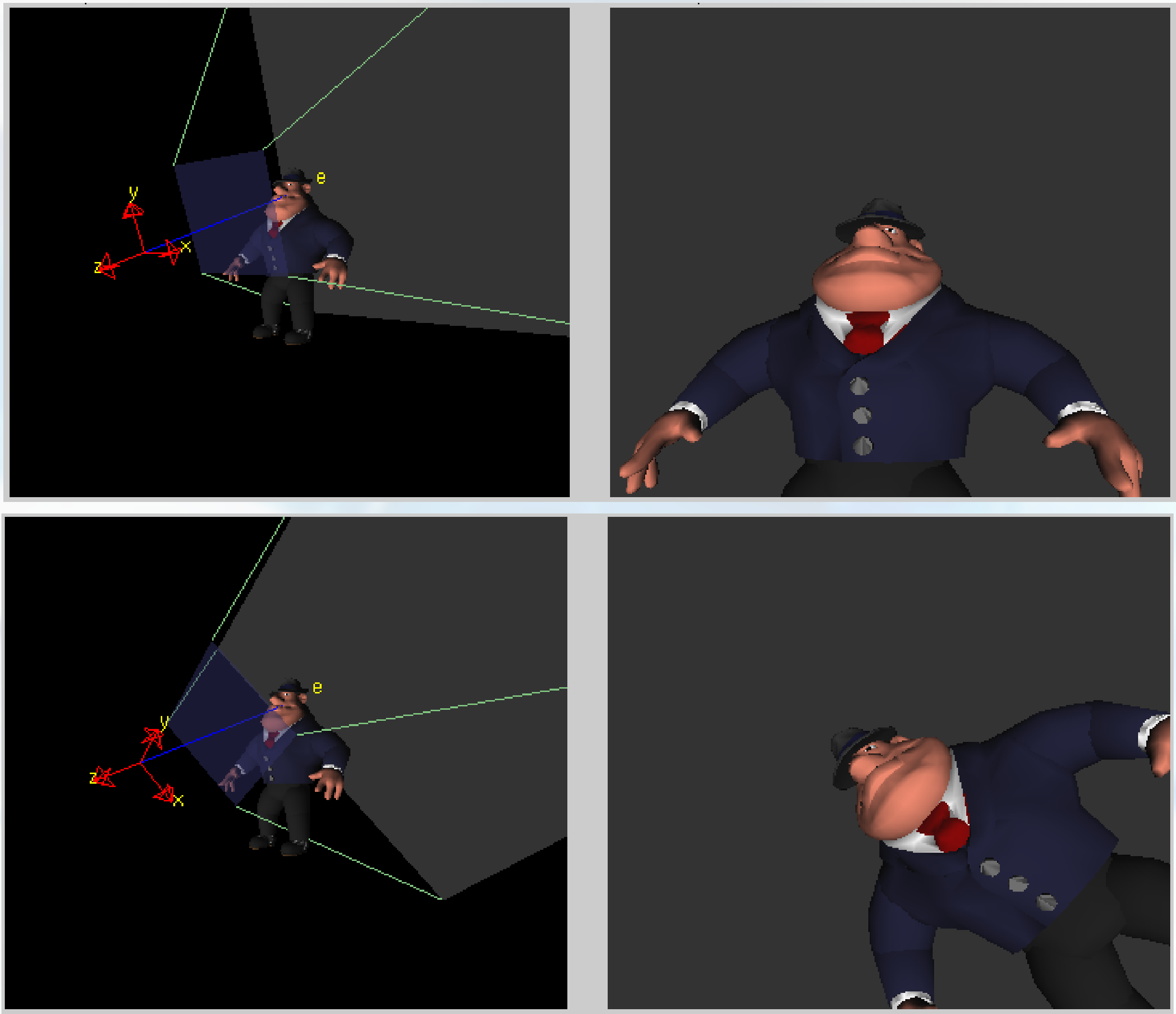
2 观察变换





2 观察变换



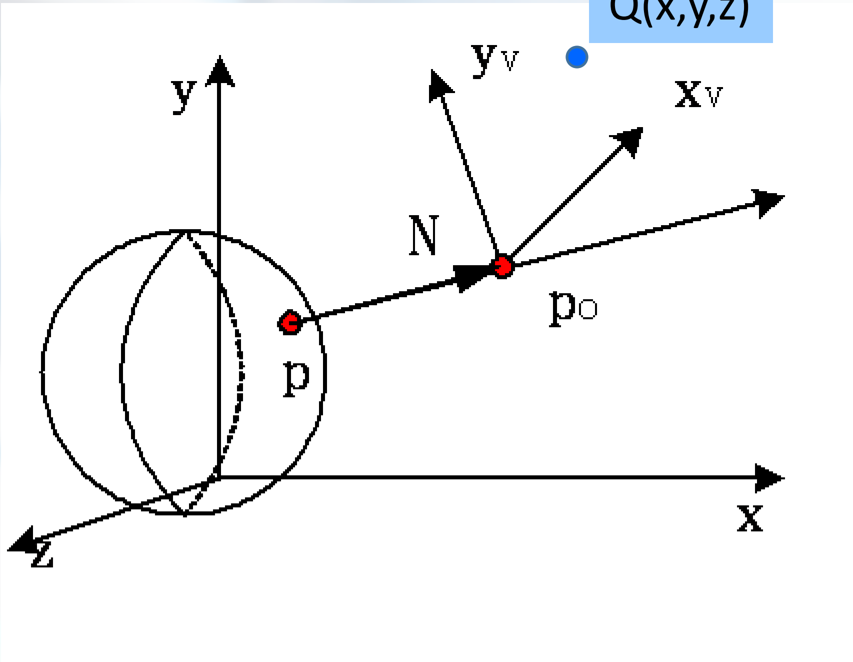


1 观察变换

观察坐标系的概念：

❖ 观察变换：世界坐标系到观察坐标系的变换

Q(x,y,z)



实际上求什么？

求世界坐标系中点Q(x,y,z)在观察坐标系中的坐标值。

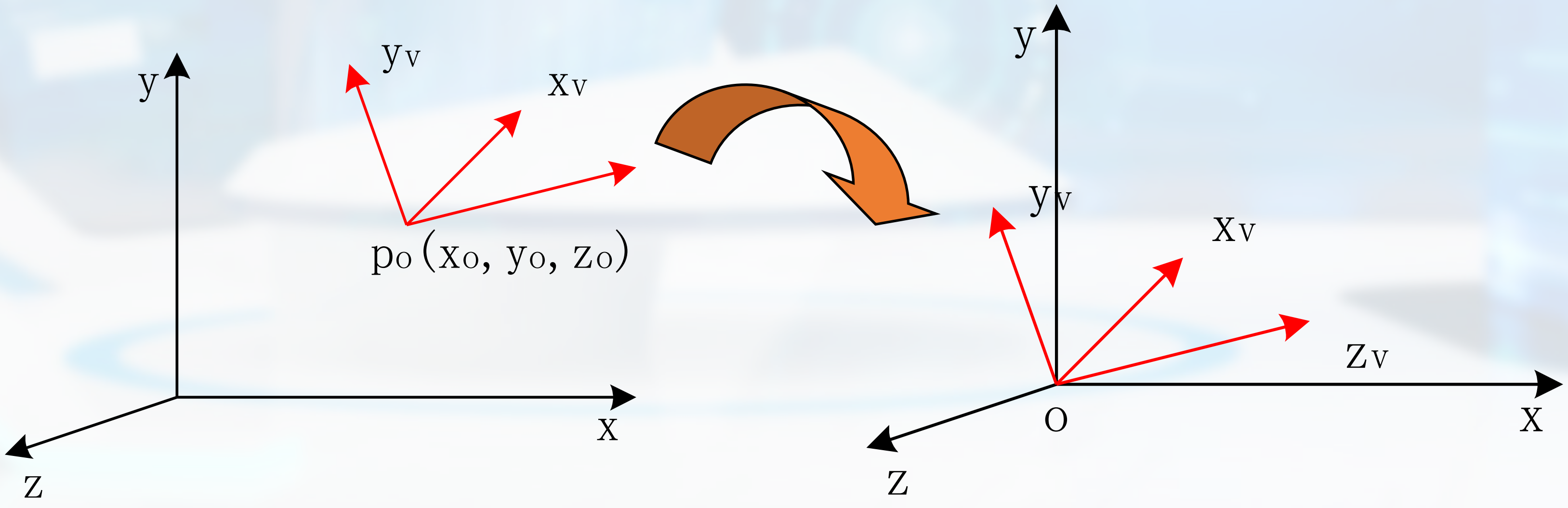
2 观察变换

观察变换的实现：

- 复合变换：

具体变换步骤：

(1) 平移观察参考点到用户坐标系原点



(a) 用户坐标系与观察坐标系

(b) 平移观察坐标系

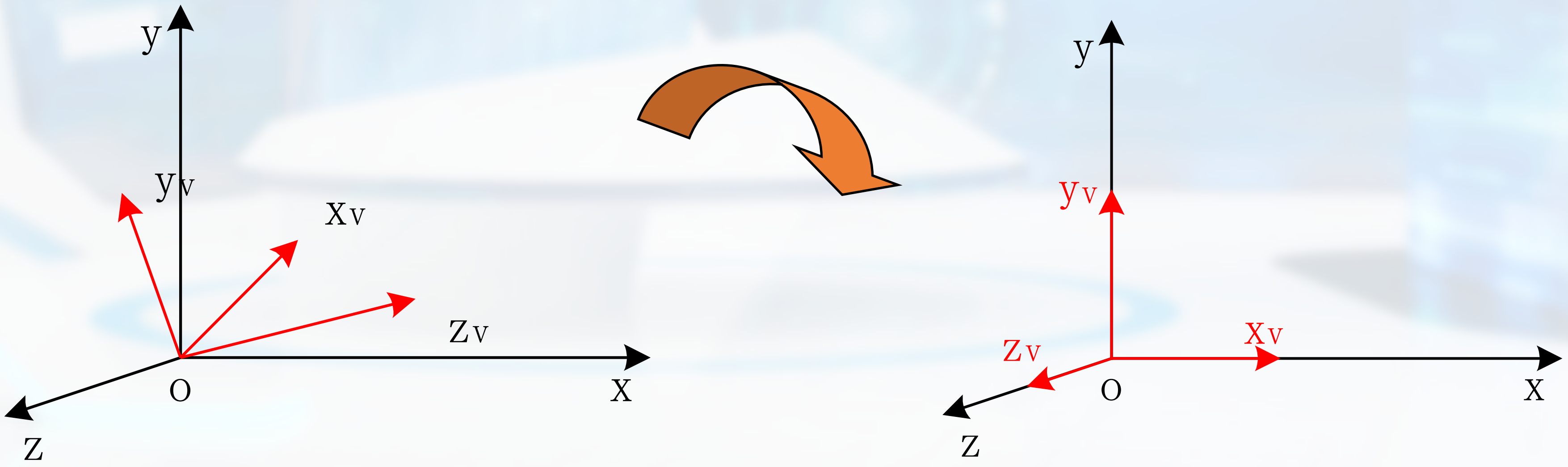
2 观察变换

观察变换的实现：

❖ 复合变换：

具体变换步骤：

(2) 进行旋转变换分别让x_v、y_v和z_v轴对应到用户坐标系中的x、y和z轴。



(b) 平移观察坐标系　　(c) 旋转观察坐标系

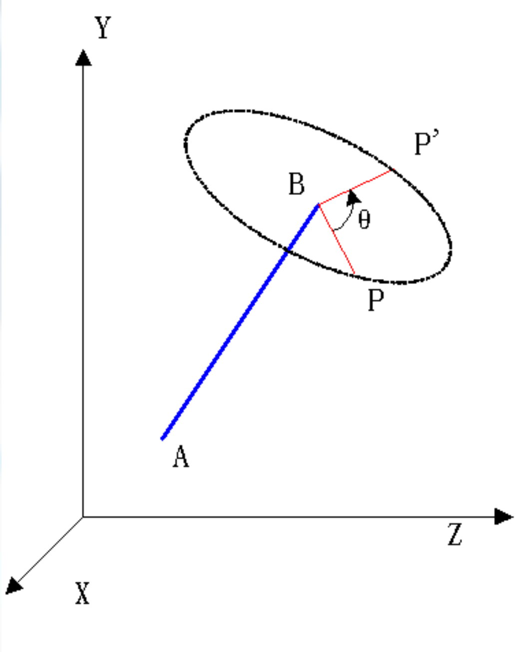
1

观察变换

观察变换的实现：

❖ 复合变换：

具体怎么做？联想一下！

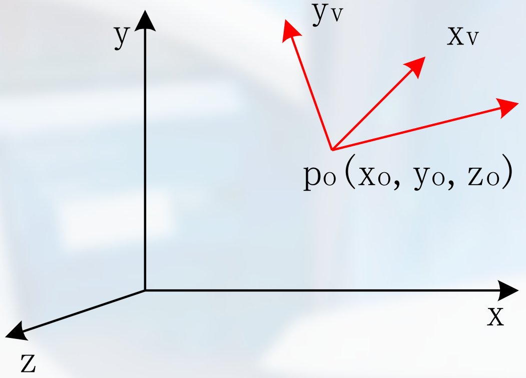


$$T_{RAB} = T_{tA} T_{Rx} T_{Ry} T_{Rz} T_{Ry}{}^{-1} T_{Rx}{}^{-1} T_{tA}{}^{-1}$$

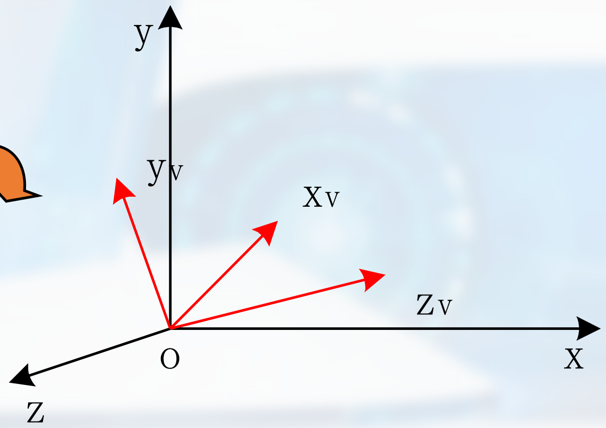
2 观察变换

具体变换步骤：

(1) 平移观察参考点到用户坐标系原点



（a）用户坐标系与观察坐标系



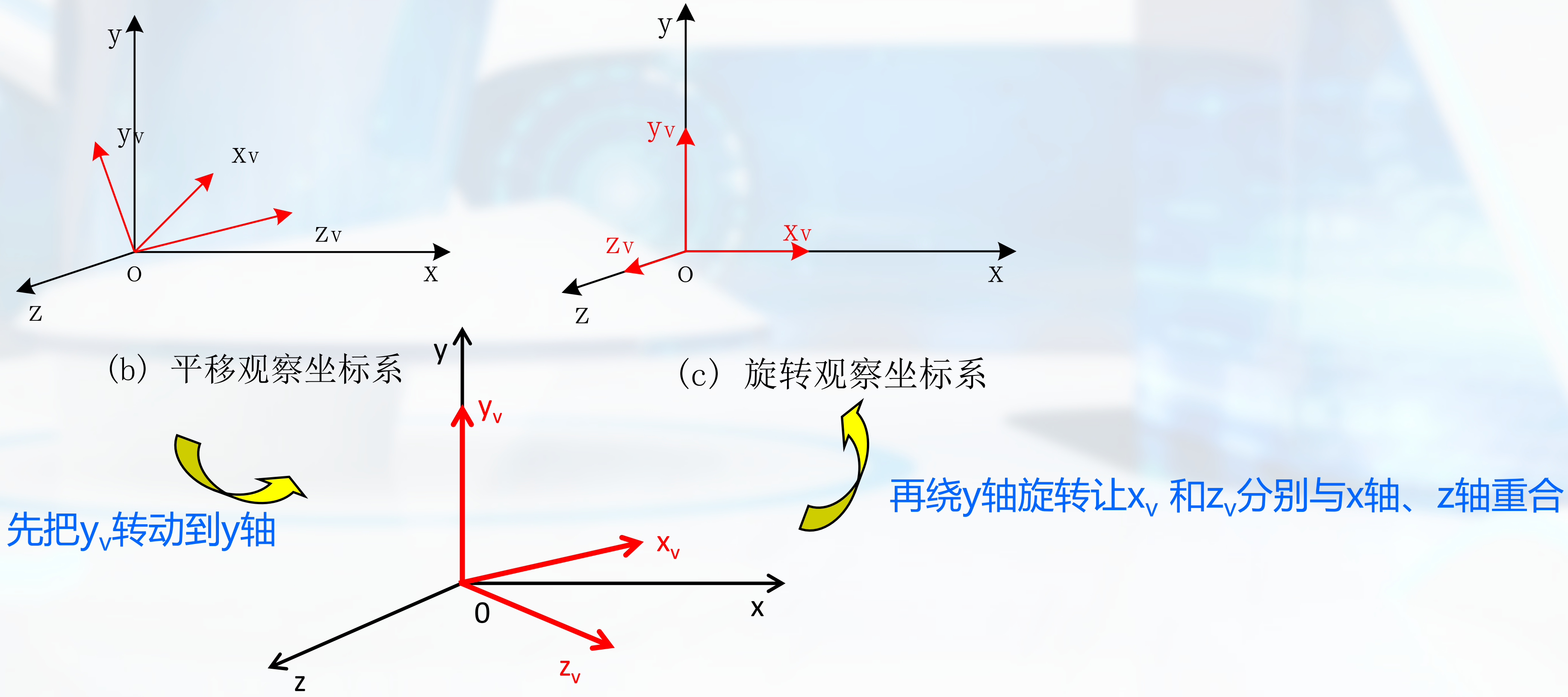
（b）平移观察坐标系

$$T_{v1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_o & -y_o & -x_o & 1\end{bmatrix}$$

2 观察变换

具体变换步骤：

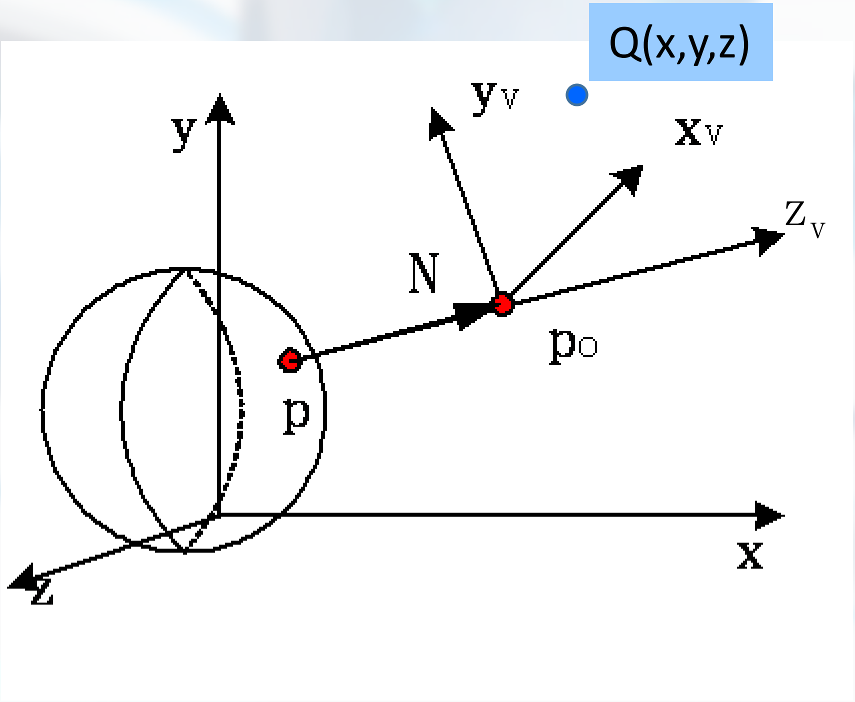
(2) 进行旋转变换分别让x_v、y_v和z_v轴对应到用户坐标系中的x、y和z轴。



2 观察变换

观察坐标系的概念：

- 观察变换：世界坐标系到观察坐标系的变换



实际上求什么？

求世界坐标系中点Q(x,y,z)在观察坐标系中的坐标值。

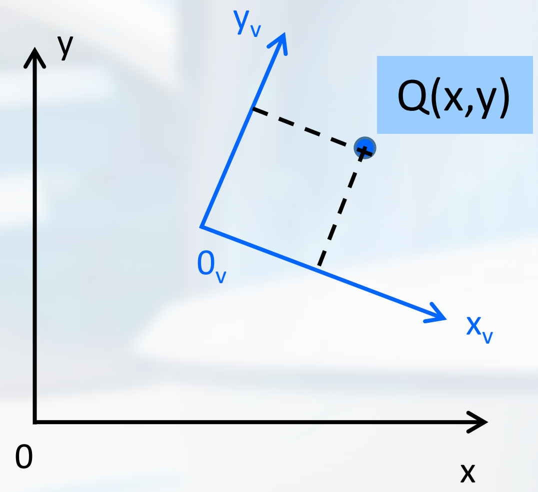
那么还需要逆变换回去吗？

2 观察变换

实际上求什么？

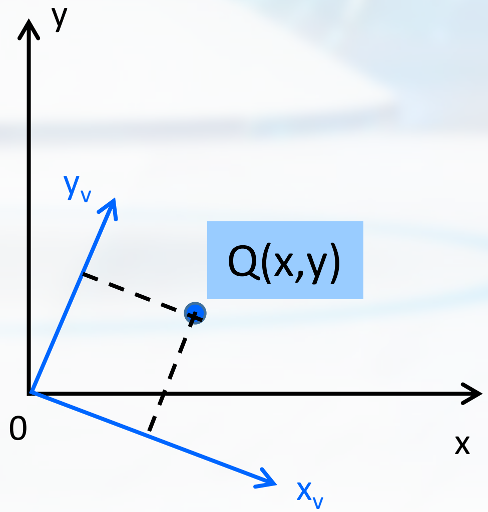
求世界坐标系中点Q(x,y,z)在观察坐标系中的坐标值。

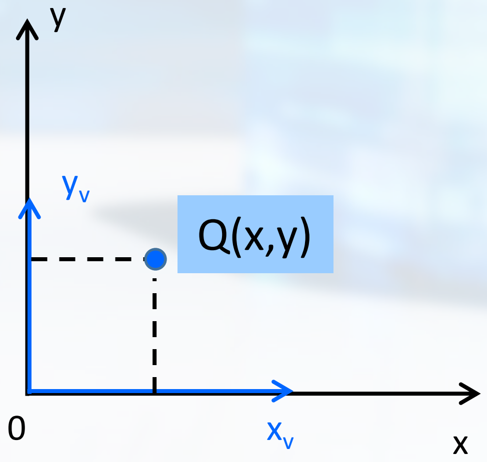
那么还需要逆变换回去吗？



以二维为例：

实际上求什么Q(x,y)在观察坐标系中的坐标(x_v,y_v)





3 模型变换与观察变换

观察变换的应用：

- 场景漫游：

  模型变换与观察变换具有对偶性

3

模型变换与观察变换

观察变换的应用：

- 场景漫游：

  但是由于场景中只有部分物体运动，所以效果不同

谢谢

软件学院 万琳