

Cálculo Integral

Integral de Riemann

Definição, Propriedades

Teorema fundamental do cálculo

Métodos de integração

Aplicações geométricas do integral

Integral impróprio

Na primeira parte deste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann, estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações. Na segunda parte estudaremos os integrais impróprios.

1 Introdução e motivação

Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Nós vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sejam

$$m = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (67)$$

Suponhamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, e consideremos a região plana (*cf.* a Figura 1)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (68)$$

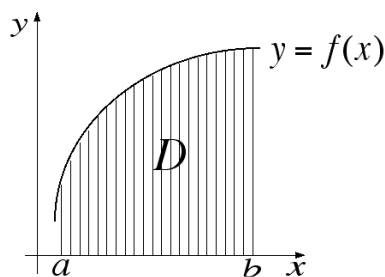


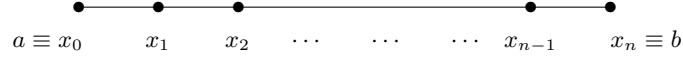
Figura 1: Região \mathcal{D} limitada pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Suponhamos que pretendemos determinar o valor da área da região \mathcal{D} . Em geral, a forma geométrica de \mathcal{D} é pouco “regular”, pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis. Podemos pensar então em aproximar a área de \mathcal{D} pela área de figuras simples, compostas por regiões rectangulares justapostas.

Estratégia

1. Começamos por decompor o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos, determinados pelos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$



A uma tal decomposição iremos chamar *partição* \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$.

2. Em cada subintervalo genérico, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, fixamos arbitrariamente um ponto, digamos

$$y_1 \in [x_0, x_1], \quad y_2 \in [x_1, x_2], \quad y_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad y_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

e consideramos o correspondente valor de f ,

$$f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_{n-1}), f(y_n).$$

3. Aproximamos a área da porção \mathcal{D}_k da região \mathcal{D} que assenta no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, Figura 2, à esquerda, pela área da região rectangular \mathcal{R}_k de base $x_k - x_{k-1}$ e altura $f(y_k)$, Figura 2, à direita,

$$\text{área } \mathcal{D}_k \simeq f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

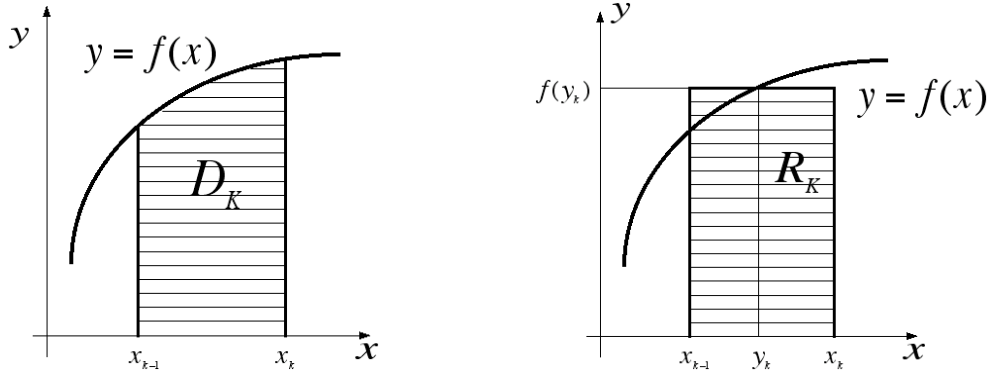


Figura 2: Aproximação da área de \mathcal{D}_k pela área de uma região rectangular.

Para a região completa \mathcal{D} tomamos a aproximação (Figura 3)

$$\begin{aligned} \text{área } \mathcal{D} &\simeq \text{área } \mathcal{R}_1 + \text{área } \mathcal{R}_2 + \dots + \text{área } \mathcal{R}_n \\ &\simeq f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(y_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

ou seja, abreviando a notação,

$$\text{área } \mathcal{D} \simeq \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (69)$$

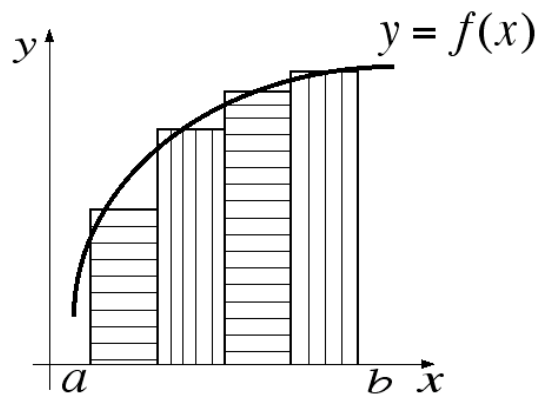


Figura 3: Aproximação da área de \mathcal{D} pela área de uma região poligonal

4. É intuitivo que:

- (a) a aproximação obtida na expressão (69) será tanto melhor quanto maior for o número de pontos considerados para a decomposição do intervalo $[a, b]$;
- (b) a aproximação *ótima* seria obtida com um número infinitamente grande de pontos, ou seja, com subintervalos de amplitude infinitamente pequena.

5. Obtemos então uma definição para a área de \mathcal{D} através da passagem ao limite na expressão (69), tomando

$$\text{área } \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (70)$$

Vamos passar agora à exposição rigorosa deste assunto, formalizando adequadamente as ideias intuitivas que acabamos de expor. A área da região \mathcal{D} vai dar lugar ao *integral de f em $[a, b]$* e cada quantidade introduzida na expressão (69) para aproximar a área de \mathcal{D} vai dar lugar a uma *soma de Riemann*.

2 Definição de integral

Nesta secção apresentaremos a definição de integral segundo Riemann, para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, não necessariamente contínua nem necessariamente positiva.

Dada uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$, chamamos *amplitude* de \mathcal{P} à maior das amplitudes dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$,

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\},$$

pelo que, considerar o número de subintervalos a tender para $+\infty$, equivale a considerar $\|\mathcal{P}\|$ a tender para 0.

Fixando arbitrariamente pontos $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, definimos uma soma de Riemann da função f em $[a, b]$, para a partição \mathcal{P} considerada, por

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (71)$$

Dizemos que a função f é integrável em $[a, b]$ e que o correspondente integral é igual a \mathcal{I} quando, independentemente da partição \mathcal{P} e da escolha dos pontos y_k , se tiver

$$\mathcal{I} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (72)$$

Ao número \mathcal{I} chamamos o *integral de f em $[a, b]$* e representámo-lo por

$$\int_a^b f(x) dx,$$

onde f é a *função integranda*, a é o *limite inferior do integral*, b é o *limite superior do integral*, $[a, b]$ é o *intervalo de integração* e x é a *variável de integração*. O símbolo dx representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

Exemplo 1

Seja $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, com c uma constante e x em certo intervalo $[a, b]$.

Dada uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ em subintervalos J_1, J_2, \dots, J_n teremos, independentemente da escolha dos pontos y_k ,

$$f(y_k) = c, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}) &= c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + \dots + c(x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a) \end{aligned}$$

Então f é integrável em $[a, b]$, tendo-se $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$. ■

Exemplo 2

Seja $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ para todo x em certo intervalo $[a, b]$.

Independentemente da partição \mathcal{P} de $[a, b]$, podemos escolher cada um dos pontos y_k em \mathbb{Q} ou em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, uma vez que todo o intervalo não degenerado de \mathbb{R} contém racionais e irracionais. Se os escolhermos todos em \mathbb{Q} , resulta

$$g(y_k) = 1, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

e pelo que vimos no Exemplo 1, vem

$$\sum_{k=1}^n g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

De modo perfeitamente análogo, se escolhermos todos os y_k em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, resulta

$$g(y_k) = 0, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\sum_{k=1}^n g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Consequentemente, não existe o limite das somas de Riemann para esta função, no sentido exposto anteriormente, e g não é integrável em intervalo algum. ■

Observação 1

Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável. Veja-se o Exemplo 2. Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis. ■

A definição que apresentámos anteriormente para função integrável e para integral de uma função, e que usámos nos Exemplos 1 e 2, é muito complexa para a generalidade das funções, por ser difícil estudar a existência do limite das somas de Riemann para uma partição qualquer do intervalo e para uma escolha arbitrária de pontos y_k . O nosso objectivo será agora o de enunciar resultados que nos ajudem a decidir sobre a integrabilidade de uma função e o de apresentar processos eficazes para o cálculo do integral. Começemos com as principais propriedades do integral.

3 Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar, sem demonstrar, algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis.

Propriedade 1 [Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]

Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$. Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (73)$$

■

No sentido de estender a Propriedade 1 a todos os reais a, b, c , adoptamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}, \quad (74a)$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}. \quad (74b)$$

Propriedade 2 [Linearidade do integral]

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Então:

- (a) a soma $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \quad (75)$$

- (b) o produto fg é integrável em $[a, b]$; em particular, se α é uma constante real arbitrária, o produto αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad (76)$$

■

Propriedade 3

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Se $|g(x)| \geq k > 0, \forall x \in [a, b]$, então a função $1/g$ é limitada e o quociente f/g é integrável. ■

Propriedade 4 [Monotonia do integral]

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx; \quad (77)$$

em particular, se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Propriedade 5

Se f é integrável em $[a, b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (78)$$

Propriedade 6

- (a) Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = 0; \quad (79a)$$

- (b) se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (79b)$$

4 Caracterização das funções integráveis

Vamos agora enunciar, sem demonstrar, alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis (Teoremas 1, 2 e 3).

Teorema 1 [Integrabilidade das funções contínuas]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 3

As funções

$$x^k, x \in \mathbb{R}, \quad e^x, x \in \mathbb{R}, \quad \sin x, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R},$$

são integráveis em qualquer intervalo $[a, b]$ por serem funções contínuas. ■

Observação 2

O Teorema 1 estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter, desde já, que existem funções descontínuas que são integráveis. ■

Teorema 2 [Integrabilidade das funções monótonas]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 4

A função $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$ definida em $[0, 1]$, possui um número

infinito de descontinuidades - todos os pontos da forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, são pontos de descontinuidade de f . No entanto, f é integrável por ser monótona. ■

Observação 3

Do Teorema 2, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então ela é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o facto de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis. ■

Teorema 3 [Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada possuindo um número finito de descontinuidades então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 5

A função

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

é integrável em $[0, 4]$ porque possui apenas duas descontinuidades, em $x = 1$ e em $x = 2$.

Também a função

$$h(x) = \begin{cases} e^{\sin x} & \text{se } x \neq \pi \\ -1 & \text{se } x = \pi \end{cases}$$

é integrável em $[0, 9]$ porque possui apenas uma descontinuidade em $x = \pi$. ■

Observação 4

Mostra-se ainda que, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f constitui um conjunto numerável¹ então f é integrável em $[a, b]$. ■

5 O Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada na Secção 2.

Consideremos uma função contínua, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, logo integrável. Para cada $x \in [a, b]$, f é integrável em $[a, x]$, pelo que podemos definir uma nova função, $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, por passagem ao integral, pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (80)$$

A função F acabada de definir possui uma característica importante, relacionada com a função inicial f .

Teorema 4 [Teorema Fundamental do Cálculo, parte I]

A função $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão (80) é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (81)$$

■

A partir da expressão (81), podemos concluir que a função f é uma primitiva de F , pelo que vale o seguinte resultado.

¹Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se numerável se existir uma bijecção $\psi: A \rightarrow \mathbb{N}$, significando que *A possui tantos elementos como o conjunto* \mathbb{N} . Alguns exemplos de conjuntos numeráveis são \mathbb{Z} e \mathbb{Q} e de conjuntos não numeráveis são \mathbb{R} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Corolário 1

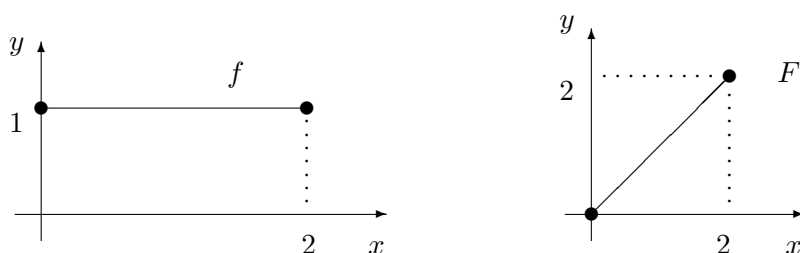
Toda a função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui primitiva em $[a, b]$. ■

De facto, basta pensar na correspondente função F obtida como em (80), por integração da função f desde a até x .

Observação 5

Quando f não é contínua, mantendo-se integrável, podemos definir uma função F como em (80). Acontece, porém, que F pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com f nos pontos de descontinuidade de f (Exemplos 6, 7 e 8).

Exemplo 6

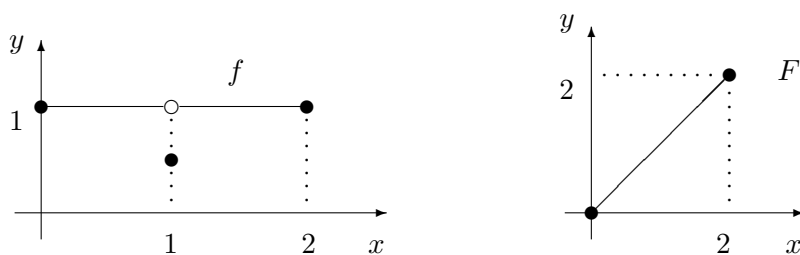


f é contínua, logo integrável (Teorema 1) e primitivável (Teorema 4).

Define-se a função F , que é derivável. Além disso,

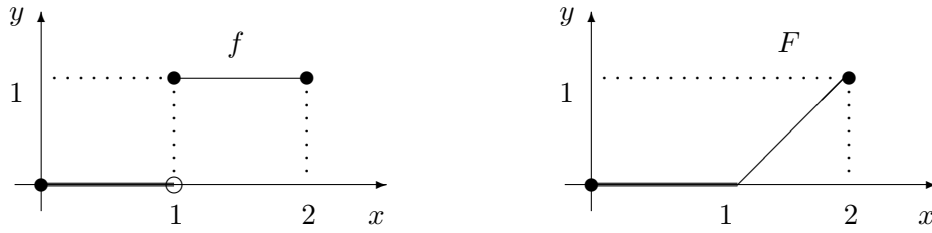
$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1 \, dt = x, \quad \forall x \in [0, 2].$$
 ■

Exemplo 7



f é limitada com uma descontinuidade em 1, logo é integrável (Teorema 3). No entanto, f não é primitivável (isto é, f não é a derivada de função alguma em $[0, 2]$). Mesmo assim, a integrabilidade de f em $[0, 2]$ é suficiente para que se possa definir a função F , como em (80). Como a função f deste Exemplo 7 difere da função f do Exemplo 6 apenas no ponto 1, os integrais das duas são iguais (Propriedade 6), pelo que $F(x) = x, \forall x \in [0, 2]$. Além disso, F é obviamente derivável, com $F'(x) = 1, \forall x \in [0, 2]$. Acontece, porém, que a derivada de F em 1 difere de $f(1)$. ■

Exemplo 8



f é limitada e possui uma descontinuidade no ponto 1. Logo f é integrável (Teorema 3) mas não é primitivável. Define-se novamente a função F , como em (80), e vem

$$x \in [0, 1[\implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0 \, dt = 0,$$

$$x \in [1, 2] \implies f(x) = 1 \implies F(x) = \int_1^x 1 \, dt = x - 1.$$

A função f é contínua mas não é derivável em 1. ■

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema 4 é a que se apresenta a seguir.

Teorema 5 [Teorema Fundamental do Cálculo, Fórmula de Barrow]

Sejam $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e G uma primitiva de f em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a). \quad (82)$$

■

Demonstração

Pondo $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, tem-se $F(b) = \int_a^b f(t) \, dt$.

Atendendo a que F e G são duas primitivas de f em $[a, b]$, tem-se

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b], \quad C \text{ constante.}$$

Em particular, para $x = a$, vem

$$G(a) = F(a) + C \implies C = G(a),$$

pelo que

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad x \in [a, b].$$

Para $x = b$, vem

$$G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$$

ficando, assim, justificada a igualdade (82). ■

Notação

Para traduzir a identidade (82), usamos a notação $\int_a^b f(t) \, dt = \left[G(x) \right]_a^b$.

O Teorema 5 fornece um processo extremamente útil para o cálculo do integral de uma função contínua num intervalo. Quando a função integranda não é contínua, conjugamos o Teorema 5 com as propriedades enunciadas na Secção 3, para calcular o integral por intermédio de uma primitiva da função integranda em cada intervalo de continuidade.

Exemplo 9

$$(a) \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

$$(b) \int_{-5}^3 |x| \, dx = \int_{-5}^0 (-x) \, dx + \int_0^3 x \, dx = -\frac{1}{2} [x^2]_{-5}^0 + \frac{1}{2} [x^2]_0^3 = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 7.$$

$$(c) \int_0^5 \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^5 = \frac{1}{2} (\log 26 - \log 1) = \log \sqrt{26}.$$

$$(d) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 3 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases} \text{ então } \int_0^2 f(x) \, dx \stackrel{\text{Prop. 6(b)}}{=} \int_0^1 1 \, dx + \int_1^2 3 \, dx \\ = [x]_0^1 + [3x]_1^2 = (1-0) + (6-3) = 4.$$

$$(e) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ x-3 & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases} \text{ então, novamente pela Propriedade 6 (b), vem}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) \, dx &= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^3 2 \, dx + \int_3^6 (x-3) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [2x]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^6 = \frac{1}{3} + (6-2) + \left(0 + \frac{9}{2} \right) = \frac{53}{6}. \end{aligned}$$

6 Resultados clássicos do cálculo do integral

Do teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, saem algumas consequências que passamos a apresentar.

A - Derivação sob o sinal de integral

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função F definida como em (80) é derivável e será também derivável a composta $F \circ \varphi$, com $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função derivável qualquer. Por um lado, pela regra de derivação de funções compostas, vem

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x),$$

e pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, sai que

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (83a)$$

Por outro lado, da definição (80) para F , sai também que

$$(F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x)) = \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt,$$

pelo que

$$(F \circ \varphi)'(x) = \left(\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' \quad (83b)$$

Das expressões (83a-b), resulta

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = f(\varphi(x)) \varphi'(x), \quad (84)$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com limite superior que é função da variável. Mais em geral, sendo $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ funções deriváveis, partindo de

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = \int_a^{\psi(x)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$$

e usando o resultado da fórmula (84), vem

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (85)$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com os dois limites de integração que são função da variável.

Exemplo 10

Estudemos a monotonia da função definida por

$$H(x) = x^2 \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$H'(x) = 2x \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + 3x^4 e^{-x^6}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que se anula apenas para $x = 0$, já que $3x^4 e^{-x^6} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e que

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies 2x > 0 \wedge \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt > 0 \implies H'(x) > 0, \\ x < 0 &\implies 2x < 0 \wedge \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt < 0 \implies H'(x) > 0. \end{aligned}$$

Logo H é monótona crescente. ■

B - Fórmula do valor médio para integrais

Novamente, dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, podemos definir

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

e por ser

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

da monotonia do integral, sai que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx,$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Consequentemente, ter-se-á

$$\int_a^b f(x) \, dx = \alpha(b-a), \quad \text{com} \quad \alpha \in [m, M].$$

Sendo contínua em $[a, b]$, a função f toma todos os valores desde m até M , existindo $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$, valendo o seguinte resultado.

Teorema 6 [do valor médio para integrais]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(c). \quad (86)$$

■

Com base no Teorema 6, define-se usualmente o *valor médio* da função f por

$$\tilde{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (87)$$

Exemplo 11

O valor médio da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$ é dado por

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

■

C - Integração por partes

Consideremos agora $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com f contínua, F uma sua primitiva e g possuindo derivada contínua. Então fg é integrável e conjugando a fórmula de Barrow expressa pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 5, com o método de primitivação por partes, sai que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[F(x)g(x) - P\left(F(x)g'(x)\right) \right]_a^b$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx. \quad (88)$$

Exemplo 12

$$(a) \int_0^2 xe^x dx = \left[e^x x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \left[e^x \right]_0^2 = e^2 + 1.$$

$$(b) \int_1^e \log \sqrt{x} dx = \left[x \log \sqrt{x} \right]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left[x \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

$$(c) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \left[\ln(1+x^4) \right]_0^1 \\ = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2. \quad \blacksquare$$

C - Integração por substituição

Para calcular o integral $\int_a^b f(x) dx$ de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos conjugar a fórmula de Barrow, Teorema 5, com o método de primitivação por substituição, passando da variável x a uma nova variável, digamos t , através da mudança de variável $x = g(t)$. Já sabemos como uma tal mudança altera a função a primitivar, que passará de $f(x)$ para $f(g(t))g'(t)$. Mas é de esperar que o intervalo de integração tenha que ser adaptado à nova variável t . Para isso, devemos procurar saber em que intervalo irá variar t , se temos x a variar em $[a, b]$ e fazemos $x = g(t)$. Ou seja, devemos procurar pontos α e β tais que

$$a = g(\alpha) \quad \text{e} \quad b = g(\beta).$$

Para uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, e para uma substituição definida através de uma função $g: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ possuindo derivada contínua e tal que $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$, o resultado é o seguinte

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt. \quad (89)$$

A expressão (89) dá a fórmula de substituição no integral, para uma mudança de variável definida por $x = g(t)$.

Observação 6

No integral do segundo membro da expressão (89), os limites de integração α e β são quaisquer números reais tais que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, ainda que haja várias escolhas possíveis. Cf. o Exemplo 13. ■

Exemplo 13

(a) Calculemos $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, efectuando a mudança de variável $x = \sin t$.

Pondo $g(t) = \sin t$, vem $g'(t) = \cos t$. Quanto aos limites de integração, temos

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 0 \end{cases} \implies \sin t = 0 \implies t = t_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 1 \end{cases} \implies \sin t = 1 \implies t = t_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A escolha mais simples parece ser $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$, resultando

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A título de ilustração, faça-se outra escolha, por exemplo, $t_1 = 2\pi$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Viria

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt$$

Mas $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ e $\cos t$ não tem sinal constante em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, pelo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

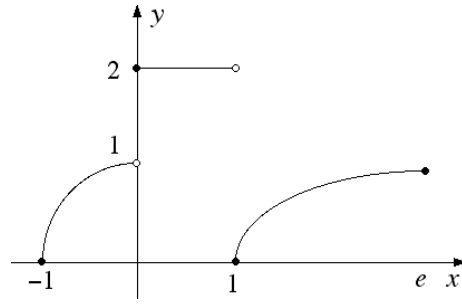
(b) Calculemos agora $\int_1^2 x \sqrt{x-1} dx$, efectuando a mudança de variável $x-1 = t^2$.

Pondo $g(t) = t^2 + 1$, vem $g'(t) = 2t$. Atendendo a que $g(0) = 1$ e $g(1) = 2$, resulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx &= \int_0^1 (1+t^2) \sqrt{t^2} 2t dt = 2 \int_0^1 (t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{2}{3} [t^3]_0^1 + \frac{2}{5} [t^5]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(c) Calculemos $\int_{-1}^e f(x) dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \log x & \text{se } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$



Recorrendo à Propriedade 6 (b), vem

$$\int_{-1}^e f(x) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 2 dx + \int_1^e \log x dx,$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo, $x = \sin t$, o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes. Resulta $\int_{-1}^e f(x) dx = \frac{\pi}{4} + 2 + 1$. ■

Exemplo 14

Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Vejamos que:

(a) se f é par então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

(b) se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(a) Sendo f par, tem-se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$, e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(b) Sendo f ímpar, tem-se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$, e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

■

7 Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano limitado, o comprimento de um arco de curva entre dois pontos, o volume de um sólido de revolução, e a área de uma superfície de revolução.

7.1 Área de um domínio plano

Vamos retomar o problema que serviu de motivação à definição de integral (Secção 1). No caso em que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, dissemos que a área do domínio limitado pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$, representado na Figura 1 da Secção 1, é dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Daqui extraem-se as seguintes consequências.

(a) Se $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, então, por simetria em relação a OX , a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq 0\}$$

coincide com a área de um novo domínio plano, digamos \mathcal{D}^* , obtido de \mathcal{D} por simetria em relação ao eixo OX , ou seja

$$\mathcal{D}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

donde

$$\text{área}(\mathcal{D}) = - \int_a^b f(x) dx. \quad (90)$$

(b) Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $0 \leq g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, então, a área da região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

pode ser dada por $\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}_1) - \text{área}(\mathcal{D}_2)$, onde \mathcal{D}_1 é a região plana sob o gráfico de f e \mathcal{D}_2 é a região plana sob o gráfico de g . Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

ou seja

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (91)$$

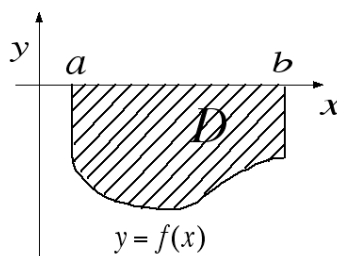


Figura 4: Região limitada pelo gráfico de uma função negativa, pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

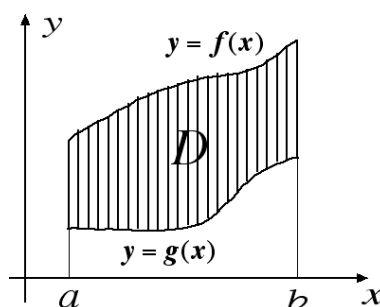


Figura 5: Região limitada pelos gráficos de duas funções positivas e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

(c) Consideremos agora uma região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

onde f e g são duas funções contínuas, não necessariamente positivas, tais que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Por translação segundo um vector vertical orientado no sentido positivo de OY , a região \mathcal{D} seria transportada para o semiplano superior (positivo), obtendo-se uma região \mathcal{D}^* geometricamente igual a \mathcal{D} , limitada por $y = f(x) + k$, $y = g(x) + k$, com k uma constante positiva tal que $k > |\min_{x \in [a, b]} f(x)|$.

A área da região \mathcal{D} seria então dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}^*) = \int_a^b [f(x) + k - (g(x) + k)] dx,$$

ou seja novamente por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

(d) Mais em geral, se os gráficos das funções f e g se intersectam num ponto de abscissa c e invertem a posição relativa, a área da região \mathcal{D} limitada pelos gráficos de f e de g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ pode ser calculada como a soma de duas áreas, a da região entre $x = a$ e $x = c$ e a da região entre $x = c$ e $x = b$. Pelo que vimos em (b), resulta

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{D}) &= \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \\ &+ \int_c^b [g(x) - f(x)] dx. \end{aligned} \quad (92)$$

Exemplo 15

(a) A área da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, que se intersectam para $x = -1$ e $x = 1$, é dada por (caso (b))

$$\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

(b) A área da região limitada pelas curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$ é dada por (caso (d))

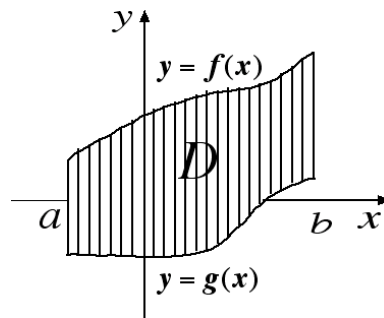


Figura 6: Região limitada pelos gráficos de duas funções quaisquer, e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

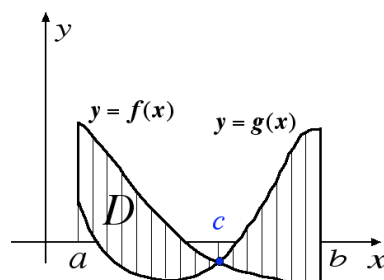
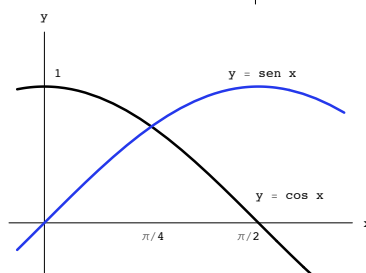
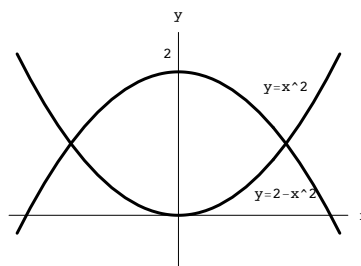


Figura 7: Região limitada pelos gráficos de f e de g , quando estes se intersectam, e ainda pelas rectas $x = a$ e $x = b$.



$$\begin{aligned}
\text{área } \mathcal{D} &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\
&= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

■

7.2 Comprimento de um arco de curva

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função possuindo derivada contínua. Designemos por \mathcal{C} o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, representado na Figura 8, imagem da esquerda. Vamos atribuir significado ao comprimento do arco \mathcal{C} , recorrendo à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, vamos considerar uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Sejam P_0, P_1, \dots, P_n os pontos correspondentes sobre a curva \mathcal{C} e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada à direita na Figura 8, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

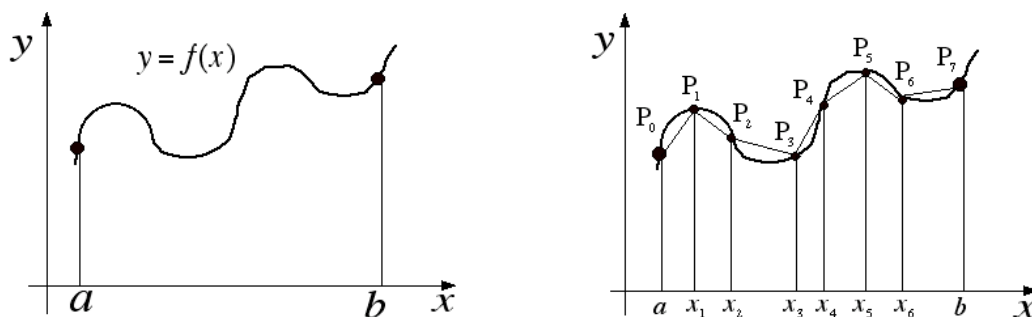


Figura 8: Arco de curva \mathcal{C} (à esquerda) e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ (à direita).

Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco \mathcal{C} . Então, por definição, temos

$$\text{comp } \mathcal{C} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{comp } L_{\mathcal{P}}. \quad (93)$$

Mas o comprimento da linha poligonal é a soma dos comprimentos dos vários segmentos de recta que a constituem, ou seja

$$\text{comp } L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n},$$

sendo o comprimento de cada segmento $P_{i-1}P_i$ dado pela distância entre $P_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$ e $P_i = (x_i, y_i)$, ou seja por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

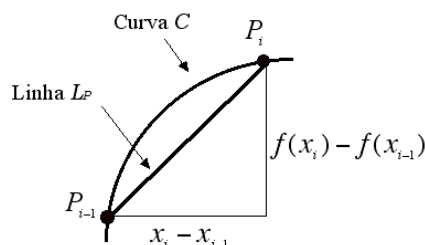


Figura 9: Ampliação de uma porção do arco \mathcal{C} e da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

ou ainda por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2}.$$

O quociente que figura no radical do segundo membro dá o declive do segmento de recta $P_{i-1}P_i$ e, portanto, dá também o declive de uma recta r paralela ao segmento e tangente à curva \mathcal{C} . Como f é derivável (teorema do valor médio de Lagrange), tal declive pode ser expresso como a derivada de f em algum ponto $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$, e vem

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}), \quad (94)$$

onde, no segundo membro, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função integrável $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (94), vem (cf. as equações (71) e (72))

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (95)$$

e tendo em conta a definição (93), sai

$$\text{comp}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (96)$$

Exemplo 16

(a) O comprimento do arco de curva $y = \text{ch } x$, entre os pontos de abcissa $x = -1$ e $x = 2$ é dado por

$$\text{comp}(C) = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^2 \text{ch } x dx = [\text{sh } x]_{-1}^2 = \text{sh } 2 + \text{sh } 1.$$

(b) O comprimento do arco de curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = 8$ é dado por

$$\text{comp}(C) = \int_1^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_1^8 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} [(1+x)^{3/2}]_1^8 = 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

■

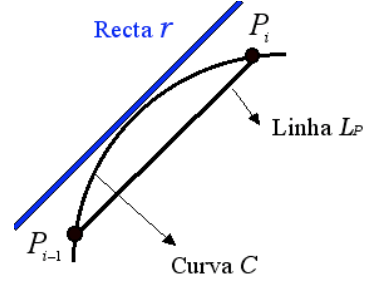
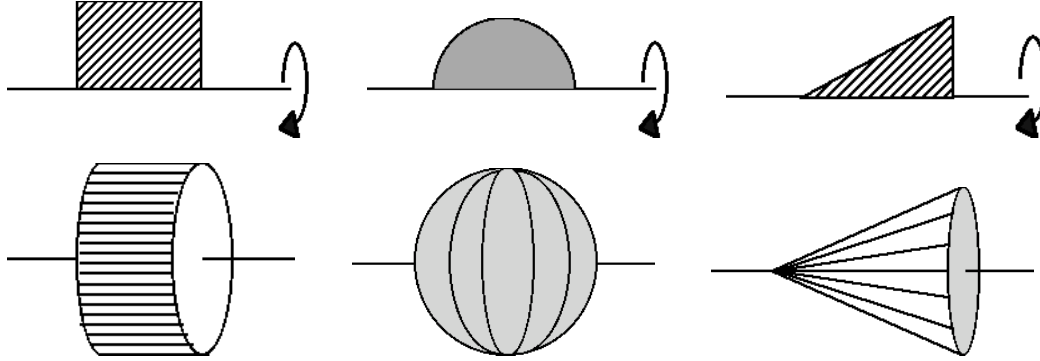


Figura 10: Recta r tangente a \mathcal{C} e paralela ao segmento $P_{i-1}P_i$.

7.3 Volume de um sólido de revolução

Quando uma região plana roda em torno de uma recta r do mesmo plano, obtém-se um sólido dito de revolução. Assim, um cilindro pode ser obtido pela rotação de uma região rectangular, uma esfera pode ser obtida pela rotação de um semi-círculo, e um cone pode ser obtido pela rotação de uma região triangular.



Nesta secção, estamos interessados nos sólidos de revolução \mathcal{S} gerados pela rotação em torno do eixo OX de uma região plana \mathcal{D} limitada pelo gráfico de uma função contínua, pelo eixo OX e por duas rectas verticais, $x = a$ e $x = b$. Mais concretamente vamos obter uma expressão para o cálculo do volume do sólido \mathcal{S} , recorrendo novamente à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, consideramos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ fixamos arbitrariamente um ponto c_i .

Tomamos a região poligonal $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ definida pelas n regiões rectangulares de altura $f(c_i)$ que se erguem sobre os vários subintervalos. Observamos que, quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ da partição tende para zero, a região poligonal $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o domínio \mathcal{D} e o sólido $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ gerado por $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, à direita na Figura 11, tende a confundir-se com o sólido \mathcal{S} gerado por \mathcal{D} , à esquerda na Figura 11. Então, por definição, temos

$$\text{vol } \mathcal{S} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{vol } \mathcal{S}_{\mathcal{P}}. \quad (97)$$

Reparando (Figura 10) que cada rectângulo elementar R_i gera um cilindro “achatado” S_i (Figura 11, à direita) com volume

$$\text{vol}(S_i) = \pi \left(f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1}),$$

obtemos

$$\text{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \pi \left(f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1}). \quad (98)$$

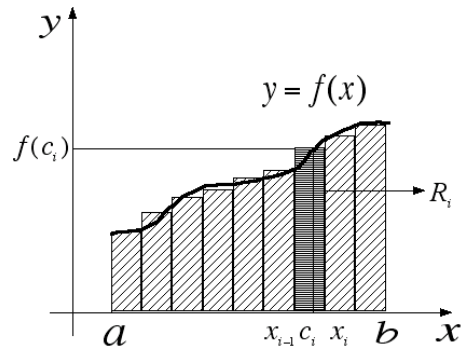


Figura 11: Soma de Riemann para o volume de um sólido de rotação.

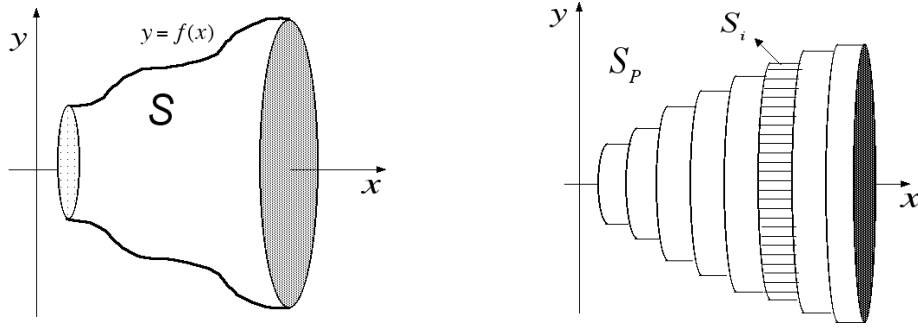


Figura 12: Sólido \mathcal{S} de volume a definir e sólido \mathcal{S}_P cujo volume aproxima o de \mathcal{S} .

No segundo membro da equação (98) temos novamente uma soma de Riemann, desta vez para a função $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \pi(f(x))^2$, que é integrável. Logo, tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (98), vem

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{vol}(\mathcal{S}_P) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx, \quad (99)$$

e da definição (97), sai

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx. \quad (100)$$

Exemplo 17

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 + 1\}$$

é dado por

$$\text{vol } \mathcal{S} = \int_{-1}^1 \pi(x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right).$$

■

Exemplo 18

A fórmula para o volume de uma esfera \mathcal{S} de raio r pode ser obtida pensando na esfera como o sólido gerado pela rotação em torno de OX do semi-círculo superior

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y \geq 0\}.$$

Atendendo à simetria da esfera, podemos considerar apenas a rotação do quarto de círculo situado no primeiro quadrante. Vem

$$\text{vol } \mathcal{S} = 2 \int_0^r \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi r^2 [x]_0^r - \frac{2\pi}{3} [x^3]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

À semelhança do que fizemos na Subsecção 7.1 em relação ao conceito de área, podemos obter fórmulas mais gerais para o cálculo do volume de sólidos de revolução. Por exemplo, no caso em que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, o

volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{S}) &= \int_a^b \pi f^2(x) dx - \int_a^b \pi g^2(x) dx \\ &= \int_a^b \pi [f^2(x) - g^2(x)] dx. \end{aligned}$$

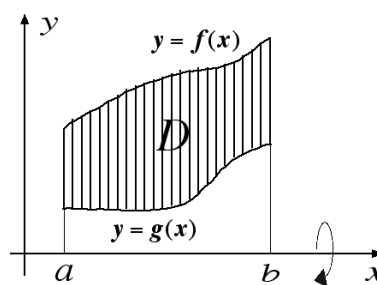


Figura 13: Sólido gerado pela rotação em torno de OX da região \mathcal{D} .

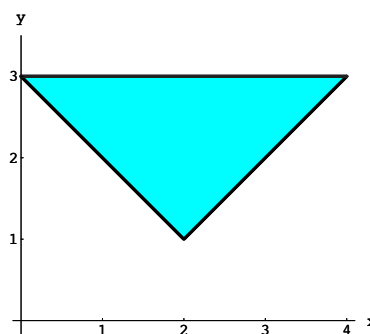
Exemplo 19

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + 1 \leq y \leq 3\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria)

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= 2 \int_0^2 \pi (3^2 - (-x + 3)^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (-x^2 + 6x) dx = \frac{56\pi}{3}. \end{aligned}$$

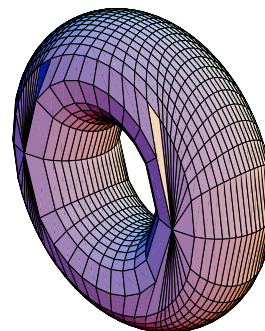


Exemplo 20 [Volume de um toro]

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 1\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria em relação à recta $x = 4$)



$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= 2\pi \int_4^5 \left[(4 + \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 - (4 - \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 \right] dx \\ &= 32\pi \int_4^5 \sqrt{1 - (x - 4)^2} dx \quad [\text{substituição } x - 4 = \sin t] \\ &= 32\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 32\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 16\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 16\pi \left([t]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\pi/2} \right) = 8\pi^2. \end{aligned}$$

7.4 Área de uma superfície de revolução

Quando um arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, roda em torno do eixo OX , obtém-se uma superfície de revolução. Vamos recorrer à definição de integral em termos das somas de Riemann para obter uma fórmula para o cálculo da área de tal superfície.

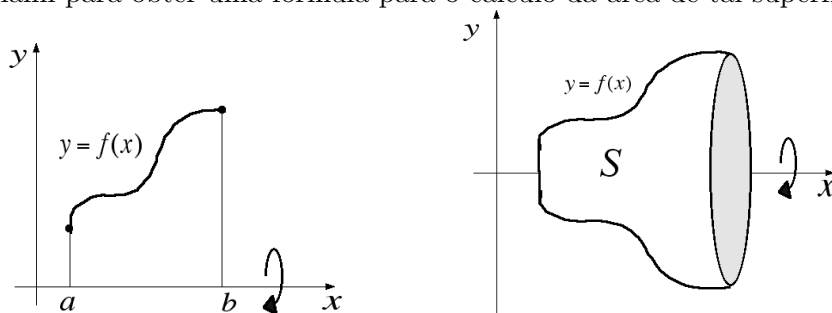


Figura 14: Arco de curva \mathcal{C} (à esquerda) e superfície S de revolução (à direita).

Para tal, consideramos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Sejam P_0, P_1, \dots, P_n os correspondentes pontos sobre a curva \mathcal{C} e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada na Figura 15, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a curva \mathcal{C} e a superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a superfície S gerada por \mathcal{C} . Então pomos

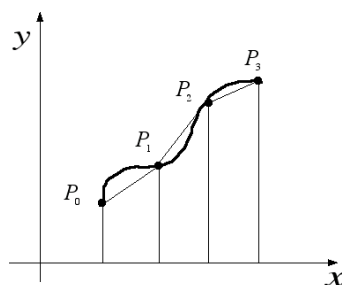


Figura 15: Partição do intervalo $[a, b]$ e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

$$\text{área } S = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{área } S_{\mathcal{P}}. \quad (101)$$

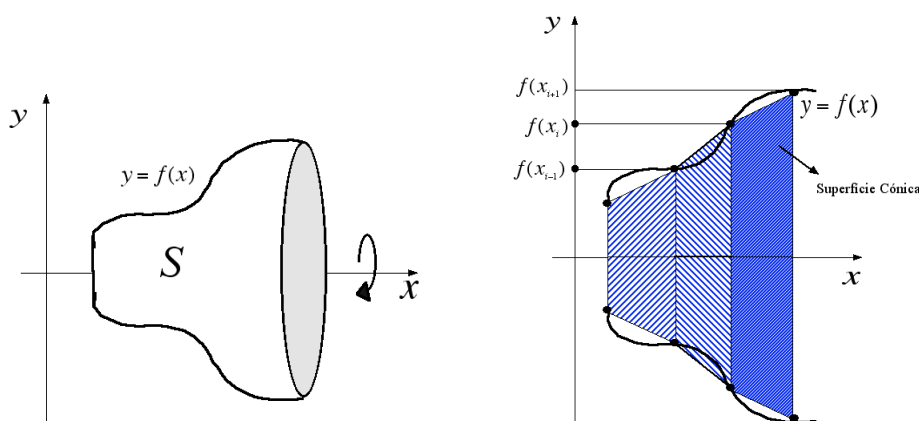


Figura 16: Superfície S gerada por \mathcal{C} e superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por $L_{\mathcal{P}}$.

Mas cada segmento de recta “inclinado” gera um tronco de superfície cónica C_i (Figura 16, à direita), com área lateral

$$\text{área}(C_i) = 2\pi \overline{P_{i-1}P_i} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

uma vez que a área da superfície lateral de um tronco de cone (Figura 17, direita) é dada por $2\pi g(r + R)/2$.

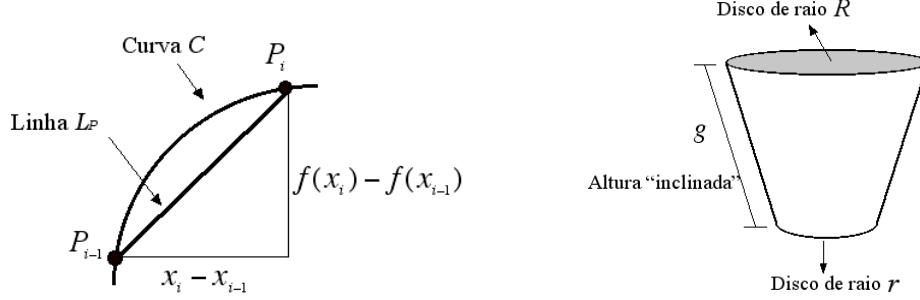


Figura 17: Tronco de cone (à direita) e pormenor da curva que gera a superfície S (à esquerda).

Mas (Figura 17, esquerda)

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

e como vimos na subsecção 7.3, podemos escrever

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}),$$

para algum $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se agora aproximarmos $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ por $f(y_i)$ vem então

$$\text{área}(C_i) = 2\pi f(y_i) \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Consequentemente, a área da superfície de revolução S_P é dada por

$$\text{área}(S_P) = 2\pi \sum_{i=1}^n f(y_i) \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}). \quad (102)$$

O segundo membro da expressão (102) não é mais do que uma soma de Riemann para a função $k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Como a função k é integrável, tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (102) vem então

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (103)$$

Nos casos mais gerais em que a função f muda de sinal entre a e b , resulta

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (104)$$

Exemplo 21

A área da superfície de revolução S gerada pela rotação em torno de OX do arco de parábola $x = y^2$, para $y \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$, é dada por

$$\begin{aligned}\text{área}(S) &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x} dx \\ &= \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{(1 + 4x)^3} \right]_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.\end{aligned}$$

■

8 Coordenadas polares

Habitualmente identificamos a posição de um ponto P do plano através das suas coordenadas cartesianas, (x, y) , definidas em relação a um referencial ortonormado XOY constituído por uma origem O e por dois eixos ortonormados, OX e OY . Em muitas situações revela-se mais útil introduzir um novo referencial e identificar a posição de um ponto do plano através de um novo sistema de coordenadas. Vamos agora introduzir as chamadas *coordenadas polares*.

8.1 Definição

Consideremos em \mathbb{R}^2 um ponto O , a que chamamos *pólo*, e uma semirecta OX , a que chamamos *eixo polar*. A posição de um ponto P de \mathbb{R}^2 pode ser identificada pela distância de P ao pólo e pelo ângulo entre a direcção de P e o eixo polar. Definimos assim as *coordenadas polares* de $P \neq O$ pelo par (ρ, θ) , com $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, onde

$$\rho = \text{dist}(O, P), \quad \theta = \angle(OX, \overrightarrow{OP}), \quad (105)$$

a que chamamos *raio vector* e *ângulo polar*, respectivamente.

O ângulo é medido no sentido positivo, ou anti-horário, a partir do eixo polar. Para cada ponto $P \neq O$, o par (ρ, θ) assim definido é único e escrevemos $P = (\rho, \theta)$. Por outro lado, o ponto O é identificado por qualquer par $(0, \theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, pelo que as suas coordenadas polares não são únicas.

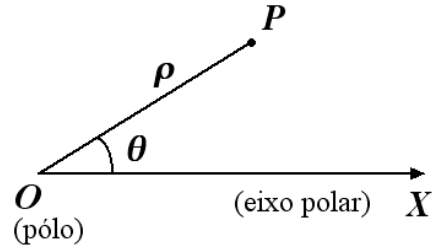


Figura 17: Sistema de coordenadas polares.

Em vez do habitual sistema de eixos graduados, usamos um referencial polar graduado (*cf.* a Figura 18) com uma escala para a distância ρ e outra para o ângulo θ . Assim, em relação aos pontos A , B , C e D representados na Figura 18, teremos

$$A = (3, 0), \quad B = \left(1, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C = \left(3, \frac{5\pi}{6}\right), \quad D = \left(2, -\frac{3\pi}{2}\right).$$

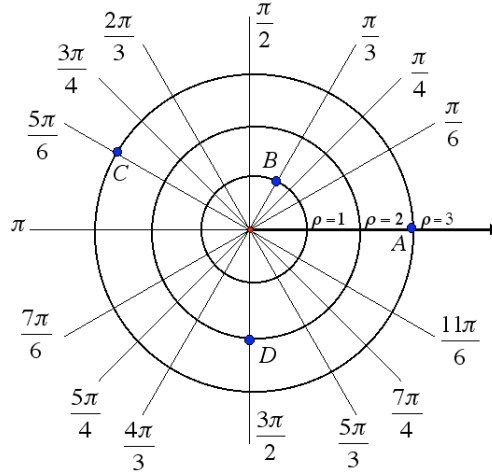
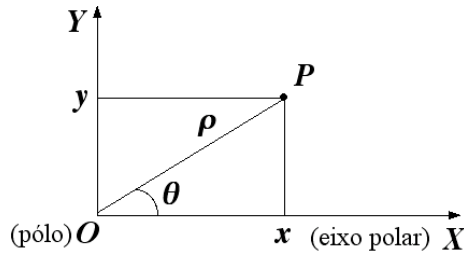


Figura 18: Referencial polar “graduado”.

8.2 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares

Para relacionarmos os dois tipos de coordenadas, consideremos um referencial cartesiano ortonormado, XOY , e um referencial polar com pólo coincidente com O e eixo polar sobre OX^+ .



Dado um ponto P , qualquer, de coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (ρ, θ) , da Figura 19, é fácil reconhecer que se tem

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta, \quad (106)$$

Figura 19: Coordenadas cartesianas e polares. donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (107a)$$

Por outro lado, se $x \neq 0$, tem-se também

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad (107b)$$

e, se $x = 0$, então P está sobre OY , podendo ser

$$(\theta = \pi/2 \text{ se } y > 0) \vee (\theta = 3\pi/2 \text{ se } y < 0) \vee (\theta \in [0, 2\pi[\text{ se } y = 0). \quad (107c)$$

Assim, usaremos as expressões (106) para passar de coordenadas polares a cartesianas, e as expressões (107a) e (107b-c), juntamente com os sinais de x e de y , para passar de coordenadas cartesianas a polares.

Exemplo 22

1. Se as coordenadas cartesianas de certos pontos são dadas por

$$A = (1, 1), \quad B = (-4, -4), \quad C = (0, 2), \quad E = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad F = (-\sqrt{3}, -3),$$

então as correspondentes coordenadas polares são

$$A = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), B = \left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), C = \left(2, \frac{\pi}{2}\right), E = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), F = \left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

2. Reciprocamente, se as coordenadas polares de certos pontos são dadas por

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), B = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right), C = (0, \pi), E = (\sqrt{3}, 0), F = (1, 5).$$

então as correspondentes coordenadas cartesianas são

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), C = (0, 0), E = (\sqrt{3}, 0), F = (\cos 5, \sin 5).$$

■

8.3 Representação polar de curvas

Analisemos agora o problema da representação geométrica de curvas, dadas pelas suas equações polares. Começemos com os casos mais simples.

A) $\rho = r$, com r uma constante positiva.

Trata-se da circunferência de centro O e raio r , tal como decorre da definição (105). Cf. a Figura 20.

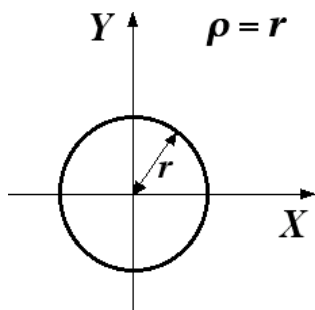


Figura 20: Curva de equação $\rho = r$.

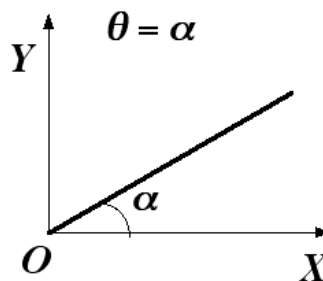


Figura 21: Curva de equação $\theta = \alpha$.

B) $\theta = \alpha$, com α uma constante em $[0, 2\pi[$.

Trata-se da semi-recta de origem em O que faz com OX um ângulo de α radianos, tal como decorre também da definição (105). Cf. a Figura 21.

C1) $\rho = \theta$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

Neste caso, a curva passa pelo pólo e ρ cresce linearmente com θ . Obtém-se a curva representada na Figura 22, que é conhecida por *espiral de Arquimedes*.

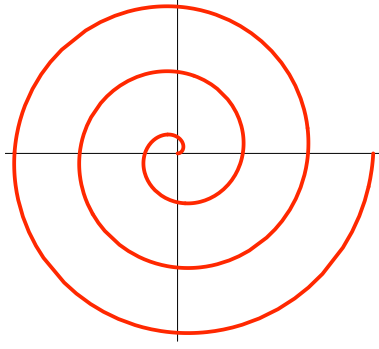


Figura 22: Espiral de Arquimedes, $\rho = \theta$.

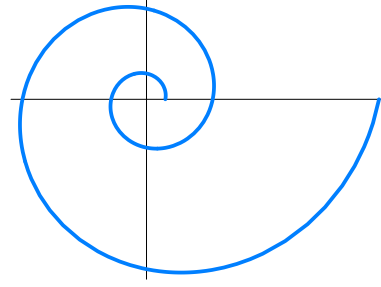


Figura 23: Espiral exponencial, $\rho = e^\theta$.

C2) $\rho = e^\theta$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Além disso, ρ cresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 23, que começa de dentro para fora. Esta curva é conhecida por *espiral exponencial*.

C3) $\rho = e^{-\theta}$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Desta vez, ρ decresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 24, que começa de fora para dentro. Esta curva é conhecida por *espiral logarítmica*.

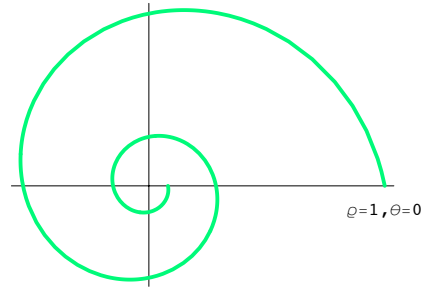


Figura 24: Espiral logarítmica, $\rho = e^{-\theta}$.

D1) $\rho = 1 - \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Como $\cos \theta$ varia entre -1 e 1 , ρ vai variar entre $\rho_{\min} = 0$ (para $\theta = 0$) e $\rho_{\max} = 2$ (para $\theta = \pi$). Obtém-se a curva da Figura 25, conhecida por *cardeóide*.

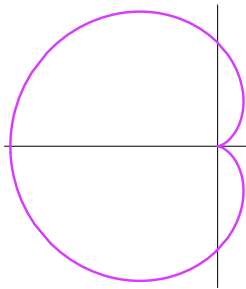


Figura 25: Cardeóide $\rho = 1 - \cos \theta$.

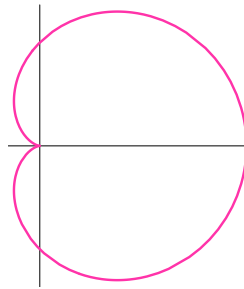


Figura 26: Cardeóide $\rho = 1 + \cos \theta$.

D2) $\rho = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Com uma análise breve, semelhante à efectuada em F1), obtém-se o *cardeóide* da Figura 26.

D3) $\rho = 1 - \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Também agora, com uma análise semelhante à efectuada em F1), btém-se o *cardeóide* da Figura 27.

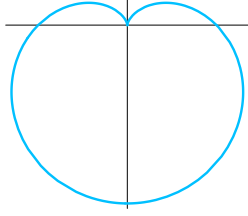


Figura 27: Cardeóide $\rho = 1 - \sin \theta$.

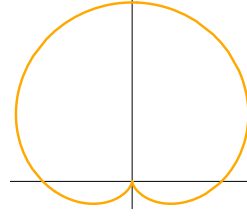


Figura 28: Cardeóide $\rho = 1 + \sin \theta$.

D4) $\rho = 1 + \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Mais uma vez, de maneira semelhante, btém-se o *cardeóide* da Figura 28.

E1) $\rho^2 = \cos 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Observe-se que o intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\cos 2\theta \geq 0$. Neste caso, ρ é máximo quando $\theta = 0$ e quando $\theta = \pi$, caso em que $\rho = 1$. Analisando a monotonia de ρ como função de θ , obtém-se a curva da Figura 29, a que se chama *lemniscata*.

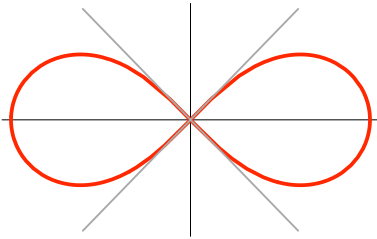


Figura 29: Lemniscata $\rho^2 = \cos 2\theta$.

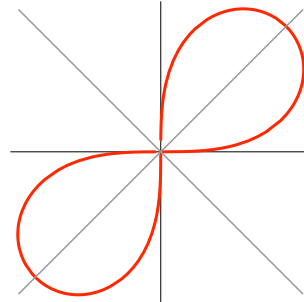


Figura 30: Lemniscata $\rho^2 = \sin 2\theta$.

E2) $\rho^2 = \sin 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

O intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\sin 2\theta \geq 0$. A curva é a lemniscata representada na Figura 30, tendo-se $\rho = 1$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e para $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

F1) $\rho = |\cos 2\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Agora, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

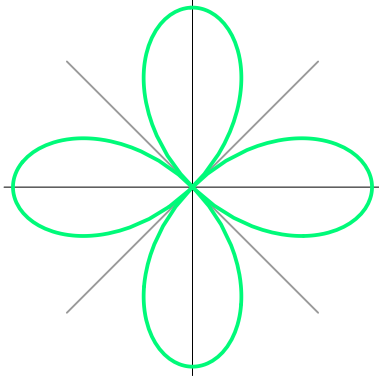


Figura 31: Rosa de 4 pétalas, $\rho = |\cos 2\theta|$.

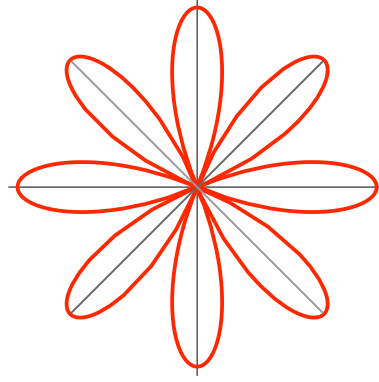


Figura 32: Rosa de 8 pétalas, $\rho = |\cos 4\theta|$.

F2) $\rho = |\cos 4\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Desta vez, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta = \frac{7\pi}{4}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

G1) $\rho = |\sin 3\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

A curva está representada na Figura 33 e chama-se *rosa de três pétalas*.

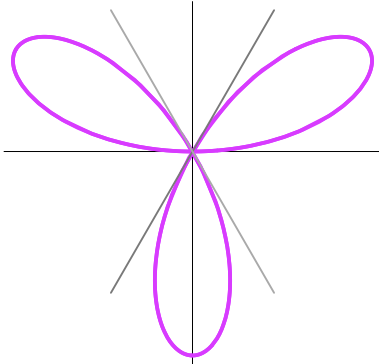


Figura 33: Rosa de 3 pétalas, $\rho = |\sin 3\theta|$.

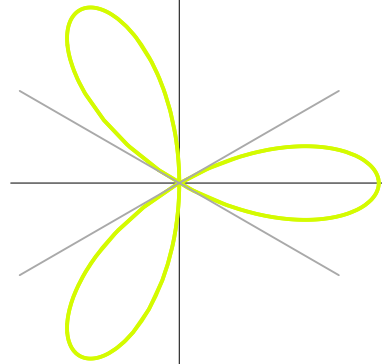


Figura 34: Rosa de 3 pétalas, $\rho = |\cos 3\theta|$.

G2) $\rho = |\cos 3\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

A curva está representada na Figura 34 e também é uma *rosa de três pétalas*.

H) Se agora a curva for dada em coordenadas cartesianas, podemos obter a correspondente equação polar, atendendo às expressões (105).

H1) Circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, de centro $C = (1, 0)$ e raio 1.

Tem-se $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, donde $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Em coordenadas polares, fica $\rho^2 - 2\rho \cos \theta = 0$, donde se conclui que $\rho = 2 \cos \theta$ é a equação polar da circunferência dada, já que $\rho = 0$ define apenas o pólo. Como $\rho \geq 0$, tem-se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. A circunferência está representada na Figura 35.

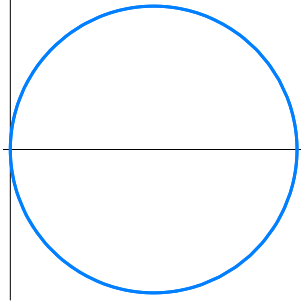


Figura 35: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OX , $\rho = 2 \cos \theta$.

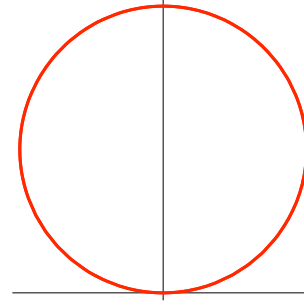


Figura 36: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OY , $\rho = 2 \sin \theta$.

H2) Circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro $C = (0, 1)$ e raio 1.

A correspondente equação polar é $\rho = 2 \sin \theta$, com $\theta \in [0, \pi]$. A circunferência está representada na Figura 36.

8.4 Áreas planas em coordenadas polares

Em muitas situações, torna-se mais simples trabalhar em \mathbb{R}^2 com coordenadas polares. Esta situação ocorre frequentemente no cálculo de áreas de regiões planas, quando a primitiva da função integranda é complicada. Vamos agora estabelecer uma fórmula para o cálculo de uma tal área, através de um integral em coordenadas polares.

Suponhamos que pretendemos determinar a área da região plana \mathcal{A} , que é limitada pela curva de equação $\rho = f(\theta)$, com f contínua, e pelas semi-rectas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (cf. a Figura 37). Então, adoptando uma estratégia semelhante à que utilizámos para determinar a área em coordenadas cartesianas:

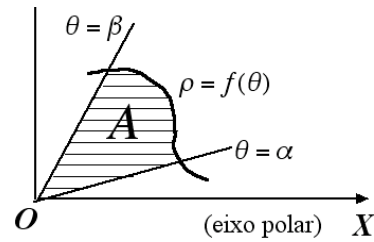


Figura 37: Região plana \mathcal{A} .

- (i) Consideramos uma partição \mathcal{P} de $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- (ii) A região \mathcal{A} fica dividida em n fatias, cada uma de amplitude $\theta_i - \theta_{i-1}$ (Figura 38).

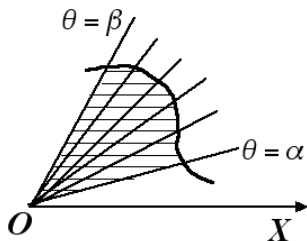


Figura 38: Região plana \mathcal{A} .

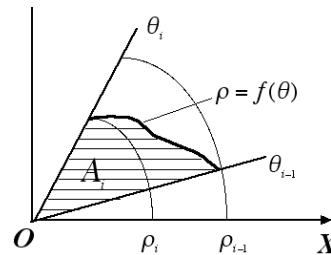


Figura 39: Fatia elementar \mathcal{A}_i .

(iii) Aproximamos a área de cada fatia elementar pela área de um sector circular, começando por observar que (Figura 39)

$$\frac{1}{2} \rho_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \text{area}(\mathcal{A}_i) \leq \frac{1}{2} \rho_{i-1}^2 (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Mas $\rho_i = f(\theta_i)$ e $\rho_{i-1} = f(\theta_{i-1})$, donde

$$\frac{1}{2} f^2(\theta_i) (\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \text{area}(\mathcal{A}_i) \leq \frac{1}{2} f^2(\theta_{i-1}) (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Como f é contínua, resulta que

$$\text{área}(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{2} f^2(c_i) (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

para algum $c_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.

(iv) Fazendo a soma para $i = 1, \dots, n$ e tomando o limite quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ tende para zero, obtemos

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Exemplo 23

A área do círculo de raio r pode ser obtida com um integral em coordenadas polares, bastando atender a que, se a circunferência estiver centrada na origem, a sua equação polar é $\rho = r$, pelo que

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 [\theta]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

Exemplo 24

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \theta \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, limitada pela espiral de Arquimedes (Figura 22), é dada por

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} [\theta^3]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3.$$

Exemplo 25

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, limitada pelo cardeóide $\rho = 1 + \cos \theta$ (Figura 25), é dada por

$$\begin{aligned} \text{área } \mathcal{A} &= \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= [\theta]_0^{\pi} + 2 [\sin \theta]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \pi + \frac{1}{2} \left([\theta]_0^{\pi} + \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

9 Integral Impróprio

Na secção 2 deste capítulo apresentámos a definição de integral segundo Riemann, para uma função limitada que está definida num intervalo limitado. A extensão desta definição aos casos em que o intervalo de integração é não limitado, ou em que a função integranda se torna não limitada nas vizinhanças de um ponto do intervalo de integração, conduz à noção de *integral impróprio*. Assim, diremos que os integrais

$$\int_0^{+\infty} x^2 dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

são todos impróprios. Para estender a definição de Riemann a estes casos, iremos recorrer à noção de limite.

9.1 Intervalo de integração ilimitado

Neste caso, o integral impróprio diz-se de *primeira espécie* ou de *tipo I*. Começemos com o caso em que o intervalo de integração é do tipo $[a, +\infty[$ e, a título de motivação, consideremos os integrais

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx. \quad (108)$$

Do ponto de vista geométrico, os integrais I e J estão relacionados com a medida da área das regiões não limitadas situadas à direita da recta $x = 1$, acima do eixo OX , sob o gráfico de cada uma das curvas representadas na Figura 40. Porém, tratando-se de regiões com “largura” infinita e “altura” que se torna infinitamente pequena, poderá ser possível atribuir uma medida à área em causa.

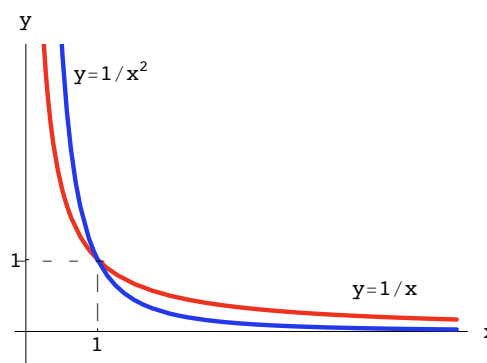


Figura 40: Regiões associadas aos integrais I e J .

Para decidir se esta possibilidade se verifica, estudamos os limites

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(J) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx, \quad (109)$$

para os quais vem, respectivamente,

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln x \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty,$$

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1,$$

donde se depreende que apenas fará sentido atribuir significado à área da região relacionada com o integral J , podendo dizer-se que a medida dessa área é igual a 1.

Passemos agora a expor a teoria geral.

Caso A. Começemos por considerar uma função $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que é integrável em todo o intervalo limitado $[a, x]$ tal que $[a, x] \subset [a, +\infty[$.

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o correspondente limite,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

No caso contrário, em que aquele limite não existe (em \mathbb{R}), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio*.

Propriedade 7 [Linearidade]

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então $\alpha f + \beta g$ é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (110)$$

Propriedade 8 [Aditividade]

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então f é integrável em sentido impróprio em $[b, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx. \quad (111)$$

Exemplo 26

1. $\int_0^{+\infty} e^x dx$ é divergente.

De facto, estudando o correspondente limite (cf. a Figura 41), vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^x]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) = +\infty.$$

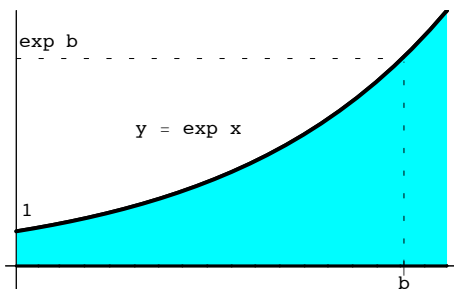


Figura 41: Exemplo 26.1

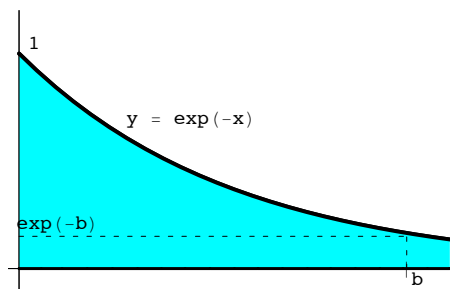


Figura 42: Exemplo 26.1

2. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ é convergente e igual a 1.

Para o correspondente limite (cf. a Figura 42), vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

■

Exemplo 27

Estudemos agora o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$, com k uma constante real.

- Para $k = 1$, vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1]_1^b = +\infty.$$

- Já para $k \neq 1$, vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-k} - 1}{1-k} \right),$$

e como

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-k} = 0, \text{ se } 1-k < 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-k} = +\infty, \text{ se } 1-k > 0,$$

resulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}, \quad \text{se } k > 1, \tag{112}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = +\infty, \quad \text{se } k < 1.$$

Consequentemente, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$ diverge se $k \leq 1$ e converge se $k > 1$, caso em que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}.$$

■

Caso B. O estudo do integral impróprio $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, quando $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x, b]$ com $[x, b] \subset]-\infty, b]$, é semelhante, baseando-se no

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Para este caso, valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 28

$\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx$ é divergente.

De facto, estudando o limite correspondente, vemos que

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\sin x \right]_a^0 = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a,$$

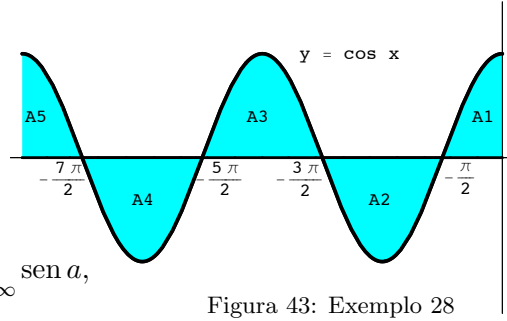


Figura 43: Exemplo 28

que não existe porque, sendo a função seno periódica, podemos exibir duas restrições do seno com limites diferentes. Por exemplo, pondo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \, k \in \mathbb{Z}^- \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \, k \in \mathbb{Z}^- \right\},$$

tem-se $x \in A \implies \sin x = 1$ e $x \in B \implies \sin x = -1$, pelo que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in A}} \sin x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in B}} \sin x = -1.$$

Não seria difícil antecipar esta conclusão a partir da Figura 43. Por um lado, se cada A_i representar a área de uma parte da região (cf. a Figura 43), então

$$A_1 = A_5 = 1 \quad \text{e} \quad A_2 = A_3 = A_4 = 2.$$

Por outro lado, como a área de cada região A_i se pode exprimir como um integral de $\cos x$ ou de $-\cos x$, consoante estiver em causa um intervalo onde o cosseno seja positivo ou negativo, temos por exemplo

$$\begin{aligned} \int_{-4\pi}^0 \cos x \, dx &= A_5 - A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = 0, \\ \int_{-7\pi/2}^0 \cos x \, dx &= -A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = -1, \\ \int_{-5\pi/2}^0 \cos x \, dx &= A_3 - A_2 + A_1 = 1, \end{aligned}$$

o que, de imediato, nos leva a intuir que não será possível atribuir um valor ao integral apresentado. ■

Caso C. Para analisar o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$, quando $f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x, y]$, escolhe-se arbitrariamente um ponto $c \in \mathbb{R}$ (em geral, considera-se $c = 0$) e estuda-se separadamente cada um dos integrais

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x) \, dx, \quad (113)$$

como descrito anteriormente. Pela aditividade do integral impróprio (Propriedade 8 e correspondente adaptação ao caso B), a convergência destes integrais não depende da escolha do ponto c . Assim, dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (113) são convergentes. Escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad (114)$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (113) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ também é *divergente*.

Para este caso, valem também resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 29

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ é divergente.

Basta atender à definição apresentada e ao que vimos no Exemplo 26.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e igual a π .

De facto, por um lado,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

e, por outro lado, t

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo ao gráfico da função integranda, e à sua simetria em relação ao eixo OY (Figura 44), bastaria ter estudado o integral impróprio estendido a um dos intervalos $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0]$.

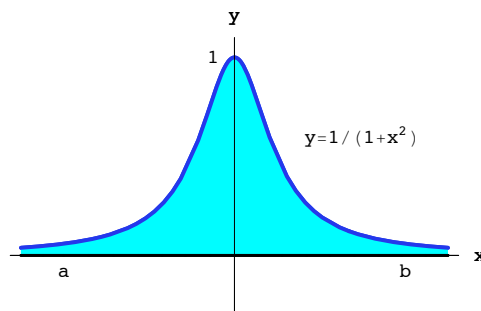


Figura 44: Exemplo 29.2.

9.2 Função integranda ilimitada

No caso em que a função integranda se torna ilimitada numa vizinhança de algum ponto do intervalo de integração – um extremo ou um ponto interior – o integral impróprio diz-se de *segunda espécie* ou de *tipo II*.

Caso A. Consideremos uma função $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que é ilimitada, mantendo-se integrável em qualquer intervalo $[c, b]$ com $[c, b] \subset]a, b]$

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o limite

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Quando este limite não existe (em \mathbb{R}), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio*.

Também para este tipo de integral impróprio valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 30

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ é divergente (Figura 45).

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = +\infty,$$

donde se conclui que o integral impróprio apresentado diverge para $+\infty$.

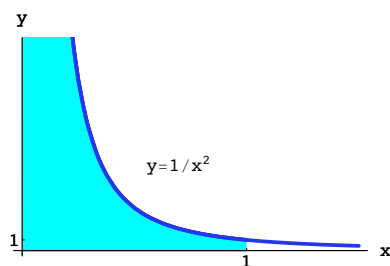


Figura 45: Exemplo 30.1.

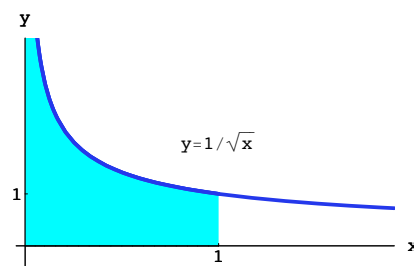


Figura 46: Exemplo 30.2.

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ é convergente (Figura 46).

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2,$$

pelo que o integral converge, tendo-se $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

3. Estudemos, mais em geral, o integral $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$, com k uma constante real.

- Para $k = 1$, vem

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty.$$

- Para $k \neq 1$, vem

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - c^{1-k}}{1-k} \right)$$

e como

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-k} = 0, \text{ se } 1-k > 0, \quad \lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-k} = +\infty, \text{ se } 1-k < 0,$$

resulta

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}, \quad \text{se } k < 1, \tag{115}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = +\infty, \quad \text{se } k > 1.$$

Consequentemente, o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$ diverge se $k \geq 1$ e converge se $k < 1$, caso em que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}.$$

Caso B. O estudo do integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$, quando $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[a, c]$, com $[a, c] \subset [a, b[$, é perfeitamente análogo, baseando-se no estudo do

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Valem novamente resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Caso C. O caso em que $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[x, y]$, com $[x, y] \subset]a, b[$, reduz-se aos casos anteriores, escolhendo arbitrariamente um ponto $c \in]a, b[$ e estudando separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx, \quad (116)$$

como descrito anteriormente (casos A e B). Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (116) são convergentes. Escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (117)$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (116) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ também é *divergente*.

Caso D. Consideremos agora $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $a < c < b$, e seja $f: [a, c[\cup]c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ilimitada em pelo menos um dos intervalos $[a, c[$ ou $]c, b]$, que se mantém integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $[a, x] \subset [a, c[$ e em qualquer intervalo $[y, b]$ com $[y, b] \subset]c, b]$. Neste caso, estudamos separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx,$$

como descrito anteriormente. Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se estes dois integrais são convergentes, caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (118)$$

Por outro lado, se algum daqueles integrais é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ também é *divergente*.

Exemplo 31

1. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ é divergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 1$. Estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Para o primeiro, calculamos

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(- \left[\frac{1}{x-1} \right]_0^c \right) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{c-1} - 1 \right) = +\infty,$$

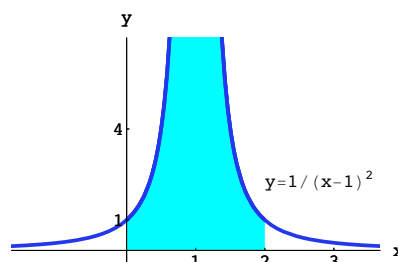


Figura 47: Exemplo 31.1.

donde se conclui que o integral proposto é divergente (independentemente da natureza do integral J).

2. $\int_{-1}^1 \ln |x| dx$ é convergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 0$. Então estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_{-1}^0 \ln |x| dx = \int_{-1}^0 \ln(-x) dx \quad \text{e} \quad J = \int_0^1 \ln |x| dx = \int_0^1 \ln x dx,$$

que possuem a mesma natureza, tendo em conta a simetria da figura a respeito do eixo OY . Estudamos então o integral J , começando por primitivar por partes,

$$P(\ln x) = x \ln x - x + C,$$

e calculando depois o limite

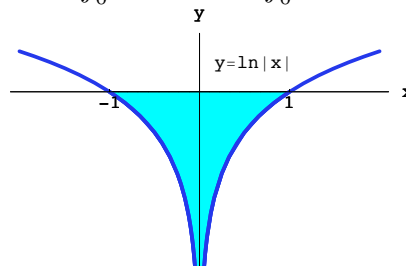


Figura 48: Exemplo 31.2.

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[x \ln x - x \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-1 - \underbrace{c \ln c}_{(*)} + c \right) = -1.$$

Concluimos que o integral J converge, tendo-se $J = -1$. O mesmo se passa com o integral I , tendo-se também $I = -1$. Consequentemente, o integral proposto converge e

$$\int_{-1}^1 \ln |x| dx = -2.$$

(*) Este limite é igual a 0 porque a *velocidade* com que c tende para 0 é exponencialmente superior à *velocidade* com que $\ln c$ tende para $-\infty$.