Ingeniería de Control

Tema 9. Espacio de Estados : Representación y propiedades importantes

Daniel Rodríguez Ramírez

Teodoro Alamo Cantarero

Esquema del tema

9.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

9.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

9.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

9.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

9.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

9.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

9.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 9.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 9.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 9.7.3. Observabilidad.

9.8. Principio de dualidad.

9.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

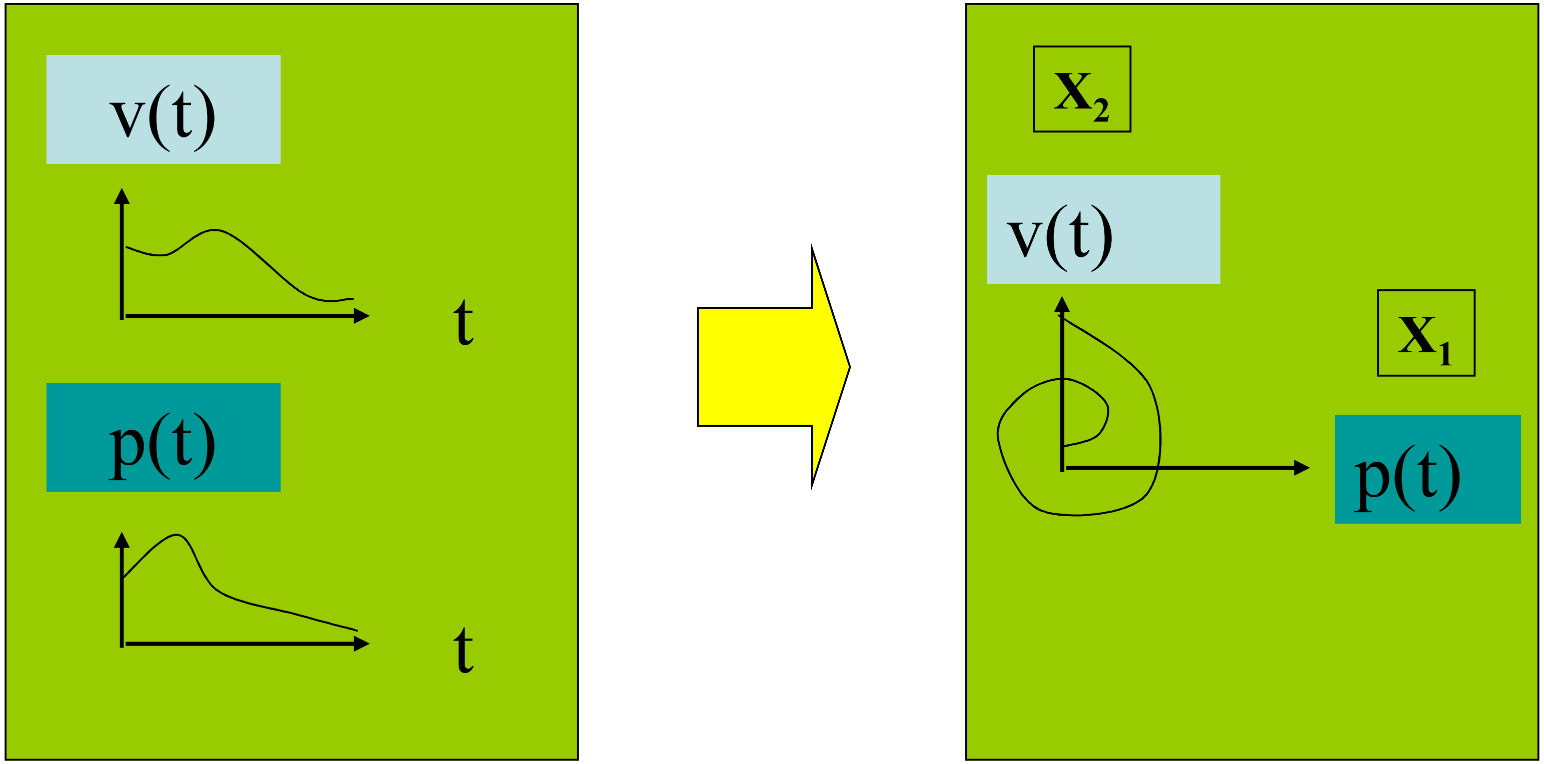
- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

9.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

9.11. Funciones de Matlab útiles.

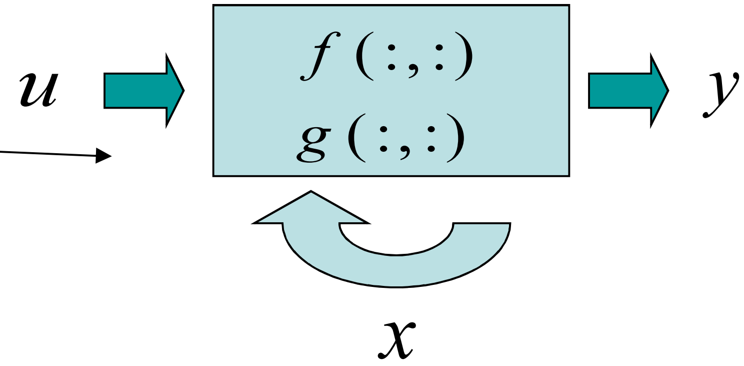
Introducción

- **Estado de un sistema**: conjunto más pequeño de variables que permiten predecir la evolución del sistema conocidas las entradas.
- El espacio de todos los posibles valores del estado es el **espacio de estados**.
- El concepto de espacio de estados generaliza al plano de fases.



Introducción

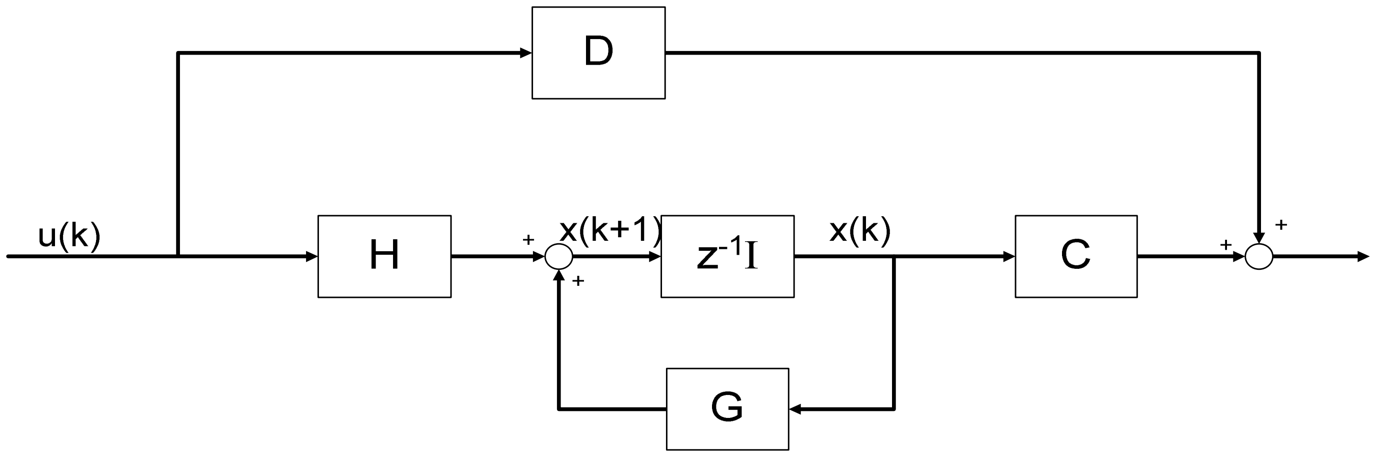
Ecuaciones de estado y salida →
modelo en espacio de estados.



Forma general

Sistemas Lineales, e Invariantes en el tiempo

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{aligned}
$$



¿ Por qué el espacio de estados ?

- **Modelo** de análisis y diseño **más general.**
- Permite tratar de manera análoga sistemas **lineales y no lineales**.
- Introducción de conceptos de **álgebra lineal** en el análisis de ecuaciones en diferencias.
- Utilización de conceptos **geométricos,** generalización del plano de fase: (posición,velocidad) a *n* dimensiones.
- Relación entre descripciones internas y externas.
- Adecuado para sistemas con **múltiples entradas o salidas**.
- Cálculos matriciales sencillos.

Esquema del tema

9.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

9.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

9.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

9.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

9.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

9.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

9.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 9.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 9.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 9.7.3. Observabilidad.

9.8. Principio de dualidad.

9.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 9.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 9.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

9.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

9.11. Funciones de Matlab útiles.

Obtención de la representación en espacio de estados de un sistema

- Directamente a partir de ecuaciones.
- A partir de su función de transferencia:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

y usando el ***método de programación directa*** podemos obtener la siguiente representación del sistema en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Esta representación se conoce como la ***Forma Canónica Controlable*** (FCC) del sistema.

Obtención de la representación en espacio de estados de un sistema (II)

- Existen otros métodos, como el llamado de *programación anidada*, por el que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Esta representación es la llamada ***Forma Canónica Observable*** (FCO).

Dos representaciones diferentes para un mismo sistema…

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

6.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 6.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 6.7.3. Observabilidad.

6.8. Principio de dualidad.

6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

6.11. Funciones de Matlab útiles.

Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia

- En primer lugar, la respuesta impulsional partiendo de x(0)=0 es:

$$\begin{aligned} h_0 &= Cx(0) + D = D \\ x(1) &= Gx(0) + Hu(0) = H \qquad h_1 = CH \\ x(2) &= Gx(1) = GH \qquad h_2 = CGH \\ x(3) &= Gx(2) = G^2H \qquad h_3 = CG^2H \\ &\vdots \\ h_n &= CG^{n-1}H \qquad n > 0 \end{aligned}$$

- Los coeficientes de la respuesta impulsional definen la función de transferencia:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = D + \sum_{n=1}^{\infty} (CG^{n-1}H) z^{-n} = D + z^{-1} C \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}G)^n \right) H$$

- Usando la suma de una serie geométrica matricial se llega a:

$$\boxed{G(z) = D + C(zI - G)^{-1} H}$$

Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia

- Partiendo de que la función de transferencia viene dada por:

$$G(z) = D + C(zI - G)^{-1}H$$

  se ve que los polos de G(z) son los mismos que los de:

$$G_p(z) = (zI - G)^{-1}$$

- Usando la regla de Cramer para inversión de matrices se ve que el denominador de $G_p(z)$ es:

$$D(z) = \det(zI - G)$$

- D(z) es el polinomio característico de G.
- Por tanto los polos de G(z) son los autovalores de G.

Esquema del tema

La representación de un sistema en espacio de estados **no** es única

- De hecho existen infinitas representaciones. Pueden elegirse diferentes variables, o simplemente, definir otras mediante transformaciones lineales:

$$x(k) = P\tilde{x}(k)$$

Transformación de semejanza

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{G}\tilde{x}(k) + \tilde{H}u(k) \quad \tilde{G} = P^{-1}GP \quad \tilde{H} = P^{-1}H$$

$$y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k) \quad \tilde{C} = CP \quad \tilde{D} = D$$

- La dinámica no cambia, por que todas las representaciones son equivalentes.

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(z) &= \tilde{D} + \tilde{C}(zI - \tilde{G})^{-1}\tilde{H} \\
&= D + CP(zI - P^{-1}GP)^{-1}P^{-1}H \\
&= D + CP(P^{-1}(zI - G)P)^{-1}P^{-1}H \\
&= D + CPP^{-1}(zI - G)^{-1}PP^{-1}H \\
&= D + C(zI - G)^{-1}H \\
&= G(z)
\end{aligned}$$

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.
6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.
6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.
6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.
6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.
6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.
6.7. Controlabilidad y observabilidad.
    6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
    6.7.2. Controlabilidad de la salida.
    6.7.3. Observabilidad.
6.8. Principio de dualidad.
6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.
    6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
    6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.
6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.
6.11. Funciones de Matlab útiles.

Resolución de la ecuación de estado

- Obtener una expresión de x(n) en función solo de las condiciones iniciales y u(k).

$$\begin{aligned} x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\ x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \\ x(3) &= Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esto se generaliza a:

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$$

$$y(k) = CG^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j) + Du(k)$$

Alternativamente:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - G)^{-1}z\right\}x(0) + \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - G)^{-1}HU(z)\right\}$$

Matriz de transición de estados

- Dado un sistema autónomo:

$$x(k+1) = Gx(k)$$

- La ecuación de estado resulta ser:

$$x(k) = \Psi(k)x(0)$$

donde

$$\Psi(k) = G^k$$

es la llamada **Matriz de transición de estados** → Contiene la información sobre los movimientos libres del sistema.

- La solución de la ecuación de estado se puede reescribir:

$$x(k) = \Psi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j)Hu(k-j-1)$$

$$y(k) = C\Psi(k)x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j)Hu(k-j-1) + Du(k)$$

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

6.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 6.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 6.7.3. Observabilidad.

6.8. Principio de dualidad.

6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

6.11. Funciones de Matlab útiles.

Discretización de las ecuaciones de estado continuas

- Sistema continuo en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

- Al discretizar dicha ecuación con un tiempo de muestreo T, queda:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

donde

$$\begin{aligned} G(T) &= e^{AT} \\ H(T) &= \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B \end{aligned}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

la ecuación de salida quedaría como:

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

6.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 6.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 6.7.3. Observabilidad.

6.8. Principio de dualidad.

6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

6.11. Funciones de Matlab útiles.

Controlabilidad y Observabilidad

- Conceptos debidos a **Kalman** y claves a la hora de diseñar sistemas de control basados en espacio de estados (colocación de polos, control óptimo, etc…).

- La **Controlabilidad** está relacionada con la existencia de una secuencia de actuaciones para llevar el sistema a un estado arbitrario.

- La **Observabilidad** tiene que ver con la posibilidad de determinar el valor del vector de estados de un sistema a partir de observaciones de las salidas y la entradas de dicho sistema.

Controlabilidad

- Un sistema dinámico es completamente controlable, si es posible transferir al sistema desde un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado en un tiempo finito.
- Teniendo en cuenta la solución de la ecuación de estado se tiene que:

$$x(nT)-G^n x(0) = \left[\begin{array}{ccccccc} H & \vdots & GH & \vdots & \cdots & \vdots & G^{n-1}H \end{array}\right] \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

donde

$$M_c = \left[\begin{array}{ccccccc} H & \vdots & GH & \vdots & \cdots & \vdots & G^{n-1}H \end{array}\right]$$

es la matriz de controlabilidad.

Dado un sistema LTI de orden *n*, es condición necesaria y suficiente para que el sistema sea completamente controlable que el rango de la matriz de controlabilidad sea igual a *n*.

Controlabilidad (II)

- **Controlabilidad de la salida** → cuando es suficiente que lo que sea controlable sea la salida.

- Si el número de salidas es *m* y la ecuación de salida es:

$$y(kT) = Cx(kT)$$

la condición que se ha de cumplir es:

$$\text{Rango}\left\{\left[\begin{array}{ccccccc} CH & \vdots & CGH & \vdots & \cdots & \vdots & CG^{n-1}H \end{array}\right]\right\} = m$$

- Si la ecuación de salida es:

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

la condición que se ha de cumplir es:

$$\text{Rango}\left\{\left[\begin{array}{ccccccccc} D & \vdots & CH & \vdots & CGH & \vdots & \cdots & \vdots & CG^{n-1}H \end{array}\right]\right\} = m$$

Observabilidad

- Considérese un sistema autónomo:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= Gx(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned}$$

El sistema es completamente observable si todo estado inicial se puede determinar de la observación de la salida durante un número finito de intervalos de muestreo.

- La condición necesaria y suficiente para la observabilidad es:

$$\text{Rango}\left\{\left[\begin{array}{ccccccc} C^* & \vdots & G^*C^* & \vdots & \cdots & \vdots & (G^*)^{n-1}C^* \end{array}\right]\right\} = n$$

Controlabilidad y observabilidad: propiedades

Un sistema con función de transferencia G(s) será controlable y observable si no presenta cancelaciones de polos y ceros en la función de transferencia. En caso de presentar cancelaciones se perderá una o las dos propiedades.

Sea un sistema LTI cuya matriz de controlabilidad es *M* y la de observabilidad es *N*. Si se define una transformación como con:

$$\begin{aligned} \widehat{G} &= P^{-1}GP \\ \widehat{H} &= P^{-1}H \\ \widehat{C} &= CP \end{aligned}$$

siendo *P* una matriz invertible, entonces las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema equivalente tienen el mismo rango que *M* y *N*.

Esquema del tema

Obtención de la FCC

- Considérese el sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

y una matriz de transformación *T=MW* con

$$M = \left[\begin{array}{ccccccc} H & \vdots & GH & \vdots & \cdots & \vdots & G^{n-1}H \end{array} \right] \quad W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|zI - G| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

entonces el sistema

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{G}\hat{x}(k) + \hat{H}u(k) \\ y(k) &= \hat{C}x(k) + \hat{D}u(k) \end{aligned}$$

con

$$\hat{G} = T^{-1}GT, \; \hat{H} = T^{-1}H, \; \hat{C} = CT, \; \hat{D} = D$$

está en **Forma Canónica Controlable**.

Obtención de la FCO

- Usando la transfomación:

$$Q = (WN^*)^{-1}$$

donde

$$N = \left[\begin{array}{ccccccc} C^* & \vdots & G^*C^* & \vdots & \cdots & \vdots & (G^*)^{n-1}C^* \end{array}\right]$$

entonces el sistema

$$\begin{aligned} \widehat{x}(k+1) &= \widehat{G}\widehat{x}(k) + \widehat{H}u(k) \\ y(k) &= \widehat{C}x(k) + \widehat{D}u(k) \end{aligned}$$

con

$$\widehat{G} = Q^{-1}GQ,\ \widehat{H} = Q^{-1}H,\ \widehat{C} = CQ,\ \widehat{D} = D$$

está en **Forma Canónica Observable**.

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

6.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 6.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 6.7.3. Observabilidad.

6.8. Principio de dualidad.

6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

6.11. Funciones de Matlab útiles.

Descomposición en parte controlable y no controlable

- Un sistema no controlable puede tener parte de sus estados que sean controlables y otros no.
- En un sistema no controlable el rango de la matriz de controlabilidad M_c será $n_1 < n$.
- La idea es hallar una matriz de transformación T no singular que halle una representación equivalente:

Cont.

No Cont.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ 0 & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

Sistema estabilizable: aquel en el que los autovalores (polos) asociados a la parte no controlable son estables.

Descomposición en parte observable y no observable

- En un sistema no observable el rango de la matriz de observabilidad M_o será $n_2 < n$.
- La idea es hallar una matriz de transformación T no singular que halle una representación equivalente:

Observ.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & 0 \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} = \hat{C}_1 \hat{x}_1(k)$$

No Observ.

Sistema detectable: aquel en el que los autovalores (polos) asociados a la parte no observable son estables.

Realizaciones mínimas

- Se llama **realización mínima** de G(z) a aquella realización (G,H,C,D) cuya dimensión del vector de estado sea mínima.
- Una realización mínima sera aquella que contenga sólo la parte controlable y observable.
- Modelar un sistema a partir de su función de transferencia permite conocer sólo la parte observable y controlable.
- Una realización será mínima si y sólo si no hay cancelación de polos y ceros en la función de transferencia.
- El sistema (G,H,C,D) será controlable y observable si y sólo si el denominador de su función de transferencia tiene el orden de la dimensión del vector de estado.

Esquema del tema

6.1. Representación de sistemas discretos en el espacio de estados.

6.2. Obtención de la representación en espacio de estados de sistemas discretos.

6.3. Relación entre la representación en espacio de estados y la función de transferencia.

6.4. No unicidad de la representación en espacio de estados de un sistema.

6.5. Resolución de las ecuaciones del espacio de estados.

6.6. Discretización de las ecuaciones de estado continuas.

6.7. Controlabilidad y observabilidad.

- 6.7.1. Controlabilidad del estado completo.
- 6.7.2. Controlabilidad de la salida.
- 6.7.3. Observabilidad.

6.8. Principio de dualidad.

6.9. Transformación de un sistemas en formas canónicas.

- 6.9.1. Obtención de la forma canónica controlable.
- 6.9.2. Obtención de la forma canónica observable.

6.10. Descomposición de un sistema en parte controlable/observable y no controlable/no observable. Realizaciones mínimas.

6.11. Funciones de Matlab útiles.

Funciones de Matlab útiles

- **SYS = ss(A,B,C,D,Ts):** Define un sistema en espacio de estados con tiempo de muestreo **Ts**.
- **[A,B,C,D] = tf2ss(NUM,DEN):** Obtiene la representacion en espacio de estados a partir de la función de transferencia.
- **[NUM,DEN] = ss2tf(A,B,C,D,iu):** Obtiene la función de transferencia desde la entrada **iu** hasta la salida de un sistema en espacio de estados.
- **SYS = ss2ss(SYS,P):** Transformación de semejanza.
- **expm(A*T):** Matriz exponencial (procedimiento numérico).
- **[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0):** Simulación de la salida y el estado de sistemas lineales (continuos o discretos).
- **[y,x] = dstep(A,B,C,D,IU):** Simulación de la salida y estado de sistemas lineales discretos ante un escalón en la entrada **IU.**
- **[y,t,x] = initial(SYS,X0):** Respuesta libre del sistema a partir del estado inicial X0.
- **[Y,T,X] = impulse(SYS):** Respuesta impulsional del sistema al aplicarse impulso en cada una de las entradas.

Funciones de Matlab útiles

- **eig(G):** Devuelve los autovalores de G.
- **rank(G):** Rango de G.
- **poly(G):** Polinomio característico de G.
- **polyvalm(P,G):** Evalua el polinomio matricial de coeficientes P con la matriz G.
- **ctrb(G,H) o ctrb(sys):** Devuelve la matriz de controlabilidad.
- **ctrbf(G,H,C):** Devuelve la descomposición en parte controlable y no controlable.
- **obsv(G,C) o obsv(sys):** Devuelve la matriz de observabilidad.
- **obsvf(G,H,C):** Devuelve la descomposición en parte observable y no observable.
- **canon(sys,'companion'):** Devuelve la FCO.
- **transp(canon(sys,'companion')):** Devuelve la FCC.