IPVS – Universität Stuttgart
Abteilung Scientific Computing
Prof. Dirk Pflüger
Stefan Zimmer

WS 2021/22

Statistische & Stochastische Grundlagen der Informatik
Übungsblatt 1

Abgabe (Aufgaben 1.2, 1.4–1.7) in Dreiergruppen bis Montag 01.11., 14:00
Von den 15 möglichen Punkten müssen Sie wenigstens 7 erreichen.
Besprechung in den Übungen 03.11.–12.11.

Aufgaben zur Einstimmung

Die Aufgaben dieses Abschnitts kann man gut schon vor der ersten Vorlesung erledigen, für die braucht man noch kein spezielles Wissen – und sie sind, denke ich, eine gute Einstimmung.
Wenn wir für ein Zufallsexperiment wissen wollen, was da im Mittel rauskommt, uns aber nicht in Wahrscheinlichkeitsrechnungen stürzen wollen, können wir das Experiment im Rechner nachbauen, es sehr oft durchführen lassen und zählen. Die in diesen Aufgaben gefragten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte werden wir auch noch direkt ausrechnen – aber auch dann ist die Simulation ein nützliches Hilfsmittel, z.B., um die errechnete Lösung zu kontrollieren.
Und man kann diese Aufgaben auch nutzen, um Python zu lernen – um Zufallszahlen zu erzeugen, dürfte aus der Python-Standardbibliothek das Modul `random` hilfreich sein, hier speziell z.B. `random.randrange`.

1.1 Betrunkene Seeleute (keine Abgabe)

An einem Abend torkeln n betrunkene Seeleute in ihre Unterkunft. Unfähig, ihr eigenes Bett zu identifizieren, aber noch in der Lage, ein belegtes Bett zu vermeiden, legt sich jeder zufällig in eins der n Betten, so dass in jedem Bett genau eine Person liegt.
Nun zählen wir, wie viele Seeleute im richtigen Bett liegen (dass jemand zufällig das eigene Bett trifft, ist ja nicht ausgeschlossen).
Simulieren sie diesen Abend (das Heimkommen, nicht das Trinken)!
Lassen Sie die Seeleute sehr oft heimkommen und zählen Sie (d.h. lassen Sie Ihr Programm zählen), wie viele Seeleute im Mittel im richtigen Bett liegen. Probieren Sie das für verschiedene Werte von n aus.

1.2 Sammelbilder (4 Punkte)

In der guten alten Zeit (die im Sinne dieser Aufgabe 2014 endete) lagen vor einer Fußball-EM oder WM jedem Schokoriegel einer bestimmte Marke eins von n Bildern unserer Nationalspieler bei (bei der WM 2014 war $n = 63$; wir gehen davon aus, dass der Hersteller fair war, so dass die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Bild in einem bestimmten Schokoriegel immer $1/n$ ist).

Der Hersteller hätte gerne, dass Sie so lange seine Schokoriegel essen (zumindest kaufen und dabei nicht versuchen, durch das Papier hindurch das Foto zu identifizieren), bis Sie eine komplette Sammlung von n verschiedenen Bildern zusammen haben.

Auch hier sollen Sie wieder simulieren: Lassen Sie sehr viele Leute Sammlungen anlegen (jeder für sich: ohne zu tauschen) und protokollieren Sie, wie viele Schokoriegel dabei verbraucht werden. Außer der mittleren Gesamtzahl pro Sammlung sind auch für $0 \leq i < n$ die Zahl von Schokoriegeln interessant, die man im Mittel braucht, um seine Sammlung von i auf $i + 1$ verschiedene Bilder zu erweitern. Geben Sie bitte für $n = 10$ und hinreichend viele Wiederholungen eine Tabelle mit diesen Ergebnissen ab und eine Näherung für die Zahl der Schokoriegel, die man für eine komplette Sammlung mit $n = 63$ braucht.

Zusatzfrage: Wenn Sie sich die Tabelle für $n = 10$ anschauen: Können Sie eine Gesetzmäßigkeit entdecken?

1.3 Fußballsimulator (keine Abgabe)

Ein einfaches Modell für ein Fußballspiel zwischen zwei gleich starken Mannschaften (nach H.-H. Dubben, H.-P. Beck-Bornholdt, *Der Hund, der Eier legt*) geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, das jeweils nächste Tor zu schießen, für beide Mannschaften immer gleich groß ist (jaja, ein recht grobes Modell, aber für unsere Zwecke reicht's).

Schreiben Sie einen Simulator, der als Parameter die Anzahl n der im Spiel insgesamt geschossenen Tore bekommt und als Ergebnis die Zahl der Tore der Heimmannschaft liefert.

Für $n = 4$ könnte er z.B. folgenden Spielverlauf auswürfeln:

$0 : 0 \rightarrow 0 : 1 \rightarrow 1 : 1 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 3 : 1$, das Ergebnis wäre also 3.

Lassen Sie nun beide Mannschaften 10^6 mal mit $n = 8$ gegeneinander spielen und bestimmen Sie die Häufigkeit, mit der die Heimmannschaft $3 : 5$ verliert (obwohl ja beide Mannschaften gleich stark sind).

Aufgaben zur KW 43 (ab 25.10.)

1.4 Ikosaeder werfen (3 Punkte)

Ein Ikosaeder, dessen Flächen von 1 bis 20 numeriert sind, wird *zweimal* geworfen.

a) Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment an.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse $A, \dots, E$ an:

- A: Bei dem **ersten** Wurf wird eine 6 gewürfelt
- B: Bei **beiden** Würfen wird eine 6 gewürfelt
- C: Bei **mindestens einem** der Würfe wird eine 6 gewürfelt
- D: Bei **genau einem** der Würfe wird eine 6 gewürfelt
- E: Die **Augensumme** aus beiden Würfen ist kleiner oder gleich vier.

1.5 Betrunkene Seeleute: Verteilung (3 Punkte)

Drei betrunkene Seeleute kommen nach Hause und verhalten sich so, wie wir das aus Aufgabe 1.1 kennen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Zahl der Seeleute, die dabei im richtigen Bett zu liegen kommen.
Zeichnen Sie (solange nicht explizit anders verlangt, kann „zeichnen“ von Hand oder mit dem Rechner passieren, ganz wie Sie wollen) die Verteilung als Stabdiagramm und die Verteilungsfunktion F^X von X.

1.6 Auswahlkommission (2 Punkte)

Eine dreiköpfige Kommission soll aus Vorschlägen $1, \dots, n$ einen auswählen. Dazu wählt jeder der drei für sich einen der n Vorschläge aus, das beschreiben wir durch einen Grundraum aus Tripeln von drei Zahlen zwischen 1 und n. Wenn zwei Kommissionsmitglieder denselben Vorschlag ausgewählt haben, ist der angenommen. Da die Kommissionsmitglieder keinerlei Ahnung von der Materie haben, wählen sie blindlings aus: Jedes Ergebnis aus dem Grundraum ist gleich wahrscheinlich.

a) Wie viele Ergebnisse (in Abhängigkeit von n) enthalten die folgenden Ereignisse?

(i) „Kommissionsmitglied 1 wählt Vorschlag 1 aus“

(ii) „Kommissionsmitglieder 1 und 2 wählen Vorschlag 1 aus“

(iii) „Alle drei Kommissionsmitglieder wählen Vorschlag 1 aus“

b) Wie viele Ergebnisse enthält das Ereignis „Vorschlag 1 wird angenommen (d.h., von mindestens zwei Kommissionsmitgliedern ausgewählt)“? Wie groß ist seine Wahrscheinlichkeit?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer der n Vorschlägen angenommen wird? Geben Sie außer dem Ausdruck in n auch noch die speziellen Werte für $n = 3$ und $n = 100$ an.

1.7 Mensaessen (3 Punkte)

Die Mensa bietet heute die Essen a, b und c an. Aus Erfahrung weiß ich, dass eine Portion jedes der drei Essen eine von zwei verschiedenen Qualitätsstufen haben kann; auf meiner Qualitätsskala von 0 (extrem schlecht) bis 8 (extrem gut) gilt Folgendes:

- a schmeckt mir entweder 4 oder 6,
- b schmeckt mir entweder 3 oder 5,
- c schmeckt mir entweder 2 oder 7.

a) Geben Sie einen passenden Grundraum Ω an und drei Zufallsvariablen A, B, C, die die Qualität des jeweiligen Essens beschreiben.

b) Über die Wahrscheinlichkeiten der Qualität weiß ich (ausgedrückt in den Zufallsvariablen aus a)) folgendes:

- $\mathbb{P}(A = 6) = 0.1$
- $\mathbb{P}(B = 5) = 0.5$
- $\mathbb{P}(C = 7) = 0.4$
- Die Qualität der verschiedenen Essen ist unabhängig voneinander; das Thema Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird in der Vorlesung noch ausführlicher behandelt, hier müssen wir nur wissen, dass dann für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}(\{A = \alpha\} \cap \{B = \beta\} \cap \{C = \gamma\}) = \mathbb{P}(A = \alpha) \cdot \mathbb{P}(B = \beta) \cdot \mathbb{P}(C = \gamma)$$

Berechnen Sie damit die Elementarwahrscheinlichkeiten für die Elemente Ihres Grundraums.

c) Die Qualitätsstufe merkt man leider erst beim Essen, so dass wir uns bei der Auswahl auf die Wahrscheinlichkeiten stützen müssen.

Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten

(i) $\mathbb{P}(A > B)$ („A ist besser als B“), $\mathbb{P}(A > C)$ und $\mathbb{P}(B > C)$

(ii) $\mathbb{P}(A = \max\{A, B, C\})$ („A ist das beste Essen“), $\mathbb{P}(B = \max\{A, B, C\})$ und $\mathbb{P}(C = \max\{A, B, C\})$.

d) Wenn das Essen mittlerweile nicht kalt geworden ist, können wir nun einen Algorithmus angeben, nach dem wir das Essen auswählen. Die Strategie soll dabei sein, immer das Essen zu nehmen, bei dem die Wahrscheinlichkeit, unter allen angebotenen Essen das beste zu sein, maximal ist.

Geben Sie das Ergebnis dieser Strategie an sowohl für den Fall, dass alle drei Essen angeboten werden, als auch für den Fall, dass eines der Essen aus ist und nur noch zwischen den beiden anderen ausgewählt werden kann.