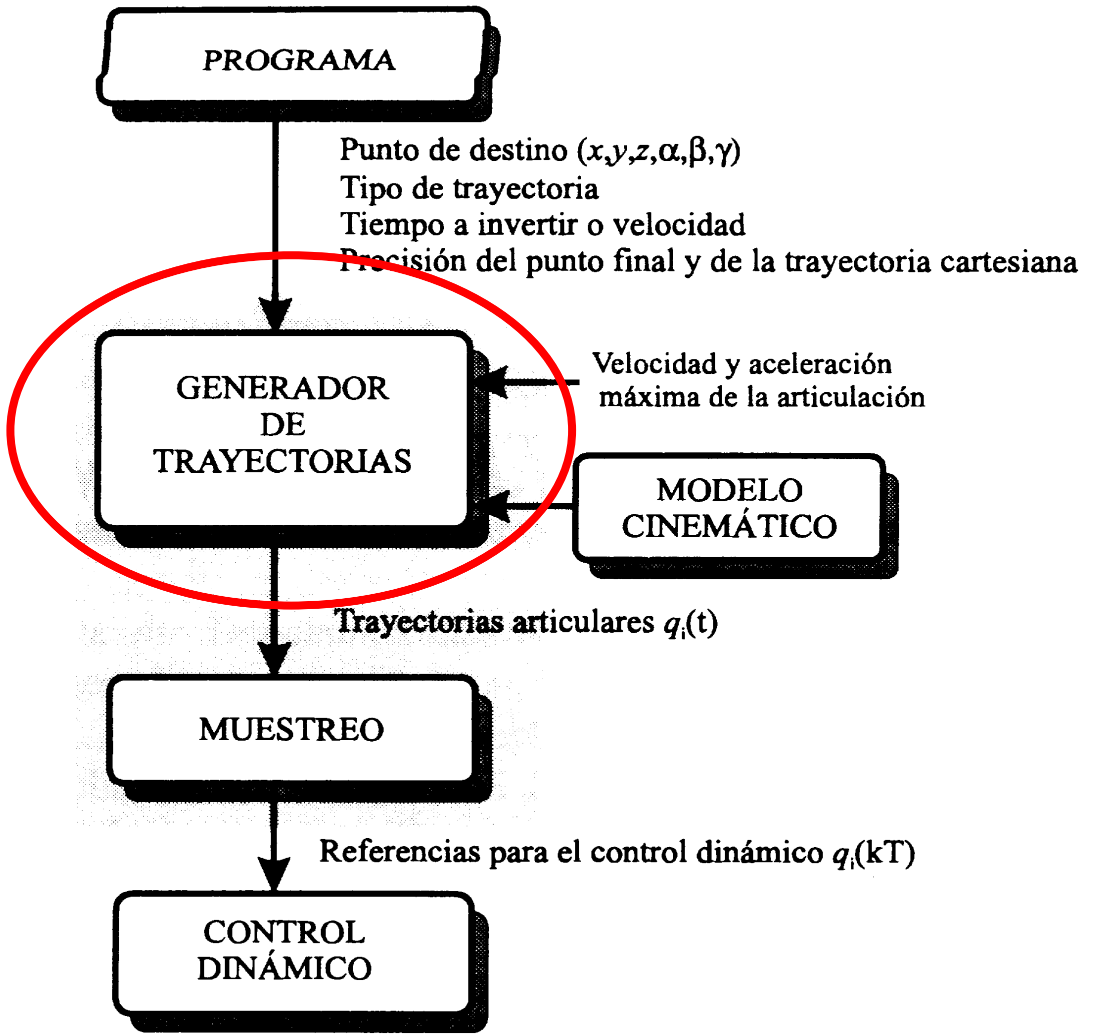
PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIAS

Índice

- ¿Qué es una trayectoria?
- Tipos de trayectorias
  - Punto a punto
  - Coordinadas
  - Continuas
- Trayectorias en el espacio articular:
  - Lineal
  - Cúbica
  - Parabólica
  - A tramos
    - 1-2-1
    - 4-3-4

Planificación de trayectorias

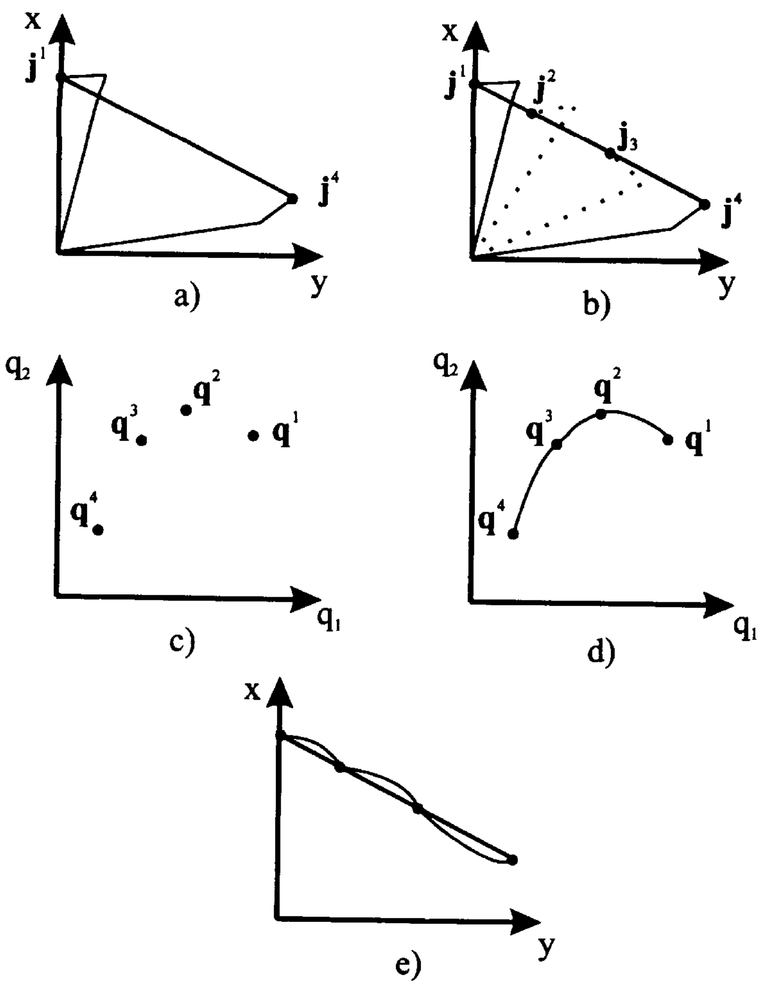
- **Objetivo:** dado el punto inicial del robot, ¿qué camino debe seguir para llegar a su posición final?
- **Problema:** en todo momento debe cumplir unas limitaciones:
  - **Cinemáticas:** rango de las articulaciones
  - **Dinámicas:** velocidades y aceleraciones máximas



Generación de trayectorias (I)

- 1.- Dar el punto inicial y final de la trayectoria (en coordenadas cartesianas o generalizadas).
- 2.- Muestrear la trayectoria cartesiana obteniendo un número finito de puntos en esa trayectoria (x, y, z, α, β, γ).
- 3.- Utilizando la transformación inversa, convertir cada punto en sus correspondientes coordenadas articulares (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)
- 4.- Interpolar entre los puntos articulares obtenidos, generando una trayectoria en función del tiempo para cada variable articular: $q_i(t)$, que sea realizable por los actuadores.
- 5.- Si está bien hecho, esta trayectoria se aproximará a la deseada en el plano cartesiano.

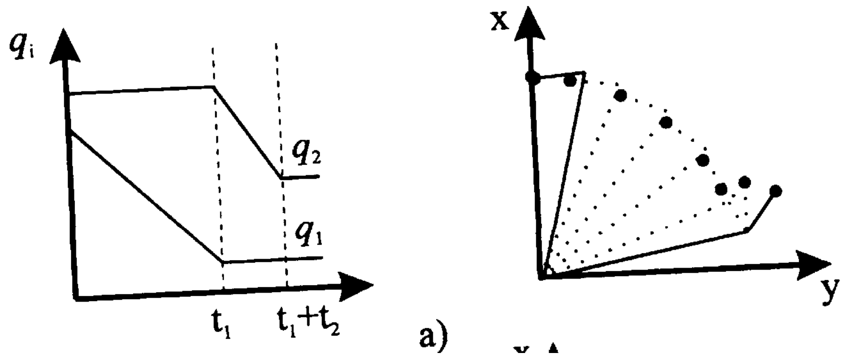
Generación de trayectorias (II)



- Dos formas de solucionar el problema:
- Coordenadas cartesianas.
  - Ventaja: movimiento real en las tres dimensiones, puede establecerse ligaduras del entorno.
  - Desventaja: necesidad de resolver repetidamente la transformación homogénea inversa
- Coordenadas generalizadas.
  - Ventaja: las ligaduras dinámicas se plantean en las variables generalizadas.

Tipos de trayectorias (I)

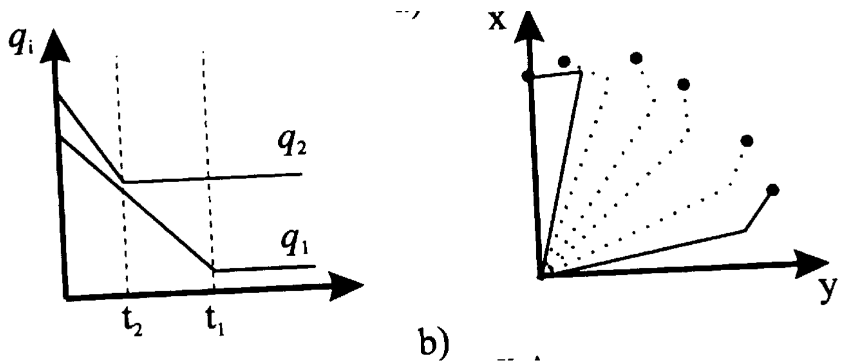
- Trayectoria punto a punto: cada articulación se mueve sin considerar el estado o evolución de las demás articulaciones.
  - Movimiento eje a eje
    - Cada vez se mueve un eje
    - El tiempo total es la suma de los tiempos de cada articulación.



a)

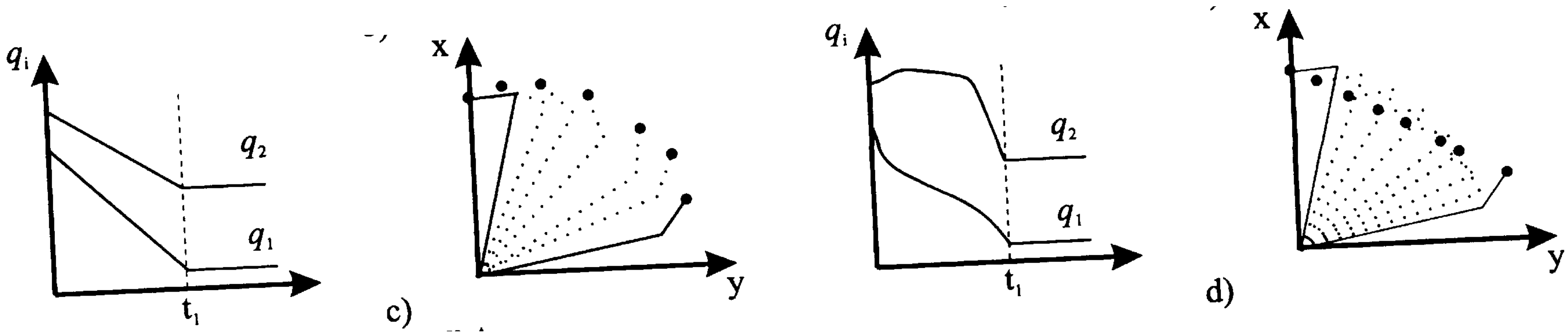
Tipos de trayectorias (II)

- Movimiento simultáneo de ejes
  - Comienzan simultáneamente todos los ejes
  - El tiempo final será el de aquella articulación que tarde más tiempo en finalizar su movimiento.



Tipos de trayectorias (III)

- Trayectorias coordinadas (isócronas)
  - Se plantea un movimiento simultáneo, ralentizando las articulaciones más rápidas, para que todas tarden el mismo tiempo en acaba el movimiento.



- Trayectorias continuas
  - Se fija explícitamente en coordenadas cartesianas el camino que tiene que seguir el extremo (infinitos puntos)
  - El movimiento de las articulaciones puede parecer errático.

Interpolación de trayectorias (I)

- Muchas veces es necesario generar trayectorias no sólo con un punto inicial y final, sino que también se impone que pase por determinados puntos:
  - Camino continuo
  - Evitación de obstáculos
  - Suavizado de la trayectoria, etc.
- Solución: seleccionar algún tipo de función polinómica (spline) cuyos coeficientes se ajustan para pasar por los puntos deseados (con velocidades y aceleraciones aceptables)

Interpolación de trayectorias (II)

- Interpolación lineal:

$$q(t) = a*t + b$$

Condiciones:

$q(t^{i-1}) = a * t^{i-1} + b = q^{i-1}$

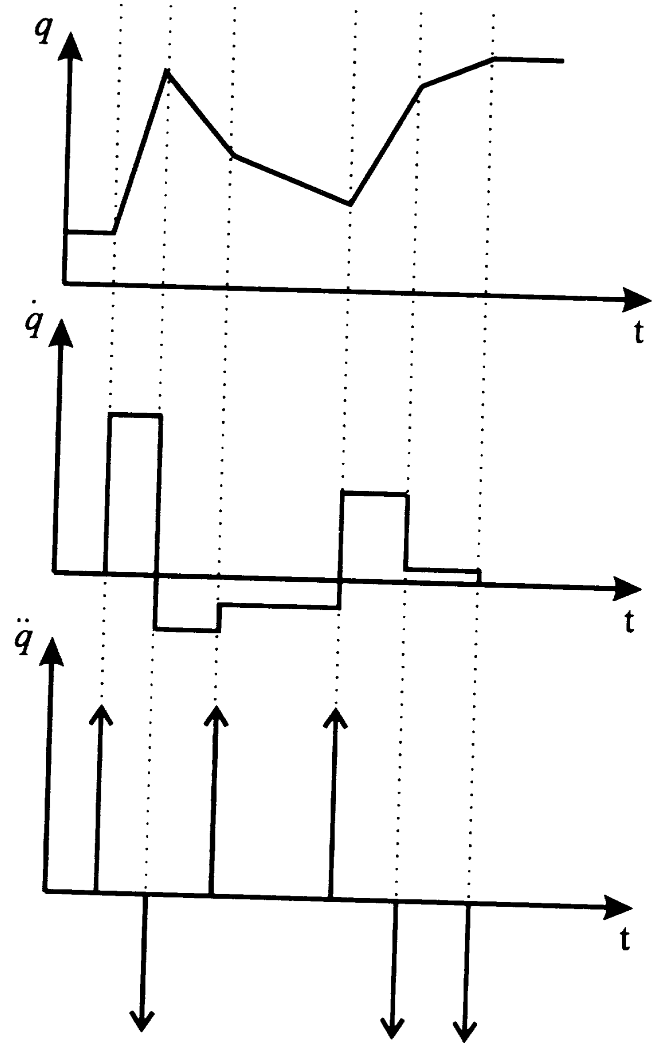
$q(t^{i}) = a * t^{i} + b = q^{i}$

Se despeja a y b y se obtiene:

$$q(t) = \left(q^{i} - q^{i-1}\right)\frac{t - t^{i-1}}{T} + q^{i-1}$$

$$T = t^{i} - t^{i-1}$$

Problema: la velocidad cambia bruscamente y la aceleración es infinita



Interpolación de trayectorias (III)

- Para asegurar la continuidad en la velocidad se aproxima por una función cúbica.
- Condiciones (4): posición y velocidad en el punto inicial y final
- Fórmula de interpolación:

$$q(t) = a + b\left(t - t^{i-1}\right) + c\left(t - t^{i-1}\right)^2 + d\left(t - t^{i-1}\right)^3 \qquad t^{i-1} < t < t^{i}$$

$$a = q^{i-1}$$

$$b = \dot{q}^{i-1}$$

$$c = \frac{3}{T^2}\left(q^{i} - q^{i-1}\right) - \frac{2}{T^2}\dot{q}^{i-1} - \frac{1}{T^2}\dot{q}^{i}$$

$$d = -\frac{2}{T^3}\left(q^{i} - q^{i-1}\right) + \frac{1}{T^2}\left(\dot{q}^{i-1} + \dot{q}^{i}\right)$$

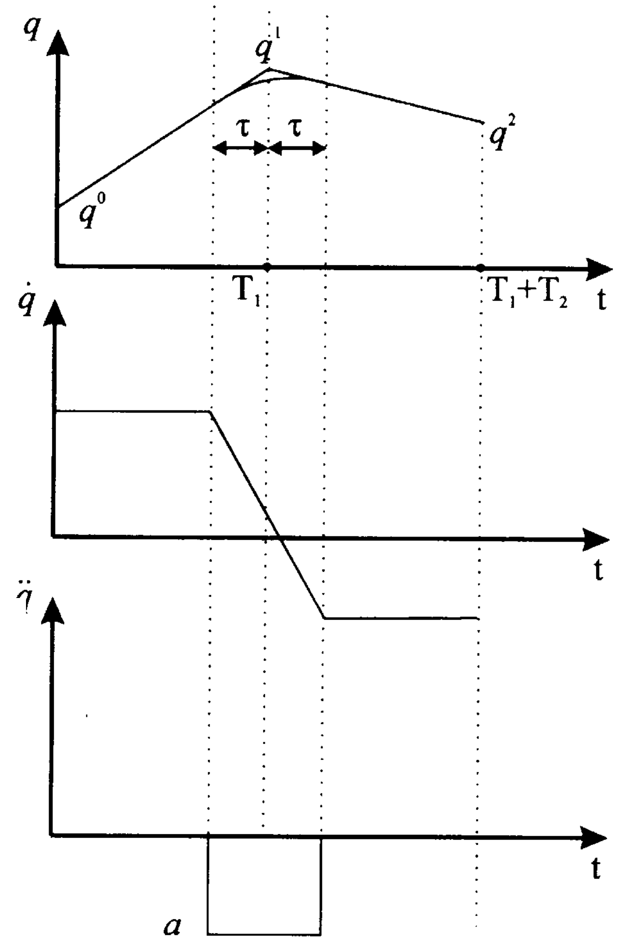
$$T = t^{i} - t^{i-1}$$

Interpolación de trayectorias (IV)

- Interpolación parabólica: el paso por los puntos intermedios se planifica para evitar cambios bruscos: en vez de pasar por el punto se pasa tan cerca de él como lo permita la aceleración máxima.

- Fórmula de interpolación:

$$q(t) = \begin{cases} q^0 + \dfrac{q^1 - q^0}{T_1} t & 0 \le t \le T_1 - \tau \\ q^1 + \dfrac{(q^1 - q^0)}{T_1}(t - T_1) + \dfrac{a}{2}(t - T_1 + \tau)^2 & T_1 - \tau < t < T_1 + \tau \\ q^1 + \dfrac{q^2 - q^1}{T_2}(t - T_1) & T_1 + \tau < t < T_1 + T_2 \end{cases}$$



Interpolación de trayectorias (V)

- Condiciones de funcionamiento:
  - 1 tramo: $q_1(t) = a + b*t$

    $q_1(t=0) = q^0 = a \qquad q_1(t=T_1) = a + b*T_1 = q^1$

    Ecuación: $q_1(t) = q^0 + (q^1 - q^0) / T^1 * t$

  - 3 tramo: $q_3(t) = a_1 + b_1 * (t - T_1)$

    $q_3(t=T_1) = q^1 = a_1 \qquad q_3(t=T_1+T_2) = q^2 = a_1 + b_1*T_2$

    Ecuación: $q_3(t) = q_1 + (q^2 - q^1) / T_2 * (t - T_1)$

  - 2 tramo: $q_2(t) = a_2 + b_2 (t- (T_1- \tau)) + c_2 (t - T_1 + \tau)^2$

$$\dot{q}(T_1 - \tau) = b = b_2 + 2c_2(T_1 - \tau - T_1 + \tau) \Rightarrow b_2 = \frac{(q^1 - q^0)}{T_1}$$

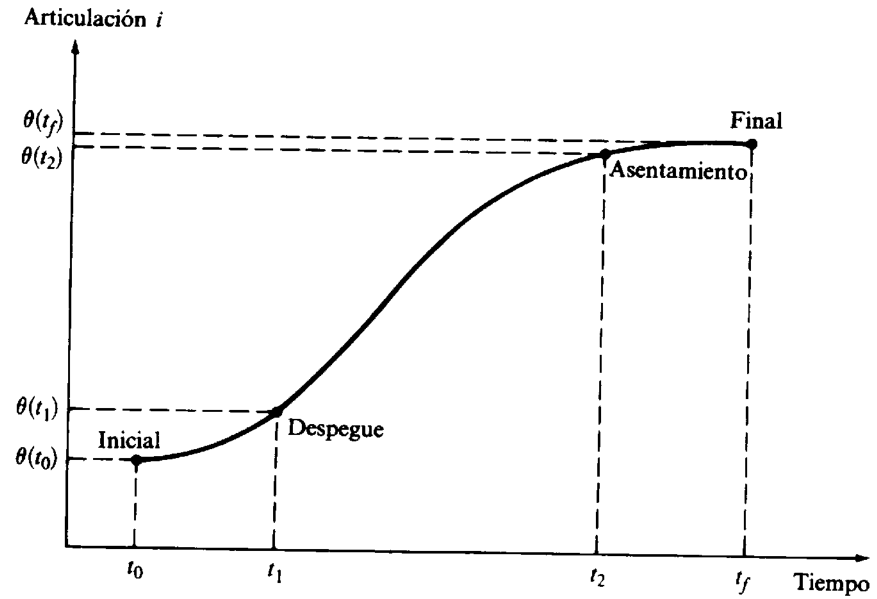
$$\dot{q}(T_1 + \tau) = b_1 = b_2 + 2c_2(T_1 + \tau - T_1 + \tau) \Rightarrow c_2 = \frac{(q^2 - q^1)T_1 - (q^0 - q^1)T_2}{4T_1T_2\tau}$$

$$q_1(T_1 - \tau) = q_2(T_1 - \tau) = q^0 + \frac{q^1 - q^0}{T_1}(T_1 - \tau) = a_2$$

Interpolación de trayectorias (VI)

- Si se desea asignar posiciones, velocidades y aceleraciones del punto inicial y del punto final (6 condiciones) => polinomio de orden 5
- Si se desea pasar por puntos intermedios, se tienen más condiciones:
  - Inicial: posición, velocidad y aceleración
  - Despegue: posición
  - Asentamiento: posición
  - Final: Posición, velocidad y aceleración
  - 8 condiciones =>

Polinomio de orden 7



$$q_i(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0$$

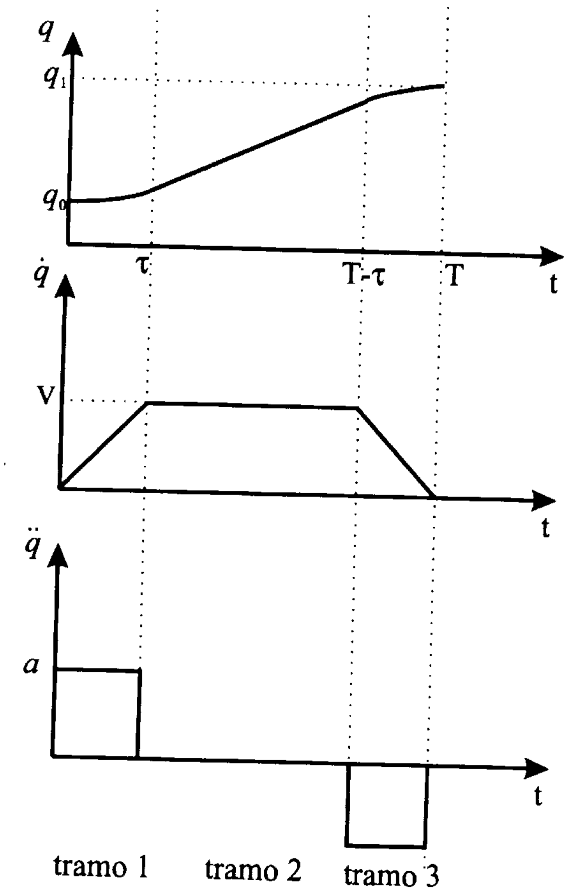
Interpolación de trayectorias (VI)

- Para conseguir transiciones suaves se necesitarían órdenes del polinomio elevados, pero si el orden es alto se producen comportamientos erráticos en puntos intermedios:
- Solución: interpolación a tramos.
- Interpolación más sencilla (2-1-2):
  - Tramos de despegue y asentamiento a máxima aceleración
  - Tramo intermedio a máxima velocidad
- Son deseables transiciones suaves por lo que suelen usarse en cada segmento splines de orden 3, 4 o 5
  - Interpolación más usada: 4-3-4
  - Otras posibilidades: 3-3-3, 5-5-5, 3-5-3, etc.

Interpolación a tramos (I)

- Interpolación 2-1-2:
- Fórmula de interpolación:

$$q(\mathrm{t}) = \begin{cases} q^0 + \mathrm{s}\dfrac{a}{2}\mathrm{t}^2 & \mathrm{t} \le \tau \\ q^0 - \mathrm{s}\dfrac{\mathrm{V}^2}{2a} + \mathrm{sVt} & \tau < \mathrm{t} \le \mathrm{T} - \tau \\ q^1 + \mathrm{s}\left(-\dfrac{a\mathrm{T}^2}{2} + a\mathrm{Tt} - \dfrac{a}{2}\mathrm{t}^2\right) & \mathrm{T} - \tau < \mathrm{t} < \mathrm{T} \end{cases}$$



donde V es la velocidad, y a la aceleración máxima permitida.

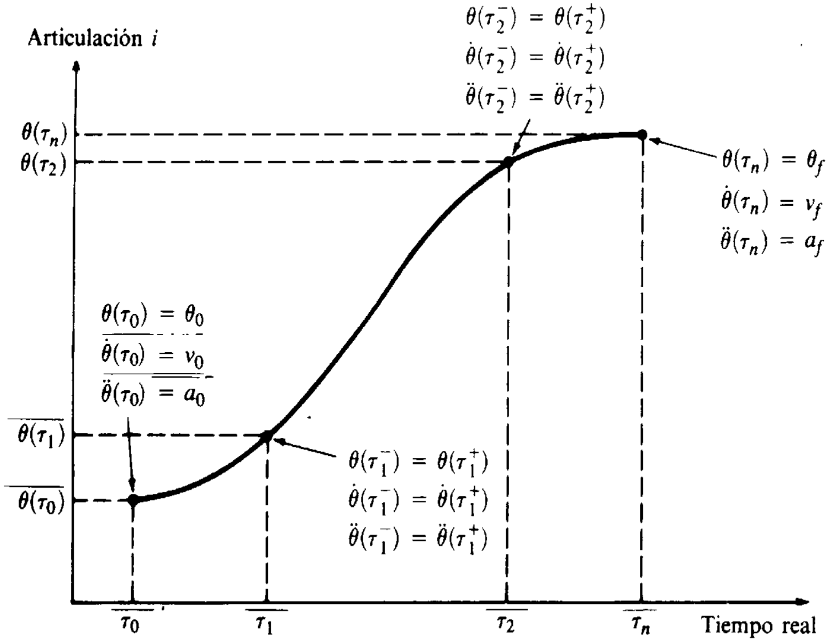
Interpolación a tramos (II)

- Trayectoria 4-3-4
- Los segmentos se ajustan de forma que en los puntos de cambio (despegue y asentamiento) no cambie ni la velocidad ni la aceleración.
- Primer segmento: orden 4
- Segundo segmento: 3
- Tercer segmento: 4

$$q_i(t) = h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}$$

$$q_i(t) = h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}$$

$$q_i(t) = h_3(t) = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}$$



Interpolación a tramos (III)

- 1.- Se normaliza cada segmento para que corresponda al intervalo t $\in$ [0 1]
- Tiempo: $t = \dfrac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}$
- Velocidad: $\dot{q}_i(t) = \dfrac{dh_i(t)}{d\tau} = \dfrac{dh_i(t)}{dt} * \dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} \dfrac{dh_i(t)}{dt}$
  - 1 segmento: $\dot{q}(t) = \dfrac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1}$
- Aceleración: $\ddot{q}_i(t) = \dfrac{d^2h_i(t)}{d\tau^2} = \dfrac{d^2h_i(t)}{dt^2} * \dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{1}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \dfrac{d^2h_i(t)}{dt^2}$
  - 1 segmento: $\ddot{q}(t) = \dfrac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^{\,2}}$

Interpolación a tramos (III)

- Condiciones:
- 1 segmento:
  - 1.- $h_1(t=0) = q^0 = a_{10}$
  - 2.- $v_1(t=0) = v^0 = a_{11} / t_1 \;\; => a_{11} = v^0 t_1$
  - 3.- $a_1(t=0) = a^0 = 2*a_{21} / t_1^2 \;\; => a_{21} = a^0 * t_1^2 /2$
  - 4.- $h_1(t=1) = q^1 = a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} \;\; =>$

  $a_{14} + a_{13} = q^1 - q^0 - v^0 t_1 - a^0 t_1^2 /2$

- 1 y 2 segmento:
  - 5.- Continuidad en la velocidad:

$$\frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + 2a_{12} + a_{11}}{t_1} = \frac{a_{21}}{t_2}$$

$$\frac{4}{t_1}a_{14} + \frac{3}{t_1}a_{13} - \frac{1}{t_2}a_{21} = -a^0 t_1 - v^0$$

Interpolación a tramos (IV)

- 6.- Continuidad en al aceleración:

$$\ddot{q}_{i,1}(1) = \ddot{q}_{i,2}(0) \rightarrow \frac{12a_{14} + 6a_{13} + 2a_{12}}{t_1^2} = \frac{2a_{22}}{t_2^2}$$

$$\frac{12}{t_1^2} a_{14} + \frac{6}{t_1^2} a_{13} - \frac{2}{t_2^2} a_{22} = -a^0$$

- 2º segmento:
  - 7.- $h_2(t=0) = q^1 = a_{20}$
  - 8.- $h_2\ (t=1) = q^2 = a_{23}+a_{22}+a_{21}+a_{20}$ => $a_{23} + a_{22}+a_{21} = q^2 - q^1$
- 3er segmento (cambio de variable): $t \in [0,1]$ => $\bar{t} \in [-1,0]$ => $\bar{t} = t - 1$
  - 9.- $h_3(\bar{t}=0) = q^3 = a_{30}$
  - 10.- $v_3(\bar{t}=0) = v^3 = a_{31} / t_3$ => $a_{31} = v^3\ t_3$
  - 11.- $a_3\ (\bar{t}=0) = a^3 = 2\ a_{32} / t_3^2$ => $a_{32} = a^3\ t_3^2 / 2$

Interpolación a tramos (V)

- 2º y 3^er segmento:
  - 12.- Continuidad en la velocidad:

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{\dot{h}_3(-1)}{t_3} = \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2} = \frac{-4a_{34} + 3a_{33} - 2a_{32} + a_{31}}{t_3}$$

$$\frac{4}{t_3} a_{34} - \frac{3}{t_3} a_{33} + \frac{3}{t_2} a_{23} + \frac{2}{t_2} a_{22} + \frac{1}{t_2} a_{21} = v^3 - a^3 t_3$$

  - 13.- Continuidad en la aceleración

$$\ddot{q}_2(1) = \ddot{q}_3(-1) \rightarrow \frac{12a_{34} - 6a_{33} + 2a_{32}}{t_3^2} = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2}$$

$$-\frac{12}{t_3^2} a_{34} + \frac{6}{t_3^2} a_{33} + \frac{6}{t_2^2} a_{23} + \frac{2}{t_2^2} a_{22} = a^3$$

  - 14.- $h_3(-1) = q^2 = a_{34} - a_{33} + a_{32} - a_{31} + a_{30}$ =>

$a_{33} - a_{34} = q^3 - q^2 - v^3 t_3 + a^3 t_3^2 / 2$

Interpolación a tramos (V)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/t_1 & 3/t_1 & -1/t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12/t_1^2 & 6/t_1^2 & 0 & -2/t_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_2 & 2/t_2 & 3/t_2 & -3/t_3 & 4/t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/t_2^2 & 6/t_2^2 & 6/t_3^2 & -12/t_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 - q^0 - v^0 t_1 - a^0 \frac{t_1^2}{2} \\ -a^0 t_1 - v^0 \\ -a^0 \\ q^2 - q^1 \\ v^3 - a^3 t_3 \\ a^3 \\ q^3 - q^2 - v^3 t_3 - a^3 \frac{t_3^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$y = Cx \longrightarrow x = C^{-1} y$$

Interpolación a tramos (VI)

- Una vez resuelto el problema, en el segmento 3 debemos deshacer el cambio de variable, y sustituir $\bar{t} = t - 1$ en la ecuación del tercer segmento:

$$q_i(\bar{t}) = h_3(\bar{t}) = a_{34}\bar{t}^4 + a_{33}\bar{t}^3 + a_{32}\bar{t}^2 + a_{31}\bar{t} + a_{30}$$

$$q_i(t) = h_3(t) = a_{34}(t-1)^4 + a_{33}(t-1)^3 + a_{32}(t-1)^2 + a_{31}(t-1) + a_{30}$$

$$h_3(t) = a_{34}(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) + a_{33}(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + a_{32}(t^2 - 2t + 1) + a_{31}(t-1) + a_{30}$$

$$\Downarrow$$

$$h_3(t) = a_{34}t^4 + (-4a_{34} + a_{33})t^3 + (6a_{34} - 3a_{33} + a_{32})t^2 + (-4a_{34} + 3a_{33} - 2a_{32} + a_{31})t + (a_{34} - a_{33} + a_{32} - a_{31} + a_{30})$$

Resumen

- ¿Qué es una trayectoria?
- Pasos a seguir para generar una trayectoria
- Tipos de trayectorias
- ¿Cómo se calculan las trayectorias? => depende de las condiciones que nos impongan
  - Sólo posición: lineal
  - Posición y velocidad: cúbica
  - Posición, velocidad y aceleración:
    - trayectoria de 5º orden
    - O una trayectoria a tramos fijando dos puntos intermedios por lo que queremos pasar y asegurando continuidad en la velocidad (2-1-2), si queremos asegurar también continuidad en la aceleración: (4-3-4), (3-3-3), (5-3-5) etc.

Bibliografía

- Barrientos: explica las trayectorias, los tipos de trayectorias y los polinomios pero sin deducirles.
- Torres: habla de la interpolación cúbica, y la interpolación lineal con ajuste parabólico => deducen los valores de cada parámetro y pone ejemplos
- Fu: explica con detalle las ecuaciones de la trayectoria 4-3-4, la 3-5-3 y la 3-3-3-3-3