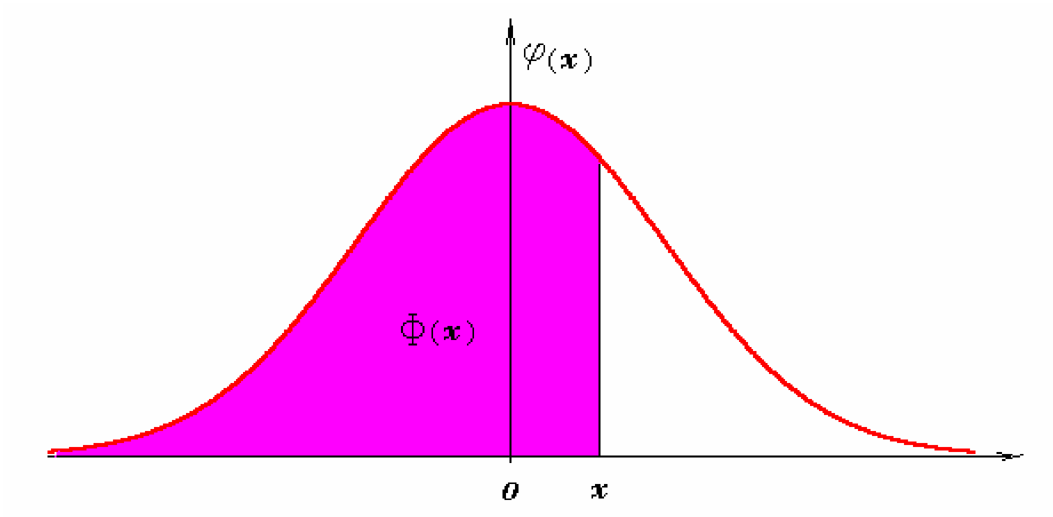
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

例3 某射手向一远处活动目标射击，其命中率 p=0.005。求他独立地射击200次能命中5次以上的概率。

解 记X为命中次数， 则 $X \sim B(200, 0.005)$

$$P(X > 5)=1-P(X \leqslant 5)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{5} C_{200}^{k} 0.005^{k} 0.995^{200-k}$$

$$=1-0.999436 = 0.000564$$

k	60	70	80	90	100
C_{200}^{k}	7.0×10^{51}	1.0×10^{55}	1.6×10^{57}	3.3×10^{58}	8.9×10^{58}

k	3	4	5	6	7
0.005^{k}	1.3×10^{-7}	6.3×10^{-10}	3.1×10^{-12}	1.6×10^{-14}	0

Poisson定理　　若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$（$\lambda>0$），则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

证明： $C_n^k p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\dfrac{(np_n/n)^k}{k!}(1-\dfrac{np_n}{n})^{n-k}$

$$=1\cdot(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\frac{(np_n)^k}{k!}[(1-\frac{np_n}{n})^{-\frac{n}{np_n}}]^{-np_n}(1-p_n)^{-k}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1\times\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\times 1$$

应用：　设$X\sim B(n,p)$，当$n>10$，$p<0.1$时，有

$$P(X=k)\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

例3 某射手向一远处活动目标射击，其命中率 p=0.005。求他独立地射击200次能命中5次以上的概率。

解 记X为命中次数， 则$X \sim B(200，0.005)$

$$P(X>5)=1-P(X\le 5)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{5} C_{200}^{k}0.005^{k}0.995^{200-k}=0.000564$$

$$P(X=k)\approx \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{5}\frac{(200\times 0.005)^k}{k!}e^{-200\times 0.005}$$

$$=\sum_{k=6}^{\infty}\frac{1^k}{k!}e^{-1} \underset{=\!=\!=}{\text{查表}\mathbf{P}_{272}} 0.000594$$

注意到

1^0 $\quad \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ge 0$

2^0 $\quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}e^{-\lambda}=1$

3．泊松（Poisson）分布 $X\sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad (\lambda>0)\quad k=0,1,2,\ldots$$

例4（P_{46}例2.6）由某商店过去的销售记录可知，某种商品每月的销售量（单位：件）可用参数为λ=5的泊松分布描述。为了有99%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少要进货多少件?

解 记X为该商品的月销售量（件），由题设$X\sim P(5)$

设月底进货N件，则不脱销的概率为

$$P(X\le N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{5^k}{k!}e^{-5}\ge 0.99\qquad \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}e^{-5}<0.01$$

查表得$N+1\geqslant 12$，即$N\geqslant 11$。

4．几何分布

设每次试验的“成功”率均为p，X为进行独立试验首次“成功”的试验次数，则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,\ldots$$

例5（P_{46}例2.7）设某求职人员，在求职过程中每次求职成功的概率为0.4。试问该人员至少求职多少次，才能有0.9的把握获得一个就业机会？

解 记X为首次求职成功的求职次数，则X服从$p=0.4$的几何分布。

$$P(X\le k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}0.6^{i-1}0.4=\frac{0.4(1-0.6^k)}{1-0.6}=1-0.6^k\ge 0.9$$

$$\Rightarrow \quad 0.6^k\le 0.1 \quad \Rightarrow \quad k\ge\frac{ln\,0.1}{ln\,0.6}=4.5$$

即$k\geqslant 5$。

§2.3 连续型随机变量

一、问题的提出

●出生于元月一日零点？ ●灯管寿命为200小时？

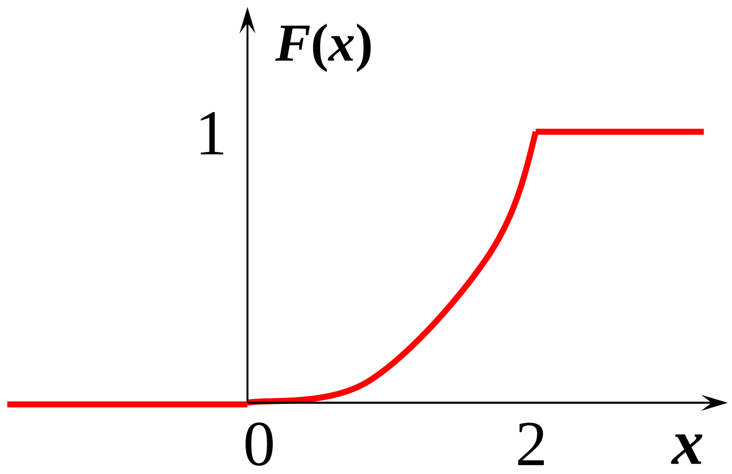
例1 设飞机投弹到区域D={(x, y): $x^2+y^2 \leqslant r^2$}内的概率与半径的平方r^2成正比。记X为弹着点到目标中心的距离，求X的分布函数（$0 \leqslant r \leqslant 2$）。

解： $F(x) = P(X \le x)$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx^2, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

且 $P(X \le 2) = P(\Omega)$

$\Rightarrow \; k2^2 = 1 \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{4}$



二、定义

如果对随机变量X存在一(非负)函数$f(x)$，使其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty< x <+\infty$$

则称X为**连续型随机变量**，记为C.R.V.(Continuous Random Variable)，并称$f(x)$为X的**概率密度函数**。

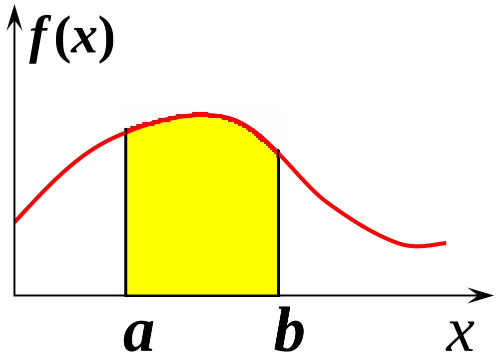
三、性质

（1）C.R.V.的分布函数$F(x)$为连续函数；

$$0\leqslant \boldsymbol{P(X=a)} \leqslant \boldsymbol{P(a-\Delta x < X \leqslant a) = F(a)-F(a-\Delta x)} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \mathbf{0}$$

（2）$P(a \leqslant X \leqslant b)=F(b)-F(a)$

$$=\int_{a}^{b} f(x)dx$$



（3）若$f(x)$在x处连续，则 $F'(x) = f(x)$

（4） $f(x) \geqslant 0$； $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

例2 设X的密度函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ A - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

试求（1）常数A；（2）$P(-1<X<3/2)$；（3）$F(x)$。

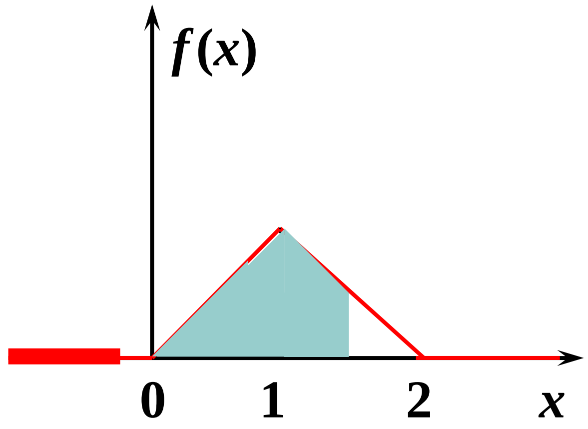
解（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (A-x)dx = A - 1 = 1$

$$\Rightarrow \quad A = 2$$

（2）$P(-1 < X < \frac{3}{2}) = \int_{-1}^{3/2} f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^{3/2} (2-x)dx$

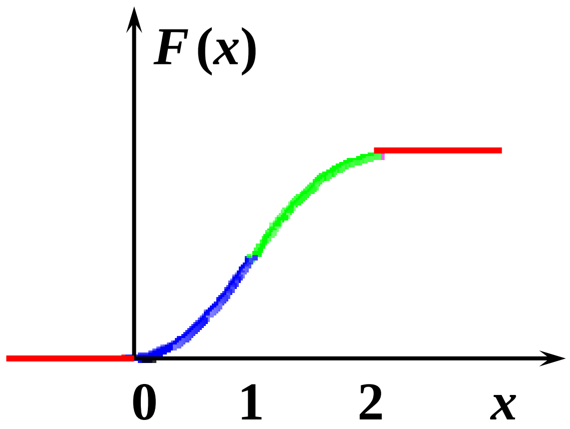
$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



（3）

$$F(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx=0, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x xdx=\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ \int_0^1 xdx+\int_1^x (2-x)dx =1-\frac{1}{2}(2-x)^2 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$



习题讲评

练习1.5 能否把n个任意事件$A_1,A_2,\ldots A_n$之和表示为n个互斥事件之和？请给出这种表示。

解 ~~(1)~~ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i\neq j} A_iA_j + \sum_{i\neq j\neq k} A_iA_jA_k - \cdots + (-1)^{n-1}A_1A_2\cdots A_n$

~~(2)~~ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1}A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n = \sum_{k=1}^{n}[A_k - \bigcup_{i\neq k} A_i]$

(3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1}A_k = \sum_{k=1}^{n}[A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i]$

~~(4)~~ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} A_1\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n$

习题讲评

练习4.4 设有一个系统有6个控制器，必须（1）第一个控制器正常，（2）第2、3个控制器至少有一个正常，（3）第4、5、6个控制器至少有2个正常，在这种状态下系统才正常。若各控制器相互独立且正常的概率为2/3，求该系统正常的概率。

解 记A_i为第i个控制器正常，则该系统正常的概率为

$$P[A_1(A_2 \cup A_3)(A_4A_5 \cup A_5A_6 \cup A_4A_6)]$$

$$= \frac{2}{3} \times \left\{ \begin{matrix} \frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} \\ 1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} 3\times(\frac{2}{3})^2-3(\frac{2}{3})^3+(\frac{2}{3})^3 \\ 1-[(\frac{1}{3})^3+3(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})] \end{matrix} \right\}$$

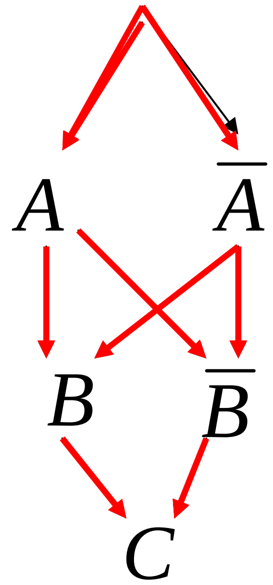
$$= \frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\times\frac{20}{27} \quad = \frac{320}{729}$$

习题讲评

练习4.5 设共有10张彩票，其中只有2张可获奖，甲、乙、丙三人依次抽取一张彩票，规则如下：每人抽出后，所抽的那张不放回，但补入两张非同类彩票。问甲、乙、丙三人中谁中奖的概率最大?

解 记A、B、C分别为甲、乙、丙中奖，则

$$P(A)=\frac{2}{10} \qquad P(B)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{11}+\frac{8}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{17}{55}$$



$$P(C)=P(AB)P(C/AB)+P(A\overline{B})P(C/A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C/\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})P(C/\overline{A}\overline{B})$$

$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{0}{12}+\frac{2}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{3}{12}+\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{12}+\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{12}$$

$$=\frac{41}{110}$$

故丙中奖的概率最大。