

Funções hiperbólicas
directas e
inversas

C. Funções hiperbólicas directas

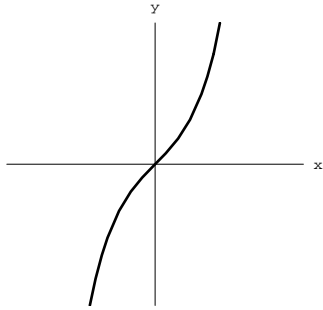
Vamos agora introduzir as funções *hiperbólicas*, apresentar algumas das suas propriedades e esboçar os seus gráficos.

C1. Seno hiperbólico

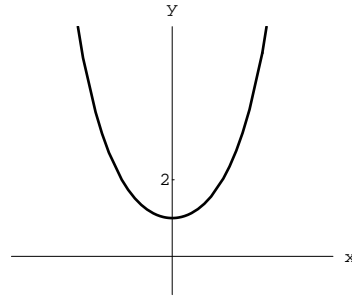
O *seno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x = -\infty$.



$$y = \text{sh } x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{CD}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$$



$$y = \text{ch } x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{CD}_{\text{ch}} = [1, +\infty[$$

C2. Cosseno hiperbólico

O *cosseno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injectiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\text{ch } 0 = 1$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch } x = +\infty$.

C3. Tangente hiperbólica

A *tangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}, \end{aligned} \quad (21)$$

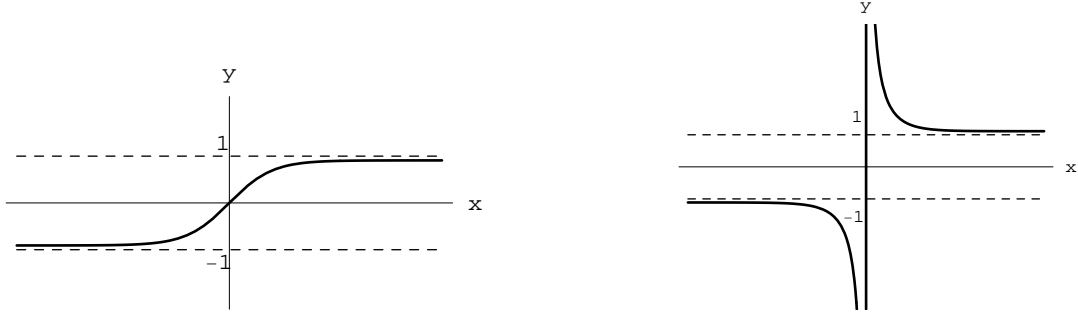
ou seja, por

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1, \quad (23)$$

pelo que o gráfico da th possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$. Da imparidade da th , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda $\operatorname{CD}_{\operatorname{th}} =]-1, 1[$.



$$y = \operatorname{th} x, x \in \mathbb{R}, \operatorname{CD}_{\operatorname{th}} =]-1, 1[$$

$$y = \operatorname{coth} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \operatorname{CD}_{\operatorname{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

C4. Cotangente hiperbólica

A *cotangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned} \operatorname{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \end{aligned} \quad (24)$$

ou seja, por

$$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (25)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injectiva. Da definição (25), sai que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{coth} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{coth} x = 1, \quad (26)$$

pelo que o gráfico da coth possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$, e uma assíntota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda $\operatorname{CD}_{\operatorname{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

C5. Algumas propriedades

A partir das definições (19), (20), (22) e (25) das funções hiperbólicas, com manipulações algébricas simples, é fácil verificar que estas funções verificam as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \quad \text{ch } x + \text{sh } x = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \quad \text{sh}(-x) = -\text{sh } x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(iv) \quad \text{ch}(-x) = \text{ch } x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(v) \quad \text{th}^2 x + \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(vi) \quad \text{coth}^2 x - \frac{1}{\text{sh}^2 x} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(vii) \quad \text{sh}(x+y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$(viii) \quad \text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$(vii) \quad \text{sh}(x-y) = \text{sh } x \text{ ch } y - \text{ch } x \text{ sh } y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$(viii) \quad \text{ch}(x-y) = \text{ch } x \text{ ch } y - \text{sh } x \text{ sh } y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

De facto

(i) Seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer. Então

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1. \end{aligned}$$

(viii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então

$$\begin{aligned} \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \text{ch}(x+y). \end{aligned}$$

As restantes alíneas demonstram-se de maneira semelhante. ■

C6. Derivadas das funções hiperbólicas

Quanto às derivadas das funções hiperbólicas, basta aplicar as regras usuais de derivação, podendo construir-se a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas directas

As derivadas das funções hiperbólicas directas são

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, & x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, & x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{coth}' x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{array}{ll} (\operatorname{sh} u)' = u' \operatorname{ch} u & (\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh} u \\ (\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} & (\operatorname{coth} u)' = \frac{-u'}{\operatorname{sh}^2 u} \end{array}$$

D. Funções hiperbólicas inversas

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. Como vimos na subsecção C, as funções sh , th e coth são injectivas, enquanto que a função ch não é injectiva e, portanto, não será invertível. Para esta última, iremos considerar uma restrição apropriada.

D1. Argumento do seno hiperbólico

A função sh definida em (19) é contínua, bijectiva e possui inversa contínua. Trata-se da função *argumento do seno hiperbólico*, que se define por

$$\begin{array}{ll} \operatorname{argsh} : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \operatorname{argsh} y, \end{array} \quad (27)$$

onde

$$x = \operatorname{argsh} y, \quad y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Mas, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh} x & \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ & \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

A última condição em (29) traduz uma equação do segundo grau na incógnita e^x . Tratando-a com a fórmula resolvente, sai

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

sendo a solução com o sinal + a única admissível, uma vez que

$$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y - \sqrt{y^2 + 1} < 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

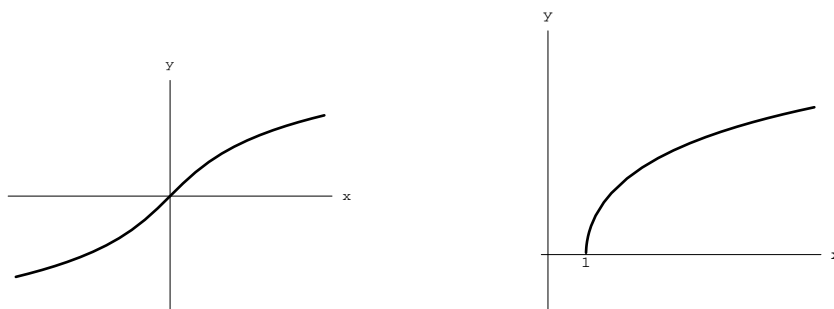
Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right),$$

donde

$$\operatorname{argsh} y = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

As expressões (27) e (30) definem completamente a função argsh .



$$y = \operatorname{argsh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{CD}_{\operatorname{argsh}} = \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{arch} x, \quad x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{CD}_{\operatorname{arch}} = [0, +\infty[$$

D2. Argumento do cosseno hiperbólico

A função ch definida por (20) não é injectiva, logo, não é invertível. Como tal, definiremos a inversa da seguinte restrição bijectiva e contínua

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} : \quad [0, +\infty[&\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto \operatorname{ch} x, \end{aligned} \quad (31)$$

que se designa por *argumento do cosseno hiperbólico* e que é também uma função contínua. Representa-se por

$$\begin{aligned} \operatorname{argch} : \quad [1, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ y &\longmapsto \operatorname{argch} y, \end{aligned} \quad (32)$$

onde

$$x = \operatorname{argch} y, \quad y \in [1, +\infty[\iff y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, +\infty[. \quad (33)$$

Mas, para $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch} x &\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\iff y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

A última igualdade de (34) traduz uma equação do segundo grau em e^x , donde

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Como $x \geq 0 \implies e^x \geq 1$, a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal $-$ corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$). Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 1 \iff x = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad x \geq 0, \quad y \geq 1,$$

donde

$$\text{argch } y = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad y \in [1, +\infty[. \quad (35)$$

A função argumento do cosseno hiperbólico fica completamente definida por (32) e (35).

D3. Argumento da tangente hiperbólica

A função tangente-hiperbólica definida em (21) é injectiva mas não é sobrejectiva. Para poder inverter, basta considerar

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow]-1, 1[\\ x &\longmapsto \text{th}, \end{aligned} \quad (36)$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. Sendo contínua num intervalo, a sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da tangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{aligned} \text{argth} :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \text{argth } y, \end{aligned} \quad (37)$$

onde

$$x = \text{argth } y, \quad y \in]-1, 1[\iff y = \text{th } x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

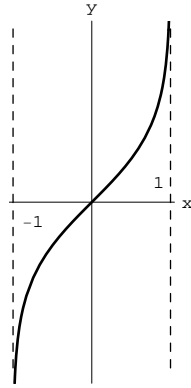
Para $x \in \mathbb{R}$, $y \in]-1, 1[$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \text{th } x &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &\iff e^{2x} (1 - y) = 1 + y \iff x = \log \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right), \end{aligned}$$

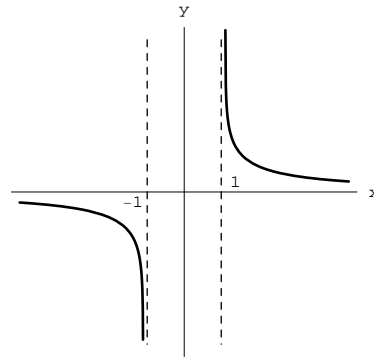
donde

$$\text{argth } y = \log \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right), \quad y \in]-1, 1[, \quad (39)$$

completando-se a definição do argumento da tangente hiperbólica com (37) e (39).



$$y = \operatorname{argth} x, x \in]-1, 1[, \\ \operatorname{CD}_{\operatorname{argth}} = \mathbb{R}$$



$$y = \operatorname{argcoth} x, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \\ \operatorname{CD}_{\operatorname{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

D4. Argumento da cotangente hiperbólica

A função cotangente-hiperbólica definida em (24) é injectiva mas não é sobrejectiva. Consideremos então

$$\begin{aligned} \coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \\ x &\longmapsto \coth x \end{aligned} \quad (40)$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. A sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da cotangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{aligned} \operatorname{argcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y &\longmapsto \operatorname{argcoth} y \end{aligned} \quad (41)$$

onde

$$x = \operatorname{argcoth} y, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \iff y = \coth x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (42)$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tem-se

$$y = \coth x \iff x = \log \left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \right),$$

pelo que

$$\operatorname{argcoth} y = \log \left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \right), y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \quad (43)$$

ficando assim completa a definição da função argumento da cotangente hiperbólica, através das expressões (41) e (43).

D5. Derivadas das funções hiperbólicas inversas

Para obter as derivadas das funções hiperbólicas inversas, basta aplicar as regras usuais de derivação às expressões (30), (35), (39) e (43) obtidas para estas funções. Podemos construir a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas inversas

As derivadas das funções hiperbólicas inversas são

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R} & \operatorname{argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in]1, +\infty[\\ \operatorname{argth}' x &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in]-1, 1[& \operatorname{argcoth}' x &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\end{aligned}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{aligned}(\operatorname{argsh} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} & (\operatorname{argch} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ (\operatorname{argth} u)' &= \frac{u'}{1 - u^2} & (\operatorname{argcoth} u)' &= \frac{u'}{1 - u^2}\end{aligned}$$