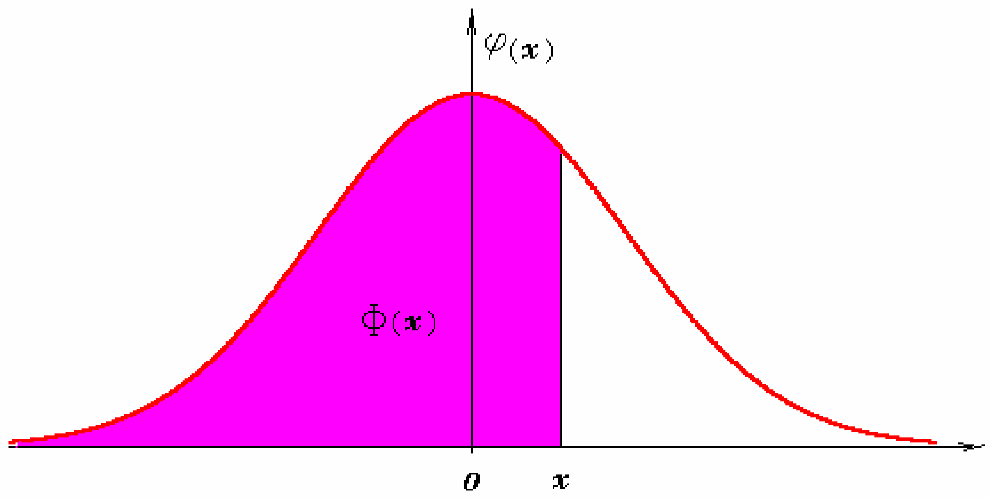
湖北省精品课程

概率论与数理统计



华中科技大学 概率统计系

叶 鹰 副教授

第四章 数字特征

§4.2 方差

例1 设三个连队（各一百人）的射击成绩如下：

环数 / 连队	⑩	⑨	⑧	⑦	$E(X)$
一连	0.65	0.25	0.08	0.02	9.53
二连	0.75	0.10	0.08	0.07	9.53

$$|10-9.53|\times 0.65+|9-9.53|\times 0.25+|8-9.53|\times 0.08+|7-9.53|\times 0.02$$

$$\mathrm{E}[\,X-\mathrm{E}(X)\,]^2$$

定义 若$E(X^2)$存在，则称 $E(X-EX)^2$为X 的方差。

$$D(X)=E[X^2-2(EX)X+(EX)^2]=\boldsymbol{E(X^2)-E(X)^2}$$

对D.R.V： $D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i-(EX)^2$

对C.R.V： $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(EX)^2$

连队 \ 环数	⑩	⑨	⑧	⑦	$E(X)$	$D(X)$
X_1	0.65	0.25	0.08	0.02	9.53	0.5291
X_2	0.75	0.10	0.08	0.07	9.53	0.8291

$E(X_2^2)=10^2\times0.75+\cdots+7^2\times0.07=91.65$ $D(X_2)=91.65-(9.53)^2$

例2 设$X \sim B(1, p)$ 求$D(X)$。

解 $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

$$D(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

例3 （P_{66}例4.19）设$X \sim P(\lambda)$，求$D(X)$。

解 $$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

例4 （P_{67}例4.22）设$X \sim E(\lambda)$ 求$D(X)$。

解

$$E(X^2)=\int_0^{\infty} x^2\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=0+\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

例5 （P_{67}例4.23）设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$D(X)$。

解 $$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{t=} \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\sigma^2\left[-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=\sigma^2$$

方差的基本性质

1． $D(X)\geqslant 0$，且 $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$ （退化分布）

2． $D(cX)=E[cX-E(cX)]^2=c^2D(X)$

3． $D(X_1+X_2) \overset{X_1\text{与}X_2\text{独立}}{=\!=\!=\!=} D(X_1)+D(X_2)$

$=E[X_1-E(X_1)+X_2-E(X_2)]^2$

$=E[(X_1-EX_1)^2+(X_2-EX_2)^2+2(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$

$=D(X_1)+D(X_2)+2E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$

当X_1与X_2独立时， $E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$

$=E(X_1-EX_1)E(X_2-EX_2)=0$

例6 设$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$。

解 设$X_i \sim B(1, p)$，$i=1,2,\ldots,n$，**相互独立**，则

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$$

故 $D(X) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$

例7（P_{69}例4.24）设X有期望和方差存在，$Y = \dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ ~ **标准化**

求EY和DY。

解

$$E(Y) = E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{\sqrt{DX}} E(X-EX) = 0$$

$$D(Y) = D\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{(DX)} D(X-EX) = 1$$

数学实验与Matlab应用讲座

为了帮助同学们更好地掌握和应用《概率论与数理统计》理论方法，本课程组特安排**数学实验与Matlab应用讲座**：

内　容：Matlab软件使用的基本方法及其在概率论与数理统计实验中的应用(教案下载：本课程网站-实验指导)

主讲人：周晓阳 教授

时　间：第十五周一、十六周一、三 第九~十二节课

地　点：西十二楼N110教室

2008年12月8日

§4.3 协方差和相关系数

4.3.1 协方差

$$Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$
$$= E(XY) - (EX)(EY)$$

基本性质

1° $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

2° $Cov(aX, bY) = abCov(Y, X)$

3° $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

X 与 Y 不相关：$Cov(X, Y)=0$

定理1 下面等式等价

（1）$Cov(X, Y) = 0$；

（2）$E(XY) = E(X)E(Y)$；

（3）$D(X+Y) = D(X)+D(Y)$.

证明：由 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

和 $D(X+Y)=D(X)+D(Y) + 2\ Cov(X, Y)$ 即得

定理2 X与Y相互独立，则X与Y不相关，但反之不然。

证明：由期望、方差的性质及定理1即得.

例1 设$X \sim N(0,1)$，$Y=X^2$，求$Cov(X, Y)$。

解 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$= E(X^3) - 0 \times E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbf{0}$$

类似的例子还有P76例4.23和例4.24 。

4.3.2 相关系数

协方差 $Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$ 与量纲有关

相关系数 $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 与量纲无关

标准差（根方差） $\sqrt{D(X)}$ 与X有相同的量纲

例2（P_{73}例4.30，32）设$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求$\rho_{XY}$。

解 $$Cov(X,Y) \overset{u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1 u \sigma_2 v}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}} du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2 v}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{v^2}{2}} [\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(\sqrt{1-\rho^2})^2}} du]\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} [\rho v] v e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad = \sigma_1\sigma_2\rho$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$$

[说明] 对正态分布，X 与 Y 独立 $\Longleftrightarrow$ X 与 Y 不相关.

定理3 （P_{75}定理4.8） $|\rho_{XY}| \leqslant 1$， 且

$|\rho_{XY}| = 1$ $\Longleftrightarrow$ 存在 $a,b \in R$，使$P(Y = aX + b) = 1$

证明 $Cov^2(X_1, Y_1) \leqslant D(X_1)\, D(Y_1)$

令 $X = X_1 - E(X_1)$, $Y = Y_1 - E(Y_1)$ ， 即有

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| \leqslant 1$$

Cauchy-Schwarz不等式等号成立 $\Longleftrightarrow$

$$E(Y_1 - aX_1)^2 = 0 = D(Y_1 - aX_1)$$

由方差性质即有 $P(Y = aX + b) = 1$

图 示

习题选讲

练习10.5 设X与Y独立，都服从$N(0,1)$，以$f(x,y)$表示(X,Y)的联合密度函数，证明：函数

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y)+\dfrac{xy}{100}, & x^2+y^2\le 1 \\ f(x,y), & x^2+y^2>1 \end{cases}$$

是二维概率密度函数，若随机变量(U,V)有密度函数$g(x,y)$，证明：U,V都服从$N(0,1)$，但(U,V)不服从二维正态分布。

解 $\iint_{R^2} g(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[f(x,y)+\dfrac{xy}{100}]dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2>1} f(x,y)dxdy=1$

当$x^2+y^2\le 1$时，$g(x,y)\geqslant \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}-\dfrac{x^2+y^2}{100}\geqslant \dfrac{1}{2\pi\sqrt{e}}-\dfrac{1}{100}>0$

$\because \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{xy}{100}dy=0 \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\varphi(x)$，

同理 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dx=\varphi(y)$，但$g(x,y)\ne f(x,y)$

习题选讲

练习11.4 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x,y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的密度函数$f(z)$。

解 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z zdx = z^2, & 0<z<1 \\ \int_{z-1}^1 zdx = z(2-z), & 1<z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

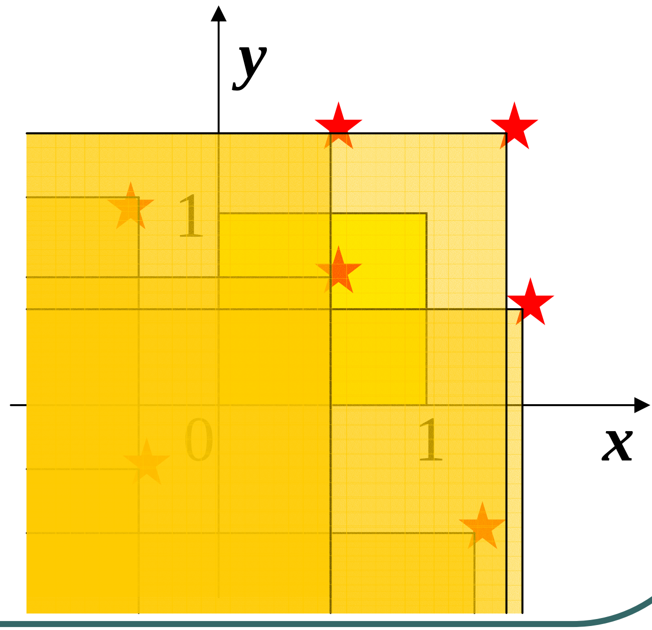
练习9.3 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布函数。

解

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ x^2y^2, & 0<x,y<1\\ y^2, & x>1,0<y<1\\ x^2, & 0<x<1,y>1\\ 1, & x>1,y>1\end{cases}$$



习题选讲

练习8.5 设楼房有六层，每个乘电梯的人在2,3,4,5,6层下的概率分别为0.08，0.14，0.20，0.26，0.32，试求在一楼乘上电梯的15人中，恰好有1,2,3,4,5人分别在2,3,4,5,6层下电梯的概率P。

解 记X_i为在第i层下电梯的人数，i=2,3,4,5,6，则

$$P(X_2=1, X_3=2, X_4=3, X_5=4, X_6=5) \quad =0.073$$

$$= C_{15}^1 C_{14}^2 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5 \ 0.08^1\, 0.14^2\, 0.20^3 0.26^4\, 0.32^5$$

$$P = C_{15}^1 0.08\cdot 0.92^{14} \times C_{14}^2 \left(\frac{0.14}{0.92}\right)^2 \left(\frac{0.78}{0.92}\right)^{12} \times C_{12}^3 \left(\frac{0.20}{0.78}\right)^3 \left(\frac{0.58}{0.78}\right)^9$$

$$\times C_9^4 \left(\frac{0.26}{0.58}\right)^4 \left(\frac{0.32}{0.58}\right)^5 \times \left(\frac{0.32}{0.32}\right)^5$$

习题选讲

练习10.4 设二维随机变量（X，Y）在矩形G={(x,y)：0≤x≤2，0≤y≤1}上服从均匀分布。记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

求U和V的联合分布列。

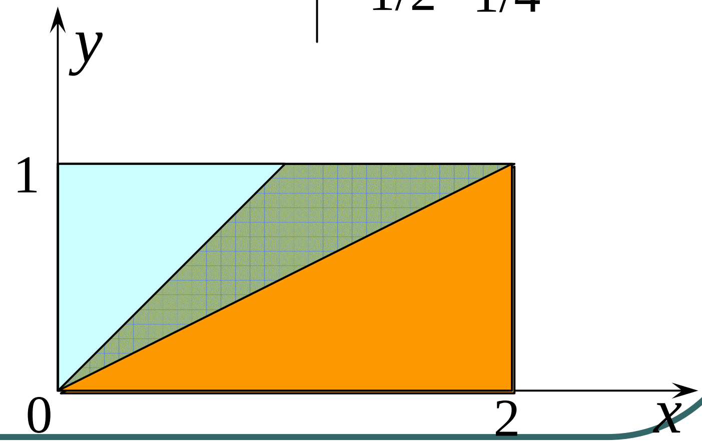
U \ V	0	1
0	1/4	0
1	1/2	1/4

解　P{U=0，V=0}

$=P\{X\leqslant Y,\ X\leqslant 2Y\}=\dfrac{1}{4}$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y, X>2Y\}=0$

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y, X>2Y\}=\dfrac{1}{2}$



信息短波

本课程答疑安排：

•时间：周四下午 **14:50 ~ 16:40**

(第**6~7**节课的时间)

•地点：科技楼南楼**715**室

（概率统计系）

本课程网站：

http://jpkc.hust.edu.cn/ec3.0/C153/index_2.html

http://122.205.5.232/~yeying/index.php