Pattern Recognition*
Homework I

* Teacher: Jianxin Wu. TA: ...

1st 张逸凯 171840708 计算机科学与技术系 本科生
Department of Computer Science and Technology
Nanjing University
zykhelloha@gmail.com

Exercises 1

对不起因为这次作业提前完成了, 所以部分答案较详细并超过了规定的两页纸张, 下次一定注意控制答题量.

*Thank you for correcting.

解：(a) $\frac{8a-1}{3} \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant \frac{1}{8}$

(b) 代入 $a=\frac{1}{8}$ 得(1)式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(c) $a=\frac{1}{2}$ 时，(1)式 $=\sqrt[3]{0.5+0.5}+\sqrt[3]{0.5-0.5}=1$

$a=\frac{1}{6}$ 时，(1)式 $=\sqrt[3]{\frac{1}{6}+\frac{7}{54}}+\sqrt[3]{\frac{1}{6}-\frac{7}{54}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

$a=\frac{7}{32}$ 时，(1)式 $=\sqrt[3]{\frac{7}{32}+\frac{13}{64}}+\sqrt[3]{\frac{7}{32}-\frac{13}{64}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

My idea：当 $\frac{8a-1}{3}=\frac{1}{k^2}$ 时（其中 $k \in \mathbb{Z}^+$）

$$(1)式 =\sqrt[3]{\frac{3+k^2}{8k^2}+\frac{1+3k^2}{8k^2}\cdot\frac{1}{k}}+\sqrt[3]{\frac{3+k^2}{8k^2}-\frac{1+3k^2}{8k^2}\cdot\frac{1}{k}}$$

$$=\frac{k+1}{2k}+\frac{k-1}{2k}$$

$$=1$$

Idea 2：猜想 $x \in [\frac{1}{8},+\infty)$ 时，(1)式 $=1$

(d) 当 $a=\frac{3}{4}$ 时，$f=1.2182+0.1260i$.

(e) 查关于 power 的文档 $\left\{ 是因为 a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}<0 \right\}$

>>> doc power

里面说：returns the complex roots

猜想返回了 $re^{i\theta}$ 形式

证明：$a=\frac{3}{4}$ 时 $f=1.1455+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1.2182+0.1260i$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=0.0727+0.1260i=\|0.0727+0.1260i\|_2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \quad ①$$

又 $e^{\frac{\pi}{3}i}=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ②

由①、②解得 $\|0.0727+0.1260i\|_2=0.1458=-\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$

∴返回了 $re^{i\theta}$ 形式 （这类似 MATLAB 对 log(负) 的处理） □

(e)

以下描述了两种方法来使计算结果为实数:

PRex1.m

```
function [] = PRex1()
    f = @(a) (a + (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)) ^(1 / 3) ...
        + (a - (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)) ^(1 / 3);
    withoutProcess = f(3 / 4)

    % 第一种解法:
    a = 3 / 4;
    ans1 = (a + (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)) ^(1 / 3) ...
        + nthroot((a - (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)), 3)

    % 第二种解法:
    sig = sign(a - (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3));
    ans2 = (a + (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)) ^(1 / 3) ...
        + sig * ((a - (a + 1) / 3 * sqrt((8 * a - 1) / 3)) * sig) ^(1 / 3)

end
```

图 1. code

其中第一种解法调用`nthroot`函数, 第二种解法先把根式内的符号提取出来, 再与结果相乘.

运行结果:

```
>> PRex1

withoutProcess =

   1.2182 + 0.1260i


ans1 =

    1.0000


ans2 =

    1.0000
```

图 2. output

(f) Define notations:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \\ x_2 = \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \end{cases}$$

Idea:（同c中）

当 $a\in[\frac{1}{8},+\infty)$ 时，$f\equiv 1$

Prove:

$$f = x_1+x_2 = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}$$

$$= \frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}$$

$$= \frac{2a}{(x_1+x_2)^2-3x_1x_2}$$

$$= \frac{2a}{f^2-\sqrt[3]{-8a^3+12a^2-6a+1}}$$

$$= \frac{2a}{f^2-(1-2a)}$$

$$\Rightarrow f[f^2-(1-2a)]-2a=0$$

$$\Rightarrow (f-1)(f^2+f+2a)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f=1 \\ f^2+f+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f=1 \\ f=\frac{-1\pm\sqrt{1-8a}}{2} \ (*) \end{cases}$$

*式当且仅当 $a=\frac{1}{8}$ 时有解，但 $a\in[\frac{1}{8},+\infty)$

*式无解

$\therefore f\equiv 1$

$\square$

(g) 由(f)中所证 $a\in[\frac{1}{8},+\infty)$ 时 $f\equiv 1$

$$\therefore \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=f(2)=1$$

(h) 事实上这和(g)的证明过程一致

Wiki里 Cubic_equation 有相关介绍

对 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

作一个换元 $\begin{cases} t=x+\frac{b}{3a} \\ p=\frac{3ac-b^2}{3a^2} \\ q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} \end{cases}$

即得 $t^3+pt+q=0$ (消二次项)

这与(g)题关于 f 的形式相同：$(f-1)(f^2+f+2a)=0$

$$\Rightarrow f^3-(1-2a)f-2a=0$$

其中 $\begin{cases} p=2a-1 \\ q=-2a \end{cases}$

由Wiki上 Cardano's formula 节：

$4p^3+27q^2>0$ 时根的求解

$\Rightarrow f$ 所表达的 $f^3+(2a-1)f-2a=0$ (**) 的根为

$\begin{cases} f=1 \\ f=\frac{-1\pm\sqrt{1-8a}}{2} \end{cases}$ f 就是上述方程的根.

这对 $a\in[\frac{1}{8},+\infty)$ 恒成立，但 $\sqrt{1-8a}$ 对 $a>\frac{1}{8}$ 无意义

$\therefore$ (**) 式的根为 $f=1$ $\square$

若跳出题设"不能复数" $\Rightarrow a\in(-\infty,\frac{1}{8})$ 则 f 可取 $\frac{-1\pm\sqrt{1-8a}}{2}$

另外，用 Wiki 内 $x^3+px+q=0$ s.t. $4p^3+27q^2>0$

推广到一般

则实根为 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ (***)

构造 $(x-k)(x^2+kx+2a)=x^3+(2a-k^2)x-2ak=0$

其中 $k=const$

则 $\begin{cases} p=2a-k^2 \\ q=-2ak \end{cases}$ 当 $a\geq\frac{k^2}{8}$ 时 (***) 式恒为 k.

Exercise 2

解：1. (a) 由式(12)

$$\|x_\perp\| = \|x\|\cos\theta = \frac{x^Ty}{\|y\|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \sqrt{3}$$

式(13)

$$x_\perp = \frac{x^Ty}{y^Ty}y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$$

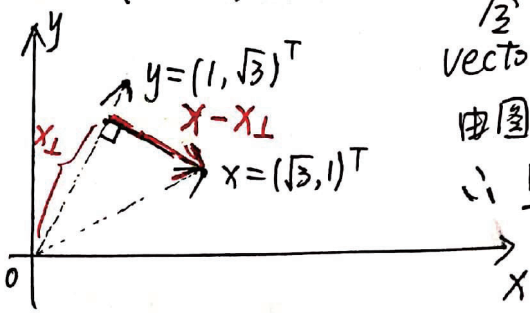
(b) 由式(8)

$$\theta = \arccos\left(\frac{x^Ty}{\|x\|\,\|y\|}\right) = \arccos\left(\frac{y^T(x-x_\perp)}{\|y\|\,\|x-x_\perp\|}\right) = \arccos\left(\frac{(1,\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)^T}{2\times 1}\right)$$

$$= \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow y \perp (x-x_\perp)$

(c)



令 vector $=(x,y)^T$

由图表示，$x_\perp$，x，$x-x_\perp$ 组成 Rt△

$\therefore y \perp (x-x_\perp)$

(d) 注意到 (c) 中几何关系：

$$\|x-x_\perp\|^2 + \|x_\perp - \lambda y\|^2 = \|x-\lambda y\|^2 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

又 $\|x_\perp - \lambda y\|^2 \geq 0$

$\therefore \|x-x_\perp\| \leq \|x-\lambda y\|$

2. (a) X is PD $\Leftrightarrow$ 所有特征值 $>0 \Leftrightarrow x>0$

(b)

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & & \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

又 $\det(\lambda I - A) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = tr(A)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \qquad \therefore x = \frac{72}{3\times 4} = 6$$

解：6. (a)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{+\infty}\beta xe^{-\beta x}dx$$
$$=-xe^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}dx$$
$$=\frac{1}{\beta}$$

$$E[X^2]=\int_0^{+\infty}x^2\beta e^{-\beta x}dx$$
$$=-x^2e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\beta x}dx$$
$$=\frac{2}{\beta^2}$$

$\therefore Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1}{\beta^2}$

(b) : $x<0$ 时, $F(x)=0$

$x\geq 0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=-e^{-\beta t}\Big|_{-\infty}^{x}$
$$=1-e^{-\beta x}$$

$\therefore$ c.d.f : $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\beta x} & x\geq 0\\ 0 & 其他.\end{cases}$

(c) $Pr(X\geq a+b\mid X\geq a)$

$$=\frac{Pr(\{X\geq a+b\}\cap\{X\geq a\})}{Pr(X\geq a)}$$ (贝叶斯公式)

$$=\frac{Pr(X\geq a+b)}{Pr(X\geq a)}=\frac{1-F(a+b)}{1-F(a)}$$

$$=\frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}}=e^{-\beta b}=Pr(X\geq b)$$

□

(d) $E[X]=\frac{1}{\beta}=1000$ 为期望寿命.

由无记忆性知使用 2000 hours 后 X 的概率分布不变.

$\therefore$ 剩余寿命期望为 1000 hours.

10. 解: (a) 由凸函数二阶充要条件

$$\nabla^2 f(x)\succeq 0$$

(Hessian 矩阵是半正定阵)

本题中 $\Rightarrow f''(x)\geq 0$ $(a\in\mathbb{R})$

又 $(e^{ax})''=a^2e^{ax}>0$ $\therefore$ 是凸函数

(b) 同理: $t(x)=-g(x)=-\ln x$

$t''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ $(x>0)$ $\therefore t(x)$ 是凸函数

由 concave function 的定义 (Convex Optimization (S. Boyd)) 中的定义

知 $g(x)$ 是 concave function.

(c) $h''(x)=[\ln(x)+1]'=\frac{1}{x}>0$ $(x>0)$

又当 $x=0$ 时有定义且连续 (洛必达可证)

$\therefore h(x)$ 是凸函数

(d) 原问题等价于:

$$\min\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$$
$$s.t.\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

拉格朗日函数一阶偏导为零就是以上凸优化问题满足 KTT 条件的点

$$\mathcal{L}(p_1\dots p_n;\lambda)=\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i-1\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(p_1\dots p_n,\lambda)}{\partial p_i}=\log_2 p_i+p_i\frac{1}{(\ln 2)p_i}+\lambda=0$$

$$\Rightarrow\lambda=-\log_2 p_i-\frac{1}{\ln 2}\quad(i=1\dots n)\quad ①$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(p_1\dots p_n,\lambda)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_i=1\quad ②$$

由①②得 $p_1=p_2=\dots=p_n=\frac{1}{n}$

$\therefore$ 最大值时 $p_i=\frac{1}{n}$

□

(d) 题也可以用 Jensen 不等式证:

由 (f) 知 $f(x)=x\log_2 x$ 凸函数

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}p_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(p_i)$$

由 Jensen 不等式取等条件知 $p_i=\frac{1}{n}$ 时

$\sum_{i=1}^{n}f(p_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$ 取得 min $\Rightarrow$ H 取 max.