信号与线性系统

第 2 讲

教材位置： 第2章 连续时间系统的时域分析

§2.1-§2.5

内容概要： CTS时域分析中的零输入解，

零状态解的数学基础—信号分解

开讲前言－前讲回顾

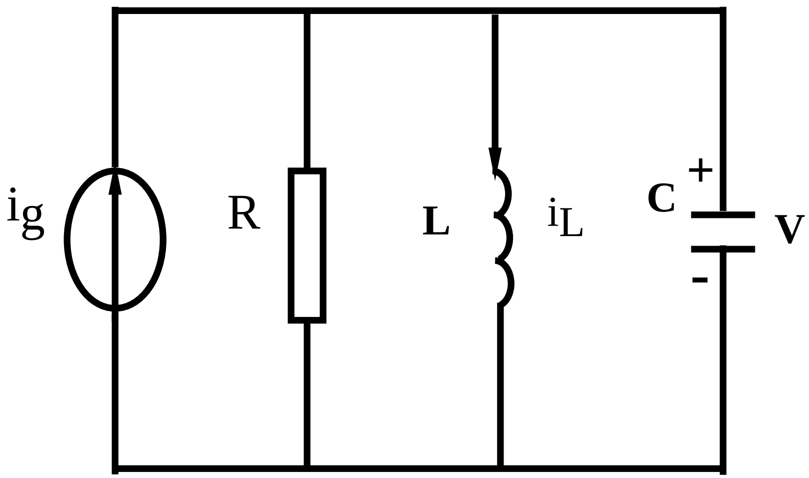
- 课程大纲－目的、要求、课程计划、实验
- 第一章 信号与系统的绪论
  - 信号的基本概念－信号的分类
    - 确定/随机、连续/离散、周期/非周期、能量/功率信号
  - 系统的基本概念－系统的分类
    - 线性/非线性、非时变/时变、连续/离散、因果/非因果
  - 线性时不变系统分析
    - 建模、系统分析、物理解释

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

- 时域函数：激励和响应
- 系统时域模型：微分方程表示
- 直接解微分方程：古典的系统分析方法
- 为简化分析难度有两个途径进行系统分析
  - 激励分解为基本单元之和
  - 变换：复杂的时域分析在新变换中有简单的分析方法。

§ 2.1引言－举例电路系统的古典解法



1：R=1/4Ω,　L=1/3H,　C=1F

2：初始值：　$i_L(o)=2A$，$v(o)=1v$

求：激励电流 $i_g=2e^{-2t}$时，电压v(t)？

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R}v+\frac{1}{L}\int v\,dt=i_g$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=\frac{di_g}{dt}$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=\frac{di_g}{dt}$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=\frac{di_g}{dt}$$

解： $v(t)$ =齐次方程通解 $v_1(t)$ +非齐次方程特解 $v_2(t)$

通解： $v_1(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$ 特征方程： $\lambda^2+4\lambda+3=0$， $\lambda_{1,2}=-2\pm1$

$v_1(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}$ 自然响应(**系统自身特性决定**)

特解： $v_2''(t)+4v_2'(t)+3v_2(t)=i_g'(t)$

$v_2(t)=Be^{-2t}$

$4Be^{-2t}-8Be^{-2t}+3Be^{-2t}=-4e^{-2t}$ $B=4$

$v_2(t)=4e^{-2t}$ 受迫响应(**激励和系统共同决定**)

全解： $v(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+4e^{-2t}$

全解： $v(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+4e^{-2t}$

$v(0)=1V$, $v(o)=c_1+c_2+4=1$

$$v'(0)=\frac{dv(t)}{dt}\Big|_{t=o}=-6$$ (初始条件$i_L(o)=2A$, $v(o)=1v$)

$v'(0)=-C_1-3C_2-8=-6$

$C_1=-7/2$, $C_2=1/2$

$v_1(t)=(-7/2)e^{-t}+(1/2)e^{-3t}$

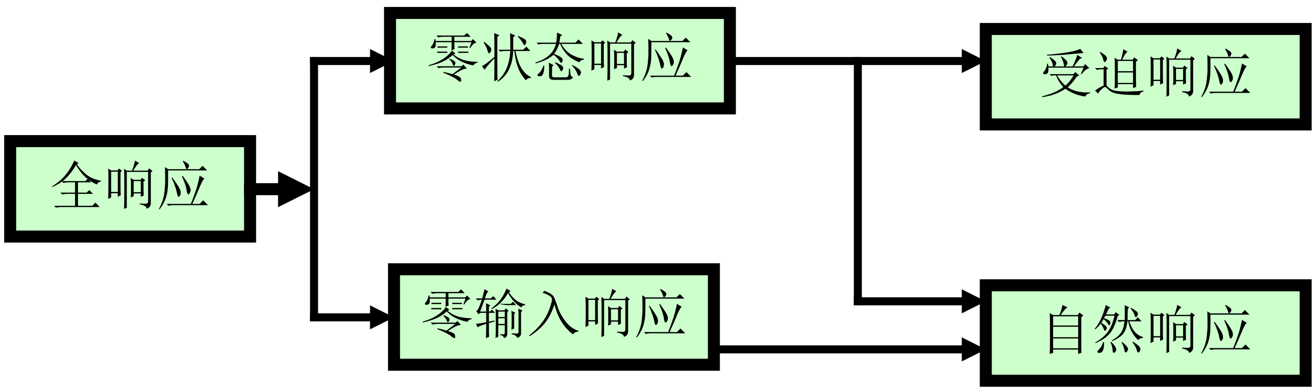
$v(t)=(-7/2)e^{-t}+(1/2)e^{-3t}+4e^{-2t}$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=\frac{di_g}{dt}$$

$$v\,(t)=(-\,7/2)e^{-\,t}+(1/2\,)e^{-3t}+4\,e^{-2\,t}$$

全响应 = 自然响应（**通解**） + 受迫响应（**特解** ）

= 零输入响应 + 零状态响应



§2.1引言－举例电路系统的古典解法

- 零输入响应求解思路
  - 简化齐次方程表达方式（算子）
  - 由简单低阶方程解推导高阶通用方程解

- 零状态响应求解思路
  1. 把输入信号分解为各单元信号之和
  2. 求各单元信号的零状态响应
  3. 叠加各单元信号的响应合成输出信号

- 全响应=零输入响应+零状态响应

本章内容：

- 系统方程的算子表示法
- 奇异函数（信号）
- 系统的零输入响应与零状态响应
- 卷积积分及其性质
- **LTI** 连续时间系统的时域求解

§2.2系统方程的算子表示法

（一）微分算子及其运算规则

微分算子 $$\frac{d}{dt}=p \qquad \frac{d^n}{dt^n}=p^n \qquad \frac{d^n x}{dt^n}=p^n x$$

积分算子 $$\int_{-\infty}^{t}()d\tau=\frac{1}{p}() \qquad \int_{-\infty}^{t}xd\tau=\frac{1}{p}x$$

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

$$Lp^2 i(t)+Rpi(t)+\frac{1}{C}i(t)=pe(t)$$

$$(Lp^2+Rp+\frac{1}{C})i(t)=pe(t)$$

一般情况下，代数方程的运算规则也适用于算子方程

一：多项式可因式分解，但公因子不能相消

$$(p^2+5p+6)x=(p+2)(p+3)x$$

$$p\bullet\frac{1}{p}x=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}xd\tau=x$$

$px=py\quad(\rightarrow x=y+c)$ 两边的算子符号因子***p***不能消去。

二：乘除顺序不可随意颠倒

$$p\bullet\frac{1}{p}x\neq\frac{1}{p}\bullet px$$

因为 $\frac{1}{p}\bullet px=\int_{-\infty}^{t}(\frac{d}{d\tau}x)d\tau=x(t)-x(-\infty)\neq x$

（二）转移算子 $H(p)$

n阶线性微分方程为：

$$\frac{d^{n}r}{dt^{n}}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+\mathrm{L}+a_{1}\frac{dr}{dt}+a_{0}r=b_{m}\frac{d^{m}e}{dt^{m}}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\mathrm{L}+b_{1}\frac{de}{dt}+b_{0}e$$

$$p^{n}r+a_{n-1}p^{n-1}r+\Lambda+a_{1}pr+a_{0}r=b_{m}p^{m}e+b_{m-1}p^{m-1}e+\Lambda+b_{1}pe+b_{0}e$$

$$(p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_{1}p+a_{0})r=(b_{m}p^{m}+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_{1}p+b_{0})e$$

令 $$D(p)=p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0$$

$$N(p)=b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0$$

则有 $$D(p)r(t)=N(p)e(t)$$

$$r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

定义 $\boxed{H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}}$ —— 转移算子

$$r(t)=H(p)e(t)$$

零输入响应 $e(t)=0$

$$\boxed{D(p)r(t)=0}$$

§ 2.3系统的零输入响应（n=1）

n阶 $D(p)r(t)=(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t)=0$

n=1 $(p-\lambda)r=0$ $\quad \dfrac{dr}{dt}-\lambda r=0$ 或 $\dfrac{dr}{r}=\lambda dt$

$\ln r=\lambda t+k$

$r(t)=ce^{\lambda t}$ $\quad c=e^k$, c由初始状态r(0) 确定 c=r(0)

$r(t)=r(0)e^{\lambda t}$

$r(t)=r(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}$ 初始状态为 $t=t_0$ 时的响应$r(t_0)$

§ 2.3系统的零输入响应－（n＝2）

n=2 $(p^2 + a_1 p + a_0)r = 0$

$(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\, r = 0 \quad (p - \lambda_1)(pr - \lambda_2 r) = (p - \lambda_2)(pr - \lambda_1 r) = 0$

即 $(p - \lambda_1)\, r = 0$ 和 $(p - \lambda_2)\, r = 0$

$$r_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{和} \quad r_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

t = 0 时，初始状态 r(0), r’(0)已知

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{r(0)=c_1+c_2} \\ &\mathbf{r'(0)=\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2} \end{aligned}\right\}$$

§ 2.3系统的零输入响应 — 推广到普遍

n阶 $$D(p)r(t)=(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t)=0$$

$$=(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ ---\ (p-\lambda_n)\ r=0$$

特征方程 D(p)=0 中的根称为特征根 λ_i，**自然频率**

$$r(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

t=0的初始条件 r(0), r'(0)， .... $r^{n-1}(0)$

$$r(0)=c_1+c_2+\ ---\ +c_n$$

$$r'(0)=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\ ---\ +\lambda_nc_n$$

$$r''(0)=\lambda_1^2c_1+\lambda_2^2c_2+\cdots+\lambda_n^2c_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r^{n-1}(0)=\lambda_1^{n-1}c_1+\lambda_2^{n-1}c_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}c_n$$

§2.3系统的零输入响应 — 推广到普遍

- 特征方程中有一 k 阶重根 λ 时

方程中有因子 $(p-\lambda)^k$ 时，

微分方程$(p-\lambda)^k r = 0$

$$r(t)=(c_0+c_1t+ - - - + c_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda t}$$

$$H(p)=\frac{p+1}{p^2+3p+2}, r(0)=1, r'(0)=2$$

1：特征根： $D(p)=p^2+3p+2=0$ $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

2：响应： $r(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

3：初态定系数：

$$r(0)=c_1+c_2=1$$

$$r'(0)=-c_1-2c_2=2$$

$$c_1=4, c_2=-3$$

$$r(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}, t>0$$

$$H(p)=\frac{p+1}{p^2+3p+2}$$

$$r''(t)+3r(t)+2=e'(t)+e(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+2}$$

$$r'(t)+2r(t)=e(t)$$

$$H(p)=\frac{p+1}{p^2+2p+1}, r(0)=1, r'(0)=2$$

1：特征根： $D(p)=p^2+2p+1=0$ $\lambda_{12}=-1$

2：响应： $$r(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

3：初态定系数：

$$r(0)=c_1=1$$

$$r'(0)=-c_1+c_2=2$$

$$c_1=1, c_2=3$$

$$r(t)=(1+3t)e^{-t}, t>0$$

§2.3系统的零输入响应－推广到普遍

- 零状态响应的求解
  - 思路：利用线性系统叠加性
    - 激励函数分解为标准简单形式
    - 标准函数激励下的零状态响应
    - 激励叠加与响应叠加
  - 步骤：
    - 标准形式探索－分析特殊函数
    - 信号分解－通过特殊函数来表示
    - 特殊函数的响应求解
    - 响应叠加

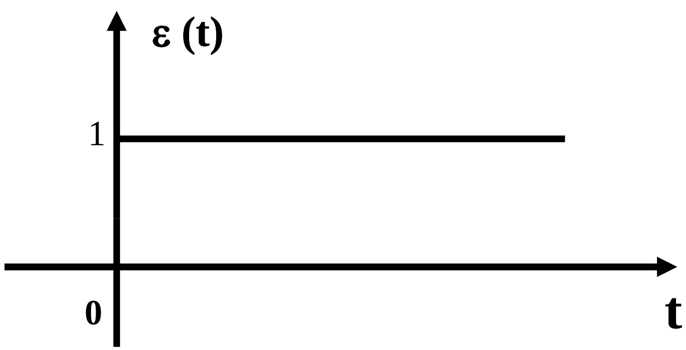
§2.4奇异函数

- 奇异函数说明
  - 函数或各阶导数有间断点，不便直接求导
  - 阶跃函数、冲激函数等

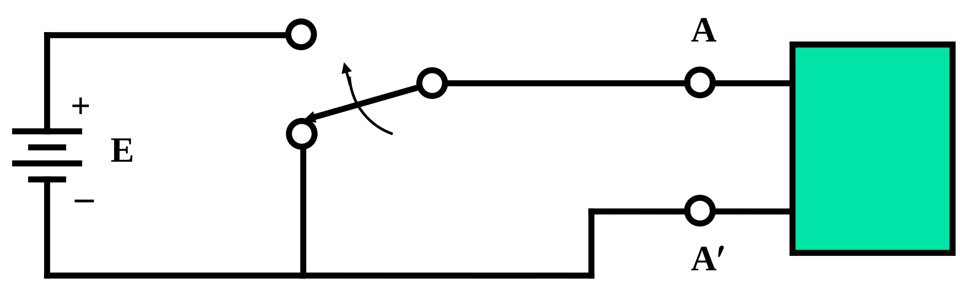
1. 单位阶跃函数 ε（t）[U（t）]

ε（t） = 1　　当　t > 0

ε（t） = 0　　当　t < 0



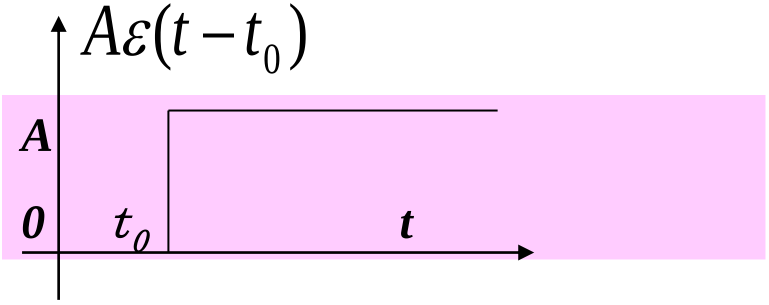
(a) ε (t)



接通直流电源的模型

2. 延迟的阶跃函数(信号)

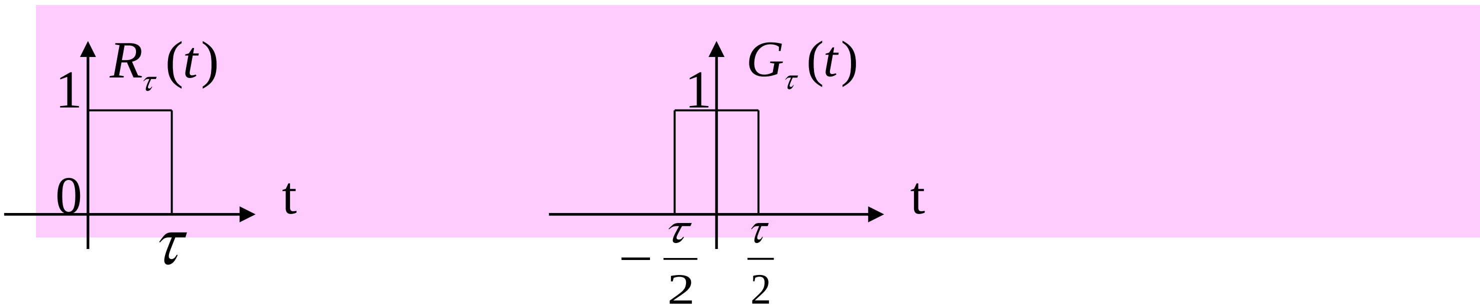
$$A\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0,(t<t_0)\\A,(t>t_0)\end{cases}$$

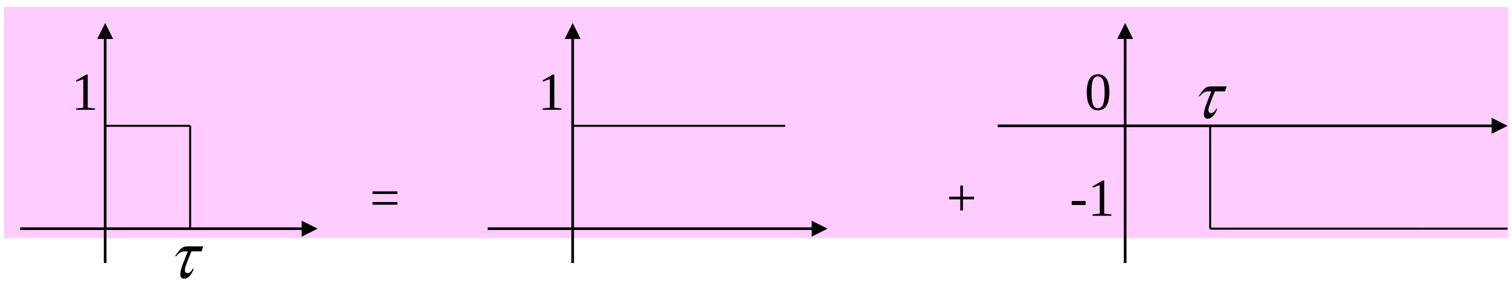


$$\varepsilon(3t)=\varepsilon(t) \qquad \varepsilon(at)=\varepsilon(t),a>0$$

$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0,(t<t_0)\\f(t),(t>t_0)\end{cases}$$

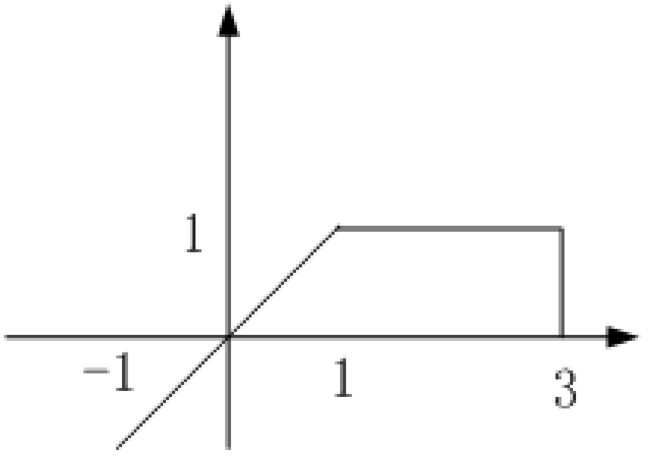
3. 利用阶跃函数(信号)表示矩形脉冲





即 $$R_\tau(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)$$

$$G_\tau(t)=R_\tau(t+\frac{\tau}{2})=\varepsilon(t+\frac{\tau}{2})-\varepsilon(t-\frac{\tau}{2})$$



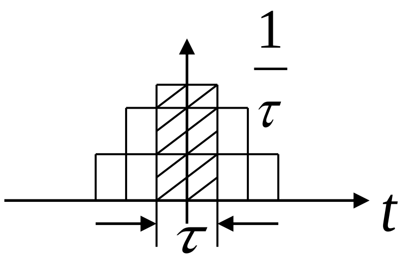
$$t\{\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)\}$$

$$+\quad 1\ \varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)$$

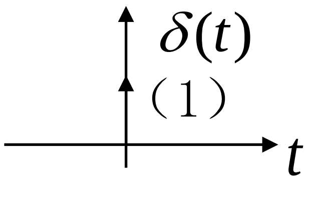
（二）冲激函数(信号)

1. 单位冲激函数(信号)

矩形脉冲宽度为 τ，高为 $\frac{1}{\tau}$，面积为 $S=\tau\bullet\frac{1}{\tau}=1$



$\tau\rightarrow 0$



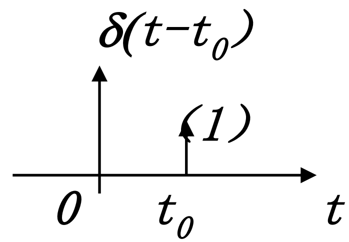
$\delta(t)$

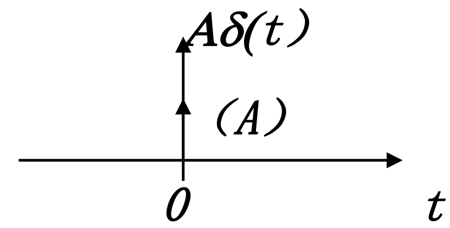
定义：
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[\varepsilon(t+\frac{\tau}{2})-\varepsilon(t-\frac{\tau}{2})]$$

或定义：
$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0,t\neq 0\end{cases}$$

延迟的单位冲激函数：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$$





2. 冲激函数的性质

（1）$\delta(t)$ 的抽样性质

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

例 $\quad \sin \pi t\, \delta(t) = \sin \pi t \big|_{t=0} \delta(t) = 0$

$$\sin \pi t \delta(t-\frac{1}{4}) = \sin \pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}} \delta(t-\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t-\frac{1}{4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t) dt = \sin \pi t\Big|_{t=0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t-\frac{1}{4}) dt = \sin \pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin t \delta(t-\frac{\pi}{6}) dt = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

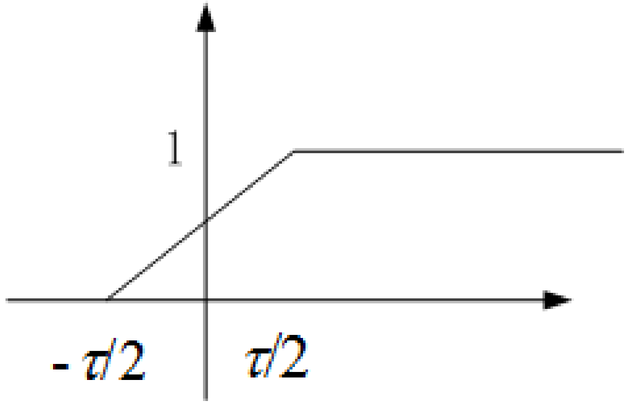
$$\int_{1}^{2} e^{-at}\delta(t) dt = 0$$ 注意： 在积分区间（1，2）内，被积函数为0

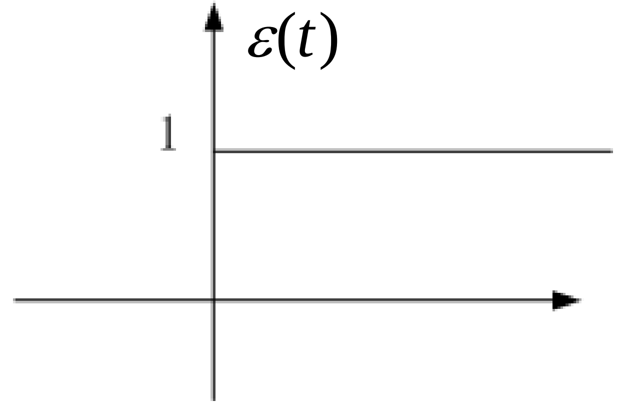
(2) 单位冲激函数的积分是单位阶跃函数

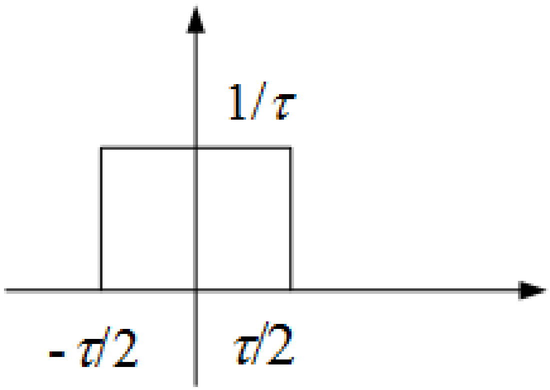
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$$

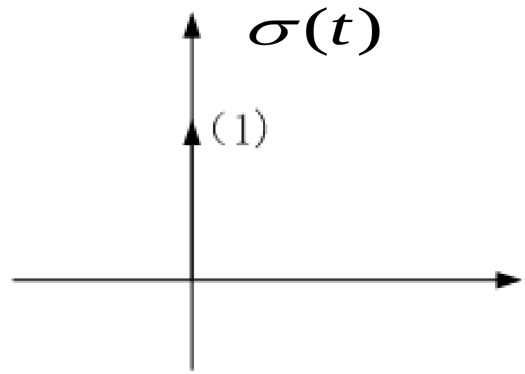
(3) 单位阶跃函数的导数是单位冲激函数

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$$







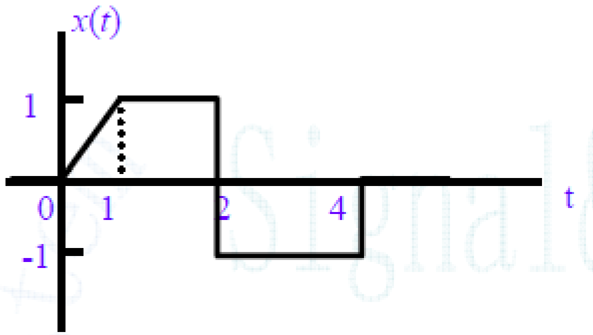


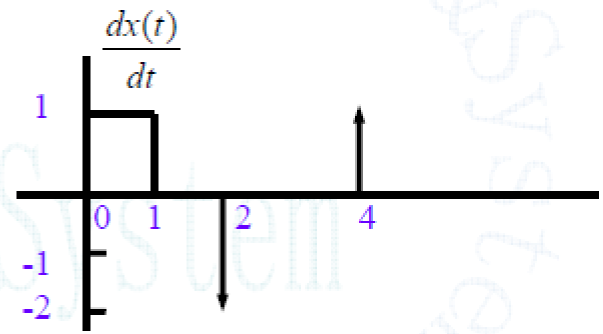
求函数的导数 $(t-1)\varepsilon(t)$

$$(t-1)'\varepsilon(t)+(t-1)\varepsilon'(t)=\varepsilon(t)+(t-1)\sigma(t)$$

$$=\varepsilon(t)+(t-1)\big|_{t=0}\sigma(t)=\varepsilon(t)-\sigma(t)$$

计算一阶导数并作图





$$x(t)=t[u(t)-u(t-1)]+[u(t-1)-u(t-2)]-[u(t-2)-u(t-4)]$$

$$x'(t)=[u(t)-u(t-1)]+t[\delta(t)-\delta(t-1)]+[\delta(t-1)-\delta(t-2)]-[\delta(t-2)-\delta(t-4)]$$

$$=[u(t)-u(t-1)]-\delta(t-1)+[\delta(t-1)-\delta(t-2)]-[\delta(t-2)-\delta(t-4)]$$

$$=[u(t)-u(t-1)]-2\delta(t-2)+\delta(t-4)$$

（4）单位冲激函数是偶函数

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

证明：$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)\varphi(t)dt \xrightarrow{\tau=-t} = \int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)\varphi(-\tau)(-d\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\varphi(-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\varphi(0)d\tau=\varphi(0)$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\varphi(0)$$

$$\therefore \delta(-t)=\delta(t)$$

（5）尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \quad 和 \quad \delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

a,t_0 为常数且$a\neq 0$

证明：令$at=x$,

当$a>0$时，$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})dx=\frac{1}{a}\varphi(0)$$

当$a<0$时，$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})d(\frac{x}{a})$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\varphi(\frac{x}{a})\delta(x)dx=-\frac{1}{a}\varphi(0)=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

故 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

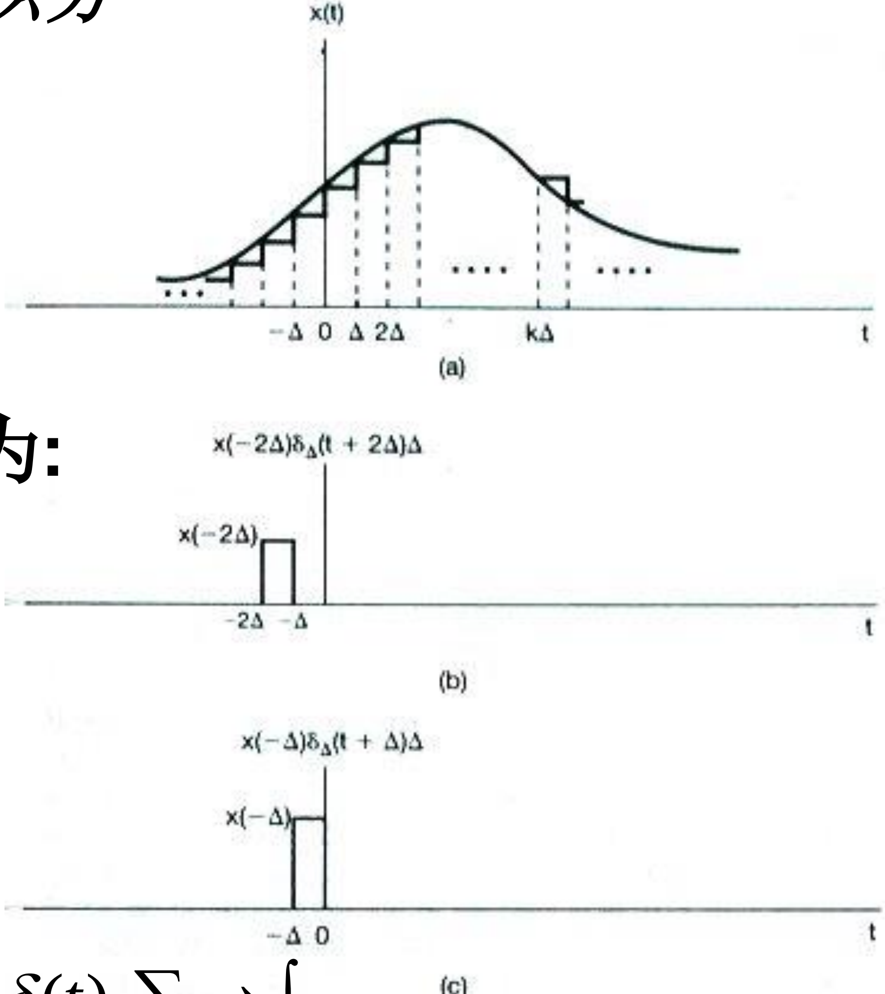
同理可证：$\delta(at-t_0)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t-\dfrac{t_0}{a})$

§2.5信号的脉冲分解

- 本节思路
  - 任意函数表示为奇异函数的组合
    - 分解为阶跃函数的积分
    - 分解为冲激函数的积分

任意函数表示为冲激函数的积分

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & 0\le t\le \Delta\\ 0, & otherwise\end{cases}$$



则任意函数 $x(t)$ 可近似表示为:

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\Delta\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\Delta\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$$

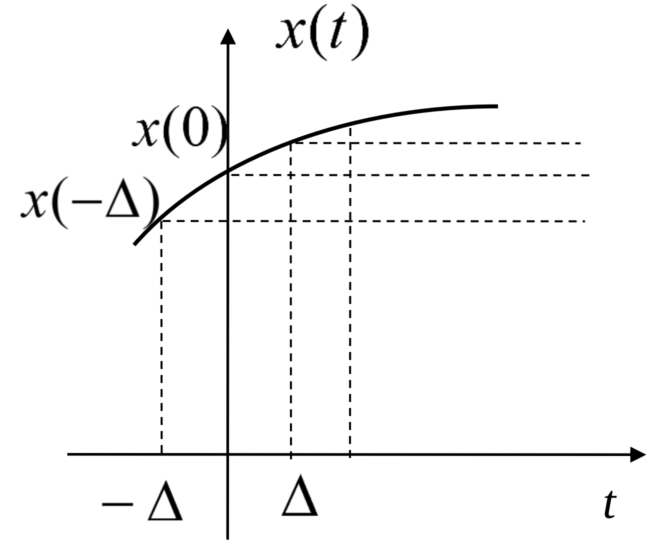
当$\Delta\to 0(d\tau)$时，$k\Delta\to\tau,\delta_{\Delta}(t)\to\delta(t),\sum\to\int,$

于是:

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

任意波形的信号也可以近似表示为无穷多个阶跃信号之和（分解过程略）：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x'(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$



利用后面将要介绍的卷积性质，可以很方便地证明这一结论。

本讲小结

- **CTS**的时域分析包括零输入响应＋零状态响应
- 零输入响应的求解
  - 微分方程的算子表达
  - 零输入响应解的标准形式
  - 无重根、有重根的情况
  - 待定系数的初始条件解
- 零状态响应求解准备
  - 奇异函数定义、性质和相互关系
  - 信号的分解，任意函数可以分解为冲激函数积分
- 下讲内容
  - 零状态响应在冲激函数基础上求解

信号与线性系统

第 2 次课外作业

教材习题: 2.4、 2.5、 2.7、 2.10、