CÁLCULO

FICHA 7 2011/2012

Derivação do integral

1. Calcule a derivada da função $\int_1^{\ln x} \sin(u + e^u)\ du$, com $x > 0$.

2. Determine uma função contínua f e uma constante k tal que, para todo o $x \in IR$, se verifique:

$$\int_k^x f(t)\ dt = \sin x + \frac{1}{2}.$$

3. Calcule a derivada da função $\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\ dt$, para $x > 0$;

4. Determine uma função contínua f tal que

$$\int_0^{x^2} f(t)\ dt = x^3 e^x - x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Estude a monotonia da função $f(x) = \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt$.

6. Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição

$$\int_0^x f(t)\ dt = \frac{4}{3} + 3x^2 + \sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Calcule $f(\frac{\pi}{2})$ e $f'(\frac{\pi}{4})$.

7. Seja f uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2} dt.$$

Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$ e $P''(0) = f''(0)$.

Áreas planas

8. Em cada alínea, determine a medida da área da região limitada pelas curvas cujas equações são dadas:

(a) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4;$

(b) $x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x;$

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

(d) $y = 0, \quad x = -\ln 2, \quad x = \ln 2, \quad y = \sinh x.$

(e) $y \leq -|x|, \quad y \geq -4 \quad x \leq 2;$

9. Indique como recorreria ao cálculo integral para determinar a área de cada uma das seguintes regiões:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \;\text{ e }\; 0 \leq y \leq x\};$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\};$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \;\text{ e }\; y \geq x^2 - 4x + 3 \;\text{ e }\; y \leq -x^2 + 5x - 4\}.$

10. Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ e pela recta tangente no ponto de abcissa $x = 1$.

Soluções:

1. $(\int_1^{\ln x} \sin(u + e^u)\, du)' = \dfrac{1}{x} \sin(\ln x + x).$

2. $f(x) = \cos x$, para todo $x \in R$; $k = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi \;\vee\; k = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in N$.

3. $(\int_1^x \dfrac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\, dt)' = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$, para $x > 0$.

4. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}xe^{\sqrt{x}} - 2x$, para todo $x \in R$.

5. f é monotona crescente para todo $x \in R$.

6. $f(x) = 6x + 2\cos(2x) - \sin(2x)$ para todo $x \in R$. Assim, $f(\frac{\pi}{2}) = 3\pi - 2$ e $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$.

7. $P(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$.

8. a)$\frac{13}{6}$; b)$2\sqrt{2} - 2$; c)πab; d)$\frac{1}{2}$; e)

9.

a)$area = \displaystyle\int_0^2 x\, dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2}\, dx$

b)$area = \displaystyle\int_{-1}^0 (2 + 2x)\, dx + \int_0^1 (2 - 2x)\, dx$

c)$area = \displaystyle\int_1^3 [(-x^2 + 5x - 4) - (x^2 - 4x + 3)]\, dx$

10.

$area = \displaystyle\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\, dx = \frac{11}{2}$