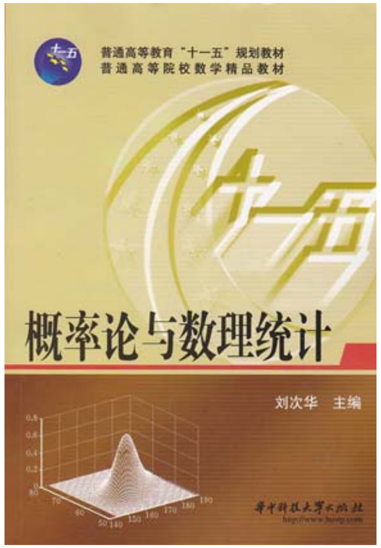
概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

1.4.2 乘法公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B),\ \ \mathrm{P}(B) \neq 0$$
$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A),\ \ \mathrm{P}(A) \neq 0$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例3 袋中有5个球：3个红球，2个白球。现每次任取1个，取后放回，并同时放入2个同色的球。记A_i为第i次取到红球，求概率$P(A_1A_2)$、$P(A_1A_2A_3)$和$P(A_2)$。

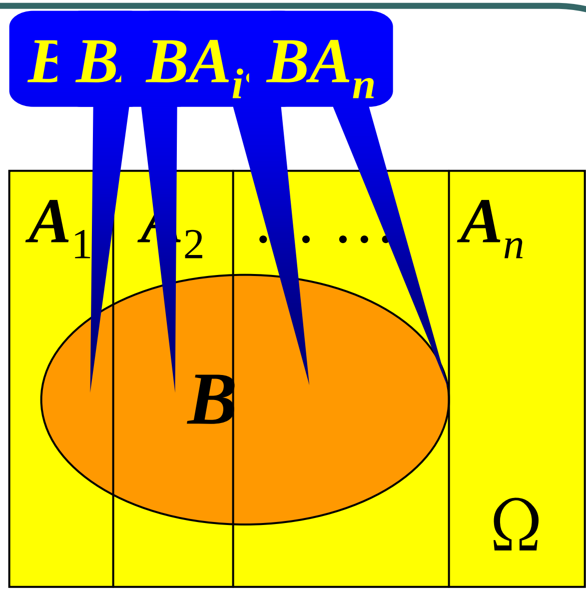
解： $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}=P(A_1)\,P(A_2|\,A_1)\,P(A_3\,|\,A_1\,|A_2)$$

$$P(A_2)=P(A_1A_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{5}$$

1.4.3 全概率公式



设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是对 Ω 的一个划分：

(1) $A_iA_j = \varnothing,\ i \neq j$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

则对任何事件B有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

证明

$$P(B) = P(B\Omega) = P(B\sum_{i=1}^{n} A_i) = P(\sum_{i=1}^{n} BA_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) \quad = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

例4 两台车床加工同样的零件，第一台的废品率为0.04，第二台的废品率为0.07，加工出来的零件混放， 并设第一台加工的零件数是第二台的 2倍。现任取一零件，问取到合格品的概率是多少?

解 记 A_i={取到第i台车床加工的零件}，i=1,2，B={取到废品}，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\times 0.04+\frac{1}{3}\times 0.07=0.05$$

$$P(\overline{B})=1-0.05=0.95$$

反问：如果取到废品，它是哪台车床加工的概率更大?

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.04}{0.05}=\frac{8}{15}$$

$$P(A_2|B)=1-P(A_1|B)=\frac{7}{15}$$

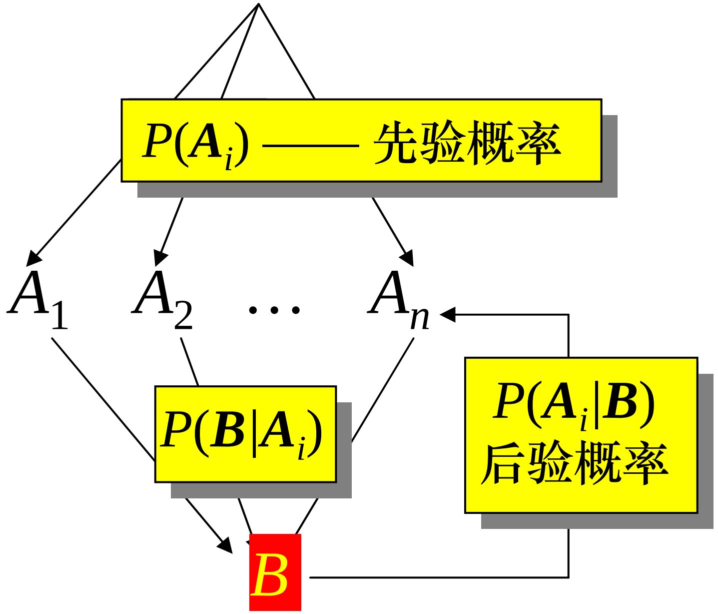
1.4.4 bayes公式

设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$是对Ω的一个划分，则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$



例5（P_{10}例1.18）一位患者因有某种症状去看医生，医生根据丰富的临床经验知道：有一种疾病，其患者**80%**会有这种症状，但在就诊者中这种疾病的患者仅为**0.5%**，其他患者中的**10%**也会有这种症状。据此医生对该患者患有这种疾病的概率如何判断?

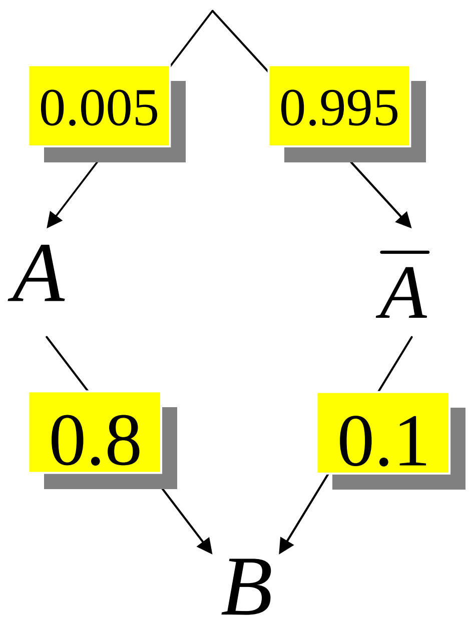
解 记A={患者患有这种疾病}

B={患者有这种症状}

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.8}{0.005\times 0.8+0.995\times 0.1}$$

$$=0.0386$$



1.4.5 事件的独立性

引例 E~随机点名，A ={点到女生}，B ={该生姓王}

$$P(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(AB)=P(A)P(B)$$

定义1 若事件A、B满足：$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B**相互独立**。

例5 设甲的命中率为0.9，乙的命中率为0.8，两人独立地向同一目标射击，求目标被击中的概率。

解 记A={甲击中目标}，B ={乙击中目标}，C ={目标被击中}。则

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98$$

或 $P(C)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-0.1\times 0.2$ ？

定理 下面四个等式是等价的：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$ (2) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$ (4) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$

证明： $(1)\Rightarrow(2)$

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

$$\overset{(1)}{=}P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]$$

$$=P(A)P(\overline{B})$$

类似地可证： $(2)\Rightarrow(3)$， $(3)\Rightarrow(4)$， $(4)\Rightarrow(1)$

定义2 称A、B、C相互独立，是指下面等式成立：

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),\quad P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

例6（P_{28}例1.21）设有四张卡片，一张涂有红色，一张涂有白色，一张涂有黑色，一张涂有红、白、黑三种颜色。从中任意取一张，令 A ={抽出的卡片上出现红色}，B={抽出的卡片上出现白色}，C={抽出的卡片上出现黑色}，试分析A、B、C的独立性。

解 $\Omega=\{\quad\}$

$A=\{\quad\}$，　$B=\{\quad\}$，　$C=\{\quad\}$

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}\qquad P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

但 $P(ABC)=\dfrac{1}{4}\neq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$　即A、B、C中任何两个事件相互独立，但A、B、C不是相互独立的。

一般称$A_1, A_2,\ldots, A_n$相互独立，是指下面2^n-n-1个等式成立：

$$P(A_{i1} A_{i2}\ldots A_{ik})=P(A_{i1})\, P(A_{i2}) \ \ldots P(A_{ik}),$$

$$1\leqslant i_1< i_2<\ldots< i_k\leqslant n，\ 2\leqslant k\leqslant n$$

例7 设某人玩电子射击游戏，每次射击命中目标的概率是p =0.004，求他独立地射击n次能命中目标（至少一次）的概率。

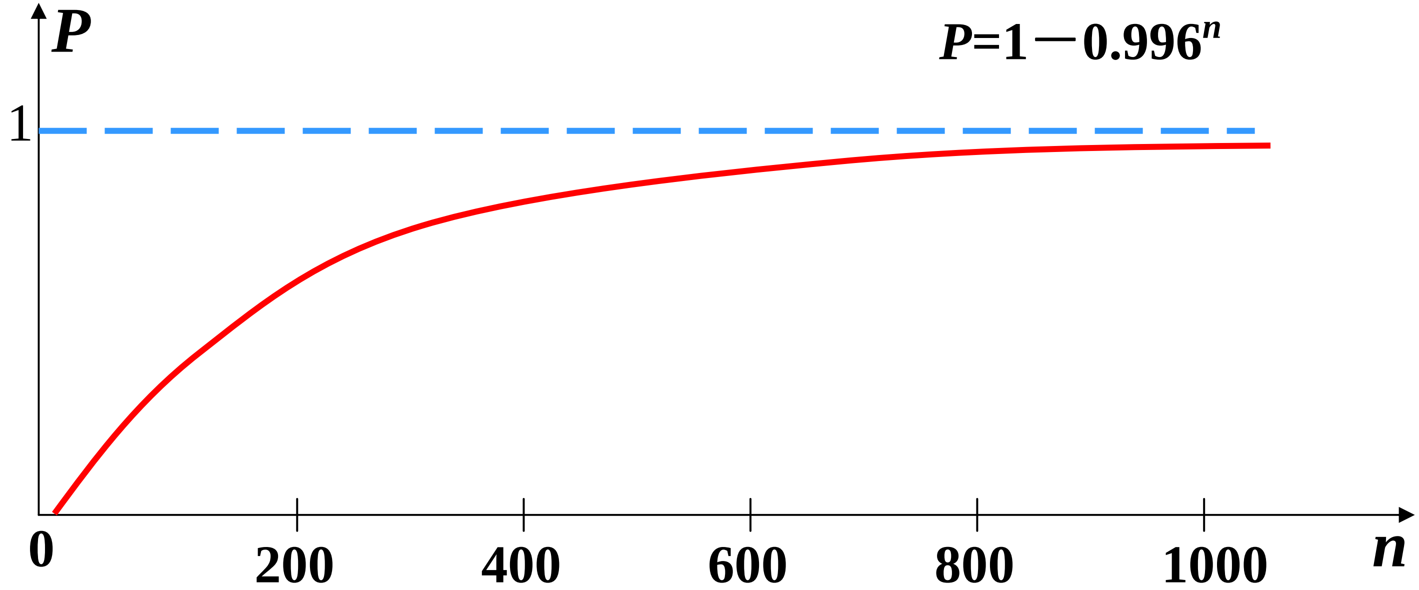
再问：射击多少次才能保证至少命中一次的概率为**0.8**？

解：记A_i ={第i次命中目标}，i =1,2,…,n，

A ={目标被击中}，则

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)$$

$$=1-0.996^n\geqslant 0.8 \ \Rightarrow n\geq\frac{\ln 0.2}{\ln 0.996} \quad =\mathbf{401.55}$$



P:	0	0.511	0.799	0.910	0.960	0.981

本章小结：

随机试验

样本空间 $\Omega=\{\omega\}$

随机事件 $A\subset\Omega$

关系：$A\subset B$，$AB=\varnothing$，$B=\bar{A}$

运算：$A\cup B$，AB，$A-B=A\bar{B}=A-AB$

公理化定义

1. $P(A)\geqslant 0$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\Sigma A_i)=\Sigma P(A_i)$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

$A\supset B\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A|B)=P(A)$

全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

Bayes公式 $$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$$

例题选讲

一架长机带两架僚机飞往某地进行轰炸，只有长机能确定具体目标。在到达目标上空之前，必须经过敌高炮防空区，这时任一架飞机被击落的概率为0.2，到达目标上空之后，各飞机将独立地进行轰炸，炸毁目标的概率都是0.3。试求目标被炸毁的概率。

解：记B_i为长机与i架僚机到达目标上空，$i=0,1,2$

A为目标被炸毁。则

$\boldsymbol{P(B_0)=0.8\times 0.2^2=0.032}$　　$\boldsymbol{P(A|B_0)=0.3}$

$\boldsymbol{P(B_1)= 2\times 0.8^2\times 0.2=0.256}$　　$\boldsymbol{P(A|B_1)=1-0.7^2=0.51}$

$\boldsymbol{P(B_2)=0.8^3=0.512}$　　$\boldsymbol{P(A|B_2)=1-0.7^3=0.657}$

故　$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=\mathbf{0.4765}$$

例题选讲

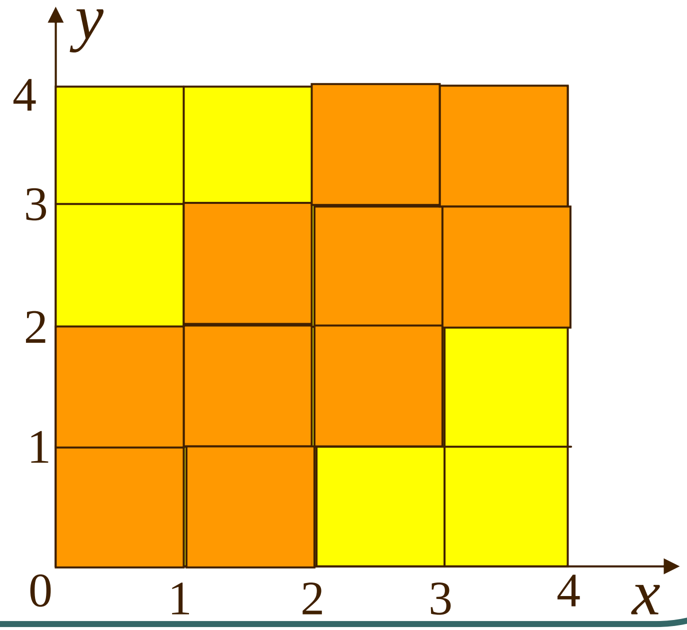
甲、乙下午1时至2时到某车站乘高速巴士，这段时间内有4班车，开车时间分别为1:15，1:30，1:45，2:00。如果约定：(1)见车就乘；(2)最多等一班车。求甲、乙同乘一车的概率。假定甲、乙两人到达车站的时刻互不牵连，且每人在1时至2时内的任何时刻到达车站是等可能的。

解 设x,y分别为甲、乙到达车站的时刻（刻钟），则

$$\Omega = \{(x,y): 0 \le x, y \le 4\}$$

$$A_2 = \{(x,y): k-1 \le x \le k \cap k-2 \le y \le k+1, k=1,2,3,4\}$$

$$P(A_2) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$



例题选讲

习题1.7 利用互不相容事件的概念及加法原理、乘法原理证明恒等式:

(1) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; (2) $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

解 (2)考虑E：从含有n个黑球和n个白球的袋中任取n个球，记A_k={取到k个白球}，k=1,2,…,n, 则

$$P(A_k) = \frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n} \qquad k = 1,2,\cdots,n$$

由 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n} = \sum_{k=0}^{n}P(A_k) \overset{A_iA_j=\phi}{=} P(\sum_{k=0}^{n}A_k) = P(\Omega) = 1$ 即得(2)式。

用类似方法可解新教材习题1.9