Cálculo

Ficha 8 — 2011/2012

Aplicações do integral definido:

áreas em coordenadas polares, comprimentos de arcos de curvas,
áreas e volumes de sólidos de revolução

1. Use coordenadas polares para determinar a área da região

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \;\; \wedge \;\; x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

2. Determine a área da região que é simultaneamente interior à circunferência $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$ e à lemniscata $\rho^2 = \sin 2\theta$.

3. Seja $\mathcal{A}$ a região limitada pelas curvas de equação $y = \cosh x$ e $y = \cosh 2$. Determine a medida da área de $\mathcal{A}$ e o comprimento do arco de curva que contorna $\mathcal{A}$.

4. Calcule o comprimento do arco de curva definido na alínea seguinte:

a) $y = \arcsin e^{-x}$, para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$;

b) $y = \sqrt{1-x^2}$, para $0 \leq x \leq 1$;

c) $y = \ln(\cos x)$, para $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Determine o volume do sólido que se obtém pela rotação em torno de OX da região limitada pelas curvas:

a) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 1$;

b) $y = x$ e $x = 4y - y^2$.

6. Calcule o integral que permite calcular a área das superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno de OX das seguintes curvas:

(a) $y = x^3, \quad x \in [0,1]$;

(b) $y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$.

7. Indique o integral que permite calcular a área das superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno de OX das seguintes curvas:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{\frac{3}{2}},\; 0 \leq x \leq 1\}$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x},\; 1 \leq x \leq 4\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cos x, \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\}$.

Soluções:

1. $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$ **2.** $\dfrac{\pi}{8}$ **3.** $4\operatorname{ch}2-2\operatorname{sh}2; 4+2\operatorname{sh}2$

4.
a) $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)-\ln\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\ln\left|\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|-\ln\left|\dfrac{2}{\sqrt{2}}+1\right|$

5.
a) $\dfrac{3\pi}{10}$ b) $\dfrac{81\pi}{6}$

6.
a) $\dfrac{10\sqrt{10}}{27}-\dfrac{1}{27}$ b) $4\pi r^2$

7.
a) $2\pi\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx$ b) $2\pi\displaystyle\int_1^4\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2}dx$
c) $2\pi\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$