数学规划复习：概念篇

一、线性规划

（一）基本概念

1、基

约束矩阵A中的每一个可逆矩阵称为一个基（矩阵）

2、基变量

与A中列向量对应的变量

3、基本解

$$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \text{是} AX=b \text{的解}$$

每个基对应一个基本解

4、基本可行解

$$\text{若 } X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \geq 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{，则称}X\text{为}(LP)$$

5、最优基本可行解

$$\underline{C-C_B B^{-1}A\geq 0} \quad (C_N-C_B B^{-1}N\geq 0)$$

6、凸集

对于A中任意两点，它们之间的连线仍然在A中，那么称A为凸集

（二）定理

1、存在可行解，一定存在基本可行解

2、存在最优解，一定催存在基本最优可行解

3、LP问题可行域是凸集，最优基本可行解在顶点达到

（三）题型

1、一般形式化为标准形式

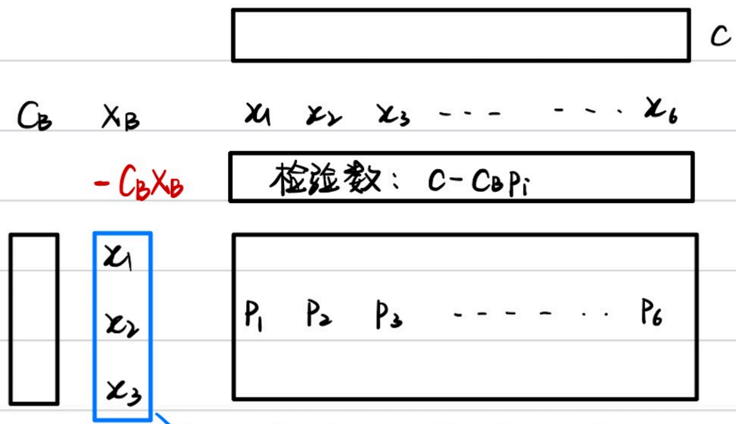
标准形式要求目标函数为最小化问题，约束都是等式，可以添加约束变量（全大于0）来达到这点

2、图解法求最优化问题

有手就行，高中知识

3、单纯形法求解

1、确定单纯形表：



2、确定离基变量 选取原则：该元素仅在某列出现

① 最小比值法：除得的负数时不选它为离基，在所有正数里选择比值最小的离基

② 离基后C_B相应改变

③ 不选取上次进基的变量进行离基

④ 更新检验数，全大于0时有最优解 ※ 若出现全负列，证明没有有界解

单纯形法的进基规则： 最负检验数法

单纯形法的离基规则： 最小比值法，比值为正的里面最小的离基

二、对偶问题

（一）概念

（二）定理

（三）题型

1、写出原问题的对偶规划

[确定对偶规划]

Step1：化为标准形式：约束条件全为 $\geq$ 或 $=$，最优化目标是最小化问题

Step2：对应：$\begin{cases} \text{大于0变量} \Rightarrow \leq \text{约束} \\ \text{自由变量} \Rightarrow = \text{约束} \end{cases}$ min ⇒ Max

$\begin{cases} \geq \text{约束} \Rightarrow \text{大于0变量} \\ = \text{约束} \Rightarrow \text{自由变量} \end{cases}$

2、用对偶单纯形法求解对偶问题

对偶单纯形法

1、化为标准形式，初始基一定是单位矩阵

2、确定离基变量：变量取值为负，当变量取值全为正时停止

3、确定进基变量：最小比值法，比值为正的不作为进基变量

4、对偶问题的最优解：$Z^* = C_B \cdot B^{-1}$ 其中 C_B 和 B 是化简后单纯形表的部分

eg：

$\min S = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \leq 8 \\ -x_2 + x_3 + x_6 = -2 \end{cases}$$

3、灵敏度分析

先用单纯形法求出最优解

（1）C的系数改变：仅仅改变最优表的检验数，如果改变之后还是满足最优条件（检验数>0）那么最优解不变，否则重新求解

（2）方程右端常数改变：最优解和最优值改变，用对偶单纯形法求解问题

（3）系数矩阵改变：检验改变列对应变量的检验数

$$t = C - C_B B P_{new}$$

（4）增加一个约束条件：如果最优解仍然满足约束条件，最优解不变

（5）增加一个变量：检验新引入变量的检验数，如果满足最优条件（检验数>0）那么最优解不变

4、运输问题

产销平衡，产销不平衡

运输问题：表上作业法

1、产销平衡：

Step1：确定初始解：最小元素法

Step2：求每行每列的位势数

$\begin{cases} u_1+v_1=a_1 \\ \vdots \end{cases}$ 其中 a_1 是画*的格子处的成本

Step3：检验：①所有*处有 $c_{ij}=u_i+v_j$ ②所有×处有 $c_{ij}-u_i-v_j>0$？最优：非最优

Step4：[非最优解时]

① 构建回路，每个顶点都处在*处

② 确定 $\theta = \min\{$奇数顶点 $c_{ij}\}$，从0开始

③ 奇数顶点 $-\theta$，偶数顶点 $+\theta$

2、产大于销：增加销地一列，$c_{ij}=0$.

销大于产：增加产地一行，$c_{ij}=0$

三、整数规划

（一）题型

1、整数规划的数学模型

2、隐枚举法

隐枚举法

x_1	x_2	x_3	①	②	③	④	新的过滤
0	0	0	是否满足条件				
0	0	1	⋮				
	⋮		⋮				
1	1	1					

3、分配问题：匈牙利方法

分配问题：匈牙利方法

Step1：每行/列减去该行/列最小值

Step2：找独立的零变量记为 0，非自由零变量记为 ϕ

Step3：[没有找到最优解] 用最少的直线包含所有的零变量

Step4：在所有没有被直线划的区域中找最小元素 θ，交点处 $+\theta$，没被划处 $-\theta$

$\Rightarrow$ 与原问题等价

四、无约束最优化问题

（一）概念

1、梯度

2、Hessen阵

3、凸函数

（1）凸函数的线性组合仍然是凸函数

（2）f严格凸，-f严格凹

（二）定理

1、凸函数判定定理：Hessen阵正定

但是Hessen阵不正定不能说明他不是凸函数，要从定义入手

定义摆烂了，出了不管了

2、G

（三）题型

1、判断函数是不是凸函数

2、0.618法

3、最速下降法、牛顿迭代法、共轭梯度法

注意正定二次函数才不需要一位搜索去找λ,且Q定义为

$$f(X) = \frac{1}{2}XQX^T$$

注意1/2的存在

[最速下降法]

设 $g(k) = \nabla f(x^{(k)})$，设 $p(k) = -g(k)$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{p^T(k)\,p(k)}{p^T(k)\,Q\,p(k)} \cdot p(k)$$

迭代停止条件：$\|g(k)\| < t$

[Newton法]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \nabla^2 f(x^{(k)}) \cdot p(k)$$

停止条件：$\|g(k)\| < t$

共轭梯度法：

$$\lambda_k = \frac{p^T(k)\,p(k)}{p^T(k)\,Q\,p(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k \cdot p(k)$$

$$\begin{cases} p(k+1) = -g(k+1) + \beta_k \cdot p(k) \\ \text{其中 } \beta_k = \dfrac{g^T(k+1)\,p(k)}{p^T(k)\,Q\,p(k)} \end{cases}$$

五、约束最优化问题

有约束的最优化问题

一、K-T条件

原问题：$\min f(x)$，s.t. $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$

K-T条件为：

(A)
$$\begin{cases} \nabla f(x) - \mu_1 \nabla g_1 - \mu_2 \nabla g_2 = 0 \\ \mu_1 g_1 = 0 \\ \mu_2 g_2 = 0 \end{cases}$$

满足K-T条件的点称为K-T点

二、由K-T条件得到最优解

Step1：解方程组A，得到解 $\begin{cases} X = [x_1, x_2]^T \\ \mu_1 \end{cases}$ ...

Step2：检验是否满足约条件 △ K-T点不一定都满足约束条件

Step3：考察 $\nabla^2 f(x) - \mu_1 \nabla^2 g_1(x) - \mu_2 \nabla^2 g_2(x)$ 是否为正定矩阵

$\begin{cases} \text{正定} \Rightarrow \text{是最优解} \\ \text{非正定} \Rightarrow \text{摆烂了你} \end{cases}$

三、外点法

设 $\min f(x)$，约束条件为 $g_1(x) \geq 0$，$g_2(x) \geq 0$

构造罚函数 $\varphi(M_k, X) = f(x) + M_k\{\min[0, g_1(x)]^2 + \min[0, g_2(x)]^2\}$

解析法：
$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{得到 } x_1(M_k),\ x_2(M_k)$$

令 $M_k \to \infty$，得到最优解 $[x_1^*, x_2^*]$

四、内点法

构造 $\varphi(X, r_k) = f(x) - r_k \ln g_1(x) - r_k \ln g_2(x)$

解析法得到 $x_1(r_k)$, $x_2(r_k)$

令 $r_k \to 0$，得 $[x_1^*, x_2^*]$

六、多目标问题

多目标规划

[偏差变量法]	约束	最优化问题
1、期望达到 f_0	$f+d^- - d^+ = f_0$	$\min(d^- + d^+)$
2、期望超过 f_0	$f+d^- - d^+ = f_0$	$\min(d^-)$
3、期望小于 f_0	$f+d^- - d^+ = f_0$	$\min(d^+)$
4、$\min f(x)$	$f+\overset{0}{d^-} - d^+ = f_0$	$\min(d^+ - d^-) \Rightarrow \min(d^+)$
5、$\max f(x)$	$f+d^- - \overset{0}{d^+} = f_0$	$\min(d^- - d^+) \Rightarrow \min(d^-)$

单纯形法求多目标问题：摆了

七、动态规划问题

（一）最短路径问题

倒着递推，有手就行，强调几个符号的意思

$$d(E,F)$$

E到F的距离

$$f_k(A)$$

当前处在A位置还需要k步走到终点时，所能达成的最短路径

（二）分配问题：摆了，麻烦

（三）背包问题

状态转移方程

装不下本轮考虑的物品时：

$$dp[i][j] = dp[i-1][j]$$

装得下时:

$$d[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i-1][j-v[i]] + worth[i])$$

（四）二维背包问题

摆了，不太可能出