Cálculo

Ficha 10A — 2011/2012

1. Verifique quais das seguintes séries são geométricas e, se possível, calcule a sua soma:

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots;$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+1)};$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n + 3^n}{6^n}.$

2. Determine a soma das seguintes séries de Mengoli:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n};$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$

3. Estude a natureza das séries numéricas com os seguintes termos gerais:

(a) $\dfrac{n}{n+1};$ (b) $\sin\dfrac{n^2\pi}{2}.$

4. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n (\frac{n}{n+1})^n$

5. Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos. Mostre que:

(a) a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (1 + u_n)$ diverge;

(b) se $(u_n)_n$ é decrescente então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n + u_n}$ diverge;

(c) se $\lim\limits_{n} (n\, u_n) = +\infty$ então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge;

(d) se $\lim\limits_{n} (n^2\, u_n) = 0$ então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Soluções:

1.

(a) Série divergente (teste para a divergência)

(b) Série geométrica convergente: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+1)} = \frac{81}{241}$

(c) Série convergente, é soma de duas séries geométricas convergentes: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$

2.
(a) $\dfrac{3}{4}$ (b) $\dfrac{1}{4}$

3.
(a) Série divergente (Teste para a divergência)
(b) Série divergente (Teste para a divergência)

4.
(a) Série divergente (2^o Critério da Comparação)
(b) Série divergente (1^o Critério da Comparação)
(c) Série convergente (Critério da razão)
(d) Série divergente (Critério da raíz)