

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное
образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

**Л. Н. Куликов
М. Н. Москалец
М. Н. Чесноков**

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ**

**СПбГУТ)))
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2012**

УДК 621.391(075.8)

ББК 33.88я73

К 90

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры ТОС и Р СПбГУТ

Р. Р. Биккенин;

кандидат технических наук, доцент кафедры ТОС и Р СПбГУТ

Д. Л. Бураченко

Рекомендовано к печати

редакционно-издательским советом СПбГУТ

Куликов, Л. Н.

К 90

Общая теория связи : методические указания к выполнению курсовой работы / Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец, М. Н. Чесноков. – СПб. : Издательство СПбГУТ, 2012. – 80 с.

Изложен материал по основным этапам расчета системы связи, предназначенной для передачи непрерывных сообщений.

Может быть использовано для самостоятельной работы студентов при изучении теоретической части дисциплины ТЭС, ч. 2, а также при выполнении курсовой работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (профили «Системы радиосвязи и радиодоступа», «Системы мобильной связи», «Цифровое телерадиовещание», «Инфокоммуникационные технологии в сервисах и услугах связи»), 210400.62 «Радиотехника» (профиль «Радиотехника»), 210700.68 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (профили «Системы, устройства и технологии радиосвязи и радиовещания», «Защищенные системы и сети связи», «Сети связи и системы коммутации»), 210402.65 «Средства связи с подвижными объектами», 210404.65 «Многоканальные телекоммуникационные системы», 210405.65 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение», 210406.65 «Сети связи и системы коммутации», 210302.65 «Радиотехника».

УДК 621.391(075.8)

ББК 33.88я73

© Куликов Л. Н., Москалец М. Н., Чесноков М. Н., 2012

© Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной курсовой работе рассматриваются две системы цифровой связи – узкополосная и широкополосная.

При построении современных систем цифровой связи учитываются действия флуктуационных, импульсных и межсимвольных помех.

В данном издании рассматривается оптимизация узкополосной системы цифровой связи только в отношении флуктуационной помехи типа АБГШ (аддитивный белый гауссовский шум).

Предполагается рассмотреть оптимизацию узкополосной системы цифровой связи в отношении импульсных и межсимвольных помех, а также широкополосную систему цифровой связи с ортогональной частотной модуляцией (ОФДМ) с быстрым преобразованием Фурье.

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа по ТЭС посвящена современным цифровым системам связи и ориентирована на использование новых теоретических и практических достижений в области цифровой связи.

На примере систем связи студенты получают практические результаты (в основном расчетного характера) по разделам курса ТЭС.

Как и в предыдущей КР по курсу ТЭС:

студенты рассчитывают основные характеристики случайных сигналов на выходе источника сообщений, на выходе АЦП;

в новой КР студенты используют сверточное кодирование и декодирование на основе алгоритма Витерби;

применяют современные виды модуляции (квадратурная амплитудная или квадратурная фазовая) с использованием соответствующих сигнальных созвездий;

последовательно рассматриваются определения вероятностных характеристик случайных процессов на выходах соответствующих функциональных узлов (корреляционные функции и спектральные плотности мощности);

в частности приводится подробный вывод корреляционной функции для случайного синхронного телеграфного сигнала в разд. 4.4;

обосновывается каноническая форма сигналов квадратурных видов модуляции и определяется корреляционная функция на выходах перемножителей в составе модулятора;

студенты строят графики сигналов на выходе квадратурных модуляторов;

приводится обоснование структурных схем квадратурных демодуляторов и определяются вероятности ошибок на выходах решающих устройств с последующим перерасчетом вероятности ошибок на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код;

возможные ошибки на выходе демодулятора исправляются с использованием декодирования на основе алгоритма Витерби;

определяются вероятности ошибок на выходе демодулятора при использовании квадратурных видов модуляции по методике, представленной в разд. 4.8.1;

студенты качественно рассматривают влияние длительности импульсов отсчетов на точность восстановления исходного аналогового сигнала в разд. 5.

Импульсные помехи, как правило, приводят к возникновению пакетов ошибок и для их устранения применяют операции перемежения и деперемежения *информационных* символов. Операции перемежения и деперемежения *канальных* символов позволяют пакет ошибок свести к практически одиночным ошибкам, которые легко исправляются с использованием простых помехоустойчивых кодов, например сверточных.

Межсимвольные помехи устраняются путем преобразования в передающем устройстве информационных последовательностей на основе импульсов прямоугольной формы в последовательности импульсов со спектром «приподнятого косинуса».

При оформлении курсовой работы следует придерживаться следующих правил:

1. На титульном листе КР необходимо привести название учебного заведения, кафедры, учебной дисциплины, группы, фамилию, инициалы имени и отчества, номер зачетной книжки.

2. Содержание работы излагать последовательно по функциональным узлам системы связи (от входа к выходу), описывая их функцию, приводя расчетные задания, необходимые схемы и таблицы.

3. Графики полученных зависимостей следует приводить с указанием масштабов и размерностей по осям координат, а семейства непосредственно взаимосвязанных графиков приводить в виде рисунков.

2. ЗАДАНИЕ. СИСТЕМА ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

Изучить и разработать систему цифровой связи, оптимальную в отношении флуктуационной помехи.

1. Изобразить структурную схему системы цифровой связи.
2. Пояснить назначение всех функциональных узлов системы цифровой связи.
3. Рассчитать основные характеристики системы передачи цифровой информации.

Система связи предназначена для передачи аналоговых сообщений по цифровому каналу связи. Структурная схема для КАМ-16 и КФМ-4 представлена на рис. 1.

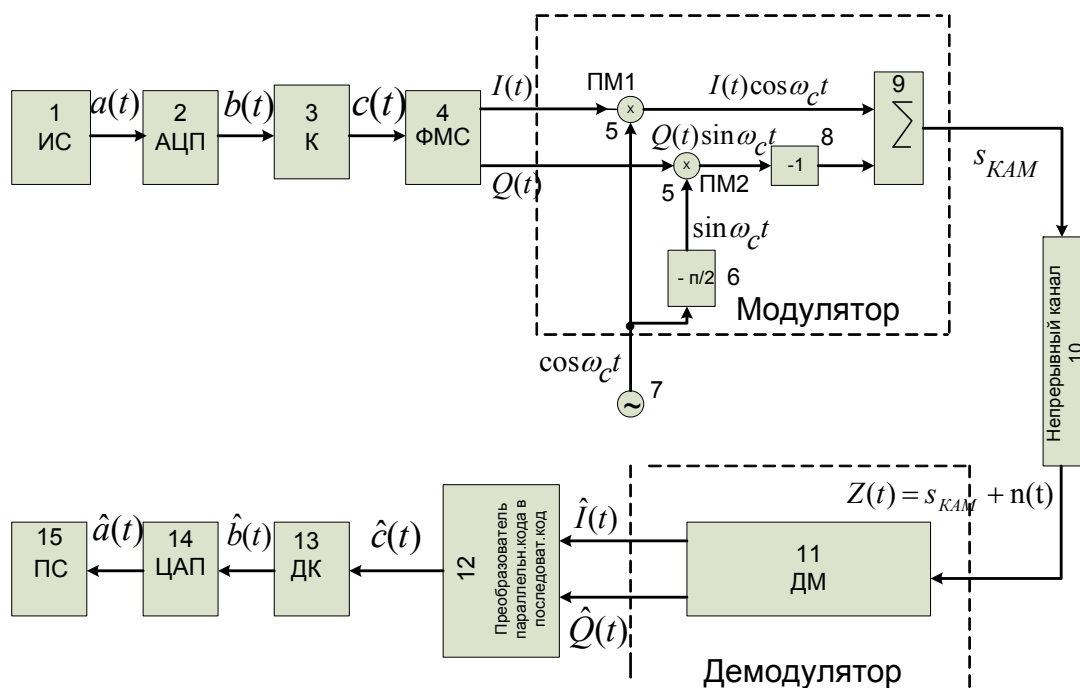


Рис. 1. Структурная схема системы цифровой связи

Назначение функциональных узлов системы цифровой связи:

1. источник сообщений;
2. аналого-цифровой преобразователь;
3. кодер;
4. формирователь модулирующих символов или преобразователь последовательного кода в параллельный код;
5. перемножители;
6. фазовращатель;

7. генератор гармонических колебаний;
8. инвертор;
9. сумматор;
10. непрерывный канал;
11. демодулятор;
12. преобразователь параллельного кода в последовательный код;
13. декодер;
14. цифроаналоговый преобразователь;
15. получатель сообщений.

3. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Номер выполняемого варианта m определяется двумя последними цифрами в номере зачетной книжки студента (например, если номер зачетной книжки равен № 037071, тогда $m = 71$).

Используя номер варианта m , внести свои данные в табл. 1.

Таблица 1

Предельные уровни аналогового сигнала a_{\min}, a_{\max} (В)	$a_{\max} = 25,6$ (В)	Внести свои данные
	$a_{\min} = -25,6$ (В)	
Верхняя частота спектра аналогового сигнала f_B	$f_B = (1 + m \cdot 10^{-2})10^4$ (Гц)	$f_B =$ (Гц)
Заданный уровень квантования	$j = 500 - 3 \cdot m$	$j =$
Спектральная плотность мощности флуктуационной помехи	Номер варианта m в пределах	$N_0 =$ В ² /Гц
	1...33	$3,0 \cdot 10^{-7}$
	34...66	$2,3 \cdot 10^{-7}$
	67...99	$1,85 \cdot 10^{-7}$
q – номер тактового интервала ошибки	$q = m \cdot (\text{mod } 3) + 1$	$q =$
№ вида модуляции $l = m (\text{mod } 2)$	Вид модуляции	Вид модуляции по числу l
0	КФМ-4	
1	КАМ-16	

Номер *вида модуляции* определяется числом l . Например, если вариант $m = 71$, то число $l = 71(\bmod 2)$ равно остатку от деления числа 71 на 2, т. е. остаток 1, вид модуляции – КАМ-16.

Кодирование и декодирование – сверточное. При осуществлении операций кодирования и декодирования на основе алгоритма Витерби рекомендуется использовать учебное пособие [7].

3.1. Источник сообщения

Источник сообщения (ИС) вырабатывает реализации $a(t)$ стационарного случайного процесса $A(t)$ типа квазибелого шума с параметрами a_{\min} , a_{\max} и f_B . Мгновенные значения сообщения равновероятны в интервале от значения a_{\min} до значения a_{\max} .

Требуется:

1. Написать аналитические выражения для плотности вероятности $w(a)$ мгновенных значений сообщения, функции распределения $F(a)$ и построить их графики.

2. Рассчитать математическое ожидание $\bar{A}(t)$ и дисперсию $D\{A(t)\}$ сообщения $A(t)$.

3. Написать аналитическое выражение для спектральной плотности мощности $G_A(f)$ сообщения $A(t)$ и построить график.

4. Найти аналитическое выражение для корреляционной функции $B_A(\tau)$ сообщения $A(t)$ и построить график. По форме графика $B_A(\tau)$ определить, является ли сообщение $A(t)$ эргодическим случайным процессом или не является таковым.

3.2. Аналого-цифровой преобразователь

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) преобразует реализации аналогового (непрерывного) сообщения $A(t)$ в цифровую форму, в поток двоичных символов: нулей и единиц, т. е. в последовательность прямоугольных импульсов, где «0» имеет нулевое напряжение, а «1» – прямоугольный импульс положительной полярности. Амплитуда импульсов U равна 1В.

Преобразование аналогового сигнала в цифровую форму осуществляется в *три* этапа.

На *первом* этапе производится дискретизация реализации $a(t)$ сообщения $A(t)$ по времени. В моменты времени t_i берутся непрерывные по уровню отсчеты $a(t_i)$ мгновенных значений реализации $a(t)$. Расстояние

между отсчетами равно интервалу Δt , величина которого определяется в соответствии с теоремой Котельникова:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_d}; f_d = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_B, \quad (1)$$

где f_d – частота дискретизации.

На *втором* этапе выполняется квантование точных отсчетов $a(t_i)$ по уровню. Для этого интервал Δ , равный разности $\Delta = a_{\text{макс}} - a_{\text{мин}}$, разбивается на уровни квантования с постоянным шагом $\Delta a = 0,1 \text{ В}$. Уровни квантования нумеруются целыми числами $0, 1, 2, 3, \dots, L$. Нумерация уровней начинается с уровня, которому соответствует значение $a_{\text{мин}}$, и заканчивается на уровне, которому соответствует значение $a_{\text{макс}}$. Обычно величина шага квантования Δa выбирается так, чтобы число уровней квантования L можно представить в виде $L = 2^k$, где k – целое число.

Каждый аналоговый отсчет $a(t_i)$ заменяется значением ближайшего к нему уровня квантования j в виде целого числа, удовлетворяющего неравенству $0 \leq j \leq L-1$. Получаем квантованный отсчет $j_{10}(t_i)$ в виде целого числа в десятичной форме счисления.

На *третьем* этапе число $j_{10}(t_i)$ в десятичной форме переводится в двоичную форму счисления $j_2(t_i)$ в виде последовательности k двоичных символов и на выходе АЦП появляется сигнал в виде двоичной цифровой последовательности k информационных символов.

Требуется:

1. Рассчитать интервал дискретизации Δt для получения непрерывных отсчетов $a(t_i)$ реализации $a(t)$, $t_i = i \cdot \Delta t$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
2. Рассчитать частоту дискретизации f_d .
3. Определить число уровней квантования L .
4. Рассчитать мощность шума квантования $P_{\text{шк}}$ и сравнить ее с мощностью непрерывного сообщения $A(t)$.
5. Найти минимальное число k двоичных разрядов, требуемое для записи в двоичной форме любого номера j из $L-1$ номеров уровней квантования.
6. Записать k -разрядное двоичное число, соответствующее заданному уровню квантования j .

7. Начертить временную диаграмму отклика АЦП $b_{\text{АЦП}}(t)$ на заданный уровень квантования j в виде последовательности импульсов, сопоставляя *единичным* символам прямоугольные импульсы положительной полярности, а *нулевым* – нулевые напряжения. Амплитуда импульсов U равна $2h$ В. Над импульсами надписать значения соответствующих двоичных информационных символов (ДИС). Длительность отклика АЦП на каждый отсчет не должна превышать интервала дискретизации Δt .

3.3. Кодер

Используется помехоустойчивый сверточный код. Выбрать структурную схему сверточного кодера в [7].

Требуется:

1. Задать следующие параметры сверточного кодера:

степень кодирования $k/n = 1/2$;

длину кодового ограничения $K = 3$;

векторы связи $\bar{g}_1 = 111$ и $\bar{g}_2 = 101$;

импульсная характеристика $h(k)$ задается информационной последовательностью 111011000..., где k – номер тактового интервала. В [7] импульсная характеристика обозначена $g(t)$, а в контрольной работе используем обозначение $h(t)$;

кодирование расстояние d .

2. В [7] определить и изобразить структурную схему кодера, соответствующую заданным параметрам.

3. Изобразить решетчатую диаграмму сверточного кодера от момента времени t_1 до момента времени t_{13} . Решетчатая диаграмма строится аналогично диаграмме на рис. 9 в [7, с. 21].

4. По решетчатой диаграмме сверточного кодера определить последовательность кодовых символов (КС) \underline{u} на выходе кодера при условии, когда на вход кодера поступает 9-разрядная двоичная последовательность информационных символов (ИС) \underline{m} , соответствующая заданному уровню квантования j (разд. 3.2, п. 6).

5. На решетчатой диаграмме кодера отметить путь, соответствующий полученным КС (разд. 4.3, табл. 2).

3.4. Формирователь модулирующих символов

Требуется:

1. Изобразить сигнальное созвездие для заданного вида модуляции.

2. Изобразить график реализации $c(t)$ случайного процесса $C(t)$ с выхода блока сверточного кодера (К) на входе блока ФМС на первых 16 бинарных интервалах длительностью T_B . Написать аналитическое выражение для случайного процесса $C(t)$.

3. В соответствии с сигнальным созвездием модулятора КАМ-16 или КФМ-4 изобразить для входной реализации $c(t)$ графики реализаций $i(t)$ и $q(t)$ на выходе блока ФМС случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$ на символьных интервалах длительностью T_S . Написать аналитические выражения для случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$.

4. Написать аналитические выражения для корреляционной функции $B_C(\tau)$ и спектральной плотности мощности $G_C(\omega)$ входного случайного процесса $C(t)$ и построить графики этих функций.

5. Написать аналитические выражения для корреляционных функций $B_I(\tau)$ и $B_Q(\tau)$, спектральных плотностей мощности $G_I(\omega)$ и $G_Q(\omega)$ случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$. Построить графики этих функций.

6. Сравнить графики корреляционных функций и спектральных плотностей мощности сигналов на входе и выходе блока ФМС. Привести краткое описание результатов сравнения и, используя общие положения теории преобразования Фурье, пояснить, почему спектр выходных сигналов уже спектра входного сигнала.

3.5. Модулятор

В состав модулятора входят блоки-перемножители, инвертор и сумматор, на выходе которого получаем сигнал заданного вида модуляции КАМ-16 или КФМ-4. По аналогии с графиками на рис. 4, разд. 4.6, построить графики для своего варианта курсовой работы.

Требуется:

1. Аналогично рис. 4, г, д в разд. 4.6 построить графики гармонических колебаний $\cos \omega_C t$ и $\sin \omega_C t$ на четырех символьных интервалах T_S ($n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$). При этом на символьном интервале длительностью T_S укладывается два периода частоты ω_C .

2. На этих же интервалах T_S нарисовать графики сигналов

$$\sum_{n=0}^3 I_n g_2(t - nT_S) \cos \omega_C t;$$

$$\sum_{n=0}^3 Q_n g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t;$$

$$- \sum_{n=0}^3 Q_n g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t$$

по аналогии с рис. 4, е–з в разд. 4.6.

3. На этих же интервалах T_S изобразить график сигнала заданной квадратурной модуляции $\sum_{n=0}^3 U_n \cos(\omega_C t + \theta_n)$ на выходе *сумматора* в квадигармонической форме аналогично рис. 4, и в разд. 4.6, выделив из полученной суммы четыре слагаемых с номерами $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$. Фазы θ_n определять по сигнальному созвездию.

4. Написать аналитические выражения для корреляционных функций $B_{I\cos}(\tau)$, $B_{Q\sin}(\tau)$ для случайных сигналов $I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)$ и $Q(t) \cdot \sin(\omega_C t + \varphi_C)$ на выходах *перемножителей*, где φ_C случайная фаза с равномерной плотностью вероятности на интервале $0 \dots 2\pi$. Случайная фаза φ_C не зависит от случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$.

5. Написать аналитические выражения для корреляционной функции сигнала $B_S(\tau)$ и для спектральной плотности мощности $G_S(\omega)$ сигнала $s(t)$ заданного вида квадратурной модуляции на выходе *сумматора*. Построить графики этих функций.

3.6. Непрерывный канал

В КР непрерывный канал (НК) рассматривается практически по той же методике, как в предыдущей КР [14].¹

Передача сигнала $s_{\text{КАМ}}(t)$ происходит по непрерывному неискажающему каналу с постоянными параметрами в присутствии аддитивной помехи типа гауссовского белого шума. Сигнал на выходе такого канала имеет вид

$$z(t) = \mu \cdot s_{\text{КАМ}}(t) + n(t), \quad (2)$$

где μ – коэффициент передачи канала. Для всех вариантов $\mu = 1$. Односторонняя спектральная плотность мощности помехи равна N_0 , (значения N_0 для своего варианта в исходных данных).

Требуется:

1. Определить минимально необходимую ширину полосы частот непрерывного канала F_k .

¹ Смирнов, Г. И. Теория электрической связи. Методические указания к курсовой работе / Г. И. Смирнов, В. Ф. Кушнир. – Санкт-Петербург, 1999.

2. Определить мощность помехи P_{Π} на выходе канала.
3. Определить P_c среднюю мощность сигнала $s_{\text{КАМ}}(t)$ и найти отношение P_c/P_{Π} .
4. Рассчитать пропускную способность C (за секунду) непрерывного канала.
5. Оценить эффективность использования пропускной способности непрерывного канала.

3.7. Демодулятор

Требуется:

1. Изобразить структурную схему когерентного демодулятора, оптимального по критерию максимального правдоподобия для заданного сигнала квадратурной модуляции.
2. Написать алгоритмы работы решающих устройств РУ1 и РУ2 в составе когерентного демодулятора.
3. Определить вероятности ошибок на выходах РУ1 и РУ2 при определении значений символов I_n и Q_n , равных $h, -h, 3h, -3h$:

$$p_{I_n=h}(\text{ош.п}) = p_{I_n=-h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=-h}(\text{ош.п});$$

$$p_{I_n=3h}(\text{ош.п}) = p_{I_n=-3h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=3h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=-3h}(\text{ош.п}),$$

где $p_{I_n=h}(\text{ош.п})$ – обозначение вероятности ошибочного приема, если $I_n = h$.

4. На четырех символьных интервалах длительностью T_S нарисовать сигналы на выходах РУ1 и РУ2 демодулятора, соответствующие сигналам на выходе блока ФМС, которые поступают на два входа преобразователя параллельного кода в последовательный код. Под двумя построенными графиками, используя сигнальное созвездие для заданного вида модуляции, изобразить график сигнала на выходе преобразователя в виде соответствующей последовательности прямоугольных импульсов длительностью T_B (разд. 4.5).

5. Определить вероятности ошибок на выходах РУ1 и РУ2 для значений сигналов I_n и Q_n , равных $h, -h, 3h, -3h$, при условии $h = 1$:

$$p_{I_n=h}(\text{ош.п}) = p_{I_n=-h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=-h}(\text{ош.п});$$

$$p_{I_n=3h}(\text{ош.п}) = p_{I_n=-3h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=3h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=-3h}(\text{ош.п}).$$

6. Определить вероятности ошибок на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код (ФМС) для заданных параметров сигналов I_n и Q_n :

$$p_{I_n=h}(\text{ош.п}) = p_{I_n=-h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=h}(\text{ош.п}) = p_{Q_n=-h}(\text{ош.п}).$$

7. Определить среднюю вероятность ошибки на выходе преобразователя.

3.8. Декодер

1. Изучить алгоритм сверточного декодирования по методу Витерби [7, с. 23–37].

2. Используя табл. 2, написать численные значения принятых кодовых символов (ПКС). Выписанные численные значения образуют последовательность \bar{Z} , соответствующую последовательности \bar{Z} (11) в [7, с. 24]. Один символ в последовательности \bar{Z} принят ошибочно и в процессе декодирования эту ошибку необходимо исправить. Для своего варианта порядковый номер символа q находим в данных КР и отмечаем крестиком.

Требуется:

1. Построить решетчатую диаграмму декодера последовательности \bar{Z} по аналогии с решетчатой диаграммой декодера [7, рис. 10]. Численные обозначения над ребрами решетчатой диаграммы определяются для последовательности \bar{Z} своего варианта.

2. Построить диаграммы выживших путей от момента времени t_1 до момента времени t_{k+2} по аналогии с решетчатыми диаграммами [7, рис. 11–17], когда от момента t_1 до момента t_k выживает только *один* путь.

3. Перенести *один* выживший путь от момента времени t_1 до момента t_k с решетчатой диаграммы декодера на решетчатую диаграмму кодера. По этому пути на диаграмме кодера определить те кодовые символы, которые поступали на вход сверточного кодера и передавались по каналу связи от момента t_1 до момента t_k , соответствующие принятым кодовым символам с учетом исправленной ошибки.

Проследить по диаграмме, что ошибка, отмеченная крестиком, исправлена.

4. По выжившему пути, перенесенному на решетчатую диаграмму кодера, определить *соответствие* информационным символам \bar{m} , которые поступали на вход сверточного кодера, принятых кодовых символов с учетом исправленной ошибки.

4. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КР

4.1. Источник сообщений

1. Для отыскания плотности вероятности $w(x)$ нужно исходить из условия равновероятности мгновенных значений сообщения в интервале $\Delta = a_{\text{макс}} - a_{\text{мин}}$. Внутри этого интервала $w(x)$ определяется из условия

нормировки, вне интервала $w(x)$ принимает значение равное нулю [1, с. 27–35; 8, с. 108–110].

2. Функция распределения связана с плотностью вероятности интегральным соотношением $F(x) = \int_{-\infty}^x w(a)da$ [1, с. 27–35; 8, с. 108–110].

3. Способы определения математического ожидания $M[X(t)]$ и дисперсии $D[X(t)]$ [1, с. 27–35; 8, с. 111–112].

4. Для расчета функции корреляции $B_C(\tau)$ и спектральной плотности мощности $G_C(f)$ случайного синхронного телеграфного сигнала [1, с. 27–43; 8, с. 112–123], а также при выполнении пп. 1–4 использовать разд. 4.4.

4.2. Аналого-цифровой преобразователь

1. Интервал дискретизации Δt определяется на основе теоремы отсчетов [1, с. 64–69].

2. Число уровней квантования L определяется по формуле

$$L = \frac{a_{\text{макс}} - a_{\text{мин}}}{\Delta a}.$$

Параметры $a_{\text{макс}}$, $a_{\text{мин}}$ и Δa обычно подбираются так, чтобы число L было равно 2^k , где k – целое число. Величина k удовлетворяет неравенству $k \geq \log_2 L$, т. е. определяет число разрядов в двоичной последовательности, соответствующей заданному уровню квантования.

Пример: $m = 71$, тогда номер уровня квантования $j = 500 - 3 \cdot m = 287$.

3. При расчете мощности шума квантования следует исходить из свойства равномерного распределения на интервале Δa [1, с. 87–89].

4. Для перевода числа 287 в двоичную форму можно использовать два способа:

а. Число 287 можно представить в виде следующей суммы:

$287 = a_8 \cdot 2^8 + a_7 \cdot 2^7 + a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, где коэффициенты $a_8, a_7, a_6 \dots a_0$ могут принимать только два значения – «0» или «1». В результате имеем

$$287 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Из этого равенства, выписав численные значения коэффициентов, получим двоичную последовательность 1 0 0 0 1 1 1 1 1, соответствующую числу 287.

б. Эту же двоичную последовательность получаем в результате деления на 2 числа 287 и, получаемых частных

```

_287|_2_
_286_143|_2_
  1_142_71|_2_
    1_70_35|_2_
      1_34_17|_2_
        1_16_8|_2_
          1_8_4|_2_
            0_4_2|_2_
              0_2_1|_2_
                0_0_0
                  1

```

Записанные в обратном порядке остатки от деления образуют такую же двоичную последовательность 100011111, как в случае а.

По необходимости заполнить нулями старшие разряды числа.

В КР двоичная последовательность для любого отсчета должна содержать 9 двоичных символов.

5. При выполнении временной осциллограммы отклика АЦП $b_{\text{АЦП}}(t)$ на уровень с заданным номером j следует использовать уровни напряжения интерфейса *Centronics*. Амплитуда U импульсов равна 1В.

4.3. Кодер

1. При осуществлении операций кодирования и декодирования на основе алгоритма Витерби рекомендуется использовать учебное пособие [7].

При кодировании выполнить задание разд. 3.3, пп. 1–5, т. е. в [7] выбрать сверточный кодер, нарисовать его структурную схему, а также и решетчатую диаграмму кодера [7, рис. 9, с. 21].

Например, № варианта КР $m = 71$. Заданному уровню квантования j соответствует $\bar{m} \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$ двоичная информационная последовательность, поступающая на вход сверточного кодера. В первой строке табл. 2 указать информационные символы ИС \bar{m} по заданию уровня j . Во вторую строку табл. 2 записать полученные кодовые символы КС \bar{u} на выходе сверточного кодера по решетчатой диаграмме кодера в разд. 3.3, п. 3.

На решетчатой диаграмме кодера отметить путь, соответствующий кодовым символам второй строки табл. 2.

Таблица 2

Информационные символы (ИС) \bar{m}	1	0	0	0	1	1	1	1	1
Кодовые символы (КС) \bar{u}	11	10	11	00	11	01	10	10	10

С выхода сверточного кодера К кодовые символы КС \bar{u} поступают на вход блока ФМС.

Рассмотрим использование решетчатой диаграммы кодера при кодировании на примере.

Пусть m – номер варианта КР, $m = 71$. Получена последовательность информационных символов ИС $\bar{m} = 100011111$, соответствующая номеру уровня квантования $j = 287$. Построим решетчатую диаграмму кодера рис. 2, аналогично в [7, рис. 9].

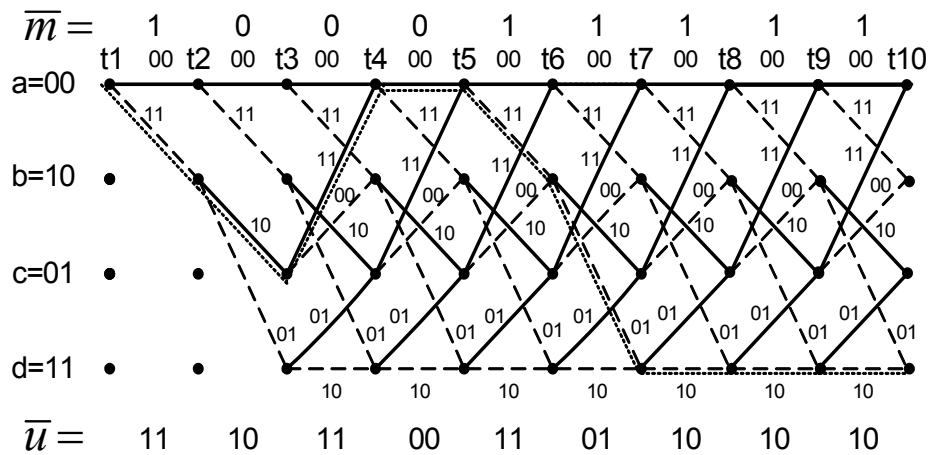


Рис. 2. Решетчатая диаграмма кодера

Над решетчатой диаграммой кодера сверху выписываем символы ИС \bar{m} по одному символу над каждым ребром. По правилам, изложенным в [7, с. 18, 19], последовательно, начиная с момента времени t_1 для каждого информационного символа ИС, определяем два кодовых символа КС. Последовательность КС обозначим \bar{u} , т. е. $\bar{u} = 11\ 10\ 11\ 00\ 11\ 01\ 10\ 10\ 10$.

Под решетчатой диаграммой запишем по два символа под каждым ребром диаграммы этой последовательности \bar{u} .

Весь путь, соответствующий кодированию, обозначить другим цветом (например, красным).

4.4. ССТС

Для определения вероятностных характеристик случайных сигналов на входе и выходе блока ФМС рассмотрим случайный синхронный телеграфный сигнал $X(t)$ и его вероятностные характеристики.

На рис. 3 изображена реализация $x_1(t)$ случайного процесса $X(t)$ под названием «случайный синхронный телеграфный сигнал». На вход ФМС этот сигнал поступает с выхода кодера К.

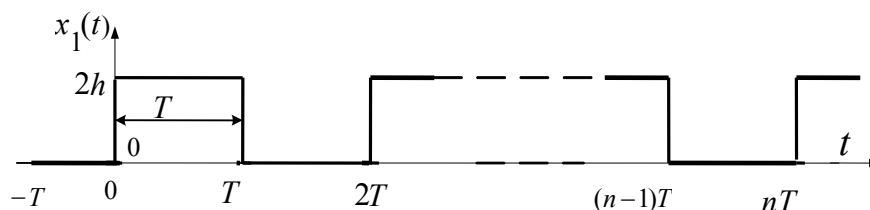


Рис. 3. Возможная реализация случайного сигнала $X(t)$

В [7, с. 11] амплитуда прямоугольных импульсов обозначена $U = 1\text{В}$. В целях последующего определения корреляционной функции случайного процесса $X(t)$ амплитуду U удобно обозначить $2h$.

Случайный сигнал $X(t)$ обладает следующими свойствами:

1. Случайный процесс $X(t)$ в дискретные моменты времени, разделенные интервалом T , принимает значения 0 и $2h$ с вероятностью 0,5 каждое, независимо от того, какое значение имел сигнал на предыдущем участке длительностью T .

Определим функцию распределения вероятности $F(x)$, характеризующую случайный процесс $X(t)$. Исходя из определения функции $F(x) = P\{X(t) \leq x\}$, где $P\{X(t) \leq x\}$ есть вероятность того, что случайный процесс $X(t)$ принимает значения меньшие или равные заданной величине x , и, используя значения данных $x = 0, 2h$ в п. 1, строим график функции $F(x)$, изображенный на рис. 4, а.

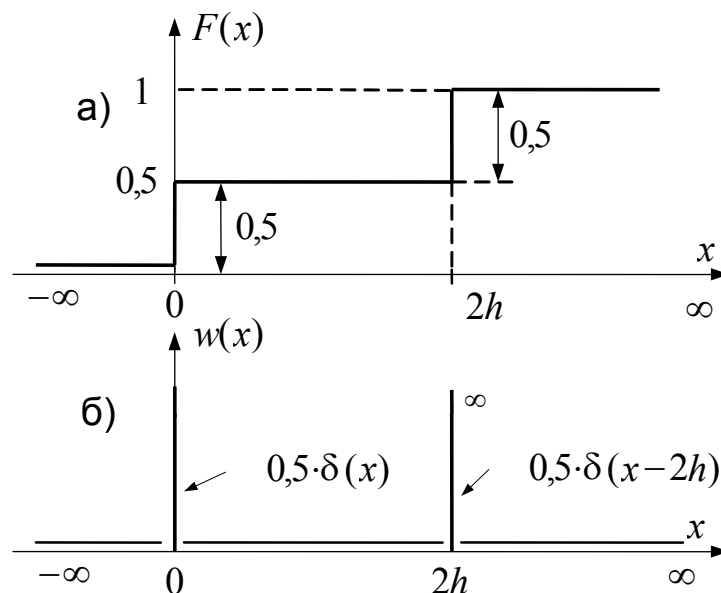


Рис. 4. Законы распределения случайного телеграфного сигнала:

а) функция распределения вероятности $F(x)$;

б) плотность вероятности $w(x)$

График функции $F(x)$ построен на основе определения функции $F(x)$ и свойств случайного процесса $X(t)$, отмеченных в п. 1.

Действительно, когда $x < 0$, вероятность $P\{X(t) < 0\} = 0$, так как заданный сигнал значений, меньших $x = 0$, не принимает. Поэтому $F(x) = 0$ для значений $x < 0$. Когда $x = 0$, вероятность $P\{X(t) = 0\} = 0,5$, так как сигнал $X(t)$ принимает значение $x = 0$ с вероятностью 0,5. Поэтому кривая $F(x)$ в точке $x = 0$ скачком изменяется с нулевого уровня до уровня 0,5.

В интервале $0 < x < 2h$ сохраняется вероятность $P\{X(t) \leq x\} = 0,5$ для любого x из этого интервала, так как в этом интервале сигнал не принимает никаких значений, поэтому $F(x) = P\{X(t) \leq x\} = 0,5$.

Когда $x = 2h$, вероятность $P\{X(t) \leq 2h\} = 1$, так как значение $x = 2h$ сигнал принимает с вероятностью 0,5 и значение $x = 0$ также с вероятностью 0,5. Отсюда $P\{X(t) \leq 2h\} = 1$. Поэтому в точке $x = 2h$ функция $F(x)$ скачкообразно изменяется еще раз на величину 0,5, достигая значения, равного 1. Поскольку $F(x)$ не может принимать значения больше 1 и не может убывать при увеличении аргумента x , имеем $F(x) = 1$ при значениях $x > 2h$.

2. Как известно, плотность вероятности $w(x)$ случайного процесса $X(t)$ связана с функцией $F(x)$ формулой $w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Вычисляя производную от кривой $F(x)$ (рис. 4, а), получим график плотности вероятности $w(x)$ (рис. 4, б). На тех интервалах на оси x , на которых дифференцируемая функция $F(x)$ постоянна, производная равна нулю и только в точках $x = 0$ и $x = 2h$, где функция $F(x)$ имеет разрывы непрерывности 1-го рода, производная отличается от нуля. Из теории обобщенных функций известно, что величина производной в этих точках равна δ -функции, умноженной на численный коэффициент, равный величине скачка дифференцируемой функции $F(x)$. Согласно рис. 4, б аналитическое выражение для функции $w(x)$ имеет вид

$$w(x) = 0,5\delta(x) + 0,5\delta(x - 2h), \quad (3)$$

т. е. представляет собой сумму двух δ -функций. Видно, что найденная плотность вероятности удовлетворяет условию нормировки, так как каждая δ -функция в (3) ограничивает площадь, равную 0,5.

3. Определим математическое ожидание процесса $X(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{X(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot [0,5\delta(x) + 0,5\delta(x - 2h)] \cdot dx = \\ &= 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x) dx + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x - 2h) dx = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2h = 0 + h = h. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученный результат означает, что процесс $X(t)$ не является центрированным случайным процессом, так как $\overline{X(t)} \neq 0$. Центрированный процесс $\overset{\circ}{X}(t)$ будет равен

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \overline{X(t)}. \quad (5)$$

4. На рис. 5 показаны четыре произвольные реализации $\overset{\circ}{x}_1(t)$, $\overset{\circ}{x}_2(t)$, $\overset{\circ}{x}_3(t)$ и $\overset{\circ}{x}_4(t)$ центрированного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$.

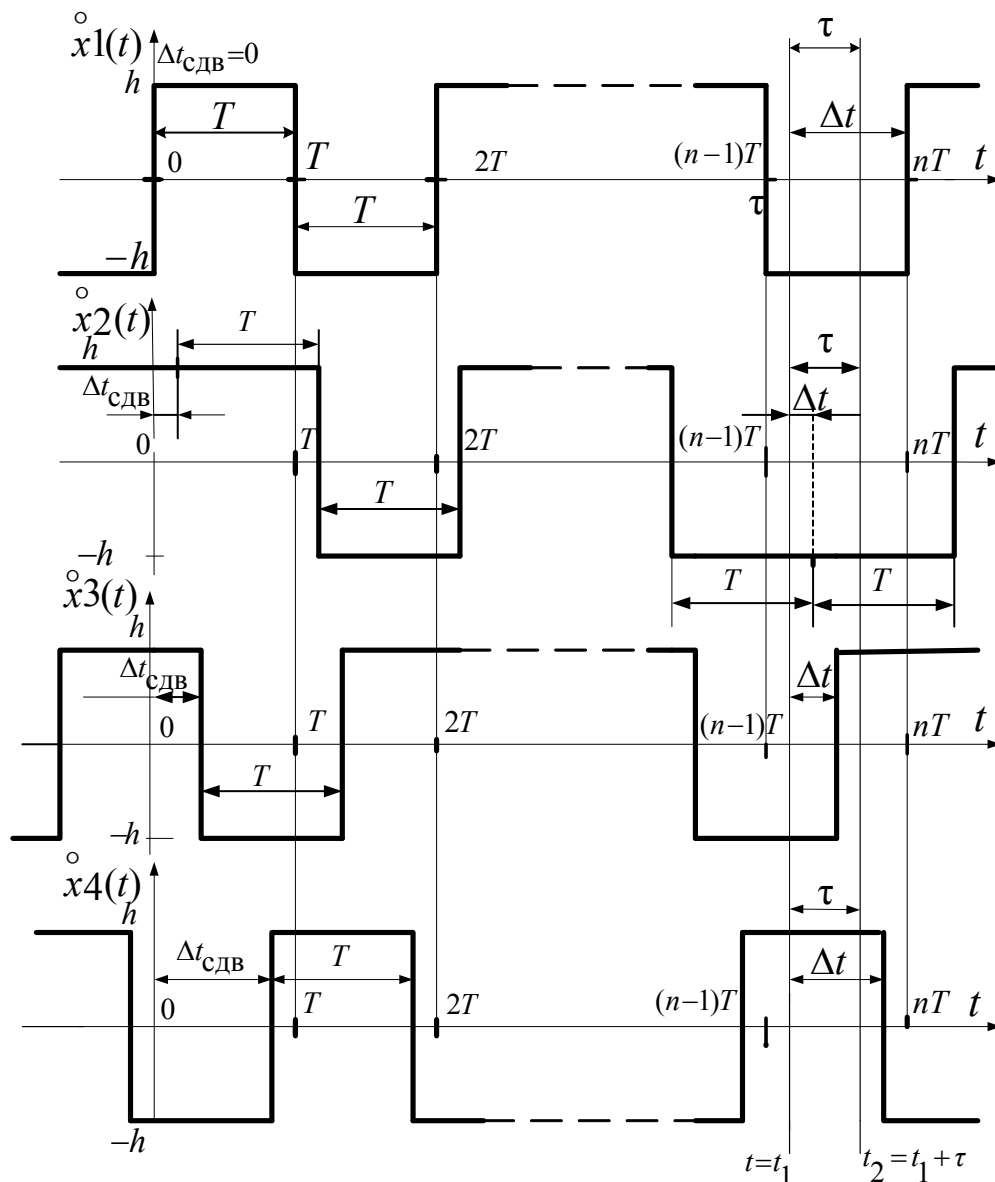


Рис. 5. Реализации случайного сигнала $\overset{\circ}{X}(t)$

Границы тактовых интервалов для первой реализации $\overset{\circ}{x}_1(t)$ обозначены $0, T, 2T, \dots, (n-1)T, nT, \dots$, и эти же моменты времени обозначены на

графиках других реализаций. На рис. 5 видно, что границы тактовых интервалов у разных реализаций не совпадают, т. е. любой момент времени на интервале $0...T$ может с *равной вероятностью* оказаться моментом начала такта для других реализаций: $\overset{\circ}{x}_2(t)$, $\overset{\circ}{x}_3(t)$, $\overset{\circ}{x}_4(t)$ и т. д.

Таким образом, интервал времени $\Delta t_{\text{сдв}}$ между точкой ($t = 0$) и началом тактового интервала есть случайная величина, *равномерно* распределенная на интервале $0...T$.

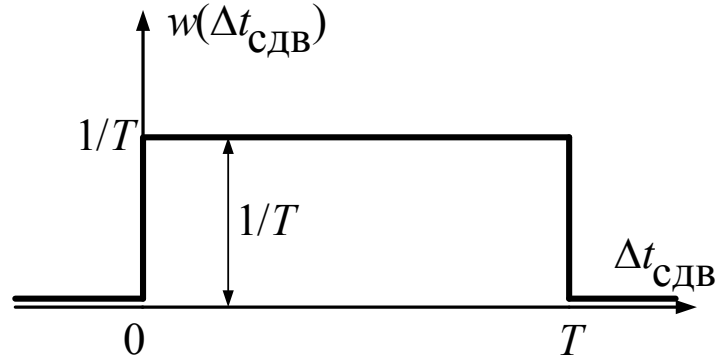


Рис. 6. График плотности вероятности $w(\Delta t_{\text{сдв}})$

График *плотности вероятности* этой случайной величины изображен на рис. 6.

Корреляционная функция $B_X(t_1, t_2)$ для сигнала $X(t)$ определяется по формуле

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}. \quad (6)$$

Определим $B_X(t_1, t_2)$ для двух случаев: а) $\tau = t_2 - t_1 > T$; б) $\tau = t_2 - t_1 < T$.

а) Если $\tau = t_2 - t_1 > T$, то моменты времени t_1 и t_2 в каждой реализации принадлежат *разным* тактовым интервалам. В случае а) случайная величина $\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)$ будет равна произведению двух *независимых* случайных величин $\overset{\circ}{X}(t_1)$ и $\overset{\circ}{X}(t_2)$. Как известно, математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей, т. е. $\overline{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)} \cdot \overline{\overset{\circ}{X}(t_2)}$. Поскольку данный процесс $\overset{\circ}{X}(t)$ является *центрированным* (т. е. $\overline{\overset{\circ}{X}(t_1)} = \overline{\overset{\circ}{X}(t_2)} = 0$), то из (6) при $\tau = t_2 - t_1 > T$ следует

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)} \cdot \overline{\overset{\circ}{X}(t_2)} = 0 \cdot 0 = 0. \quad (7)$$

б) Если $\tau = (t_2 - t_1) < T$, то моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ для одной части реализаций ансамбля $\overset{\circ}{X}(t)$ будут принадлежать одному тактовому интервалу, а для другой части реализаций ансамбля $\overset{\circ}{X}(t)$ моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ будут принадлежать соседним тактовым интервалам.

На рис. 5 проведены две вертикальные линии, пересекающие все реализации, левой линии соответствует момент времени $t = t_1$, а правой линии – момент времени $t = t_2$. Расстояние между вертикальными линиями обозначено через $\tau = (t_2 - t_1) < T$. Все реализации из ансамбля случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ в данном случае можно разделить на две группы: A и B .

В группу A введем все реализации, у которых моменты времени t_1 и t_2 принадлежат *одному* тактовому интервалу. В эту группу из четырех реализаций (рис. 5) попадут реализации: $\overset{\circ}{x}_1(t)$ и $\overset{\circ}{x}_4(t)$.

В группу B введем все реализации, у которых моменты времени t_1 и t_2 принадлежат *разным* (соседним) тактовым интервалам. В эту группу попадут реализации: $\overset{\circ}{x}_2(t)$ и $\overset{\circ}{x}_3(t)$.

Математическое ожидание случайной величины $\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)$ по всему ансамблю случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ получим, если вначале отдельно найдем математические ожидания этого произведения по реализациям группы A и по реализациям группы B , а затем найденные математические ожидания усредним по обеим группам. Тогда

$$\frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{(\text{по } A \text{ и } B)} = \frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{(\text{по } A)} \cdot P(A) + \frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{(\text{по } B)} \cdot P(B), \quad (8)$$

где $P(A)$ и $P(B)$ – вероятности того, что реализация войдет, соответственно, в группу A или группу B .

Определим $\frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{(\text{по } A)}$. Для любой реализации $\overset{\circ}{x}_k(t)$, попавшей в группу A , произведение $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = h^2$. Например:

если $k = 1$, то произведение $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = (-h) \cdot (-h) = h^2$;

если $k = 4$, то произведение $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = h \cdot h = h^2$ и т. д.

Таким образом, получим

$$\overbrace{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}^{(\text{по } A)} = h^2. \quad (9)$$

Величина $\overbrace{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}^{(\text{по } B)}$ определяется аналогично, но при этом надо учитывать, что у реализации группы B моменты времени t_1 и t_2 принадлежат *разным* тактовым интервалам, поэтому случайные величины $\overset{\circ}{X}(t_1)$ и $\overset{\circ}{X}(t_2)$ из группы B будут *независимы*, что позволяет написать:

$$\overbrace{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}^{\text{по } (B)} = \overbrace{\overset{\circ}{X}(t_1)}^{(\text{по } B)} \cdot \overbrace{\overset{\circ}{X}(t_2)}^{(\text{по } B)} = 0 \cdot 0 = 0. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) = h^2 \cdot P(A) + 0 \cdot P(B) = h^2 \cdot P(A). \quad (11)$$

Для определения вероятности $P(A)$ на каждой реализации (рис. 5) введем интервал Δt , равный расстоянию от момента $t = t_1$ до ближайшего момента времени, при котором *может* произойти изменение знака реализации. На рис. 5 видно, что каждая реализация имеет свою величину этого интервала и поэтому интервал Δt есть величина случайная. Если момент времени $t = 0$ перенести в точку момента времени $t = t_1$, то по смыслу величина интервала Δt заменится на величину интервала $\Delta t_{\text{сдв}}$ на рис. 5. Следовательно, величина интервала Δt есть случайная величина, имеющая ту же плотность вероятности $w(\Delta t)$, что и случайная величина $\Delta t_{\text{сдв}}$, т. е. равномерную (рис. 7).

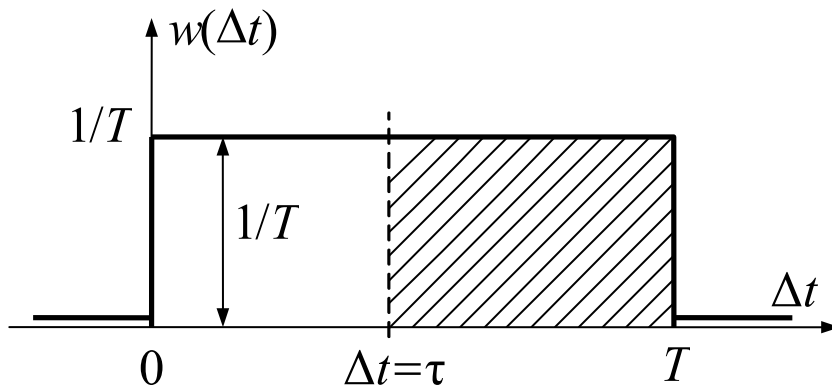


Рис. 7. Плотность вероятности случайной величины Δt

На рис. 5 видно, что для всех реализаций группы A выполняется неравенство

$$\Delta t > \tau, \quad (12)$$

где τ – известная детерминированная величина $\tau = t_2 - t_1$.

Неравенство (12) является формальным (математическим) признаком того, что реализация $x_1(t)$ или $x_4(t)$ принадлежит группе A . Для реализаций группы B аналогичным признаком является выполнение неравенства

$$\Delta t < \tau. \quad (13)$$

Таким образом, вероятность $P(A)$ равна вероятности выполнения неравенства (12), т. е.

$$P(A) = P(\Delta t \geq \tau). \quad (14)$$

Зная плотность вероятности $w(\Delta t)$ (рис. 7), можно найти величину $P(\Delta t \geq \tau) ::$

$$P(A) = P(\Delta t \geq \tau) = \int_{\Delta t=\tau}^{\infty} w(\Delta t) d(\Delta t) = \int_{\tau}^T \frac{1}{T} d(\Delta t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau}^T d(\Delta t) = \frac{1}{T} \cdot (T - \tau) = 1 - \frac{\tau}{T}. \quad (15)$$

При вычислении интеграла (15) верхний предел интегрирования, равный ∞ , заменяем конечной величиной T , так как при значениях $\Delta t \geq T$ подынтегральная функция $w(\Delta t)$ (рис. 7) равна нулю. Таким образом, $P(A) = P(\Delta t \geq \tau)$ равна той части площади прямоугольника, которая на рис. 7 обозначена штриховкой. Аналогично, используя неравенство (13), можно найти величину $P(B)$. Подставляя величину $P(A) = P(\Delta t \geq \tau)$ в (11) при $\tau \leq T$, запишем корреляционную функцию

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{\dot{X}(t_1) \cdot \dot{X}(t_2)} = h^2 \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}\right). \quad (16)$$

Правая часть (16) зависит только от $\tau = t_2 - t_1$, т. е. $B_X(t_1, t_2) = B_X(\tau)$. Учитывая это свойство корреляционной функции, а также то, что $\overline{X(t)} = h$ (т. е. математическое ожидание не зависит от времени t), делаем вывод, что рассматриваемый процесс $X(t)$ является *стационарным* процессом в широком смысле. Используя (7) и (16), можно построить график функции $B_X(\tau)$ при $\tau \geq 0$ (рис. 8).

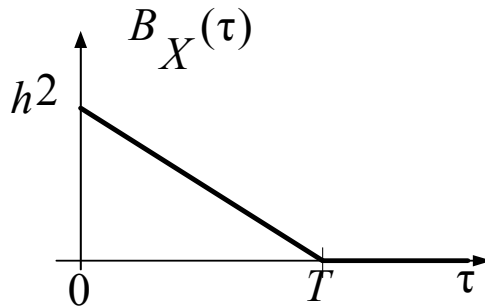


Рис. 8. График $B_X(\tau)$ при $\tau \geq 0$

На интервале $0 \dots T$ график $B_X(\tau)$ имеет форму прямой линии, имеющей отрицательный наклон, проходящий через точку h^2 на оси ординат, и точку T на оси абсцисс.

Линейная зависимость графика (рис. 8) с отрицательным наклоном объясняется тем, что аргумент τ входит в (16) в первой степени и перед ним стоит знак «минус».

Стационарность процесса $X(t)$ позволяет продолжить кривую $B_X(\tau)$ в область отрицательных значений $\tau < 0$, используя свойство симметрии корреляционной функции стационарного процесса.

Аналитическое выражение для корреляционной функции $B_X(\tau)$, справедливое, как для значений $\tau > 0$, так и для значений $\tau < 0$, имеет вид

$$B_X(\tau) = \begin{cases} h^2 \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & \text{при } |\tau| \leq T; \\ 0, & \text{при } |\tau| > T. \end{cases} \quad (17)$$

Корреляционной функции $B_X(\tau)$ соответствует график рис. 9.

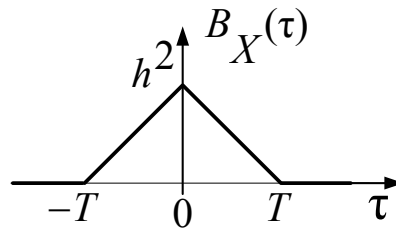


Рис. 9. График корреляционной функции $B_X(\tau)$

5. Определим *дисперсию* заданного случайного процесса $X(t)$. Известно, что дисперсия стационарного процесса равна значению корреляционной функции при значении $\tau = 0$, т. е.

$$D\{X(t)\} = B_X(0) = h^2. \quad (18)$$

Из графика рис. 9 следует, что $B_X(\tau)$ удовлетворяет следующему пределу

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_X(\tau) = 0, \quad (19)$$

что является необходимым и достаточным условием *эргодичности* данного стационарного процесса $X(t)$.

Таким образом, рассматриваемый случайный процесс является не только *стационарным*, но и *эргодическим* процессом. Тогда вероятностные характеристики, такие как математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция, могут быть определены с помощью только одной реализации из ансамбля процесса $X(t)$ путем соответствующих усреднений этой реализации по времени.

6. Для определения *спектральной плотности мощности* $G_X(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ используется теорема Винера–Хинчина, которая справедлива только для стационарных центрированных процессов.

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cdot (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cdot \cos \omega\tau d\tau. \quad (20)$$

Имеем $\int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \sin \omega\tau d\tau = 0$, поскольку $B_X(\tau)$ является четной функцией аргумента τ , а $\sin \omega\tau$ – нечетная функция τ (произведение четной функции на нечетную является нечетной функцией, а интеграл от любой нечетной функции в указанных пределах интегрирования равен нулю).

Учитывая четность подынтегральной функции в (20), а также формулу (17), вместо (20) можно написать

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} B_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2h^2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos \omega\tau d\tau = \\ &= \frac{2h^2}{\omega} \cdot \sin \omega T - \frac{2h^2}{T} \int_0^T \tau \cdot \cos \omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

Используя метод интегрирования по частям, после элементарных преобразований получим окончательный результат

$$G_X(\omega) = T \cdot h^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}. \quad (22)$$

График функции $G_X(\omega)$ представлен на рис. 10.

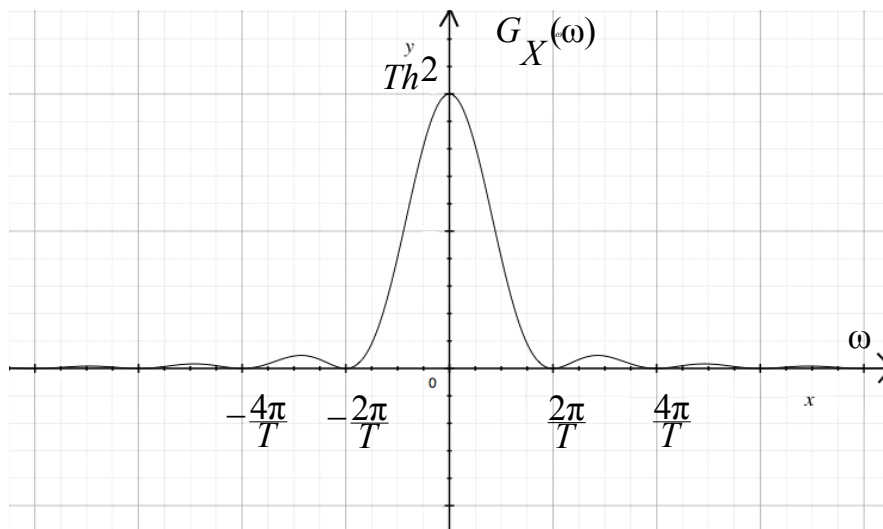


Рис. 10. Спектральная плотность $G_X(\omega)$

Функция (22) в точках $\omega = \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$ обращается в нуль, и кривая $G_X(\omega)$ при этих значениях ω касается оси абсцисс.

Основная доля мощности сигнала сосредоточена в ограниченной полосе частот вблизи частоты $\omega = 0$. Случайный синхронный телеграфный сигнал, имеющий теоретически бесконечную протяженность спектра, является нефинитным, с практической точки зрения его можно считать низкочастотным, но занимающим достаточно широкую полосу частот.

Корреляционные функции $B_I(\tau)$ и $B_Q(\tau)$ случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$ на выходе блока ФМС определяются по аналогичной методике определения корреляционной функции случайного процесса $X(t)$, поступающего на вход блока ФМС. Если необходимо найти $B_I(\tau)$, то существует небольшое отличие при определении математического ожидания произведения $I(t_1) \cdot I(t_2)$ по группе A , в которую попадают реализации случайного процесса $I(t)$ при выполнении неравенства $\tau < \Delta t$.

Во-первых, изначально, процессы $X(t)$ и $I(t)$ являются центрированными случайными процессами.

Во-вторых, поскольку реализации случайного процесса $I(t)$ в отличие от реализаций случайного процесса $X(t)$ принимают четыре дискретных значения $-3h, -h, h, 3h$ с одинаковой вероятностью $P = 0,25$, то математическое ожидание произведения $I(t_1) \cdot I(t_2)$ по группе A определяется формулой

$$\begin{aligned} \overline{I(t_1) \cdot I(t_2)} &= (-3h)^2 \cdot P(-3h) + (-h)^2 \cdot P(-h) + h^2 \cdot P(h) + (3h)^2 \cdot P(3h) = \\ &= 9h^2 \cdot 0,25 + h^2 \cdot 0,25 + h^2 \cdot 0,25 + 9h^2 \cdot 0,25 = 20h^2 \cdot 0,25 = 5h^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Корреляционная функция $B_I(\tau)$ случайного процесса $I(t)$ будет соответствовать структуре корреляционной функции $B_X(\tau)$ случайного процесса $X(t)$, определяемой выражением (17), тогда

$$B_I(\tau) = \begin{cases} 5h^2 \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_S}\right), & \text{при } |\tau| \leq T_S \\ 0, & \text{при } |\tau| > T_S \end{cases} \quad (24)$$

Отличие $B_I(\tau)$ от корреляционной функции $B_X(\tau)$ проявляется в том, что вместо множителя h^2 используется множитель $5h^2$ и вместо параметра T используется параметр T_S , где T_S – символьный интервал.

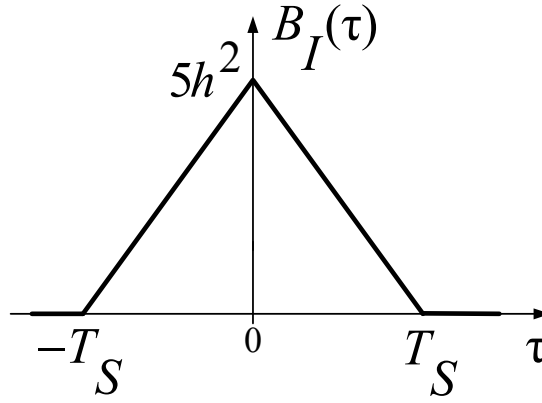


Рис. 11. График корреляционной функции $B_I(\tau)$

Случайный процесс $Q(t)$ имеет такие же вероятностные характеристики, какие имеет процесс $I(t)$, поэтому имеет место равенство

$$B_Q(\tau) = B_I(\tau). \quad (25)$$

Используя теорему Винера–Хинчина и равенство (25), получим

$$G_Q(\omega) = G_I(\omega) = T_S \cdot 5h^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_S}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_S}{2}\right)^2}. \quad (26)$$

Форма графика функций $G_Q(\omega)$ и $G_I(\omega)$ будет похожа на форму графика $G_X(\omega)$ на рис. 10. Величина главного максимума станет равной $T_S \cdot 5h^2$, и в точках $\omega = \pm \frac{2\pi}{T_S}, \pm \frac{4\pi}{T_S}, \dots$ График этих функций будет касаться оси абсцисс ω .

В случае КАМ-16 величина $T_S = 4T_B$, где T_B – бинарный интервал, и поэтому график функций $G_Q(\omega)$ и $G_I(\omega)$, оставаясь нефинитным, станет в 4 раза уже, чем график на рис. 10.

Изложенную методику определения корреляционной функции для случайного синхронного телеграфного сигнала $X(t)$ несложно обобщить и получить корреляционные функции для случайных процессов, в которых в качестве переносчиков информационных символов используются импульсы $g(t)$, форма которых отличается от прямоугольной формы. Примерами таких импульсов, используемых на практике, являются импульсы $g(t)$, форма которых похожа на форму гауссовской плотности вероятности, а также импульсы, связанные с сигналами со спектром «приподнятого косинуса».

Сигналы со спектром «приподнятого косинуса» используются в спутниковой и мобильной связи.

Например, если задан случайный процесс

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot g(t - nT), \quad (27)$$

где X_n – случайная величина, заданная на символьном интервале T_S с номером n , которая принимает известные дискретные значения с заданными вероятностями, величина их не зависит от значения n ; $g(t)$ – детерминированный импульс заданной формы (не обязательно прямоугольной), тогда корреляционная функция $B_X(\tau)$ случайного процесса $X(t)$ может быть определена как

$$B_X(\tau) = \overline{X_n^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot B_g(\tau), \quad (28)$$

где $\overline{X_n^2}$ – математическое ожидание случайной величины X_n^2 ; $\frac{1}{T}$ – частота поступления в канал связи информационных символов X_n .

Автокорреляционная функция импульса $g(t)$ определяется формулой:

$$B_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt. \quad (29)$$

4.5. ФМС или преобразователь последовательного кода в параллельный код

На рис. 12 изображен блок ФМС. С выхода кодера (К) формируются реализации случайного сигнала (процесса) $C(t)$ и поступают на вход блока ФМС. В [7] сигнал с выхода сверточного кодера представляет собой случайную последовательность однополярных прямоугольных импульсов с амплитудой $U = 1$ В. Предполагается, что этот сигнал преобразуется в последовательность биполярных прямоугольных импульсов:

- символ «1» передается импульсом положительной полярности с амплитудой h [9, с. 148] и длительностью T_B , где T_B – бинарный интервал;
- символ «0» передается импульсом отрицательной полярности. Параметр h – безразмерная величина и может принимать любые заданные значения, например $h = 1$ В.

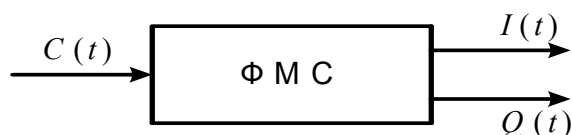


Рис. 12. Формирователь модулирующих символов (ФМС)

Блок ФМС имеет два выхода, на которых формируются выходные сигналы $I(t)$ и $Q(t)$.

Фрагмент возможной реализации $c(t)$ случайного процесса $C(t)$, соответствующий заданной последовательности двоичных (бинарных) информационных символов 1 0 1 1 0, поступающих с выхода кодера (К), представлен на рис. 13, б.

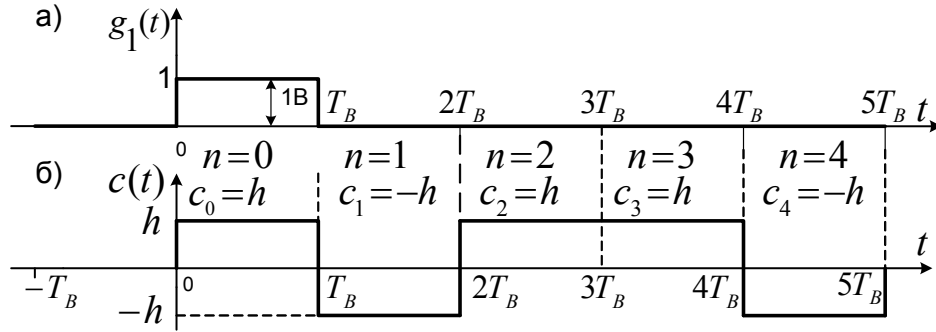


Рис. 13. Импульс $g_1(t)$ и фрагмент реализации $c(t)$

Реализацию $c(t)$ случайного процесса

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot g_1(t - nT_B) \quad (30)$$

можно представить в следующей аналитической форме

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot g_1(t - nT_B), \quad (31)$$

где $g_1(t)$ – прямоугольный импульс длительностью T_B (рис. 13, а),

$$g_1(t) = \begin{cases} 1B & \text{при } 0 \leq t \leq T_B; \\ 0B & \text{при } t < 0, t > T_B, \end{cases} \quad (32)$$

где $g_1(t - nT_B)$ – прямоугольный импульс такой же формы, как $g_1(t)$, но сдвинутый *вправо* относительно импульса $g_1(t)$ на величину nT_B , если $n > 0$, или *влево*, если $n < 0$; c_n – численный коэффициент, являющийся реализацией случайной величины C_n на n -интервале T_B .

Величина C_n принимает два дискретных значения h и $-h$ с вероятностью 0,5 каждое, т. е. $P(h) = P(-h) = 0,5$.

Если в заданной реализации $c(t)$ на n -интервале передается информационный символ «1», то $c_n = h$, если передается символ «0», то $c_n = -h$ (рис. 13, б).

Связь между входным сигналом и выходными сигналами блока ФМС характеризует сигнальное созвездие для заданного вида модуляции. Сигнальное созвездие строится в декартовой системе координат I и Q . Каждой точке (звезде) сигнального созвездия будут соответствовать численные значения координат I и Q . Существуют разные формы сигнальных со-

звездий, но наибольшее практическое применение получили созвездия квадратной формы. Примерами таких созвездий являются КАМ-16, КАМ-64, КФМ-4 и др., где цифры 16, 64 и 4 показывают количество точек в созвездии.

Слово «квадратурная» показывает, что в состав сигнала КАМ или КФМ входит сумма двух сигналов, один из которых зависит от множителя $\cos \omega_C t$, а другой – от множителя $\sin \omega_C t$. Благодаря этим множителям сигналы обладают свойством взаимной ортогональности. Про такие сигналы говорят, что они находятся в «квадратуре».

Количество точек на квадратном созвездии можно представить в виде 2^k , где $k = 2, 4, 6, 8, \dots$ – четные числа. Точкам сигнального созвездия на каждой координатной оси I и Q соответствует $M = 2^{k/2}$ дискретных значений, определяемых для каждого значения m по формуле [9, с. 148]

$$(2m - 1 - M)h, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (33)$$

где $M = 2^{k/2}$ для квадратных созвездий типа КАМ-16, КАМ-64 и т. д.

Расстояние между соседними дискретными значениями равно $2h$, где h – заданная величина. Каждой точке сигнального созвездия соответствует блок из k двоичных символов, который может появиться на входе блока ФМС.

Примеры:

1. Квадратурная амплитудная модуляция КАМ-16.

Число точек в созвездии равно 16 представим в виде $2^k = 2^4$, где $k = 4$. Определяем величину M – число дискретных значений, которые могут принимать координаты I и Q точек на сигнальном созвездии, т. е. $M = 2^{k/2} = 2^2 = 4$. Используя (33), находим значения координат точек созвездия КАМ-16 на осях I и Q :

$$-3h, -h, h, 3h. \quad (34)$$

Итак, сигнальное созвездие для КАМ-16 содержит 16 точек. Известно также, что существует $16 = 2^4$ различных блоков (последовательностей) из 4 двоичных символов, отличающихся друг от друга хотя бы одним символом (битом). Отсюда следует, что каждую точку на сигнальном созвездии можно связать с одним из 16 символьных блоков. Соответствие между 16 различными блоками из 4 символов (битов) и 16 точками сигнального созвездия можно осуществлять различными способами.

Наиболее рациональное соответствие получается при использовании так называемого *кода Грея*, когда соседним точкам на сигнальном созвездии соответствуют блоки, отличающиеся друг от друга *только одним символом*. Сигнальное созвездие для КАМ-16 изображено на рис. 14.

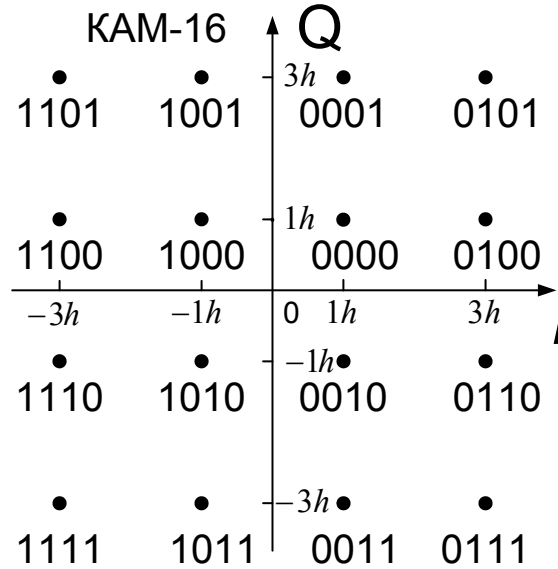


Рис. 14. Сигнальное созвездие для КАМ-16

Действительно, если при передаче сигнала с параметрами I и Q , являющимися координатами какой-либо точки сигнального созвездия, демодулятор в условиях действия флуктуационной помехи типа белого шума неверно определит величины передаваемых параметров I и Q , то наиболее вероятные ошибки будут соответствовать координатам \hat{I} и \hat{Q} тех точек сигнального созвездия, которые находятся на наименьшем евклидовом расстоянии от точки сигнального созвездия с координатами I и Q .

Тогда в этом случае, при обратном переходе от принятых параметров \hat{I} и \hat{Q} к возможным блокам из 4 двоичных символов, ошибка будет только в одном символе (бите) из 4 передаваемых, что важно при декодировании с исправлением ошибок.

Графики рис. 15. иллюстрируют пример, когда по заданной реализации $c(t)$ входного случайного процесса $C(t)$ с использованием сигнального созвездия КАМ-16 строятся реализации $i(t)$ и $q(t)$ выходных случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$. Процессы $I(t)$ и $Q(t)$ можно представить в виде

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S); \quad Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (35)$$

где $g_2(t)$ – прямоугольный импульс длительностью $T_S = 4T_B$ (рис. 15, б); T_S – символьный интервал; T_B – бинарный интервал.

$$g_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ В} & \text{при } 0 \leq t \leq T_B ; \\ 0 \text{ В} & \text{при } t < 0, t > T_B, \end{cases} \quad (36)$$

где $g_2(t - nT_S)$ – прямоугольный импульс такой же формы, как импульс $g_2(t)$, но сдвинутый вправо относительно импульса $g_2(t)$ на величину nT_S , если $n > 0$, или влево, если $n < 0$; I_n и Q_n – независимые случайные величины, заданные на символьном интервале с номером n , которые согласно сигнальному созвездию (рис. 14) принимают четыре дискретных значения $-3h$, $-h$, h , $3h$ с вероятностью 0,25 каждое, т. е.

$$P(-3h) = P(-h) = P(h) = P(3h) = 0,25. \quad (37)$$

На рис. 15, а изображен фрагмент возможной реализации $c(t)$, поступающей на вход блока ФМС, который соответствует последовательности из 16 кодовых двоичных символов (КС) – 1011001001110110.

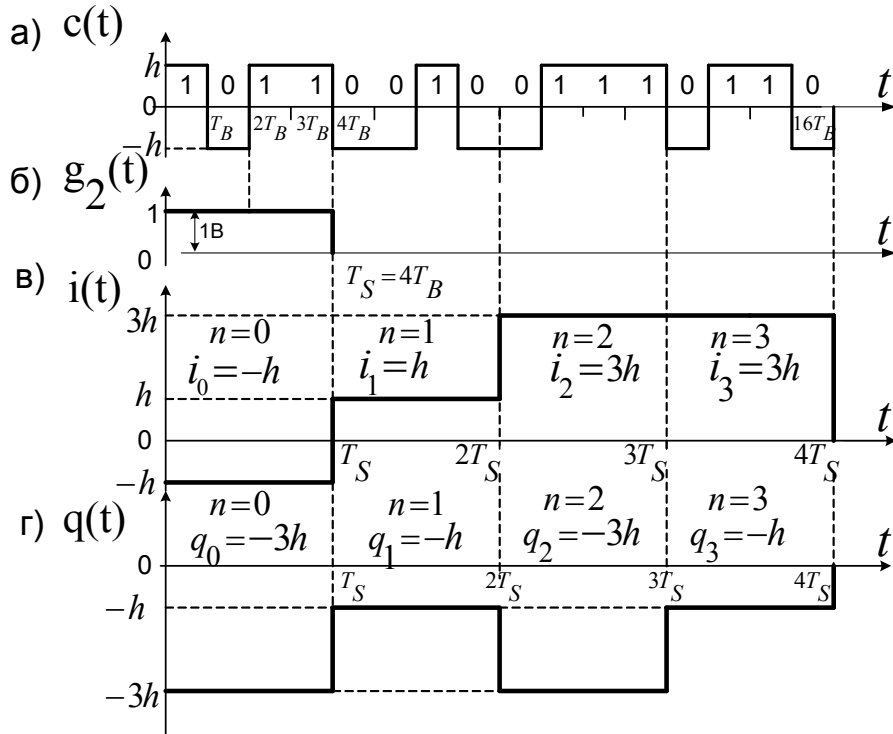


Рис. 15. Реализации $i(t)$ и $q(t)$ случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$ для КАМ-16

Реализации $i(t)$ и $q(t)$ в соответствии с выражением (35) можно представить в форме

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (38)$$

где i_n и q_n – реализации случайных величин I_n и Q_n на символьном интервале с номером n (рис. 15, в, г), входящих в (35).

Пользуясь сигнальным созвездием (рис. 14) для входной реализации $c(t)$ (рис. 15, а) по 4 символьным блокам двоичных символов определяются численные значения i_n и q_n на символьном интервале длительностью T_S с номером n , где $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$.

Первые четыре символа (бита) 1 0 1 1 из заданной последовательности $c(t)$ расположены над символьным интервалом T_S с номером $n = 0$. На сигнальном созвездии находим точку, которой соответствует блок из четырех символов (бит) 1 0 1 1. Значения реализаций i_0 и q_0 случайных величин I_0 и Q_0 будут равны значениям координат найденной точки, т. е. $i_0 = -h$ и $q_0 = -3h$.

Аналогично находим численные значения реализаций i_n и q_n для интервалов T_S с номерами $n = 1, n = 2, n = 3$.

Отметим, что сигналы $i(t)$ и $q(t)$ на рис. 15, в, г должны быть сдвинуты по оси времени t вправо на величину T_S относительно сигнала $c(t)$ на рис. 15, а. Чтобы было легче проследить за соответствием между графиком сигнала $c(t)$ и графиками реализаций $i(t)$ и $q(t)$, графики рис. 15, в, г показаны без указанного сдвига.

2. Квадратурная фазовая модуляция КФМ-4.

Сигнальное созвездие представлено на рис. 16.

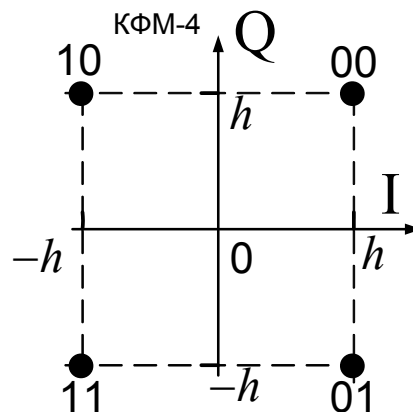


Рис. 16. Сигнальное созвездие квадратурной фазовой модуляции КФМ-4

На созвездии КФМ-4 число точек 4 представляем в виде $2^k = 2^2$, где $k = 2$. Определяем величину M – число дискретных значений, которые могут принимать координаты I и Q точек на сигнальном созвездии – $M = 2^{k/2} = 2^{2/2} = 2$. Используя (33), находим значения координат точек созвездия КФМ-4 на осях I и Q

$$-h, h. \quad (39)$$

Формально этот вид модуляции можно обозначить как КАМ-4. Поскольку точки (звезды) созвездия (рис. 16) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, то колебания, соответствующие этим точкам, будут иметь одинаковые амплитуды, но разные фазы. Так как сигналы, соответствующие разным точкам созвездия (рис. 16) различаются только фазами, правильнее такие сигналы назвать сигналами «квадратурной» фазовой модуляции КФМ-4. Фаза сигнала может принимать значения 45° , 135° , 225° , 315° соответственно рис. 16.

На выходах блока ФМС для КФМ-4 также появляются сигналы $I(t)$ и $Q(t)$, представленные в виде формул (35):

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S); \quad Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (40)$$

где I_n и Q_n – независимые случайные величины, которые согласно сигнальному созвездию (рис. 16) принимают два дискретных значения h и $-h$, с вероятностью 0,5 каждое:

$$P(h) = P(-h) = 0,5, \quad (41)$$

где $g_2(t)$ – прямоугольный импульс длительностью $T_S = 2T_B$ с амплитудой $U = 1B$ (рис. 17, б); $g_2(t - nT_S)$ – прямоугольный импульс такой же формы, как импульс $g_2(t)$, но сдвинутый относительно импульса $g_2(t)$ на величину nT_S .

Фрагменты реализаций $i(t)$ и $q(t)$ случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$, соответствующие заданной реализации $c(t)$ входного процесса $C(t)$, представлены на рис. 17.

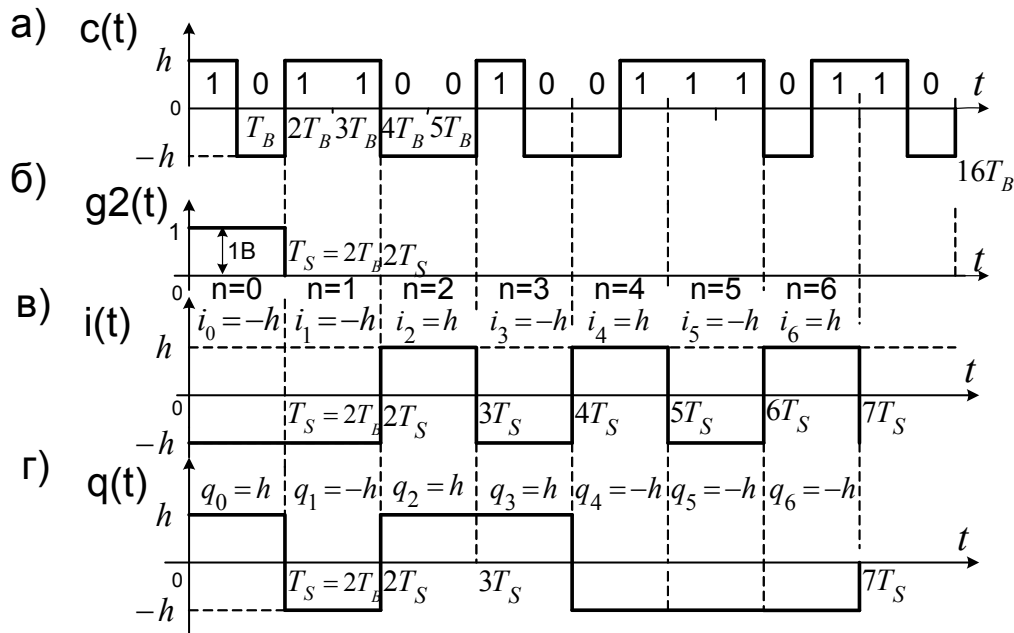


Рис. 17. Реализации $i(t)$ и $q(t)$ случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$ для КФМ

Методика изображения реализаций для КФМ полностью соответствует методике построения реализаций $i(t)$ и $q(t)$ на рис. 15.

Нетрудно показать, что полученные ранее в разд. 4.4 аналитические выражения (17), (24) для корреляционных функций $B_X(\tau)$, $B_I(\tau)$ являются частными случаями более общего аналитического выражения (28) при соответствующем задании процесса $X(t)$.

Если в качестве случайного процесса $X(t)$ выбрать случайные процессы $C(t)$ или $I(t)$, задаваемые соответственно в разд. 4.5 формулами (30) и (35), то получим для корреляционных функций этих процессов соответственно в разд. 4.4 формулы (17) или (24).²

4.6. Модулятор: перемножители, инвентор и сумматор

На структурной схеме системы связи сигнал $Q(t) \cdot \sin \omega_C t$ с выхода нижнего перемножителя ПМ2 поступает на вход инвертора, который изменяет знак перед этим сигналом с плюса на минус. С учетом этого на выходе сумматора получаем сигнал

$$s(t) = I(t) \cdot \cos \omega_C t - Q(t) \sin \omega_C t. \quad (42)$$

Этот сигнал в зависимости от заданного вида модуляции является сигналом квадратурной *амплитудной* или квадратурной *фазовой* модуляции. Множители $\cos \omega_C t$ и $\sin \omega_C t$ обеспечивают ортогональность сигналов $I(t) \cdot \cos \omega_C t$ и $Q(t) \cdot \sin \omega_C t$. Поэтому говорят, что эти сигналы находятся в квадратуре.

Сигналы, входящие в (42), передаются одновременно, в одной и той же полосе частот и по одной линии связи.

Свойство ортогональности обеспечивает линейную независимость этих сигналов, а значит, и возможность их разделения на приемном конце канала.

Возможность разделения этих сигналов позволяет независимо производить оценку информационных параметров (модулирующих символов) I_n и Q_n в составе сигналов $I(t)$ и $Q(t)$.

² В разд. 4.8 дается обоснование структурной схемы демодулятора для КАМ-16. Изучить изложенный материал для КАМ-16 и самостоятельно составить структурную схему демодулятора для КФМ-4 (КАМ-4).

Используя полученные ранее выражения (35) из разд. 4.5 для сигналов $I(t)$ и $Q(t)$, формулу (42) запишем в виде

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S) \cdot \cos \omega_C t - Q_n \cdot g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t. \quad (43)$$

Выделим из правой части (43) сигнал $s_k(t)$, которому соответствует слагаемое с индексом $n = k$, где k – произвольное фиксированное целое число

$$\begin{aligned} s_k(t) &= I_k g_2(t - kT_S) \cdot \cos \omega_C t - Q_k g_2(t - kT_S) \sin \omega_C t = \\ &= g_2(t - kT_S) \cdot (I_k \cos \omega_C t - Q_k \sin \omega_C t). \end{aligned} \quad (44)$$

С помощью сигнала (44) по каналу передаются информационные (модулирующие) символы I_k и Q_k . Сигнал (44) появляется на выходе модулятора, начиная с момента $t = kT_S$, и его длительность равна длительности импульса $g_2(t - kT_S)$.

Из разд. 4.5 следует, что символы I_k и Q_k являются *декартовыми* координатами точки M на сигнальном созвездии (рис. 18), которая соответствует выделенным слагаемым из выражения (43).

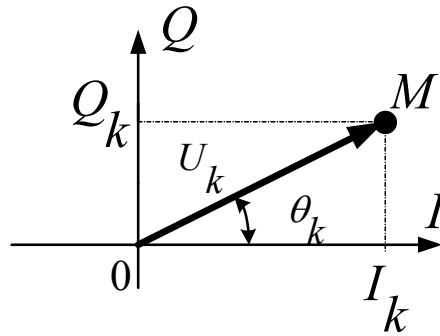


Рис. 18. Координаты I_k и Q_k точки M на сигнальном созвездии

Согласно рис. 18 параметры I_k и Q_k можно представить в виде

$$I_k = U_k \cdot \cos \theta_k; \quad Q_k = U_k \cdot \sin \theta_k, \quad (45)$$

где $U_k = \sqrt{I_k^2 + Q_k^2}$ и $\theta_k = \arctg \cdot Q_k / I_k$.

Величины U_k и θ_k – координаты той же точки M на сигнальном созвездии в *полярной* системе координат. Подставив (45) в (44), преобразуем сигнал (44) к виду

$$\begin{aligned} s_k(t) &= g_2(t - kT_S) \cdot (U_k \cos \theta_k \cdot \cos \omega_C t - U_k \sin \theta_k \cdot \sin \omega_C t) = \\ &= g_2(t - kT_S) \cdot U_k \cos(\omega_C t + \theta_k). \end{aligned} \quad (46)$$

Из (46) видно, что в состав выделенного сигнала в качестве сомножителя входит гармоническое колебание

$$U_k \cos(\omega_C t + \theta_k) \quad (47)$$

в канонической форме³.

Представление гармонического колебания (47) в канонической форме в составе сигнала (46) получено благодаря знаку «минус» перед вторым слагаемым в выражении (42). Этот знак обеспечивается введением инвертора в нижнюю ветвь перед сумматором на структурной схеме.

Гармоническому колебанию (47) соответствует комплексная амплитуда:

$$\dot{U}_k = U_k \cdot e^{j\theta_k}. \quad (48)$$

Комплексная амплитуда (48) при условии $\theta_k > 0$ представлена вектором \dot{U}_k на комплексной плоскости (рис. 19, а).

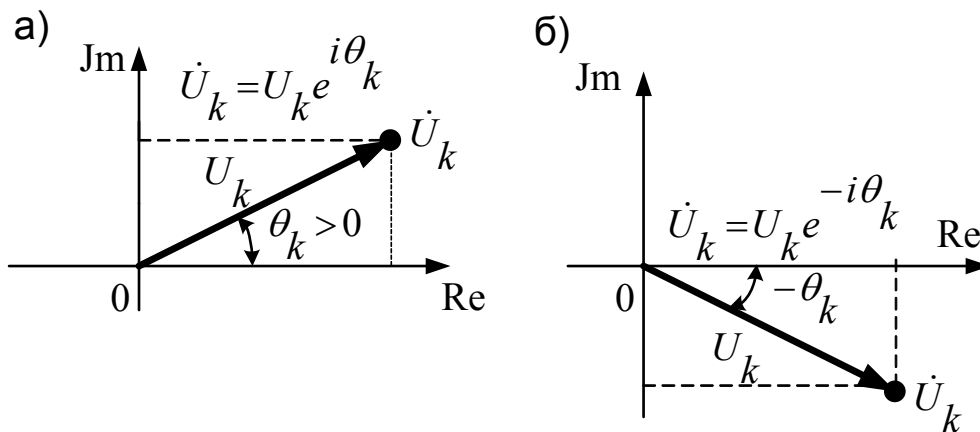


Рис. 19. Вектор комплексной амплитуды:

$$\text{а) } \dot{U}_k = U_k \cdot e^{j\theta_k}; \quad \text{б) } \dot{U}_k = U_k \cdot e^{-j\theta_k}$$

Существенно, что вектор \dot{U}_k по длине и направлению полностью соответствует исходному вектору, проведенному в точку M с координатами I_k и Q_k на сигнальном созвездии на рис. 18. В (46) гармонический сигнал представлен в канонической форме. Поскольку сигнал (46) был получен из сигнала (42), то выражение (42) является *канонической* формой для сигналов квадратурных видов модуляции (КАМ, КФМ).

³ Как следует из учебников и учебных пособий теории электрических цепей и теории сигналов [5, 9] при записи гармонического колебания в канонической форме перед начальной фазой θ_k должен стоять знак *плюс*, как в выражении (47). При этом численное значение начальной фазы θ_k в каждом конкретном случае может быть величиной положительной или отрицательной. Представление гармонического колебания по форме $U_k \cos(\omega_C t - \theta_k)$ не является каноническим, так как ее использование приводит к ненужным осложнениям.

Если в структурной схеме исключить инвертор перед сумматором, то сигнал на выходе сумматора будет представлен в виде

$$s_{\text{КАМ}}(t) = I_C(t) \cdot \cos \omega_C t + Q_C(t) \sin \omega_C t. \quad (49)$$

В этом случае, повторив приведенные выше выкладки, в составе выделенного сигнала получим гармонический сигнал в форме $U_k \cos(\omega_C t - \theta_k)$, которая не является канонической, как упоминалось ранее.

Вектор комплексной амплитуды для данного гармонического сигнала будет иметь вид $\dot{U}_k = U_k \cdot e^{-j\theta_k}$, и на комплексной плоскости этот вектор при условии $\theta_k > 0$ изображен на рис. 19, б.

Сравнивая рис. 19, б и рис. 18 делаем вывод, что при задании сигнала $s_{\text{КАМ}}(t)$ в форме (49) вектор \dot{U}_k на комплексной плоскости *не* совпадает по направлению с соответствующим вектором \dot{U}_k на сигнальном созвездии на рис. 18. Это является следствием того, что форма (49) не является канонической для представления сигнала КАМ, и поэтому возникает отмеченное несоответствие.

Таким образом, из двух возможных представлений сигнала квадратурной модуляции в форме (42) или в форме (49) будем считать канонической только форму (42) и только ее будем использовать в КР.

Отметим, что правая часть выражения (46) является *квазигармонической* формой для сигнала $s_k(t)$. Она таковой является потому, что функция $U_k \cdot g_2(t - kT_S)$ не принимает отрицательных значений. Функция $U_k \cdot g_2(t - kT_S)$ определяет форму *огibaющей* сигнала $s_k(t)$.

При определении корреляционной функции случайного сигнала на выходе модулятора необходимо уточнить задание ансамблей случайных процессов на выходах перемножителей.

При задании ансамблей этих процессов предполагается, что имеется ансамбль одинаковых устройств, по которым передаются разные реализации случайных процессов $I(t)$ и $Q(t)$. В состав каждого передающего устройства (ПерУ) входит свой генератор гармонического колебания $\cos(\omega_C t + \varphi)$, где начальная фаза φ принимает какое-то детерминированное численное значение. Множество этих различных значений φ образует случайную величину φ_C , т. е. каждое φ является реализацией случайной величины φ_C .

При задании случайных процессов на выходе *перемножителей* детерминированные функции $\cos \omega_C t$ и $\sin \omega_C t$, входящие в (42), необходимо расширить до случайных функций $\cos(\omega_C t + \varphi_C)$ и $\sin(\omega_C t + \varphi_C)$ введением в аргумент детерминированных функций $\cos \omega_C t$ и $\sin \omega_C t$ случайной фазы φ_C с равномерной плотностью вероятности $w(\varphi_C)$ на интервале

$0 \leq \varphi_C \leq 2\pi$ (рис. 20). Тогда вместо (42) получим случайный процесс следующего вида:

$$I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C) - Q(t) \cdot \sin(\omega_C t + \varphi_C). \quad (50)$$

Выражение (50) позволяет правильно определить корреляционную функцию случайного сигнала КАМ или КФМ на выходе *сумматора*.

Обращаем внимание на случайную фазу φ_C . В каждой отдельной реализации случайного процесса, определенного по (50), фаза φ_C имеет свое численное значение, не изменяющееся во времени. Случайный же характер фазы φ_C проявляется в том, что для разных реализаций значения φ_C отличаются друг от друга и ансамбль этих значений образует случайную величину φ_C с равномерной плотностью вероятности $w(\varphi_C)$ на интервале $0 \dots 2\pi$ (рис. 20).

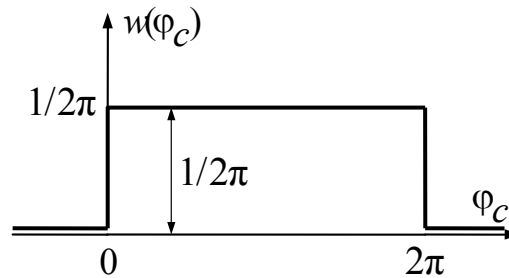


Рис. 20. Равномерная плотность вероятности $w(\varphi_C)$

Только при равномерной плотности вероятности $w(\varphi_C)$ для случайной фазы φ_C (рис. 20) случайный процесс на выходе модулятора (на выходе *сумматора*) будет *стационарным*.

В случае отличия плотности вероятности $w(\varphi_C)$ от равномерной, условие стационарности выполняться не будет. В этом случае корреляционная функция случайного процесса $s(t)$ не будет зависеть только от разности $\tau = t_2 - t_1$ моментов времени t_1 и t_2 , как это требуется для любого стационарного процесса.

Если случайную фазу φ_C не вводить в (42) и при определении корреляционной функции использовать выражение (42), то корреляционная функция будет зависеть и от суммы $\tau = t_1 + t_2$ моментов времени t_1 и t_2 и от их разности $\tau = t_2 - t_1$. Поэтому случайный сигнал $s(t)$ не будет стационарным процессом.

На рис. 21 рассмотрен пример по выполнению задания в разд. 3.5, п. 1–3).

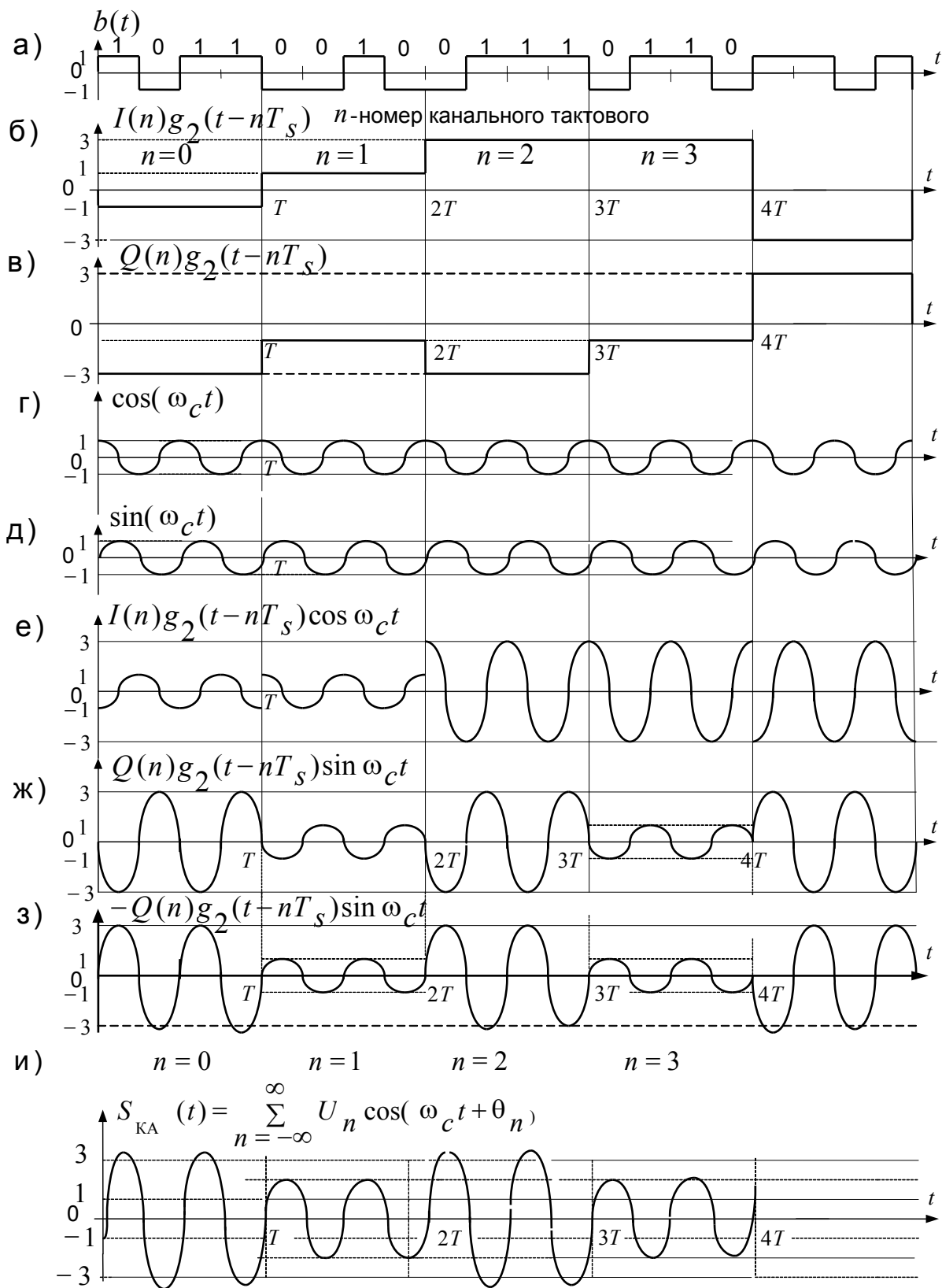


Рис. 21. Пример построения графиков для сигналов КАМ в блоке модулятора

4.6.1. Корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов на выходе перемножителей

На выходе верхнего перемножителя (ПМ-1) получаем сигнал $I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)$. Определим математическое ожидание этого случайного сигнала

$$\overline{I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)} = \overline{I(t)} \cdot \overline{\cos(\omega_C t + \varphi_C)}. \quad (51)$$

Это равенство получено на основании того, что сомножители $I(t)$ и $\cos(\omega_C t + \varphi_C)$ представляют собой независимые случайные процессы (ранее отмечалось о независимости случайной фазы φ_C от сигнала $I(t)$).

Случайный процесс $I(t)$, равный

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (52)$$

формируется на выходе блока ФМС при подаче на его вход случайного процесса $C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot g_1(t - nT_B)$ с выхода блока кодера (К). Определим $\overline{I(t)}$ и $\overline{\cos(\omega_C t + \varphi_C)}$, входящие в (51):

$$\overline{I(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{I_n} \cdot g_2(t - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{I_n} \cdot g_2(t - nT_S), \quad (53)$$

где $g_2(t - kT_S)$ – детерминированный сигнал.

Согласно (37) из разд. 4.5. можем написать

$$\begin{aligned} \overline{I_n} &= (-3h) \cdot P(-3h) + (-h) \cdot P(-h) + h \cdot P(h) + 3h \cdot P(3h) = \\ &= (-3h) \cdot 0,25 + (-h) \cdot 0,25 + h \cdot 0,25 + 3h \cdot 0,25 = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Подставляя (54) в (53), получим

$$\overline{I(t)} = 0. \quad (55)$$

Следовательно, $I(t)$ – центрированный процесс.

Математическое ожидание сигнала $\cos(\omega_C t + \varphi_C)$, зависящего от случайной величины φ_C с равномерной плотностью вероятности $w(\varphi_C)$ на интервале $0 \dots 2\pi$, определим по формуле

$$\begin{aligned} \overline{\cos(\omega_C t + \varphi_C)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_C t + \varphi_C) \cdot w(\varphi_C) h\varphi_C = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_C t + \varphi_C) h\varphi_C = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Подставляя (55) и (56) в (51), получим $\overline{I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)} = 0$. Это равенство означает, что случайный процесс $I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)$ является центрированным, поэтому корреляционная функция $B_{I\cos}(t_1, t_2)$ этого процесса определяется в виде:

$$\begin{aligned} B_{I\cos}(t_1, t_2) &= \overline{I(t_1) \cdot \cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot I(t_2) \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C)} = \\ &= \overline{I(t_1) \cdot I(t_2)} \cdot \overline{\cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C)} = \\ &= B_I(t_1, t_2) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cos \omega_C (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \overline{\cos[\omega_C (t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\}, \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$B_I(t_1, t_2) = \overline{I(t_1) \cdot I(t_2)}; \quad (58)$$

$\cos \omega_C (t_2 - t_1)$ – детерминированная функция.

Аналогично (56) получим $\left\{ \frac{1}{2} \overline{\cos[\omega_C (t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\} = 0$, и выражение (57) примет окончательный вид

$$B_{I\cos}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} B_I(t_2 - t_1) \cdot \cos \omega_C (t_2 - t_1). \quad (59)$$

Из равенства (59) следует, что случайный сигнал $I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)$ на выходе перемножителя обладает свойством стационарности, так как

- 1) математическое ожидание этого сигнала постоянно,
- 2) корреляционная функция зависит от разности времен $(t_2 - t_1) = \tau$.

Тогда (59) будет иметь вид

$$B_{I\cos}(\tau) = \frac{1}{2} B_I(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau. \quad (60)$$

На рис. 22 представлен график функции $B_{I\cos}(\tau)$, определенный по (60). При построении этого графика учитывался график $B_I(\tau)$ в разд. 4.4, рис. 11.

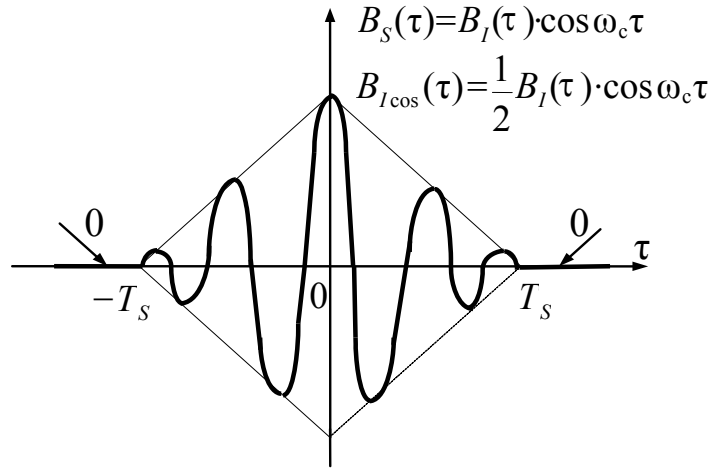


Рис. 22. График корреляционной функции случайного процесса $B_{I\cos}(\tau)$

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$B_{Q\sin}(\tau) = B_{I\cos}(\tau) = \frac{1}{2} B_I(\tau) \cos \omega_C \tau. \quad (61)$$

Спектральную плотность мощности сигнала на выходе перемножителя определим на основании теоремы Винера–Хинчина (рис. 23). Преобразуя функцию $B_{I\cos}(\tau)$ по Фурье, получим

$$\begin{aligned} G_{I\cos}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{I\cos}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_I(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_I(\tau) \frac{e^{i\omega_C \tau} + e^{-i\omega_C \tau}}{2} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} B_I(\tau) \cdot e^{-i(\omega - \omega_C)\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} B_I(\tau) \cdot e^{-i(\omega + \omega_C)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{4} G_I(\omega - \omega_C) + \frac{1}{4} G_I(\omega + \omega_C). \end{aligned} \quad (62)$$

Графики функций $\frac{1}{4} G_I(\omega - \omega_C)$ и $\frac{1}{4} G_I(\omega + \omega_C)$ получаются из графика функции $\frac{1}{4} G_I(\omega)$ путем его смещения, соответственно, вправо и влево на величину ω_C . Аналитическое выражение для спектральной плотности мощности $G_I(\omega)$ определяет формула (26) в разд. 4.4. Форма графика $G_I(\omega)$ строится с учетом пояснения формулы (26) в разд. 4.4.

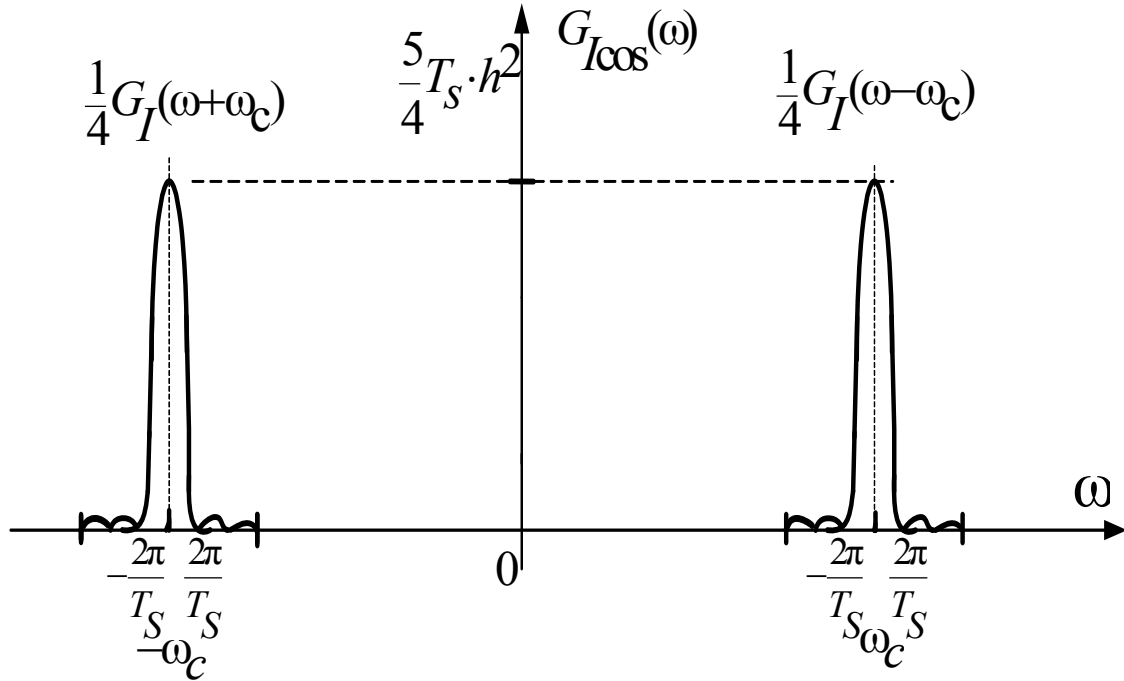


Рис. 23. График функции $G_{I\cos}(\omega)$

Также из (62) следует $G_{Q\sin}(\omega) = G_{I\cos}(\omega)$.

4.6.2. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности случайного процесса на выходе модулятора

При определении корреляционной функции $B_s(t_1, t_2)$ случайного сигнала $s(t)$ на выходе модулятора (на выходе сумматора) аналитическое выражение (42) для этого сигнала, с учетом введения случайной фазы φ_C , необходимо представить в виде

$$s(t) = I(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C) - Q(t) \cdot \sin(\omega_C t + \varphi_C). \quad (63)$$

Ранее были получены выражения (55) и (56), согласно которых

$$\overline{I(t)} = 0 \text{ и } \overline{\cos(\omega_C t + \varphi_C)} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $\overline{Q(t)} = 0$ и $\overline{\sin(\omega_C t + \varphi_C)} = 0$.

Из этих выражений следует, что $\overline{s(t)} = 0$, т. е. случайный сигнал $s(t)$ является центрированным случайным процессом, поэтому его корреляционную функцию запишем в виде

$$\begin{aligned}
B_s(t_1, t_2) &= \overline{s(t_1) \cdot s(t_2)} = \\
&= \overline{[I(t_1) \cdot \cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) - Q(t_1) \sin(\omega_C t_1 + \varphi_C)] \cdot} \\
&\quad \cdot \overline{[I(t_2) \cdot \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C) - Q(t_2) \sin(\omega_C t_2 + \varphi_C)]} = \\
&= \overline{I(t_1) \cdot I(t_2)} \cdot \overline{\cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C)} - \\
&\quad - \overline{I(t_1) \cdot Q(t_2)} \cdot \overline{\cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \sin(\omega_C t_2 + \varphi_C)} - \\
&\quad - \overline{Q(t_1) \cdot I(t_2)} \cdot \overline{\sin(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C)} + \\
&\quad + \overline{Q(t_1) \cdot Q(t_2)} \cdot \overline{\sin(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \sin(\omega_C t_2 + \varphi_C)}. \tag{64}
\end{aligned}$$

Поскольку случайные процессы $I_n(t)$ и $Q_n(t)$ независимы, то взаимные корреляционные функции

$$B_{I,Q}(t_1, t_2) = \overline{I(t_1) \cdot Q(t_2)} = 0, \quad B_{Q,I}(t_1, t_2) = \overline{Q(t_1) \cdot I(t_2)} = 0. \tag{65}$$

Подставляя (65) в (64) и, учитывая, что $\overline{I(t_1) \cdot I(t_2)} = B_I(t_2 - t_1)$ и $\overline{Q(t_1) \cdot Q(t_2)} = B_Q(t_2 - t_1)$, получим

$$\begin{aligned}
B_s(t_1, t_2) &= B_I(t_2 - t_1) \cdot \overline{\cos(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \cos(\omega_C t_2 + \varphi_C)} + \\
&\quad + B_Q(t_2 - t_1) \cdot \overline{\sin(\omega_C t_1 + \varphi_C) \cdot \sin(\omega_C t_2 + \varphi_C)} = \\
&= B_I(t_2 - t_1) \cdot \left\{ \overline{\frac{1}{2} \cos \omega_C(t_2 - t_1)} + \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_C(t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\} + \\
&\quad + B_Q(t_2 - t_1) \cdot \left\{ \overline{\frac{1}{2} \cos \omega_C(t_2 - t_1)} - \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_C(t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\} =
\end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{2} \cos \omega_C(t_2 - t_1)$ — детерминированная функция, то $\overline{\frac{1}{2} \cos \omega_C(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2} \cos \omega_C(t_2 - t_1)$ и получим

$$\begin{aligned}
&= B_I(\tau) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cos \omega_C \tau + \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_C(t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\} + \\
&\quad + B_Q(\tau) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cos \omega_C \tau - \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_C(t_1 + t_2) + 2\varphi_C]} \right\},
\end{aligned}$$

где $\tau = (t_2 - t_1)$.

Согласно (25) из разд. 4.4 имеем $B_Q(\tau)$, и тогда окончательно получим

$$\begin{aligned} B_S(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} B_I(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau + \frac{1}{2} B_Q(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau, \\ B_S(t_1, t_2) &= B_I(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau. \end{aligned} \quad (66)$$

Сравнивая (66) с (61), делаем вывод, что с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ функция $B_S(\tau)$ равна функции $B_{I \cos}(\tau)$. Также с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ форма графика $B_S(\tau)$ соответствует форме графика $B_{I \cos}(\tau)$ (рис. 22).

Преобразуя (66) по Фурье, найдем спектральную плотность мощности $G_S(\omega)$ сигнала $s(t)$ на выходе модулятора. Спектральная плотность $G_S(\omega)$ с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ будет равна $G_{I \cos}(\omega)$, определяемая (62) и ее форма на рис. 23.

4.7. Непрерывный канал

Спектральные плотности мощности $G_I(f)$ и $G_Q(f)$ сигналов $I(t)$ и $Q(t)$ были определены в разд. 4.4 (26) и в разд. 4.6.1, рис. 23, и являются нефинитными функциями (рис. 24, а).

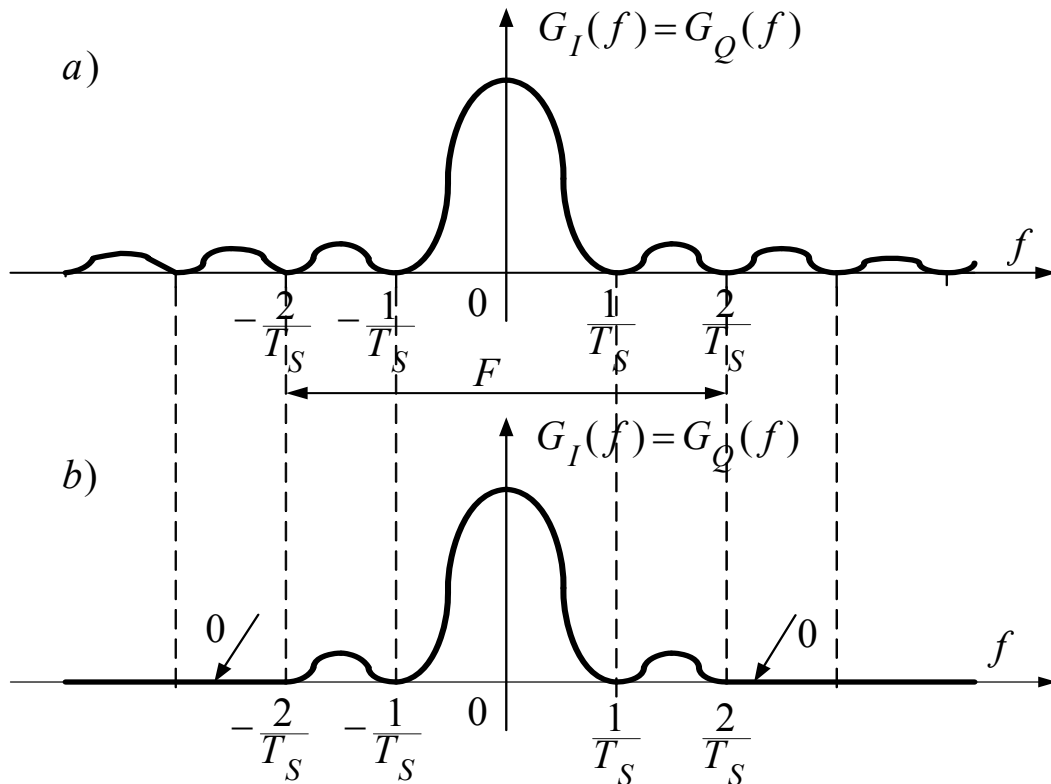


Рис. 24. Спектральные плотности мощности $G_I(f)$ и $G_Q(f)$

Спектр модулирующих сигналов (рис. 24, а) ограничивают с помощью фильтров нижних частот (ФНЧ), чтобы избежать возникновения межсимвольных помех. Частоту среза этих фильтров выбирают из условия $f_{\text{ср}} = \alpha \cdot \frac{1}{T_s}$, где $\alpha = 1, 2, 3, \dots$; T_s – величина символьного интервала.

В КР для всех вариантов $\alpha = 2$ и соответствующие финитные спектральные плотности после ограничения ФНЧ изображены на рис. 24, б. Ширина спектра модулирующих сигналов после ограничения равна F .

Спектральные плотности мощности модулированных сигналов $I(t) \cdot \cos \omega_c t$ и $Q(t) \cdot \sin \omega_c t$ с учетом графика рис. 24, б в области положительной полуоси частот изображены на рис. 25.

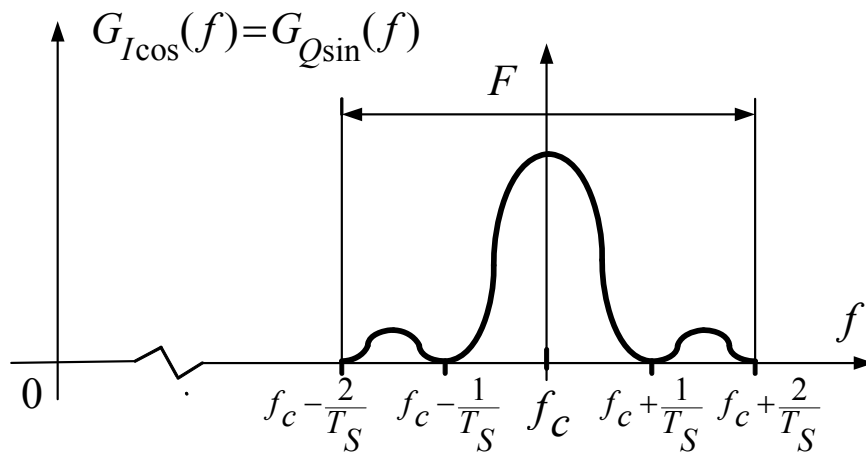


Рис. 25. Спектральная плотность мощности сигналов $I(t) \cdot \cos \omega_c t$ и $Q(t) \cdot \sin \omega_c t$ после ограничения модулирующих сигналов

Минимальная ширина полосы частот непрерывного канала F_K , необходимая для передачи сигнала со спектром, изображенным на рис. 25, должна быть равна ширине спектра передаваемого сигнала, т. е.

$$F_K = F = 4 \cdot \frac{1}{T_s}.$$

После ограничения нефинитного спектра (рис. 24, а) возникает изменение (искажение) формы прямоугольных импульсов. Показан прямоугольный импульс на входе ФНЧ (рис. 26, а) и на выходе ФНЧ (рис. 26, б) в зависимости от величины коэффициента α .⁴

⁴ Чтобы избежать усложнения КР будем считать, что при ограничении спектра форма прямоугольных импульсов не искажается. Способы борьбы с межсимвольной и импульсной помехами в КР не рассматриваются.

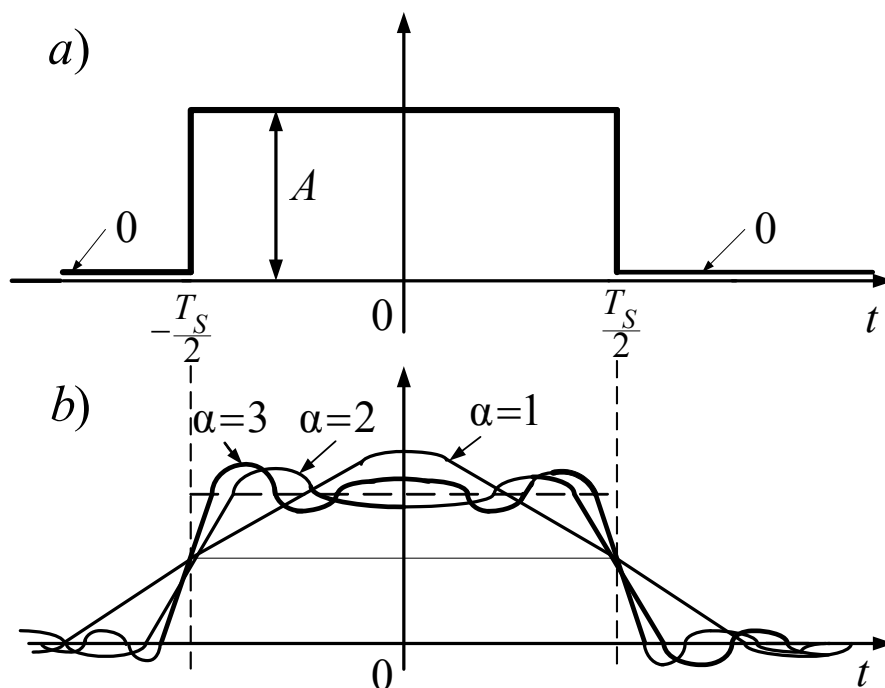


Рис. 26. Прямоугольный импульс на входе и выходе ФНЧ

На интервале длительностью $\frac{T_s}{2}$ в зависимости от значения α формируются α экстремумов в виде максимумов и минимумов выходного сигнала. При искажении прямоугольного импульса существенно увеличивается длительность выходного сигнала (рис. 26, б), что приводит к возникновению «хвостов», заходящих на соседние тактовые интервалы, на которых передаются сигналы других информационных символов. Появление «хвостов» приводит к возникновению так называемой межсимвольной помехи.

Для определения мощности помехи P_{Π} используем график спектральной плотности мощности помехи $G_{\Pi}(f)$ рис. 27.

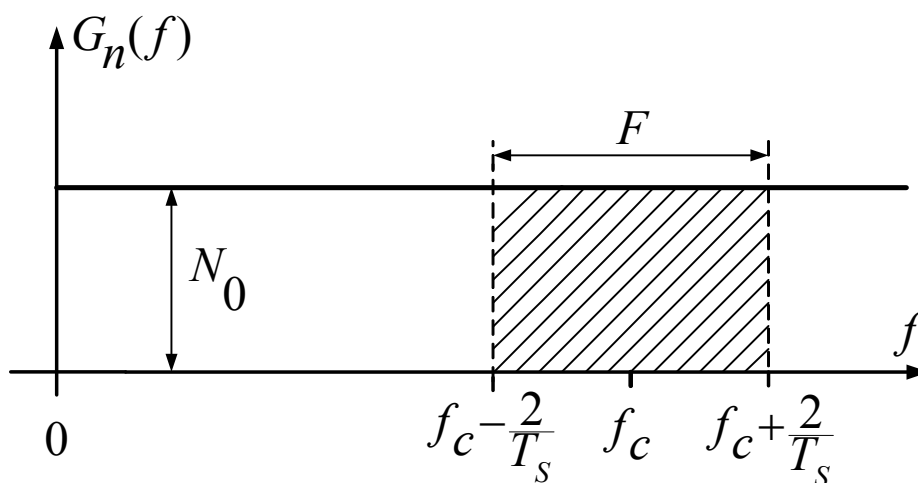


Рис. 27. Спектральная плотность мощности помехи на положительной полуоси частот

Мощность помехи P_{Π} в полосе часто непрерывного канала (рис. 27) равна заштрихованной площади, т. е. $P_{\Pi} = N_0 \cdot F$.

Определим P_c среднюю мощность сигнала $s_{\text{КАМ}}(t)$. Сигнал $s_{\text{КАМ}}(t)$ на выходе модулятора определяется выражением (63) в разд. 4.6.2. Средняя энергия сигнала квадратурной модуляции одинакова на всех символьных интервалах длительностью T_s . Выделим из выражения (63) в разд. 4.6.2 слагаемое, соответствующее сигналу квадратурной модуляции на символьном интервале $n = 0$ длительностью T_s

$$s_{\text{КАМ}}(t) = I_0 \cdot g_2(t) \cos \omega_c t - Q_0 \cdot g_2(t) \sin \omega_c t$$

и определим энергию E этого сигнала для заданных значений случайных параметров I_0 и Q_0 . Затем усредним эту энергию, принимая во внимание, что случайные величины I_0 и Q_0 принимают значения: $3h, h, -h, -3h$ с одинаковой вероятностью $P(3h) = P(h) = P(-h) = P(-3h) = 0,25$, то

$$E = \int_0^{T_s} s_{\text{КАМ}}^2(t) dt = \int_0^{T_s} [I_0 \cdot g_2(t) \cos \omega_c t - Q_0 \cdot g_2(t) \sin \omega_c t]^2 dt.$$

Импульс $g_2(t)$ на интервале интегрирования с номером $n = 0$ равен 1, т. е. $g_2(t) = 1$, то после возведения в квадрат квадратной скобки, выражение для энергии получим

$$E = I_0^2 \cdot \int_0^{T_s} \cos^2 \omega_c t \cdot dt + Q_0^2 \cdot \int_0^{T_s} \sin^2 \omega_c t \cdot dt - 2I_0 \cdot Q_0 \cdot \int_0^{T_s} \cos \omega_c t \cdot \sin \omega_c t \cdot dt,$$

где первый интеграл определяет энергию сигнала $I_0 g_2(t) \cos \omega_c t$, второй – энергию сигнала $Q_0 g_2(t) \sin \omega_c t$, третий интеграл – взаимную энергию указанных сигналов на символьном интервале длительностью T_s .

Используя формулы [10] и, учитывая выбор частоты ω_c из условия в разд. 4.8 (83), то после элементарных преобразований выражение для энергии принимает вид $E = \frac{I_0^2}{2} \cdot T_s + \frac{Q_0^2}{2} \cdot T_s$. Отметим, что взаимная энергия отмеченных сигналов при условии выбора частоты ω_c в разд. 4.8 (83) будет равна нулю, так как сигналы $\cos \omega_c t$ и $\sin \omega_c t$ ортогональны.

Средняя величина энергии $E_{\text{ср}}$ определяется

$$E_{\text{ср}} = \frac{\overline{I_0^2}}{2} \cdot T_s + \frac{\overline{Q_0^2}}{2} \cdot T_s,$$

где $\overline{I_0^2}$ и $\overline{Q_0^2}$ – математические ожидания случайных величин I_0 и Q_0 .

$$\begin{aligned}\overline{I_0^2} &= (3h)^2 \cdot P(3h) + h^2 \cdot P(h) + (-h^2) \cdot P(-h) + (-3h)^2 \cdot P(-3h) = \\ &= 20h^2 \cdot 0,25 = 5h^2.\end{aligned}$$

Аналогично получим $\overline{Q_0^2} = 5h^2$ и окончательно

$$E_{\text{ср}} = \frac{5h^2}{2} \cdot T_S + \frac{5h^2}{2} \cdot T_S = 5h^2 \cdot T_S.$$

Искомая величина P_c – средняя мощность сигнала $s_{\text{КАМ}}(t)$ определяется по формуле $P_c = \frac{E_{\text{ср}}}{T_S} = 5h^2$. Отношение $\frac{P_c}{P_{\Pi}}$ будет равно

$$\frac{P_c}{P_{\Pi}} = \frac{5h^2}{N_0 \cdot F_k}.$$

Пропускная способность непрерывного канала C (за секунду) определяется $C = F_k \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\Pi}} \right)$ [1, по формуле 4.47]. Переходя к натуральным логарифмам, получим [1, по формуле 4.48]

$$C = F_k \log_2 e \cdot \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\Pi}} \right) \cong F_k \cdot 1,443 \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\Pi}} \right).$$

Для оценки эффективности использования пропускной способности канала связи применяют коэффициент эффективности, равный отношению производительности источника H' к пропускной способности канала, т. е.

$$k_{\text{эф}} = \frac{H'}{C}.$$

Найдем производительность источника информации $H'(A)$. По каналу связи передаются номера уровней квантования, определяемые в блоке АЦП разд. 4.2. В КР количество уровней квантования $L = 512$. Число L называют «объемом алфавита источника».

Собственная информация источника A равна его энтропии $H(A)$, которая удовлетворяет неравенству $H(A) \leq \log_2 L$. Причем, равенство $H(A) = \log_2 L$ можем иметь только тогда, когда все сообщения (номера уровней квантования) передаются равновероятно и независимо.

Таким образом, при передаче номера одного уровня квантования источник создает $H(A) = \log_2 512$ бит информации.

Производительность источника информации $H'(A)$ равна количеству информации, создаваемую источником за единицу времени (за 1 секунду). АЦП за одну секунду вырабатывает $\frac{1}{\Delta t}$ уровней квантования. Поэтому

$$H'(A) = \frac{1}{\Delta t} H(A) = 2f_B \cdot \log_2 L = 2f_B \log_2 e \cdot \ln L = 2f_B \cdot 1,443 \ln L.$$

4.8. Демодулятор

Информационный сигнал (ИС) с выхода модулятора поступает в непрерывный канал (НК), существенно ослабляется (на несколько порядков) за счет различных потерь мощности в НК.

В КР аппаратура в составе НК между выходом модулятора и входом в линию связи (ЛС), а также между выходом ЛС и демодулятором (ДМ) не рассматривается.⁵

Поэтому, прежде чем принятый информационный сигнал поступит на вход демодулятора, его усиливают в соответствующее число раз. В КР будем считать, что мощность ИС на входе демодулятора равна мощности этого сигнала на выходе модулятора.

Но на вход усилительного устройства (УУ), расположенного перед демодулятором, помимо сильно ослабленного ИС поступает также сигнал аддитивной флуктуационной помехи (АФП) в виде теплового шума. Источник этой помехи находится в элементах самой приемной радиоаппаратуры, в частности во входной цепи усилителя. В диапазоне звуковых частот и радиочастот спектральную плотность мощности $G(f)$ теплового шума на омическом сопротивлении R можно определить по формуле Найквиста [3]

$$G(f) = 4R \cdot kT, \quad (67)$$

где R – омическое сопротивление; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град – постоянная Больцмана; $T = 290^\circ \text{К}$ соответствует 17°С , т. е. принятой стандартной температуре среды, в которой находится приемная аппаратура. При этом

$$kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{В}^2 / \text{Гц}. \quad (68)$$

Так как усиливается не только ИС, но и помеха, спектральная плотность мощности флуктуационной помехи на входе демодулятора будет существенно больше, чем на входе усилителя.

⁵ Общие представления о данной аппаратуре даются в курсе лекций и в [2, гл. 8]. В передающем устройстве в состав аппаратуры входят усилительное устройство (УУ) и устройство уплотнения сигналов. В приемное устройство соответственно входят устройство разделения сигналов и УУ.

В КР на входе демодулятора АФП обозначена $n(t)$, а ее спектральная плотность мощности $G_n(f)$ обозначена N_0 . В зависимости от номера варианта m значение параметра N_0 задается в табл. 1 исходных данных.

Итак, на вход когерентного демодулятора поступает сигнал $Z(t)$, определяемый формулой:

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_2(t - nT_S) \cos \omega_C t - Q_n g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t] + n(t), \quad (69)$$

где первое слагаемое (сумма) является информационным сигналом квадратурной амплитудной модуляции КАМ-16; $n(t)$ – сигнал АФП.

В условиях действия флуктуационной помехи $n(t)$ демодулятор должен обеспечить оптимальные оценки \hat{I}_n и \hat{Q}_n передаваемых информационных символов I_n и Q_n на каждом символьном интервале T_S с номером n . Передаваемые ИС I_n и Q_n на любом интервале с номером n являются случайными величинами и принимают дискретные значения

$$h, -h, 3h, -3h \quad (70)$$

с вероятностью 0,25 каждое.

Чтобы обосновать структурную схему когерентного демодулятора предположим, что на вход демодулятора поступает не весь информационный сигнал (69), а только его часть, равная

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_2(t - nT_S) \cos \omega_C t] \quad (71)$$

Сигнал (71) из состава (69) – это сигнал обычной амплитудной модуляции (АМ) и задает информационный сигнал на всей оси времени t на интервалах от $n = -\infty$ до $n = +\infty$.

На интервале с номером $n = k$ только одно *слагаемое* из (71) будет отличаться от нулевого значения, а именно $I_k g_2(t - kT_S) \cos \omega_C t$. Остальные слагаемые из (71) на интервале от $n = -\infty$ до $n = +\infty$ при $n \neq k$ будут равны нулю. Это объясняется формой импульсов $g_2(t - nT_S)$ для разных значений n в (71) [разд. 4.5, рис. 15, б]. В (71) символы I_n на любом интервале с номером n принимают четыре равновероятных значения, указанные в (70): $h, -h, 3h, -3h$.

Например, на интервале с номером $n = 0$ дискретным значениям (70) будут соответствовать сигналы

$$\begin{aligned} s_1(t) &= h \cdot g_2(t) \cos \omega_C t; \quad s_2(t) = -h \cdot g_2(t) \cos \omega_C t; \\ s_3(t) &= 3h \cdot g_2(t) \cos \omega_C t; \quad s_4(t) = -3h \cdot g_2(t) \cos \omega_C t. \end{aligned} \quad (72)$$

Обозначим энергии этих сигналов соответственно E_1, E_2, E_3, E_4 , величины энергий которых определяются по формуле

$$E_i = \int_0^{T_S} s_i^2(t) dt = \int_0^{T_S} h^2 g_2^2(t) \cos^2 \omega_C t dt, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Из этой формулы и из равенств (72) следует, что

$$E_2 = E_1; \quad E_3 = E_4 = 9E_1. \quad (73)$$

Каждый из сигналов (71) передает *одно* из 4 возможных значений символа I_0 . Также следует из (71), что сигналы $s_2(t)$, $s_3(t)$, $s_4(t)$ элементарно выражаются через сигнал $s_1(t)$:

$$s_2(t) = -s_1(t); \quad s_3(t) = 3s_1(t); \quad s_4(t) = -3s_1(t). \quad (74)$$

Если информационный сигнал (71) рассматривать только в пределах одного интервала длительностью T_S , например с номером $n = 0$, то этот сигнал будет равен *одному* из 4 возможных значений $s_i(t)$, где $i = 1, 2, 3, 4$ задаются выражениями (72).

Известно в [1, 2], что алгоритм работы когерентного демодулятора, на вход которого поступает сигнал $Z(t)$:

$$Z(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (75)$$

определяется выражением

$$\max_i \left[\int_0^{T_S} z(t) \cdot s_i(t) dt - 0,5E_i \right], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (76)$$

В момент окончания символьного интервала длительностью T_S демодулятор принимает решение в пользу того сигнала $s_i(t)$, которому соответствует *максимальное* значение квадратной скобки в (76).

Напряжение, равное значению интеграла в (76), можно сформировать на выходе активного фильтра АФ (коррелятора) или на выходе согласованного фильтра (СФ) с сигналом $s_i(t)$.

Принимаемые демодулятором решения в соответствии с (76) будут оптимальными в условиях действия флуктуационной помехи $n(t)$ типа белого шума. Учитывая выражения (72–74) реализация правила принятия решения в (76) может быть обеспечена структурной схемой демодулятора рис. 28.

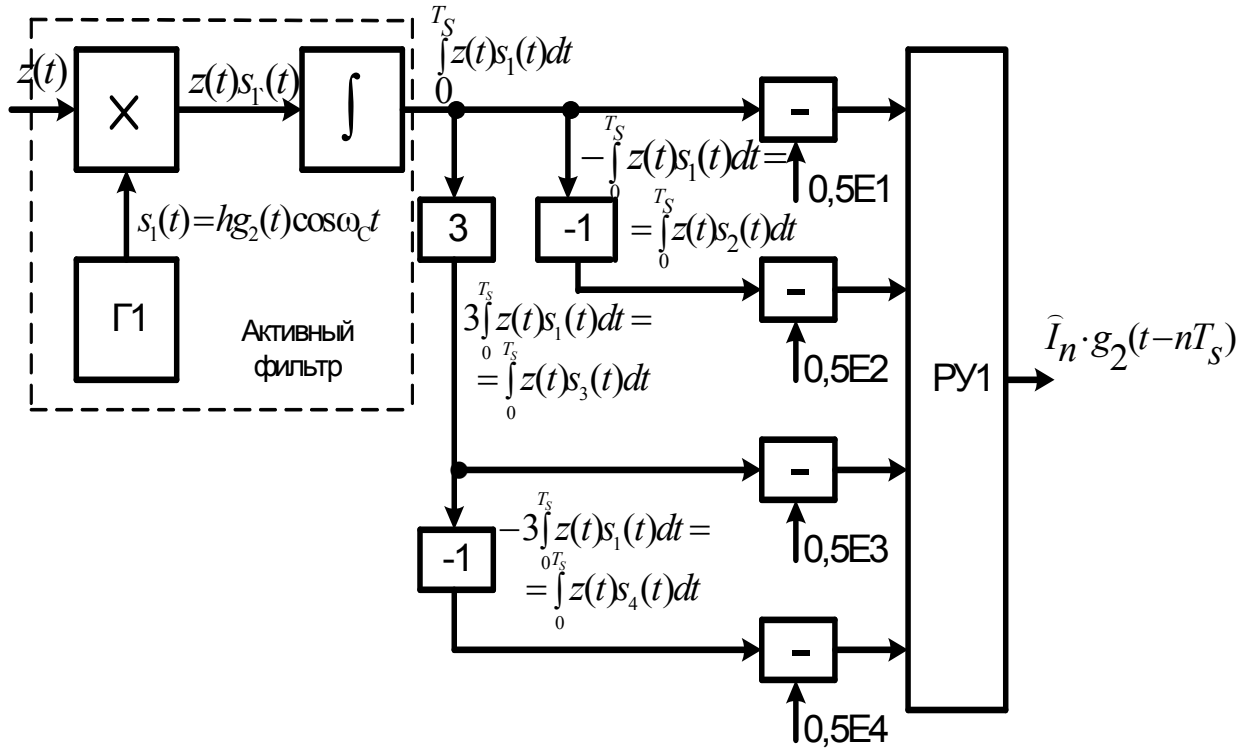


Рис. 28. Структурная схема, реализующая выполнение алгоритма (76) когерентного демодулятора

Например, если решение будет принято в пользу сигнала $s_3(t)$, то это решение будет означать, что на данном интервале с номером $n = 0$ согласно (72) значение символа $I_0 = 3h$.

Генератор Γ_1 вырабатывает сигнал $hg_2(t)\cos\omega_c t$ на интервале с номером $n = 0$, а на интервале с номером $n \neq 0$ – сигнал $hg_2(t - nT_s)\cos\omega_c t$.

На выходе интегратора в момент окончания символьного интервала длительностью T_s будет сформировано напряжение, равное интегралу

$\int_0^{T_s} z(t) \cdot s_1(t) dt$. Это напряжение одновременно поступает на вход верхнего

вычитающего устройства и на входы блоков, осуществляющих умножение на (-1) и на 3 . На выходе верхнего вычитающего устройства получим напряжение, равное разности

$$\int_0^{T_s} z(t) \cdot s_1(t) dt - 0,5E_1. \quad (77)$$

На выходах блоков, осуществляющих умножение на (-1) и на 3 , получим напряжения $-\int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt$ и $3 \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt$. Используя (74), эти интегралы можно представить в виде:

$$-\int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt = \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_2(t) dt; \quad 3 \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt = \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_3(t) dt. \quad (78)$$

На выходе нижнего блока, осуществляющего умножение на (-1) , получим напряжение $-3 \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt$, которое на основе равенств (74) можно представить как

$$-3 \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt = \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_4(t) dt. \quad (79)$$

Напряжения правых частей равенств (78) и (79) поступают на входы соответствующих вычитающих устройств, на выходах которых получим напряжения:

$$\int_0^{T_S} z(t) \cdot s_2(t) dt - 0,5E_2; \quad \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_3(t) dt - 0,5E_3; \quad \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_4(t) dt - 0,5E_4. \quad (80)$$

В момент окончания символьного интервала длительностью T_S решающее устройство (РУ1) сравнивает 4 входных напряжения равенств (77), (80) и выбирает из них *максимальное*, тем самым реализуя правило принятия решения (76).

Этот выбор определяет тот информационный сигнал из 4 возможных сигналов, задаваемых равенством (72), который на данном символьном интервале поступил на вход демодулятора в составе сигнала $Z(t)$, определяемого (75).

Таким образом, выбирая сигнал $s_1(t)$, демодулятор тем самым определяет значение передаваемого информационного символа I_0 из 4 возможных информационных символов, т. е. осуществляет оценку символа I_0 . Произведенную оценку символа I_0 обозначим \hat{I}_0 . При правильном решении $\hat{I}_0 = I_0$. При ошибочном решении $\hat{I}_0 \neq I_0$. Причиной ошибочных решений является действие помехи $n(t)$.

После принятия решения выходные цепи РУ1 генерируют прямоугольный импульс $\hat{I}_0 \cdot g_2(t)$ длительностью T_S с амплитудой \hat{I}_0 , равной оценке значения передаваемого информационного символа I_0 , который

может принимать одно из четырех значений: $h, -h, 3h, -3h$. Импульс $\hat{I}_0 \cdot g_2(t)$ появляется на выходе РУ1. Тогда при правильных оценках \hat{I}_n на выходе РУ1 появляется последовательность прямоугольных импульсов, *соответствующая* последовательности прямоугольных импульсов на верхнем выходе блока ФМС в передающем устройстве (разд. 4.5, рис. 15, в).

Теперь предположим, что по каналу связи вместо ИС (71) передается информационный сигнал, соответствующий второму слагаемому в сумме выражения (69):

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t. \quad (81)$$

По аналогии с сигналами (72) с учетом знака «минус» перед суммой в (81), введем сигналы на интервале с номером $n = 0$:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= -h \cdot g_2(t) \sin \omega_C t; & s'_2(t) &= h \cdot g_2(t) \sin \omega_C t; \\ s'_3(t) &= -3h \cdot g_2(t) \sin \omega_C t; & s'_4(t) &= 3h \cdot g_2(t) \sin \omega_C t. \end{aligned}$$

С помощью этих сигналов передаются 4 значения символа Q_0 на интервале с номером $n = 0$. Повторяя рассуждения, приведенные выше для получения схемы демодулятора рис. 28, получим схему демодулятора рис. 29.

Представлена схема демодулятора (рис. 29), осуществляющего оптимальные оценки значений передаваемых информационных символов Q_n в выражении (81), идентичной схеме на рис. 28, но генератор Γ_2 в составе активного фильтра в схеме (рис. 29) на интервале с номером $n = 0$ должен вырабатывать сигнал $-hg_2(t) \sin \omega_C t$, а на интервале с номером $n \neq 0$ – соответственно сигнал $-hg_2(t - nT_S) \sin \omega_C t$.

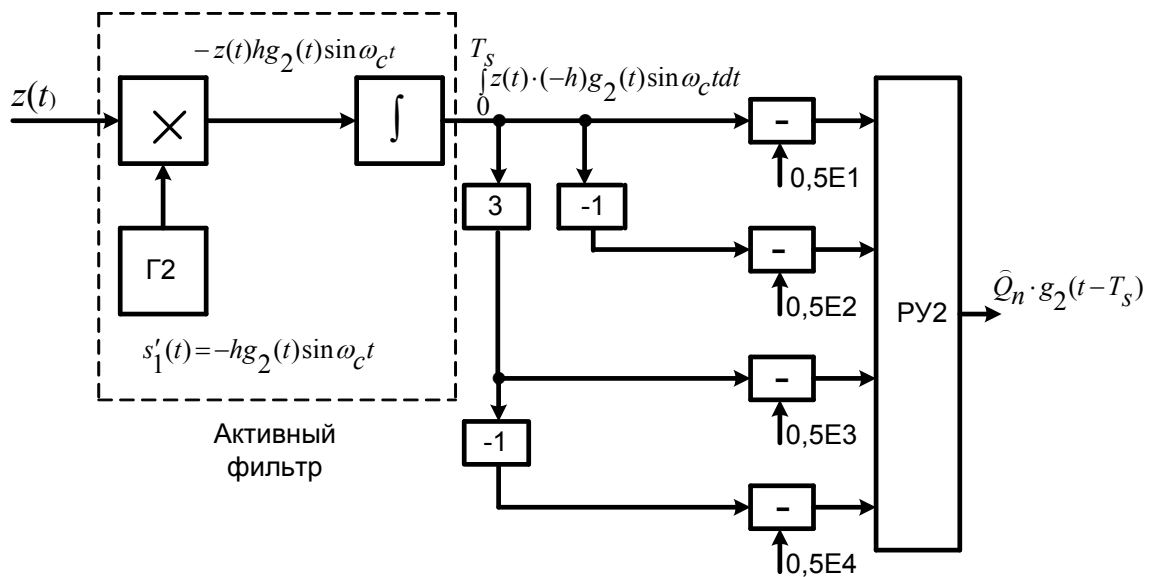


Рис. 29. Схема демодулятора, когда на входе ИС (81)

Если на вход демодуляторов рис. 28 и рис. 29 подать сумму сигналов (71) и (81), т. е. сигнал квадратурной модуляции (69), то это не отразится на работе обоих демодуляторов.

Действительно, пусть на вход демодулятора, (например, на рис. 28) поступает сигнал $Z(t)$, определяемый выражением (69), информационная часть которого является сигналом квадратурной АМ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_2(t - nT_S) \cos \omega_C t - Q_n g_2(t - nT_S) \sin \omega_C t]. \quad (82)$$

На первый вход *перемножителя* ПМ1 из состава суммы (82) на интервале длительностью T_S с номером $n = 0$ будет поступать сигнал, равный только одному слагаемому из суммы (82), а именно номер n которого равен нулю, т. е. $I_0 g_2(t) \cos \omega_C t - Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$. Остальные слагаемые в (82) на этом интервале будут равны нулю. Это объясняется формой импульсов $g_2(t - T_S)$ при $n \neq 0$ (разд. 4.5, рис. 15, в, г).

На второй вход *перемножителя* ПМ1 от генератора Γ_1 на этом же интервале T_S поступает сигнал $h g_2(t) \cos \omega_C t$. На выходе *перемножителя* получим произведение:

$$[I_0 g_2(t) \cos \omega_C t - Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t] \cdot h g_2(t) \cos \omega_C t.$$

В момент окончания символьного интервала, когда $t = T_S$, на выходе *интегратора* будет формироваться напряжение:

$$I_0 \cdot h \int_0^{T_S} g_2^2(t) \cos^2 \omega_C t dt - Q_0 \cdot h \int_0^{T_S} g_2^2(t) \sin \omega_C t \cdot \cos \omega_C t dt.$$

Первый интеграл является скалярным произведением сигналов $I_0 g_2(t) \cos \omega_C t$ и $h g_2(t) \cos \omega_C t$, второй интеграл – скалярным произведением сигналов $Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$ и $h g_2(t) \cos \omega_C t$. Так как на интервале интегрирования $g_2(t) = 1$ В, то на выходе *интегратора* получим:

$$I_0 \cdot h \int_0^{T_S} \cos^2 \omega_C t dt - Q_0 \cdot h \int_0^{T_S} \sin \omega_C t \cdot \cos \omega_C t dt =$$

После элементарных преобразований [10], учитывая, что $\cos^2 \omega_C t dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_C t$ и $\sin \omega_C t \cdot \cos \omega_C t dt = \frac{1}{2} \sin 2\omega_C t$, получим:

$$= \frac{I_0 \cdot h}{2} T_S + \frac{I_0 \cdot h}{4\omega_C} \sin 2\omega_C T_S + \frac{Q_0 \cdot h}{4\omega_C} (\cos 2\omega_C T_S - 1). \quad (82 \text{ а})$$

Третье слагаемое в сумме (82 а) получено из второго интеграла, т. е. равно скалярному произведению сигналов $Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$ и $h g_2(t) \cos \omega_C t$.

Поскольку частота $\omega_C = 2\pi \cdot f_C = 2\pi \frac{1}{T_C}$, где T_C – период гармонического сигнала с частотой f_C , третье слагаемое в (82 а) получим в виде $\frac{Q_0 \cdot h}{4\omega_C} \left(\cos 2\pi \cdot 2 \frac{T_S}{T_C} - 1 \right)$. При этом частоту ω_C необходимо выбрать так, чтобы на символьном интервале длительностью T_S укладывалось *целое* число k периодов T_C , т. е.

$$\frac{T_S}{T_C} = k. \quad (83)$$

Причем $\cos 2\omega_C T_S = \cos \left(2\pi \cdot 2 \frac{T_S}{T_C} \right) = \cos(2\pi \cdot 2k) = 1$ и скалярное произведение сигналов $Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$ и $h g_2(t) \cos \omega_C t$ будет равно нулю, т. е. $\frac{Q_0 \cdot h}{4\omega_C} (\cos 2\omega_C T_S - 1) = 0$. Это означает, что на интервале длительностью T_S эти сигналы ортогональны.

Равенство (83) является условием *ортогональности*. Из условия ортогональности указанных сигналов следует самое существенное – напряжение, создаваемое сигналом $-Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$ на входе демодулятора, не оказывает влияния на решение, выносимое РУ1 в составе демодулятора. В момент принятия решения, когда $t = T_S$, напряжение, создаваемое сигналом $-Q_0 g_2(t) \sin \omega_C t$ на выходе интегратора, будет равно нулю и поэтому выносимое решение РУ1 не зависит от величины информационного символа Q_0 .

При выполнении условия ортогональности (83) второе слагаемое в сумме (82 а) также имеет нулевое значение, так как

$$\left(\sin 2\omega_C T_S = \sin \left(2\pi \cdot 2 \frac{T_S}{T_C} \right) = \sin(2\pi \cdot 2k) = 0 \right)$$

и на выходе интегратора будет напряжение, равное $\frac{I_0 h}{2} T_S$, которое определяется только величиной передаваемого информационного символа I_0 .

Итак, на рис. 28 при поступлении на вход демодулятора сигнала (82), РУ1 будет реагировать только на те слагаемые из (82), в состав которых входят символы I_n , и не будет реагировать на слагаемые из (82), в состав которых входят символы Q_n .

Аналогично, при поступлении на вход демодулятора сигнала (82) на рис. 29, РУ2 будет реагировать только на те слагаемые в (82), в состав которых входят символы Q_n , и не будет реагировать на слагаемые из (82), в состав которых входят символы I_n .

Поэтому схемы демодуляторов (рис. 28, 29) можно объединить в одну схему.

Учтено следующее обстоятельство. Генератор G_1 на интервале с номером $n=0$ вырабатывает напряжение $\cdot hg_2(t) \cos \omega_C t$, а на интервале с номером $n=1$ – напряжение $\cdot hg_2(t - T_S) \cos \omega_C t$ и т. д.

Когда заканчивается импульс $g_2(t)$ в момент времени $t = T_S$, его продолжением будет импульс $g_2(t - T_S)$, а продолжением $g_2(t - T_S)$ будет импульс $g_2(t - 2T_S)$ и т. д.

Поскольку амплитуда любого импульса $g_2(t - nT_S)$ равна 1 В, фактически генератор G_1 должен вырабатывать непрерывный гармонический сигнал $h \cdot \cos \omega_C t$ В.

Аналогично, генератор G_2 должен вырабатывать второй непрерывный гармонический сигнал $(-h \cdot \sin \omega_C t)$, который можно получить из сигнала $h \cdot \cos \omega_C t$ при использовании фазовращателя на $-\frac{\pi}{2}$ и инвертора, изменяющего знак входного сигнала.

С учетом данного замечания возможная полная схема демодулятора для приема сигнала КАМ-16 изображена на рис. 30.

Решающие устройства РУ1 и РУ2 осуществляют оценки \hat{I}_n и \hat{Q}_n передаваемых модулирующих символов I_n и Q_n .

Если демодулятор работает без ошибок, то $\hat{I}_n = I_n$ и $\hat{Q}_n = Q_n$ на выходах РУ1, РУ2 формируются сигналы, соответствующие сигналам на выходе блока ФМС (разд. 4.5, рис. 15, в, г) и далее эти сигналы поступают на вход преобразователя параллельного кода в последовательный код.

На выходе этого преобразователя формируется сигнал, соответствующий сигналу, который в передающем устройстве поступал на вход блока ФМС (разд. 4.5, рис. 15, а).

Отметим, что вместо активных фильтров АФ1 и АФ2 в схемах демодуляторов рис. 28 и 29 можно использовать согласованные фильтры СФ1 и СФ2 с сигналами $hg_2(t) \cos \omega_C t$ и $-hg_2(t) \sin \omega_C t$ соответственно.

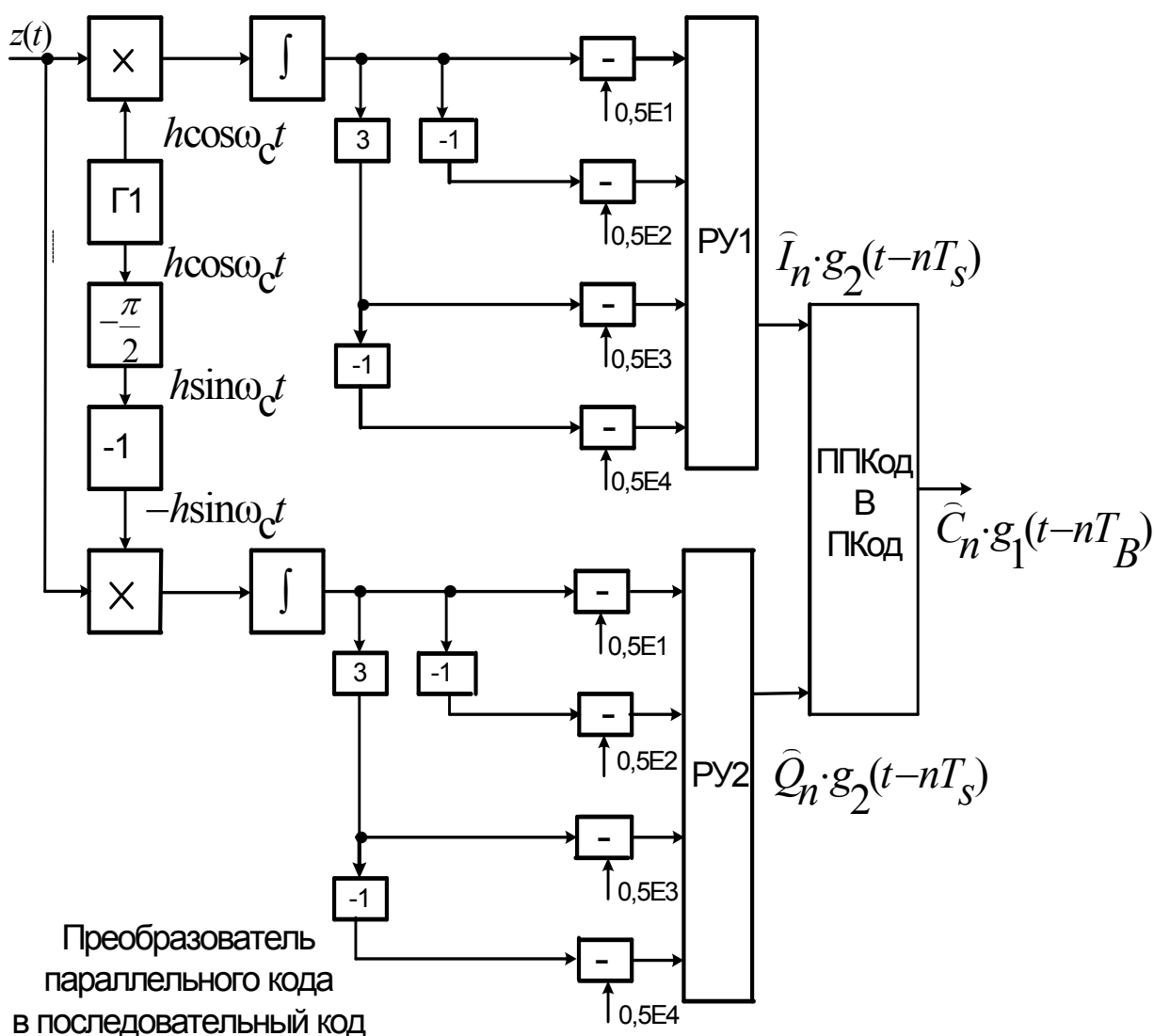


Рис. 30. Схема демодулятора
для сигнала квадратурной модуляции КАМ-16

4.8.1. Вероятность ошибок на выходах РУ1 и РУ2

Рассмотренный ранее сигнал $Z(t)$, определенный выражением (69) на символьном интервале T_s с номером $n = 0$, будет равен

$$Z(t) = I_0 g_2(t) \cos \omega_c t - Q_0 g_2(t) \sin \omega_c t + n(t). \quad (84)$$

1. Пусть значения переданных информационных символов I_0 , Q_0 равны

$$I_0 = h; Q_0 = h. \quad (85)$$

Тогда напряжения на входах РУ1 (рис. 28) в момент окончания символьного интервала длительностью T_S будут соответственно равны в (77) и (80):

$$\begin{aligned} \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_1(t) dt - 0,5E_1; \quad \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_2(t) dt - 0,5E_2; \\ \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_3(t) dt - 0,5E_3; \quad \int_0^{T_S} z(t) \cdot s_4(t) dt - 0,5E_4. \end{aligned}$$

Используя (80), (84), (85), (72) и (73) получим соответствующие напряжения на входах РУ1:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_S} [hg_2(t) \cos \omega_C t - hg_2(t) \sin \omega_C t + n(t)] \cdot hg_2(t) \cos \omega_C t dt - 0,5E_1; \\ \int_0^{T_S} [hg_2(t) \cos \omega_C t - hg_2(t) \sin \omega_C t + n(t)] \cdot (-h)g_2(t) \cos \omega_C t dt - 0,5E_1; \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{T_S} [hg_2(t) \cos \omega_C t - hg_2(t) \sin \omega_C t + n(t)] \cdot 3hg_2(t) \cos \omega_C t dt - 0,5 \cdot 9E_1; \\ \int_0^{T_S} [hg_2(t) \cos \omega_C t - hg_2(t) \sin \omega_C t + n(t)] \cdot (-3h)g_2(t) \cos \omega_C t dt - 0,5 \cdot 9E_1. \end{aligned}$$

При дальнейших преобразованиях интегралов в (86), получим интегралы $\int_0^{T_S} \cos^2 \omega_C t dt$ и $\int_0^{T_S} \sin \omega_C t \cdot \cos \omega_C t dt$, которые после использования равенства (83) будут равны

$$\int_0^{T_S} \cos^2 \omega_C t dt = \frac{1}{2} T_S; \quad \int_0^{T_S} \sin \omega_C t \cdot \cos \omega_C t dt = 0. \quad (87)$$

Определим напряжения на соответствующих входах РУ1 из выражения (86), используя (87):

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1 \text{ на 1-м входе; } -\frac{h^2}{2} \cdot T_S - \xi - 0,5E_1 \text{ на 2-м входе; } \\ 3\frac{h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1 \text{ на 3-м входе; } -3\frac{h^2}{2} \cdot T_S - 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1 \text{ на 4-м входе, (88)} \end{aligned}$$

где $\xi = \int_0^{T_S} n(t) \cdot hg_2(t) \cos \omega_C t dt$.

Принимая во внимание, что на интервале интегрирования импульс $g_2(t)$ равен 1 В, получим

$$\xi = h \int_0^{T_S} n(t) \cdot \cos \omega_C t dt. \quad (89)$$

Так как $n(t)$ – гауссовская флуктуационная помеха типа белого шума, из (89) следует, что ξ – гауссовская случайная величина. Вероятностные параметры случайной величины ξ будут определены позднее.

Случайная величина ξ в (88) является причиной ошибок, иногда происходящих в работе РУ1. Чем больше будет дисперсия случайной величины ξ , тем чаще будут происходить ошибки.

При $I_0 = h, (-h), 3h, (-3h)$ при правильных решениях РУ1 наибольшие напряжения будут формироваться соответственно на 1-м, 2-м, 3-м или 4-м входах РУ1.

Если значение символа $I_0 = h$ по (85), то наибольшее напряжение при правильном решении будет на 1-м входе РУ1, и поэтому будут выполняться три неравенства в соответствии с (88):

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1 &> -\frac{h^2}{2} \cdot T_S - \xi - 0,5E_1; \\ \frac{h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1 &> 3\frac{h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1; \\ \frac{h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1 &> -3\frac{h^2}{2} \cdot T_S - 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1. \end{aligned} \quad (90)$$

Преобразуем (90) к виду:

$$2\xi > -2\frac{h^2}{2} \cdot T_S; \quad -2\xi > 2\frac{h^2}{2} \cdot T_S - 4E_1; \quad 4\xi > -4\frac{h^2}{2} \cdot T_S - 4E_1. \quad (91)$$

После элементарных преобразований из (91) получим

$$\xi > -\frac{h^2}{2} \cdot T_S; \quad \xi < -\frac{h^2}{2} \cdot T_S + 2E_1; \quad \xi > -\frac{h^2}{2} \cdot T_S - E_1, \quad (92)$$

где E_1 – энергия сигнала $s_1(t)$.

Используя (72), получим $E_1 = \int_0^{T_S} s_1^2(t) dt = \int_0^{T_S} h^2 g_2^2(t) \cos^2 \omega_C t dt$. Учитывая $g_2(t) = 1$ В на интервале интегрирования и $\cos^2 \omega_C t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_C t$,

определим $E_1 = \frac{h^2}{2} T_S + \frac{h^2}{4\omega_C} \sin 2\omega_C T_S$. Используя (83), получим $\sin 2\omega_C T_S = 0$.

Окончательно имеем

$$E_1 = \frac{h^2}{2} T_S. \quad (93)$$

Подставляя (93) в (92), получим

$$\xi > -E_1; \xi < E_1; \xi > -2E_1. \quad (94)$$

Если одновременно будут выполняться все три неравенства (94), то РУ1 вынесет *правильное* решение о том, что в соответствии с (85) значение информационного символа будет $I_0 = h$.

Если хотя бы одно из неравенств (94) выполняться не будет, то демодулятор примет *ошибочное* решение. На рис. 31 штриховкой обозначены те области на оси ξ , на которых выполняются соответствующие неравенства из системы (94).

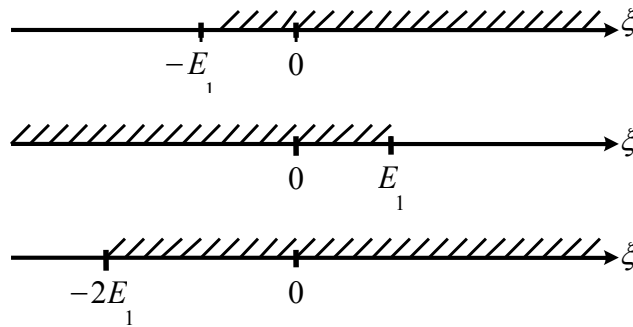


Рис. 31. Интервал $-E_1 < \xi < E_1$,
на котором одновременно выполняются неравенства (94)

На рис. 31 определяем, что случайная величина ξ будет удовлетворять неравенству

$$-E_1 < \xi < E_1, \quad (95)$$

если одновременно выполняются три неравенства из (94). Отсюда следует, что вероятность выполнения неравенства (95) равна вероятности *правильного* решения $p_{I_0=h}(\text{пр})$, которое принимает РУ1 при передаче значения ИС, равного $I_0 = h$. Вероятность невыполнения неравенства (95) равна вероятности *ошибочного* решения $p_{I_0=h}(\text{ош}) = 1 - p_{I_0=h}(\text{пр})$. Чтобы найти численные значения $p_{I_0=h}(\text{пр})$ и $p_{I_0=h}(\text{ош})$, необходимо определить плотность вероятности $w(\xi)$, которая характеризует случайную величину ξ равной выражению (89). Интегралу (89) соответствует линейный оператор, действующий на гауссовский случайный процесс $n(t)$ в составе подын-

тегральной функции. Известно, что воздействие любого линейного оператора на гауссовский процесс сохраняет гауссовское свойство, т. е. ξ – гауссовская случайная величина. Поскольку $w(\xi)$ – гауссовская плотность вероятности, то ее характеризуют два параметра – математическое ожидание $\bar{\xi}$ и дисперсия $D\{\xi\}$. Определим эти параметры:

$$\bar{\xi} = h \int_0^{T_S} \overline{n(t) \cdot \cos \omega_C t} dt = 0. \quad (96)$$

Математическое ожидание белого шума $\overline{n(t)} = 0$, то $\bar{\xi} = 0$, т. е. ξ – центрированная случайная величина, поэтому ее дисперсия определяется по формуле $D\{\xi\} = \overline{\xi^2}$. Подставляя в $D\{\xi\} = \overline{\xi^2}$ вместо ξ правую часть (89), получим

$$\begin{aligned} D\{\xi\} &= \overline{\left(h \int_0^{T_S} n(t) \cdot \cos \omega_C t dt \right)^2} = h^2 \overline{\int_0^{T_S} n(t_1) \cos \omega_C t_1 dt_1 \cdot \int_0^{T_S} n(t_2) \cdot \cos \omega_C t_2 dt_2} = \\ &= h^2 \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} \overline{n(t_1) \cdot n(t_2) \cdot \cos \omega_C t_1 \cdot \cos \omega_C t_2} dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

где $\overline{n(t_1) \cdot n(t_2)}$ – корреляционная функция белого шума $n(t)$, т. е.

$$\overline{n(t_1)n(t_2)} = B(t_2 - t_1) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t_2 - t_1);$$

N_0 – заданная односторонняя спектральная плотность мощности белого шума; $\delta(t_2 - t_1)$ – дельта-функция.

Таким образом,

$$\begin{aligned} D\{\xi\} &= \frac{N_0}{2} h^2 \cdot \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} \delta(t_2 - t_1) \cdot \cos \omega_C t_1 \cdot \cos \omega_C t_2 \cdot dt_2 \cdot dt_1 = \\ &= \frac{N_0}{2} h^2 \cdot \int_0^{T_S} \cos^2 \omega_C t_1 dt_1. \end{aligned}$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, а также (83) и

$$\cos^2 \omega \cdot t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t,$$

получим $D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} h^2 \cdot \frac{1}{2} T_S$. Затем используя (93), имеем

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} E_1. \quad (97)$$

Одномерную плотность вероятности $w(\xi)$ (рис. 32), имея в виду (96) и (97), можно представить в виде

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{\xi\}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D\{\xi\}}\right). \quad (98)$$

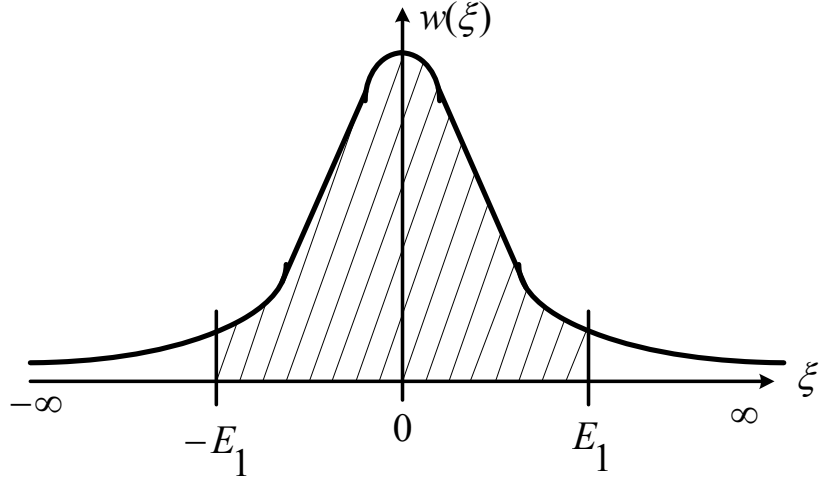


Рис. 32. Заштрихованная площадь $w(\xi)$ – вероятность правильного решения при значении $I_0 = h$

Вероятность правильного решения

$$p_{I_0=h}(\text{пр}) = p\{-E_1 \leq \xi \leq E_1\} = \int_{-E_1}^{E_1} w(\xi) d\xi = 2 \int_0^{E_1} w(\xi) d\xi \quad (99)$$

есть вероятность выполнения неравенства (95) и равна величине заштрихованной площади (рис. 32).

Вероятность ошибочного решения, принимаемого РУ1 будет

$$p_{I_0=h}(\text{ош}) = 1 - p_{I_0=h}(\text{пр}) = 1 - \int_{-E_1}^{E_1} w(\xi) d\xi. \quad (100)$$

Как видно на рис. 32, эта величина равна суммарной площади двух незаштрихованных «хвостов» в интервале от $-\infty$ до $-E_1$ и от E_1 до ∞ . Так как площади указанных хвостов одинаковы, то можно написать

$$p_{I_0=h}(\text{ош}) = 2 \int_{E_1}^{\infty} w(\xi) d\xi = 2 \int_{E_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{\xi\}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D\{\xi\}}\right) d\xi, \quad (101)$$

где интеграл определяет площадь одного «хвоста» от E_1 до ∞ .

Вводя новую переменную интегрирования η по формуле $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{D\{\xi\}}}$,

получим $d\xi = \sqrt{D\{\xi\}} \cdot d\eta$, при $\xi = \infty, \eta = \infty$, а при $\xi = E_1; \eta = \frac{E_1}{\sqrt{D\{\xi\}}}$.

В результате вместо (101) можно написать

$$p_{I_0=h}(\text{ош}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{E_1/\sqrt{D(\xi)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta. \quad (102)$$

Применяя известную формулу в математике [10]

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta, \quad (103)$$

где $Q(x)$ – табулированная функция (см. приложение).

Используя (97), окончательно получим

$$p_{I_0=h}(\text{ош}) = 2Q\left(\frac{E_1}{\sqrt{D(\xi)}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}\right). \quad (104)$$

2. Пусть значения переданных информационных символов (ИС) I_0 , Q_0 равны

$$I_0 = 3h; \quad Q_0 = h. \quad (105)$$

Повторяя по аналогии выкладки, рассмотренные в случае 1, получим следующие напряжения на соответствующих входах РУ1 в момент окончания символьного интервала длительностью T_S :

$$\begin{aligned} & \frac{3h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1 \text{ на 1-м входе; } -\frac{3h^2}{2} \cdot T_S - \xi - 0,5E_1 \text{ на 2-м входе;} \\ & \frac{9h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1 \text{ на 3-м входе; } -\frac{9h^2}{2} \cdot T_S - 3\xi - 0,5 \cdot 9E_1 \text{ на 4-м входе.} \end{aligned} \quad (106)$$

$I_0 = 3h$ – означает, что теперь в составе информационной части входного сигнала $Z(t)$ содержится сигнал $s_3(t) = 3hg_2(t)\cos\omega_C t$ из (72). Следовательно, если РУ1 принимает правильное решение, то наибольшее напряжение будет на его третьем входе, т. е. должны одновременно выполняться три неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{9h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 4,5E_1 > \frac{3h^2}{2} \cdot T_S + \xi - 0,5E_1; \\ & \frac{9h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 4,5E_1 > -3\frac{h^2}{2} \cdot T_S - \xi - 0,5 \cdot E_1; \\ & \frac{9h^2}{2} \cdot T_S + 3\xi - 4,5E_1 > -\frac{9h^2}{2} \cdot T_S - 3\xi - 4,5 \cdot E_1. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований с учетом (93) неравенства примут вид:

$$\xi > -E_1; \quad \xi > -2E_1; \quad \xi > -3E_1. \quad (107)$$

Эти неравенства (107) будут выполняться одновременно, если случайная величина ξ удовлетворяет неравенству

$$\xi > -E_1. \quad (108)$$

Вероятность правильного решения, принимаемого РУ1, будет равна вероятности выполнения неравенства (108), т. е.

$$p_{I_0=3h}(\text{пр}) = p\{\xi > -E_1\} = \int_{-E_1}^{\infty} w(\xi) d\xi, \quad (109)$$

где $w(\xi)$ определяется из (98).

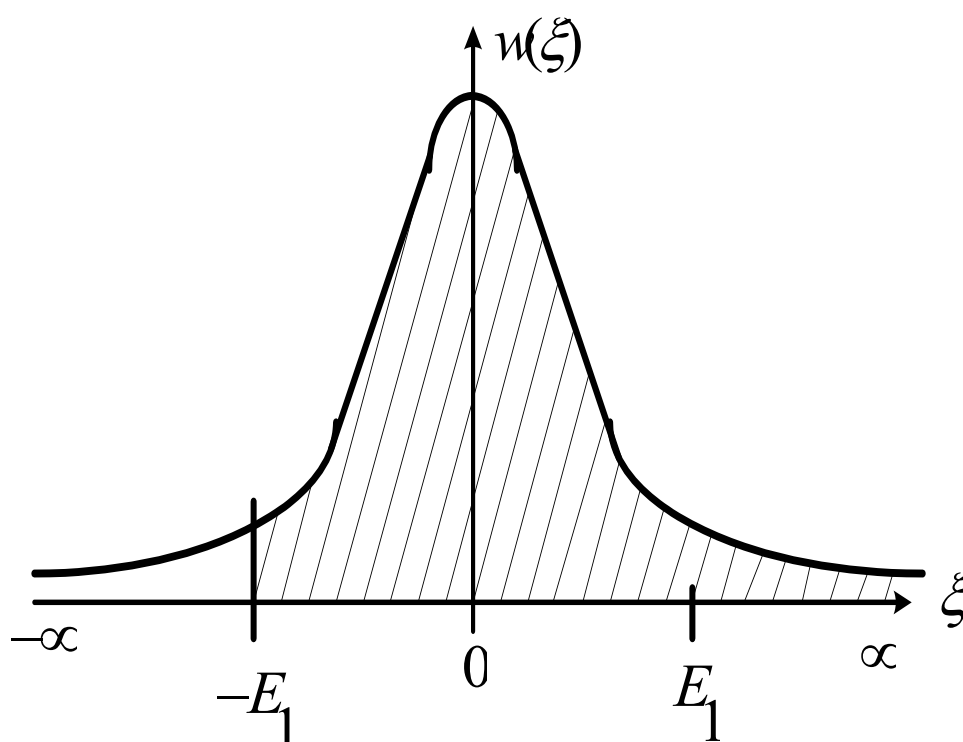


Рис. 33. Заштрихованная площадь – вероятность правильного решения РУ1 при $I_0 = 3h$

При сравнении рис. 31 и 32 видно, что вероятность ошибки при $I_0 = h$ равна площади двух незаштрихованных «хвостов», создаваемых кривой $w(\xi)$, которые соответственно уходят в $-\infty$ и в $+\infty$. На рис. 33 видно, что вероятность ошибки при $I_0 = 3h$ равна площади только одного «хвоста» от $-\infty$ до величины $(-E_1)$. Отсюда следует

$$p_{I_0=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{I_0=h}(\text{ош}). \quad (110)$$

Используя (100), получим из (110)

$$p_{I_0=3h}(\text{ош}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}\right). \quad (111)$$

Аналогично вышеизложенному определяются вероятности ошибок при $I_0 = -h$ и $I_0 = -3h$, а также вероятности ошибок в работе РУ2. Вероятности ошибок в работе РУ1 и РУ2 при различных значениях передаваемых ИС I_n и Q_n представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Передаваемая величина ИС I_n	Вероятность ошибки в работе РУ1
$I_n = h$	$p_{I_n=h}(\text{ош}) = [1 - \Phi(\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}})] = 2Q\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$I_n = -h$	$p_{I_n=-h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош})$
$I_n = 3h$	$p_{I_n=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{I_n=h}(\text{ош}) = Q\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$I_n = -3h$	$p_{I_n=-3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{I_n=h}(\text{ош})$

Таблица 4

Передаваемая величина ИС Q_n	Вероятность ошибки в работе РУ2
$Q_n = h$	$p_{Q_n=h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош}) = 2Q\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$Q_n = -h$	$p_{Q_n=-h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош})$
$Q_n = 3h$	$p_{Q_n=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{Q_n=h}(\text{ош}) = Q\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$Q_n = -3h$	$p_{Q_n=-3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{Q_n=h}(\text{ош})$

Решения, принимаемые РУ1 и РУ2 о значениях передаваемых символов I_n и Q_n в виде соответствующих сигналов, поступают на входы преобразователя параллельного кода в последовательный код.

4.8.2. Вероятность ошибки на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код

Ошибки на выходе этого преобразователя происходят в трех случаях:

- 1) когда значение передаваемого символа I_n определено ошибочно (будем считать, что произошло случайное событие А);
- 2) когда значение передаваемого символа Q_n определено ошибочно (будем считать, что произошло случайное событие В);
- 3) когда значения обоих передаваемых символов I_n и Q_n определены ошибочно.

Из теории вероятности есть известные определения.

Суммой двух случайных событий А и В называется такое третье событие $C = A + B$, которое состоит в наступлении или события А, или события В, или в наступлении обоих событий А и В. Для обозначения суммы применяется запись $C = A + B$. При этом вероятность суммы определяется по формуле

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \quad (112)$$

где через $(A \cdot B)$ обозначено *произведение* событий А и В, которое состоит в осуществлении и события А, и события В. Вероятность произведения $(A \cdot B)$ определяется по формуле

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B), \quad (113)$$

где $P(B / A)$ и $P(A / B)$ – условные вероятности.

Если события А и В независимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (114)$$

и формула (112) примет вид

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \quad (115)$$

Нетрудно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя, когда ошибки на выходах РУ1 и РУ2 происходят независимо. Пусть, например, на n -м интервале передаются значения ИС $I_n = h$ и $Q_n = h$, тогда, используя (115), можно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя:

$$p_{I_n=h, Q_n=h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош}) + p_{Q_n=h}(\text{ош}) - p_{I_n=h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=h}(\text{ош}). \quad (116)$$

В правую часть (116) входят вероятности ошибки на выходах РУ1 и РУ2.

Для четырех из шестнадцати точек сигнального созвездия КАМ-16, координаты которых I_n и Q_n могут иметь следующие значения, приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5

I_n	h	h	$-h$	$-h$
Q_n	h	$-h$	h	$-h$

Таблица 6

I_n	$3h$	$3h$	$-3h$	$-3h$
Q_n	$3h$	$-3h$	$3h$	$-3h$

В соответствии с табл. 5 и 6 вероятности ошибок на выходе преобразователя будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать по (116).

Для других четырех точек сигнального созвездия, у которых координаты I_n и Q_n равны значениям по табл. 5, в соответствии с табл. 5 и 6 вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать по формуле

$$p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=3h}}(\text{ош}) = p_{I_n=3h}(\text{ош}) + p_{Q_n=3h}(\text{ош}) - p_{I_n=3h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=3h}(\text{ош}). \quad (117)$$

Для остальных восьми точек сигнального созвездия координаты равны значениям I_n и Q_n по табл. 7, а вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми и их величину можно рассчитать по формуле

$$p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=h}}(\text{ош}) = p_{I_n=3h}(\text{ош}) + p_{Q_n=h}(\text{ош}) - p_{I_n=3h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=h}(\text{ош}). \quad (118)$$

Таблица 7

I_n	$3h$	h	$-h$	$-3h$	$-h$	$-3h$	h	$3h$
Q_n	h	$3h$	$3h$	h	$-3h$	$-h$	$-3h$	$-h$

Учитывая, что всего на сигнальном созвездии КАМ-16 содержится 16 точек, среднюю величину вероятности ошибки на выходе преобразователя можно определить так:

$$p_{\text{ср}}(\text{ош}) = \left(4 \cdot p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=h}}(\text{ош}) + 4 \cdot p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=3h}}(\text{ош}) + 8 \cdot p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=h}}(\text{ош}) \right) / 16. \quad (119)$$

4.9. Декодер (ДК)

Рассмотрим выполнение задания по разд. 4.9 на примере.

Рекомендуется использовать учебное пособие [7, стр. 23–30].

Пусть m – номер варианта в КР, $m = 71$.

1) В соответствии с табл. 2, полученной для этого варианта, в разд. 4.3 выписываем из 2-й строки численные значения кодовых символов (КС), которые передавались по каналу связи, $\bar{u} = 111011001101101010$.

Из табл. 1 исходных данных определяем номер тактового интервала k , на котором произошла ошибка на выходе демодулятора, т. е. $k = m(\bmod 3) + 1 = 71(\bmod 3) + 1 = 2 + 1 = 3$. Ошибка произошла на 3-м тактовом интервале, поэтому на вход декодера поступает последовательность $\bar{z} = 110^x011001101101010$.

Крестиком отмечен кодовый символ, который был принят ошибочно в последовательности \bar{u} .

2. Строим решетчатую диаграмму декодера с учетом полученной последовательности \bar{z} [7, стр. 24].

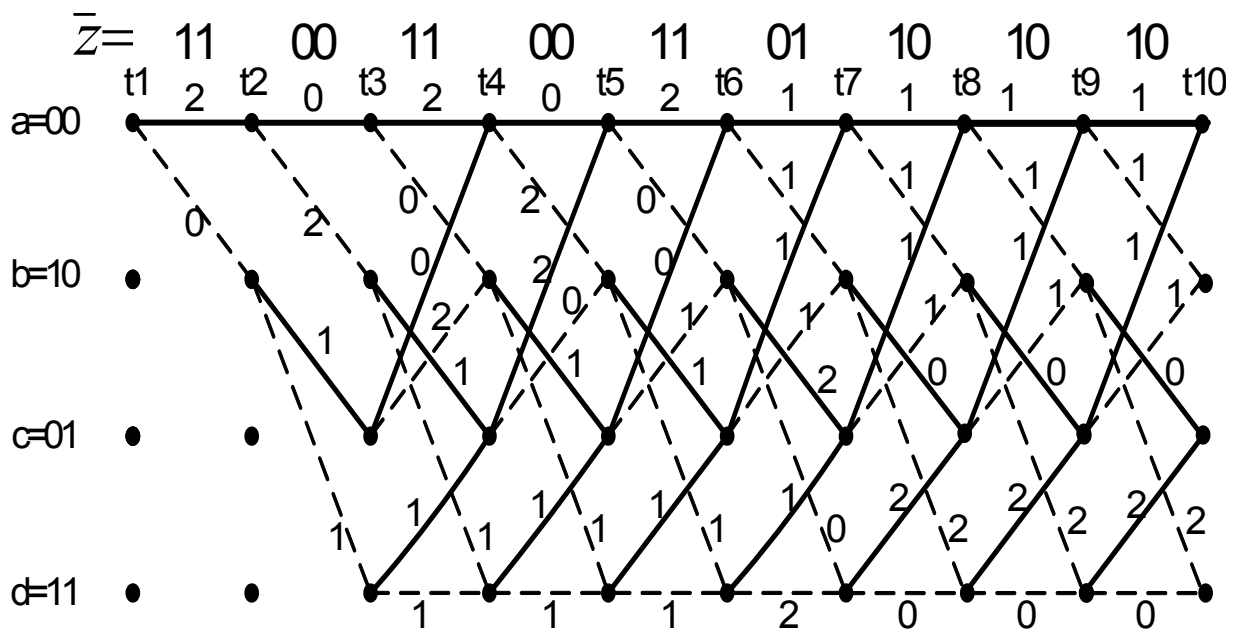


Рис. 34. Решетчатая диаграмма декодера

3. Используя методику [7, стр. 25–29], построить диаграммы выживших путей. Определить момент времени t_n , когда останется только один выживший путь. Этот путь с решетчатой диаграммой декодера перенести на решетчатую диаграмму кодера и по этой диаграмме определить кодовые символы (КС), которые действительно передавались по каналу связи.

В результате этой операции ошибка, полученная на выходе демодулятора, будет исправлена.

5. ЦАП: получатель сообщений, помехоустойчивость системы

Напомним, что в блоке АЦП передающего устройства точному отсчету $a(k\Delta t)$ аналогового сигнала $a(t)$ в момент времени $t = k\Delta t$ сопоставляется ближайший номер уровня квантования в виде целого положительного числа j_k . Величине j_k соответствует последовательность определенного числа двоичных информационных символов (ИС), передаваемых по каналу связи. Предполагается, что возможные ошибки, которые могли произойти на выходе демодулятора, исправлены в декодере и на вход ЦАП поступает цифровой сигнал ИС, соответствующий уровню квантования j_k .

В момент времени $t = k\Delta t$ в ЦАП генерируется прямоугольный импульс длительностью τ_0 с амплитудой $A_k = a_{\min} + j_k \cdot \Delta a$, где $\tau_0 \leq \Delta t$.

Последовательность таких прямоугольных импульсов в зависимости от длительности τ_0 , начиная с момента времени $t = 0$, приведена на рис. 35, а, б.

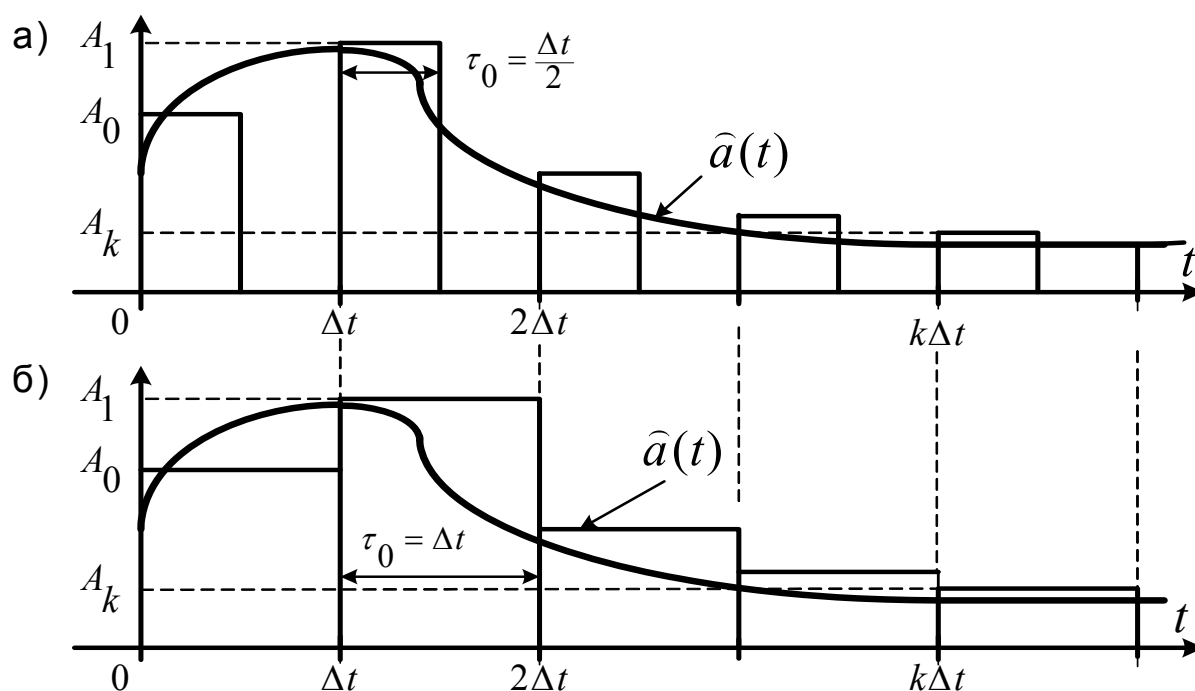


Рис. 35. Последовательность прямоугольных импульсов

в ЦАП при $\tau_0 = \frac{\Delta t}{2}$ и $\tau_0 = \Delta t$

Последовательность прямоугольных импульсов (рис. 35) поступает на вход ФНЧ, входящего в цифроаналоговый преобразователь (ЦАП). На выходе ФНЧ формируется аналоговый сигнал $\hat{a}(t)$, изображенный в виде сплошной жирной кривой на рис. 35, а, б. С достаточной степенью точности сигнал $\hat{a}(t)$ должен воспроизводить исходный аналоговый сигнал $a(t)$, который по структурной схеме с выхода источника сообщений поступает на вход АЦП. Разностный сигнал

$$\Delta a(t) = a(t) - \hat{a}(t)$$

является погрешностью, возникающей при передаче и восстановлении исходного аналогового сигнала $a(t)$. Перечислим основные причины, влияющие на величину погрешности $\Delta a(t)$:

- 1) вместо точных отсчетов $a(k\Delta t)$ используются квантованные отсчеты $A_k = a_{\text{мин}} + j_k \cdot \Delta a$, где j_k – номер уровня квантования;
- 2) вместо δ -импульсов, длительность которых равна нулю, используются прямоугольные импульсы конечной длительности τ_0 (рис. 35);
- 3) вместо идеального ФНЧ в качестве фильтра-восстановителя используется физически реализуемый ФНЧ, передаточная функция которого отличается от передаточной функции идеального ФНЧ.

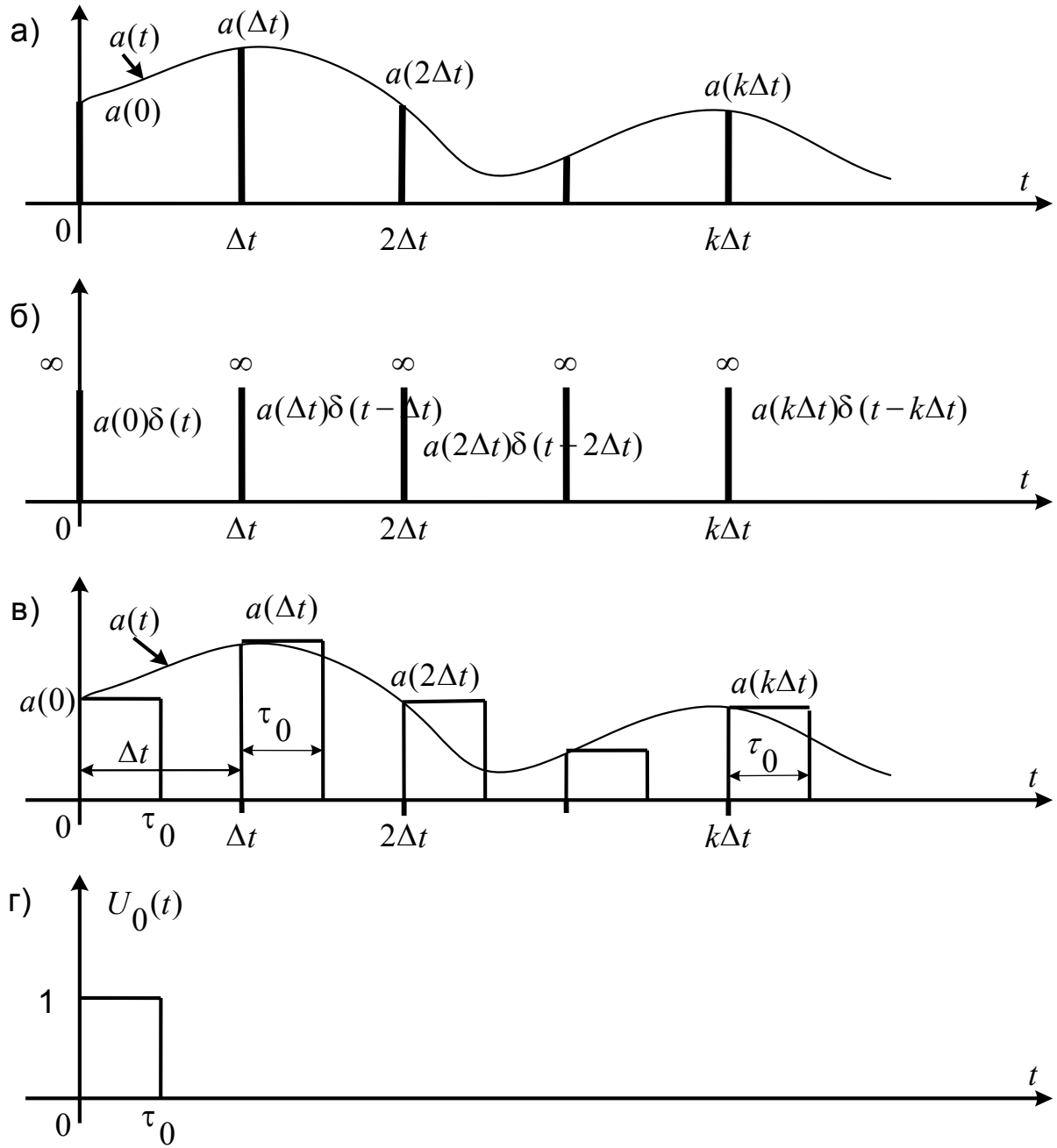


Рис. 36. а) Аналоговый сигнал $a(t)$; б) и в) возможные импульсные сигналы, сформированные на основе аналогового сигнала $a(t)$

Теперь выясним влияние конечной длительности τ_0 прямоугольных импульсов (рис. 36, в) на величину погрешности $\Delta a(t)$.

Обозначим через $y(t)$ прямоугольный импульс длительностью τ_0 с амплитудой $a(k\Delta t)$ (рис. 36, в). Этот импульс можно представить в виде свертки прямоугольного импульса $U_0(t)$ (рис. 36, г) с импульсом (рис. 36, б)

$$f(\tau) = a(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t). \quad (120)$$

Тогда

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (121)$$

Действительно, подставив (120) в (121), т. е.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t - \tau) \cdot a(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t) d\tau = a(k\Delta t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t - \tau) \cdot \delta(\tau - k\Delta t) d\tau, \quad (122)$$

и используя «фильтрующее свойство δ -функции»⁶, получим

$$y(t) = a(k\Delta t) \cdot U_0(t - k\Delta t).$$

Отсюда следует, что форма импульса $y(t)$ определяется формой импульса $U_0(t)$, смещенного по оси времени t вправо на интервал $k\Delta t$. Амплитуда импульса $y(t)$ равна $a(k\Delta t)$, так как согласно рис. 36, г амплитуда импульса $U_0(t - k\Delta t)$ равна единице.

Таким образом, свертка (122) определяет прямоугольный импульс, изображенный на рис. 36, в длительностью τ_0 с амплитудой $a(k\Delta t)$. Полученный результат позволяет всю последовательность прямоугольных импульсов (рис. 36, в) представить в виде свертки импульса $U_0(t)$ с последовательностью δ -импульсов (рис. 36, б), тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t - \tau) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k\Delta t) \cdot \delta(\tau - k\Delta t) d\tau. \quad (123)$$

Функции $U_0(t)$ соответствует спектральная плотность

$$S_{U_0}(\omega) = \tau_0 \frac{\sin \omega \frac{\tau_0}{2}}{\omega \frac{\tau_0}{2}} \cdot e^{-i\omega \frac{\tau_0}{2}}, \quad (124)$$

а функции $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t)$ соответствует периодическая спектральная

плотность с периодом $\omega_1 = \frac{2\pi}{\Delta t}$.

$$S_{\Sigma}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{\Delta t}\right), \quad (125)$$

где $S_a(\omega)$ – финитная спектральная плотность аналогового сигнала $a(t)$ (рис. 37, а).

⁶ «Фильтрующее свойство δ -функции» определяется равенством $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - a) dt = \varphi(a)$, где $\varphi(t)$ – произвольная функция t .

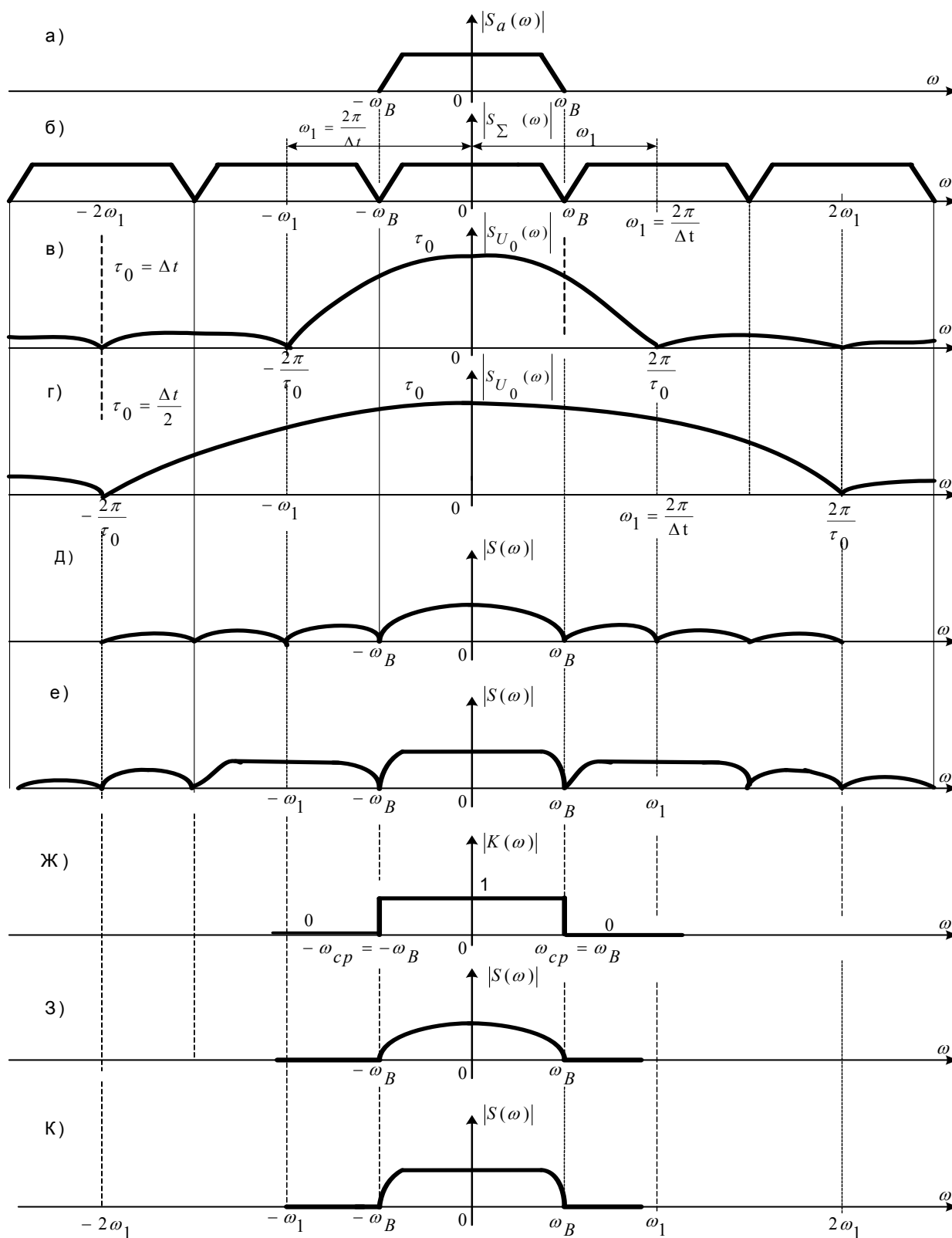


Рис. 37. Графики определения спектральной плотности при разной длительности τ_0 прямоугольного импульса

Свертка (123) является функцией аргумента t и имеет спектральную плотность $S(\omega)$, равную произведению спектральных плотностей сворачиваемых функций, т. е. произведению функций, определяемых равенствами (124) и (125)

$$S(\omega) = S_{U_0}(\omega) \cdot S_{\Sigma}(\omega) = \tau_0 \frac{\sin \omega \frac{\tau_0}{2}}{\omega \frac{\tau_0}{2}} \cdot e^{-i\omega \frac{\tau_0}{2}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{\Delta t}\right), \quad (126)$$

где $|S_a(\omega)|$ – модуль финитной спектральной плотности аналогового сигнала $a(t)$ (рис. 37, а); $|S_{\Sigma}(\omega)|$ – модуль, соответствующий сигналу в виде последовательности δ -функций (рис. 36, б); $|S_{U_0}(\omega)|$ – график модулей спектральной плотности $S_{U_0}(\omega)$ прямоугольного импульса $U_0(t)$ для значений $\tau_0 = \Delta t$ и $\tau_0 = \Delta t/2$ соответственно для рис. 37, в и г; $|S(\omega)|$ – на рис. 37, д изображен график модуля спектральной плотности, определяемой (126) как результат перемножения графиков рис. 37, б и в; $|S(\omega)|$ – на рис. 37, е изображен график модуля спектральной плотности, определяемой (126) как результат перемножения графиков рис. 37, б и г.

График модуля передаточной функции идеального ФНЧ с частотой среза $\omega_{\text{ср}} = \omega_B$ приведен на рис. 37, ж.

Графики модуля спектральной плотности *восстановленного* сигнала $\hat{a}(t)$, можно получить на выходе ФНЧ в соответствии с выражением $|S_{\hat{a}}(\omega)| = |S(\omega)| \cdot |K(\omega)|$ как результат перемножения графиков рис. 37, д и ж при длительности прямоугольных импульсов $\tau_0 = \Delta t$, или рис. 37, е и ж при $\tau_0 = \Delta t/2$, т. е. в зависимости от величины длительности τ_0 показаны на рис. 37, з, к.

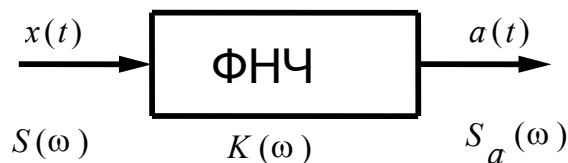


Рис. 38. График модуля спектральной плотности восстановленного сигнала $\hat{a}(t)$

На рис. 38 под входным сигналом $x(t)$ понимается сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов на рис. 36, в при $\tau_0 = \Delta t/2$. Учитывая форму графика на рис. 37, ж, рассмотрим два случая:

1) спектральная плотность $|S_{\hat{a}}(\omega)|$ равна участку на графике $|S(\omega)|$ на рис. 37, д между частот $-\omega_B$ и ω_B ;

2) спектральная плотность $|S_{\hat{a}}(\omega)|$ равна участку на графике $|S(\omega)|$ на рис. 37, е между частот $-\omega_B$ и ω_B .

Рассматривая 1-й случай, убеждаемся, что спектральная плотность восстановленного сигнала $|S_{\hat{a}}(\omega)|$ (рис. 37, д) заметно отличается от спектральной плотности $|S_a(\omega)|$ на рис. 37, а. Делаем вывод, что при увеличении длительности импульсов $\tau_0 = \Delta t$ погрешность восстановления $\Delta a(t)$ исходного аналогового сигнала будет достаточно большой.

Во 2-м случае спектральная плотность $|S_{\hat{a}}(\omega)|$ будет меньше отличаться от спектральной плотности $|S_a(\omega)|$ (рис. 37, а), так как $\tau_0 = \Delta t / 2$. Делаем вывод, что при уменьшении длительности τ_0 прямоугольных импульсов (рис. 36, в) величина погрешности восстановления $\Delta a(t)$ уменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Зюко, А. Г. Теория передачи сигналов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. – Изд. 2-е, перераб. и дополнен. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
2. Зюко, А. Г. Теория электрической связи : учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров. – М. : Радио и связь, 1998.
3. Скляр, Бернард. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение : пер. с англ. / Бернард Скляр. – Изд. 2-2, испр. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. Кларк, Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк, мл. Дж. Кейн : пер. с англ. С. И. Гельфонда ; под ред. Б. С. Цыбакова. – М. : Радио и связь, 1987. – Вып. 28. – 392 с.
5. Григоровский, Л. Ф. Теория электрической связи. Модели сигналов и методы их преобразования в системах связи : учеб. пособие / Л. Ф. Григоровский, В. И. Коржик, В. Г. Красов, В. Ф. Кушнир. – Л. : ЛЭИС. – 1990.
6. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – Изд. 2-е, перераб. и дополнен. – М. : «Радио и связь», 1982. – 624 с.
7. Куликов, Л. Н. Теория электрической связи. Основы сверточного кодирования : учеб. пособие / Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец. – СПб., 2006.

Дополнительная

8. Сальников, А. П. Теория электрической связи : конспект лекций / А. П. Сальников. – СПб. : Линк, 2007.
9. Биккенин, Р. Р. Теория электрической связи : учеб. пособие / Р. Р. Биккенин, М. Н. Чесноков. – Л. : ЛЭИС. – 2010.
10. Прокис, Дж. Цифровая связь : перевод с англ. / Дж. Прокис ; под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 2000. – 800 с.
11. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : «Наука», 1964.
12. Френкс, Л. Теория сигналов : перевод с англ. / Л. Френкс ; под ред. Д. Е. Вакмана. – М. : Советское радио, 1974. – 344 с.
13. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. И. Атабеков. – М. : Энергия, 1969. – 424 с.
14. Смирнов, Г. И. Теория электрической связи : методические указания к курсовой работе / Г. И. Смирнов, В. Ф. Кушнир. – Санкт-Петербург, 1999.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \int_X^{\infty} \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	0,46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	0,42074	41683	41294	40905	40517	401298	39743	39358	38974	38591
0,3	0,38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
0,4	0,34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	0,30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	0,27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	0,24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	0,21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	0,18406	18141	17879	17619	17361	17106	16863	16602	16354	16109
1,0	0,15866	15625	15386	15150	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	0,13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	0,11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	0,09680	09510	09342	09176	09012	08851	08691	08534	08379	08226
1,4	0,08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	0,06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	0,05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	0,04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	0,03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	0,02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330
2,0	0,02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	0,01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	0,01390	01355	01321	01287	01255	01222	01191	01160	01130	01101
2,3	0,01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	0,00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	0,00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00508	00494	00480
2,6	0,00466	00453	00440	00427	00415	00402	00391	00379	00368	00357
2,7	0,00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00264
2,8	0,00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	0,00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
3,0	$135 \cdot 10^{-5}$	3,3	$48 \cdot 10^{-5}$	3,6	$16 \cdot 10^{-5}$	3,9	$48 \cdot 10^{-6}$	4,5	$34 \cdot 10^{-7}$
3,1	$97 \cdot 10^{-5}$	3,4	$34 \cdot 10^{-5}$	3,7	$11 \cdot 10^{-5}$	4,0	$32 \cdot 10^{-6}$	4,8	$8 \cdot 10^{-7}$
3,2	$69 \cdot 10^{-5}$	3,5	$23 \cdot 10^{-5}$	3,8	$72 \cdot 10^{-6}$	4,3	$85 \cdot 10^{-7}$	5,0	$3 \cdot 10^{-7}$

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	3
2. ЗАДАНИЕ	5
3. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ	6
3.1. Источник сообщения	7
3.2. Аналого-цифровой преобразователь	7
3.3. Кодер (К)	9
3.4. Формирователь модулирующих символов	9
3.5. Модулятор	10
3.6. Непрерывный канал	11
3.7. Демодулятор	12
3.8. Декодер	13
4. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КР	13
4.1. Источник сообщений	13
4.2. Аналого-цифровой преобразователь	14
4.3. Кодер	15
4.4. ССТС	16
4.5. ФМС формирователь модулирующих символов (преобразователь последовательного кода в параллельный код)	28
4.6. Модулятор: перемножители, инвертор, сумматор	35
4.6.1. Корреляционные функции, спектральные плотности мощности на выходе перемножителей	41
4.6.2. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности случайного процесса на выходе модулятора	44
4.7. Непрерывный канал	46
4.8. Демодулятор (ДМ)	51
4.8.1. Вероятность ошибок на выходе $P_{У1}$ и $P_{У2}$	60
4.8.2. Вероятность ошибки на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код	69
4.9. Декодер (ДК)	70
5. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ (ЦАП), ПОЛУЧАТЕЛЬ СООБЩЕНИЙ, ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ	72
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	78
ПРИЛОЖЕНИЕ	79

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
41	1-я и 2-я снизу (56)	$\overline{\cos(\omega_c t + \phi_c)} =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot w(\phi_c) h \phi_c =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \phi_c) h \phi_c = 0$	$\overline{\cos(\omega_c t + \phi_c)} =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot w(\phi_c) d \phi_c =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \phi_c) d \phi_c = 0$
46	1-я сверху	Согласно (25) из разд. 4.4 имеем $B_Q(\tau)$,	Согласно (25) из разд. 4.4 имеем $B_Q(\tau) = B_I(\tau)$,
68	1-я сверху	Используя (100),	Используя (104),
69	10-я сверху	Из теории вероятности есть известные определения.	Напомним известные в теории вероятности определения.
69	9-я снизу	Нетрудно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя, когда ошибки на выходах РУ1 и РУ2 происходят независимо.	Нетрудно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя, поскольку ошибки на выходах РУ1 и РУ2 происходят независимо.
69	4-я снизу	В правую часть (116) входят вероятности ошибки на выходах РУ1 и РУ2.	В правую часть (116) входят вероятности ошибки на выходах РУ1 и РУ2, значения которых указаны в табл. 3 и 4.
69	3-я снизу	Для четырех из шестнадцати точек сигнального созвездия КАМ16, координаты которых I_n и Q_n могут иметь следующие значения, приведены в табл. 5 и 6.	Для четырех из шестнадцати точек сигнального созвездия КАМ16, координаты которых I_n и Q_n приведены в табл. 5, вероятности ошибок на выходе преобразователя будут одинаковыми, и их величину можно определить по (116).
70	6-я сверху	Для других четырех точек сигнального созвездия, у которых координаты I_n и Q_n равны значениям по табл. 5, в соответствии с табл. 5 и 6 вероятности ошибок...	Для других четырех точек сигнального созвездия, координаты которых I_n и Q_n приведены в табл. 6, вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать по формуле (117).
70	11-я сверху	Для остальных восьми точек сигнального созвездия, координаты равны значениям I_n и Q_n по табл. 7, а вероятности ошибок...	Для остальных восьми точек сигнального созвездия, координаты которых I_n и Q_n приведены в табл. 7, вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать по формуле (118).

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
72	1-я сверху	5. ЦАП: получатель сообщений, помехоустойчивость системы.	5. ЦАП.
75	3-я снизу	(рис. 37, а)	
77	5-я сверху	где $ S_a(\omega) $ – модуль...	$ S_a(\omega) $ – модуль...
77	8-я снизу	Рис. 38. График модуля спектральной плотности восстановленного сигнала	Рис. 38. Фильтр-восстановитель аналогового сигнала в составе ЦАП
80	4-я снизу	5. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ (ЦАП), ПОЛУЧАТЕЛЬ СООБЩЕНИЙ, ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ	5. ЦИФРОАНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ (ЦАП)

Куликов Леонид Николаевич
Москалец Мария Николаевна
Чесноков Михаил Николаевич

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

Методические указания
к выполнению курсовой работы

Редактор *И. И. Щенсяк*

План 2012 г., п. 44
Подписано к печати 28.12.2012
Объем 5,0 усл.-печ. л. Тираж 140 экз. Заказ 234
Издательство СПбГУТ. 191186 СПб., наб. р. Мойки, 61
Отпечатано в СПбГУТ

**Л. Н. Куликов
М. Н. Москалец
М. Н. Чесноков**

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2012**