信号与线性系统

第 19 讲

教材位置： 第7章 离散时间系统的时域分析

§7.5-§7.6

内容概要： 离散时间系统的零状态响应和全响应的求解

开讲前言－前讲回顾

- 离散时间相同描述和模拟
  - 经典差分方程
  - 电路差分方程
  - 非时间参数的差分方程
  - 前向差分、后向差分
  - 相同的模拟－延时器
- 离散时间系统的零输入响应
  - 迭代求解，确定解的形式－等比形式
  - 移序算子，特征方程，特征根，解的通式
  - 特征根与系统的稳定性

开讲前言－本讲导入

- 离散时间系统的分析
  - 零输入响应
  - 零状态响应
  - 全响应
  - 系统的稳定性
- 借鉴连续时间系统零状态响应的分析
  - 激励信号的分解
  - 冲击响应的计算
  - 卷积积分计算零状态响应
  - 系统稳定性与冲击响应解的形式的关系

3、离散时间系统的全响应求解

- 全响应＝零输入响应＋零状态响应
- 关注初始条件
  - 求解零输入响应需要零输入情况下的初始条件，
  - 实际测量不便区分结果是零输入的结果还是零状态的结果
  - 考虑因果系统时，激励作用前的系统状态就是零输入的状态
- 一般求解步骤
  - 求系统零状态响应
  - 根据零状态响应，得到初始条件中零输入的初始条件
  - 求系统零输入响应
  - 对零输入和零状态响应求和得到全响应

一：线性时不变系统单位函数响应h(k)

$$e(k)=\delta(k)=\begin{cases}1, k=0\\0, k\neq 0\end{cases}$$

零状态响应h(k)

1. 迭代法

一阶： $\boxed{m<n}$

$$y(k+1)-\gamma y(k)=e(k)$$

即 $$h(k+1)-\gamma h(k)=\delta(k)$$

$$\boxed{H(S)=\frac{1}{S-\gamma}}$$

$k=-1$: $\quad h(0)-\gamma h(-1)=0$

$$h(-1)=0 \quad \therefore h(0)=0$$

$k=0$: $\quad h(1)-\gamma h(0)=1 \quad \to h(1)=1$

$k=1$: $\quad h(2)-\gamma h(1)=0 \quad \to h(2)=\gamma$

$k=2$: $\quad h(3)-\gamma h(2)=0 \quad \to h(3)=\gamma^2$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)}$$

$\boxed{m=n}$

$$y(k+1)-\gamma y(k)=e(k+1)$$

$$h(k+1)-\gamma h(k)=\delta(k+1)$$

即 $$\boxed{H(S)=\frac{S}{S-\gamma}}$$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k}\varepsilon(k)}$$

$$h(t)=H(S)\delta(t)=\frac{S}{S-\gamma}\delta(t)$$

$$=(1+\frac{\gamma}{S-\gamma})\delta(t)$$

$$=\delta(t)+\frac{\gamma}{S-\gamma}\delta(t)$$

$$=\delta(t)+\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

2. 通过$H(s)$求$h(k)$

n阶： $D(S)\,y(k) = N(S)\,e(k)$

$$H(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0}$$

$m < n$ 且单根：

$$H(S) = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{S - \gamma_r} \Rightarrow h(k) = \sum_{r=1}^{n} A_r \gamma_r^{\,k-1} \varepsilon(k-1)$$

$m = n$： 方法1：将H(S)=常数+真分式

方法2：将H(S)/S 分解

$$H(S) = \sum_{r=1}^{n} \frac{SA_r}{S - \gamma_r} \Rightarrow h(k) = \sum_{r=1}^{n} A_r \gamma_r^{\,k} \varepsilon(k)$$

例1 已知 $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+2)-3e(k)$

求$h(k)$ $m=n$

解： $(S^2-5S+6)y(k)=(S^2-3)e(k)$

$$H(S)=\frac{S^2-3}{S^2-5S+6}=1+\frac{5S-9}{S^2-5S+6}=1+\frac{6}{S-3}-\frac{1}{S-2}$$

$$h(k)=H(S)\delta(k)=\delta(k)+6(3)^{k-1}\varepsilon(k-1)-2^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$\frac{H(S)}{S}=\frac{S^2-3}{S(S-2)(S-3)}=\frac{-1/2}{S}+\frac{-1/2}{S-2}+\frac{2}{S-3}$$

$$H(S)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{S}{S-2}+\frac{2S}{S-3}$$

$$h(k)=-\frac{1}{2}\delta(k)-\frac{1}{2}(2)^k\varepsilon(k)+2\bullet 3^k\varepsilon(k)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta(k)&=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)\\ \varepsilon(k)&=\delta(k)+\varepsilon(k-1)\end{aligned}}$$

例2 已知 $H(S)=\dfrac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}$ 求$h(k)$ $m=n$

解：[1] $$H(S)=\frac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}=7+\frac{2.5}{S-0.5}+\frac{0.4}{S-0.2}$$

$$h(k)=7\delta(k)+2.5(0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)+0.4(0.2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=7\delta(k)+[5(0.5)^k+2(0.2)^k]\varepsilon(k-1)$$

[2] $$\frac{H(S)}{S}=\frac{7S-2}{(S-0.5)(S-0.2)}=\frac{5}{S-0.5}+\frac{2}{S-0.2}$$

$$H(S)=\frac{5S}{S-0.5}+\frac{2S}{S-0.2}$$

$$h(k)=[5(0.5)^k+2(0.2)^k]\varepsilon(k)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta(k)&=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)\\ \varepsilon(k)&=\delta(k)+\varepsilon(k-1)\end{aligned}}$$

二：线性时不变系统零状态响应，卷积和

线性非移变系统：

若 $e_1(k) \rightarrow y_1(k)$, $e_2(k) \rightarrow y_2(k)$

则 $c_1 e_1(k-i) + c_2\, e_2(k-j) \rightarrow c_1 y_1(k-i) + c_2\, y_2(k-j)$

$$\delta(k) \rightarrow h(k)$$

$$\delta(k-i) \rightarrow h(k-i)$$

$$e(k) = \Lambda + e(-1)\delta(k+1) + e(0)\delta(k) + e(1)\delta(k-1) + \Lambda$$

$$y_{zs}(k) = \Lambda + e(-1)h(k+1) + e(0)h(k) + e(1)h(k-1) + \Lambda$$

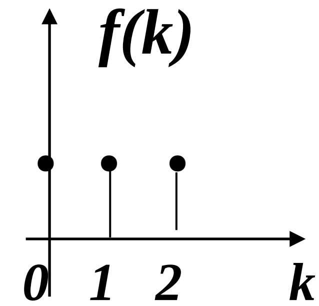
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e(k-i)$$

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = h(k) * e(k)$$

卷积和的计算

- 定义式法—根据卷积公式计算
- 查表法—根据卷积表查找结果
- 图解法—按褶、移、积、和**4**个步骤作图求解
- 表格法—排列序列阵表格，得到卷积求和关系
- 多项式法—将两序列按多项式相乘法则计算

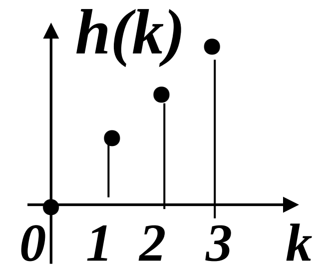
例1 已知 $f(k)=\begin{cases}1, k=0,1,2\\0,\text{其它}\end{cases}$ $h(k)=\begin{cases}k, k=0,1,2,3\\0,\text{其它}\end{cases}$ **求两序列卷积和**



解: [方法1] 用定义式求

$$y(k)=f(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}f(j)h(k-j)$$

k=0 : $y(0)=\sum_{j=0}^{0}f(j)h(k-j)=f(0)h(0)=0$



k=1: $y(1)=\sum_{j=0}^{1}f(j)h(k-j)=f(0)h(1)+f(1)h(0)=1$

k=2: $y(2)=\sum_{j=0}^{2}f(j)h(k-j)=f(0)h(2)+f(1)h(1)+f(2)h(0)=3$

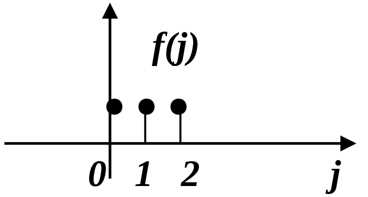
k=3: $y(3)=f(0)h(3)+f(1)h(2)+f(2)h(1)+f(3)h(0)$

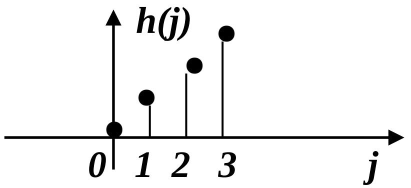
$$=1\times3+1\times2+1\times1+0\times0=6$$

y(4) = 5　y(5) = 3　y(6) = 0　…

[方法2] 图解法

$$y(k)=f(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}f(j)h(k-j)$$

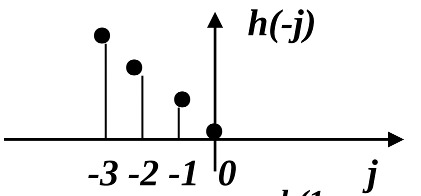




褶迭 → 平移 → 相乘 → 取和

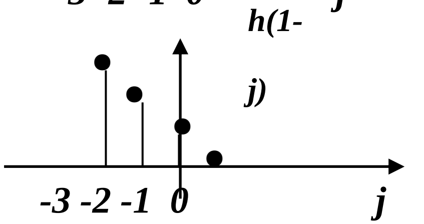
$$y(0)=f(0)h(0)=0$$

k=0



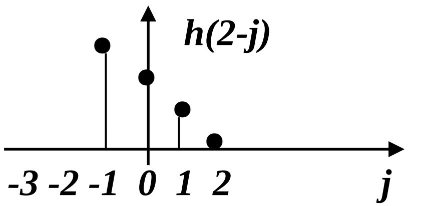
$$y(1)=f(0)h(1)+f(1)h(0)=1$$

k=1



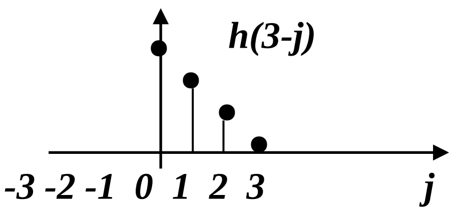
$$y(2)=h(2)f(0)+h(1)f(1)+h(0)f(2)=3$$

k=2



$$y(3)=\sum_{j=0}^{3}f(j)h(3-j)=3+2+1=6$$

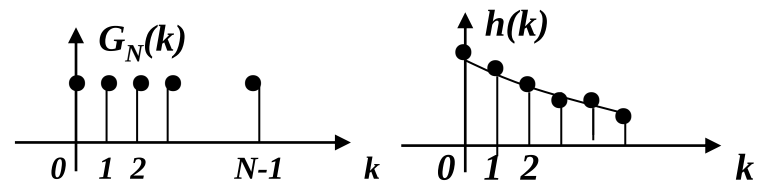
k=3



… …

例2　已知 $e(k)=G_N(k), h(k)=\gamma^k\varepsilon(k), 0<\gamma<1$

求零状态响应 $y_{ZS}(k)$



解：[方法一]由定义式求

$$y_{ZS}(k)=e(k)*h(k)=G_N(k)*\gamma^k\varepsilon(k)=\sum_{j=0}^{k}G_N(j)\gamma^{k-j}$$

(1) 当 $0<k<N-1$，j 从 $0\sim k$：$G_N(j)=1$

$$y_{ZS}(k)=\sum_{j=0}^{k}G_N(j)\gamma^{k-j}=\sum_{j=0}^{k}\gamma^{k-j}=\gamma^k\sum_{j=0}^{k}\gamma^{-j}=\gamma^k(1+\gamma^{-1}+\gamma^{-2}+\cdots+\gamma^{-k})$$

$$=\gamma^k\bullet\frac{1-\gamma^{-(k+1)}}{1-\gamma^{-1}}=\frac{\gamma^{-1}-\gamma^k}{\gamma^{-1}-1}$$ （>0且随k的增加而增加）

(2) 当 *k* ⩾ *N-1*

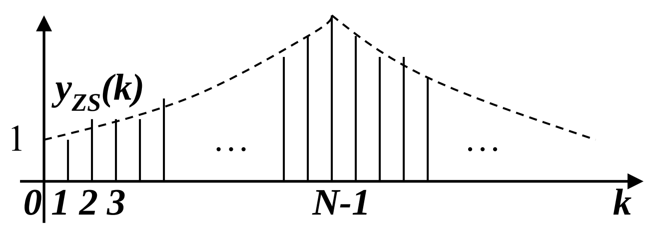
$$G_N(j)=\begin{cases}1, & j\le N-1\\ 0, & j>N-1\end{cases}$$

$$y_{ZS}(k)=\sum_{j=0}^{k}G_N(j)\gamma^{k-j}=\sum_{j=0}^{N-1}G_N(j)\gamma^{k-j}+\sum_{j=N}^{k}G_N(j)\gamma^{k-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\gamma^{k-j}=\gamma^{k}\sum_{j=0}^{N-1}\gamma^{-j}$$

$$=\gamma^{k}(1+\gamma^{-1}+\gamma^{-2}+\cdots+\gamma^{-(N-1)})$$

$$=\gamma^{k}\bullet\frac{1-\gamma^{-N}}{1-\gamma^{-1}}=\frac{\gamma^{k-N}-\gamma^{k}}{\gamma^{-1}-1}$$ (>0且随k的增加而减小)



[方法二] 查表结合卷积代数运算

$$\begin{cases} f(k)*\delta(k)=f(k) \\ f(k)*\delta(k-m)=f(k-m) \end{cases}$$

$$y_{ZS}(k)=G_N(k)*\gamma^k\varepsilon(k)=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-N)]*\gamma^k\varepsilon(k)$$

$$=\{\delta(k)+\delta(k-1)+\cdots+\delta[k-(N-1)]\}*\gamma^k\varepsilon(k)$$

$$=\gamma^k\varepsilon(k)+\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)+\cdots+\gamma^{k-(N-1)}\varepsilon[k-(N-1)]$$

当$k\geq N-1$时， $y_{ZS}(k)=\gamma^k[1+\gamma^{-1}+\cdots+\gamma^{-(N-1)}]$

当$k\leq N-1$时, $y_{ZS}(k)=\gamma^k\varepsilon(k)+\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)+\cdots+\gamma^{k-k}\varepsilon(k-k)$

$$=\gamma^k(1+\gamma^{-1}+\cdots+\gamma^{-k})$$

三：离散线性时不变系统

的因果性 和稳定性

因果系统：充分必要条件是

$$h(k)=0(\text{当}k<0)$$

或写成 $h(k)=h(k)\varepsilon(k)$

稳定系统：若输入是有界的，输出必定也是有界的系统。

稳定的充分必要条件：是单位函数响应绝对可和，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|\le M$$ **(*M*为有界正值)**

$h(k)=3^k, k<0$　　非因果　　收敛，稳定

$h(k)=3^k, k\ge 0$　　因果　　发散，不稳定

既满足稳定条件又满足因果条件

$$\begin{cases} h(k) = h(k)\varepsilon(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \le M \end{cases}$$

如 $h(k) = a^k \varepsilon(k)$ 则该系统是因果的

若 $|a| < 1$ 则该系统是稳定的

若 $|a| > 1$ 则该系统是不稳定的

若 $|a| = 1$ 则该系统称为临界稳定 此时 $h(k) = \varepsilon(k)$

若激励 $e(k) = \varepsilon(k)$

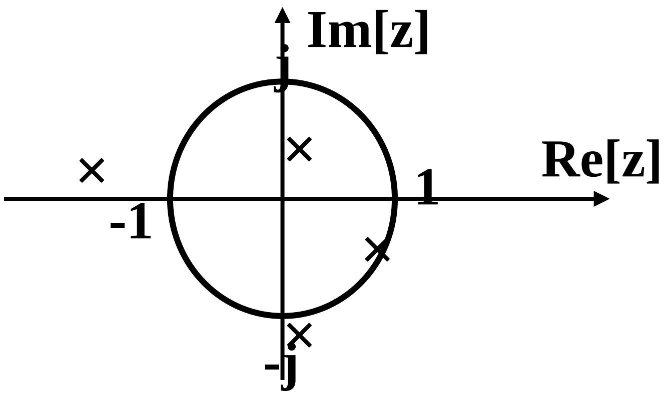
则系统的零状态响应 $y_{ZS}(k) = (1+k)\varepsilon(k)$ 系统不稳定

如把特征根 γ 画入一个复数平面内(Z平面),则因果系统是否稳定决定于确定的Z平面中的点是否在该平面的单位圆之内

$|\gamma|<1$ 时,特征根位于单位圆内,系统稳定

$|\gamma|>1$ 时,特征根位于单位圆外,系统不稳定

$|\gamma|=1$ 时,特征根位于单位圆上,系统临界稳定



例 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$，初始状态 $y(-1) = 0, y(-2) = 1/6$

，$e(k) = Cos(k\pi)\varepsilon(k) = (-1)^k \varepsilon(k)$

求 $y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$、全响应，稳定性

解：(1) 求零输入响应 $y_{Zi}(k)$

$y_{Zi}(k)$满足：$y_{Zi}(k) - y_{Zi}(k-1) - 2\, y_{Zi}(k-2) = 0$

及 $y_{Zi}(-1) = y(-1) = 0$，$y_{Zi}(-2) = y(-2) = 1/6$

由迭代法可得：$y_{Zi}(0) = y_{Zi}(-1) + 2\, y_{Zi}(-2) = 1/3$

$y_{Zi}(1) = y_{Zi}(0) + 2\, y_{Zi}(-1) = 1/3$

两个单根：$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 2$ (由$1 - s^{-1} - 2s^{-2} = 0$求得)

故有 $y_{Zi}(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k$

将 $y_{Zi}(0)$, $y_{Zi}(1)$代入求得 $C_1 = 1/9$, $C_2 = 2/9$

$$\therefore y_{Zi}(k) = \frac{1}{9}(-1)^k + \frac{2}{9}(2)^k, k \geq 0$$

例 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$, 初始状态 $y(-1) = 0, y(-2) = 1/6$, $e(k)=Cos(k\pi)\varepsilon(k)=(-1)^k\varepsilon(k)$

求 $y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$、全响应，稳定性

解 : (1) 求零输入响应 $y_{Zi}(k)$

$y_{Zi}(k)$满足 : $y_{Zi}(k) - y_{Zi}(k-1) - 2\, y_{Zi}(k-2) = 0$

及 $y_{Zi}(-1) = y(-1) = 0$, $y_{Zi}(-2) = y(-2) = 1/6$

由迭代法可得 : $y_{Zi}(0) = y_{Zi}(-1) + 2\, y_{Zi}(-2) = 1/3$

$y_{Zi}(1) = y_{Zi}(0) + 2\, y_{Zi}(-1) =1/3$

两个单根： $\gamma_1=-1, \gamma_2=2$ (由$1 - s^{-1} - 2s^{-2} = 0$求得)

故有 $y_{Zi}(k)=C_1(-1)^k+C_2(2)^k$

将 $y_{Zi}(0), y_{Zi}(1)$代入求得 $C_1 = 1/9$, $C_2 = 2/9$

$$\therefore y_{Zi}(k)=\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{2}{9}(2)^k, k\geq 0$$

(2) 求单位函数响应 *h(k)* 和零状态响应

$$H(S)=\frac{\frac{1}{3}S}{S+1}+\frac{\frac{2}{3}S}{S-2} \qquad \therefore h(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_{ZS}(k)=h(k)*e(k)\ =[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)]*(-1)^k\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)*(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(k)*(-1)^k\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{2}{3}\bullet\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{2-(-1)}\varepsilon(k)$$

$$=[\frac{1}{3}k(-1)^k+\frac{5}{9}(-1)^k+\frac{4}{9}(2)^k]\varepsilon(k)$$

- （3）全响应

$$y(k)=y_{Zi}(k)+y_{ZS}(k)=[\frac{1}{3}(k+2)(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

- （4）稳定性
  - 由于特征根分别为 －1和2， $|\gamma_1|=1, |\gamma_2|=2>1$
  - 系统不稳定

DTS与CTS分析方法的比较

连续时间系统

- 微分方程$r'(t)+r(t)=e(t)$
- 微分算子p，$H(p)=1/(p+1)$
- 特征根λ; $e^{\lambda t}$
- 自然响应的幅度和振荡频率分别决定于λ的实部和虚部；
- 稳定取决于各特征根是否全部位于 s平面的左半面内。
- 零状态响应等于系统的单位冲激响应与输入激励的卷积积分

离散时间系统

- 差分方程$y(k+1)+y(k)=e(k)$
- 移序算子S，$H(S)=1/(S+1)$
- 特征根λ; λ^k
- 自然响应的幅度和振荡频率分别决定于λ的模量和相位；
- 稳定取决于各特征根是否全部位于 Z平面的单位园内。
- 零状态响应等于系统的单位函数响应与输入激励的卷积和

本讲小结

- 离散时间系统零状态响应求解
  - 激励信号的分解，采用单位函数表示
  - 零状态响应通过激励与单位函数响应卷积和计算
  - 卷积和的几种计算方法—定义、多项式、查表
  - 单位函数响应的计算
    - 迭代方法计算
    - 转移算子**H(S)**，解特征方程，解的标准形式
  - 全响应的计算
    - 初始条件的应用
  - 系统稳定性的判定
- **DTS**与**CTS**分析方法的比较

信号与线性系统

第 19 次课外作业

教材习题: 7.21、 7.26、 7.29