Cálculo I

Teste 2 | 16 Janeiro 2009

Licenciatura em Estatística Aplicada

Instruções:

- Os cálculos efectuados para obtenção dos resultados têm de ser **obrigatoriamente apresentados em folha de exame**.
- Pode consultar os formulários da disciplina.

Grupo I (4 valores)

Relativamente às questões seguintes, indique se são verdadeiras ou falsas, **justificando adequadamente**.

1.(*Cotação: 1.0 valores cada alínea*)

a) Considere $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se} \quad 0 \le x < 2 \\ \sqrt[3]{3-x} & \text{se} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$. Então $\int_0^3 f(x)\ dx = 16$.

b) Efectuando a mudança de variável $x = 3\operatorname{tg} t$ conclui-se que $\int_0^3 \sqrt{9+x^2}dx = 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt$.

c) A função $f(x) = \int_0^x (t\,e^t - e\,t)dt$ é estritamente crescente em R.

d) O comprimento do arco de curva definido por $f(x) = \operatorname{ch} x + 1$, para $0 \le x \le 1$, é $\dfrac{e^2-1}{2e}$

Grupo II (16 valores)

2. (*Cotação: a) 1.5 valores b) 2.5 valores*)

Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln 3x \; dx$

b) $\displaystyle\int_{\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$. (substituição aconselhada: $x = 3\cos t$)

3. (*Cotação: a) 1.5 valores b) 2.5 valores*)

Considere a região plana $D = \{(x, y) \in R^2 : y \leq 4 - x^2, y \geq -3x, y \geq 3x\}$.

a) Represente, geometricamente, a região D.

b) Determine a medida da área de D.

4. (*Cotação: a) 2.0 valores b) 2.0 valores*)

a) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno de OX da região plana limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$, para $-1 \leq x \leq 1$.

b) Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação em torno do eixo OX da curva $y = \sqrt{12x}$ para $0 \leq x \leq 3$.

5. (*Cotação: a) 2.0 valores b) 2.0 valores valores*)

a) Classifique o integral impróprio $\int_{-1}^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2}{1+x^3} dx$ e estude a sua natureza.

b) Calcule a área da região situada abaixo da curva $y = e^x$, acima da recta $y = 0$ e à esquerda da recta $x = 1$.