

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА**

Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВЕРТОЧНОГО
КОДИРОВАНИЯ**

Учебное пособие



**Санкт-Петербург
2006**

УДК 621.391
ББК 388-01
К 90

Рецензент:
Доктор технических наук, профессор
Р. Р. Биккенин

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Куликов Л. Н., Москалец М. Н.
Теория электрической связи. Основы теории сверточного кодирования: учеб.
пособие. СПб.: ГОУВПО СПбГУТ, 2006.

Предназначено для студентов, изучающих курс «Теория электрической связи».

Содержит краткую историю создания сверточного кодирования. Приведены основные параметры сверточных кодов, описание древовидных и решетчатых диаграмм, рассматривается алгоритм сверточного декодирования Витерби.

Приводятся примеры декодирования. В современной цифровой связи сверточное кодирование нашло широкое практическое применение. Приведенные примеры работы сверточных кодеров и декодеров помогут студентам выполнить новую курсовую работу по ТЭС ч. 2.

© Куликов Л. Н., Москалец М. Н., 2006

© ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Основы теории сверточного кодирования.....	4
Сверточные коды.....	4
Древовидные и решетчатые диаграммы.....	16
Алгоритм сверточного декодирования Витерби.....	23
Литература.....	35

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВЕРТОЧНОГО КОДИРОВАНИЯ. СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ

Общие понятия и описание работы сверточного кодера

В течение последнего десятилетия наиболее популярным видом кодирования было сверточное кодирование, поскольку во многих приложениях сверточные коды лучше блочных при той же конструктивной сложности кодера и декодера. В разработку сверточных кодов большой вклад внесли американские ученые. Сверточные коды были впервые введены Т. П. Элайсом в 1955 г.

В отличие от рассмотренных ранее блочных кодов, сверточные коды являются непрерывными. Их кодирование и декодирование осуществляются непрерывно, т. е. без деления информационных символов на блоки. Название метода кодирования означает, что последовательность символов на выходе кодера можно рассматривать как свертку импульсной характеристики кодера с входной последовательностью информационных символов.

В 1957 г. Д. Ж. Возенкрафтом был разработан метод последовательного декодирования для этих кодов, который впоследствии был усовершенствован А. М. Фано. Основным рабочим инструментом при разработке кодирующих и декодирующих устройств в то время для сверточных кодов было так называемое **кодоевое дерево**.

В 1967 г. Д. Форни вместо кодоевого дерева ввел эквивалентную, но более экономичную (с точки зрения объема вычислений) структуру, получившую название **решетчатая структура**. И в том же 1967 г. известный американский ученый А. Д. Витерби предложил новый метод декодирования сверточных кодов в виде простой итеративной процедуры, названный его именем – алгоритм декодирования Витерби.

В этом методе декодирования вместо кодоевого дерева используется решетчатая структура. Было установлено, что алгоритм Витерби является методом динамического программирования (которое уже было известно в то время), примененным к сверточным кодам. Сверточное кодирование, применяемое вместе с декодированием Витерби, в настоящее время стало одним из наиболее широко используемых на практике методов исправления ошибок.

На рис. 1 изображен простейший двоичный сверточный кодер, в состав которого входит регистр сдвига, состоящий из трех ячеек (1, 2 и 3), и два сумматора по модулю 2, соединенных с соответствующими ячейками регистра сдвига.

При каждом поступлении информационного символа в первую ячейку регистра символы в регистре смещаются на одну позицию вправо. Коммутатор вначале находится в верхнем положении и считывает на выход кодоевый символ из верхнего сумматора, а затем переключается в нижнее поло-

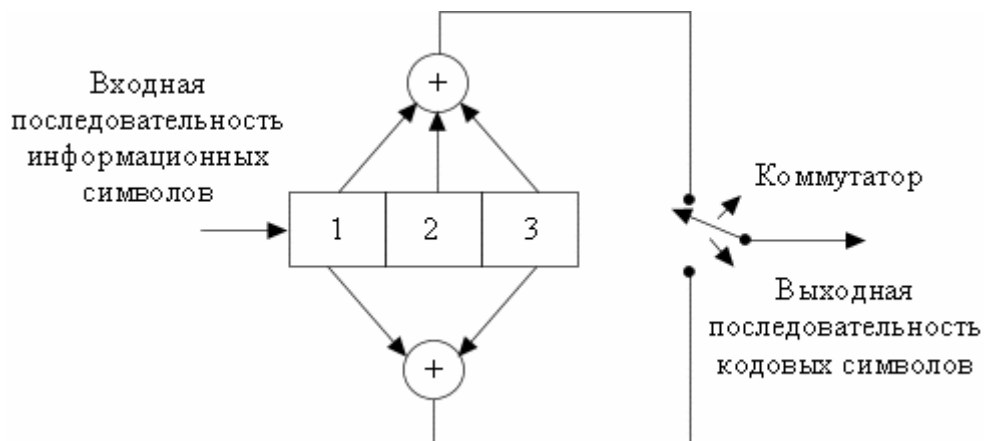


Рис. 1. Сверточный кодер

жение и считывает на выход кодовый символ из нижнего сумматора. После этого на вход регистра поступает следующий информационный символ, происходит новое смещение символов в регистре сдвига и снова коммутатор считывает кодовые символы сначала с верхнего сумматора, а затем с нижнего и так далее.

Естественно, что скорость переключения коммутатора должна быть вдвое больше скорости поступления информационных символов на вход кодера. В этом кодере при поступлении на вход одного информационного символа с выхода считываются два кодовых символа. Выбор связи между сумматорами и разрядами регистра влияет на характеристики кода. Всякое изменение в выборе связей приводит в результате к различным кодам.

Блочные коды (n, k) , которые рассматривали раньше, характеризуются двумя целыми числами n, k , где:

k – количество информационных символов, поступающих на вход кодера в виде информационного блока;

n – количество кодовых символов, поступающих с выхода кодера в виде кодового блока.

Отношение k/n называется **степенью кодирования** [1] и является мерой добавленной избыточности. Информационные символы, поступающие на вход сверточного кодера, а также и кодовые символы с выхода кодера не делятся на блоки, как это было раньше, т. е. сверточный код является **непрерывным** кодом.

Сверточный код описывается тремя целыми числами: n, k, K . Смысл этих чисел (параметров) следующий:

– если на вход кодера поступит k информационных символов, то с выхода кодера получим n кодовых символов. Таким образом, для сверточного кодера, изображенного на рис. 1, при поступлении на вход одного информационного символа на выход кодера поступают кодовые символы с выходов двух сумматоров, т. е.,

– если $k=1$, то $n=2$ и отношение $k/n=1/2$ здесь также имеет смысл **степени кодирования** [1], как и для блочного кода. В других источниках, например в [2], отношение k/n обозначают, как R и называют **скоростью**. На практике n и k – это небольшие целые числа.

На рис. 2 изображен кодер, для которого параметры k и n имеют значения: $k=1, n=3$, т. е. степень кодирования (или скорость) равна $k/n=1/3$.

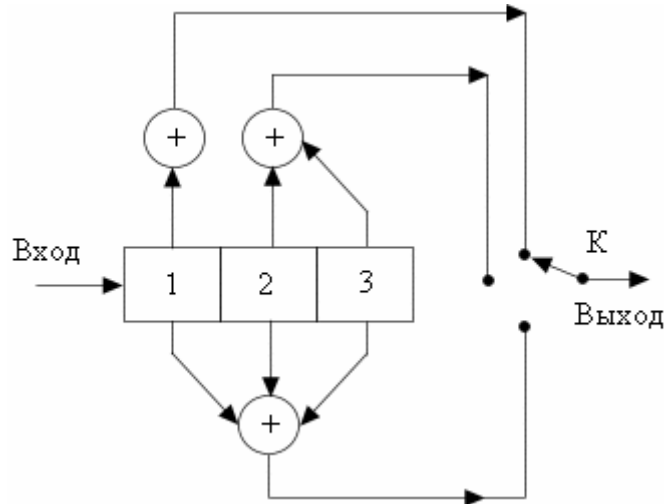


Рис. 2. Сверточный кодер

На рис. 3 изображен кодер, для которого параметры k и n имеют значения: $k=2, n=3$, т. е. степень кодирования (или скорость) равна $k/n=2/3$.

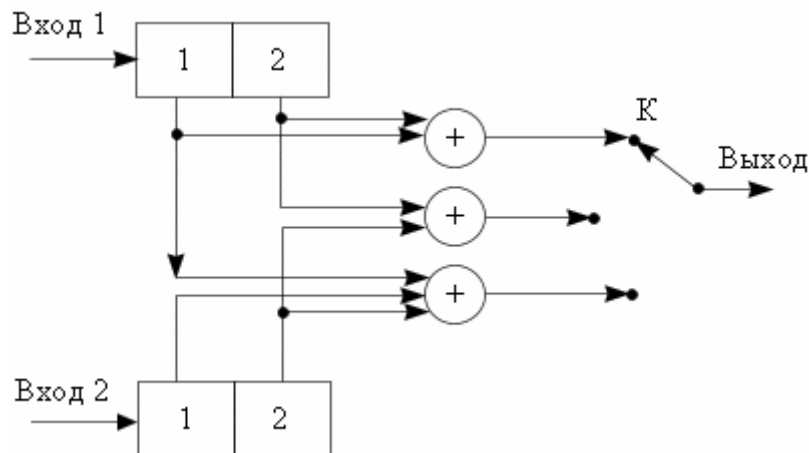


Рис. 3. Сверточный кодер

Третий параметр – целое число K , указывающее число разрядов (ячеек) в кодирующем регистре сдвига, где K – **длина кодового ограничения**.

Для кодера на рис. 1 величина $K=3$, и эта величина означает, что поступивший на вход регистра символ на протяжении трех тактовых интервалов входного сигнала будет оказывать влияние на формируемые выходные (т. е. кодовые) символы. Таким образом, действие одного информаци-

онного символа, поступившего на вход кодера, ограничено тремя тактовыми интервалами, т. е. от момента поступления символа на вход первой ячейки регистра до момента его выхода из регистра.

Существует несколько способов описания связей между разрядами в регистре сдвига и сумматорами по модулю 2:

1. Один из этих способов заключается в определении n – векторов связи $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$, где n – количество сумматоров в составе кодера. Каждый вектор имеет K составляющих из нулей и единиц, где K – длина кодового ограничения (количество разрядов в регистре сдвига) и описывает связь разрядов регистра сдвига кодера с соответствующим сумматором по модулю 2.

Единица (1) на i -й позиции вектора означает, что разряд с номером i связан с сумматором, а нуль (0) означает, что связи между разрядом с номером i и сумматором не существует. Так, для кодера на рис. 1 число сумматоров $n=2$ и будет вектор связи \bar{g}_1 для верхнего сумматора и вектор связи \bar{g}_2 для нижнего сумматора. С учетом сказанного эти векторы связи будут иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= 1 \quad 1 \quad 1 \\ \bar{g}_2 &= 1 \quad 0 \quad 1\end{aligned}\tag{1}$$

Для кодера на рис. 2 получим векторы связи:

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= 1 \quad 0 \quad 0 \\ \bar{g}_2 &= 0 \quad 1 \quad 1 \\ \bar{g}_3 &= 1 \quad 1 \quad 1\end{aligned}\tag{2}$$

2. Второй способ позволяет представить связи между разрядами регистра и сумматорами в виде набора из n полиномиальных генераторов $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, где n – количество сумматоров.

Полиномиальные генераторы (или просто полиномы) $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ имеют порядок, равный $K-1$ или меньше, и описывают связь между разрядами регистра сдвига и соответствующими сумматорами практически так, как и векторы связи $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$. В зависимости от того, имеется ли связь между соответствующими разрядами регистра сдвига и сумматором, в каждом слагаемом полинома коэффициенты принимают только два значения 1 или 0. Для кодера (рис. 1) полиномиальные генераторы будут иметь следующий вид:

$$g_1(x) = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 = 1 + x + x^2,\tag{3}$$

$$g_2(x) = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 = 1 + x^2.$$

Сравнивая (1) с (3), заключаем, что составляющие векторов связи в (1) соответствуют коэффициентам полиномов в (3). С помощью полиномиальных генераторов легко определить кодовые символы на выходе кодера, ко-

гда на его вход поступает заданная последовательность информационных символов.

Пусть, например, на вход кодера поступает последовательность информационных символов $\bar{a} = 111000\dots$

Этой последовательности соответствует полином

$$a(x) = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + \dots = 1 + x + x^2.$$

Полином $b(x)$, соответствующий кодовым символам на выходе кодера, можно определить следующим образом. Сначала найдем произведения $a(x) \cdot g_1(x)$, $a(x) \cdot g_2(x)$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot g_1(x) &= (1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 + x + x^2 + x^3 + x^2 + x^3 + x^4 = \\ &= 1 + (1+1) \cdot x + (1+1+1) \cdot x^2 + (1+1) \cdot x^3 + x^4 = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 \\ &\text{(значения сумм в круглых скобках определяем по модулю 2).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot g_2(x) &= (1 + x + x^2) \cdot (1 + x^2) = 1 + x^2 + x + x^3 + x^2 + x^4 = \\ &= 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4. \end{aligned}$$

Полином $b(x)$, коэффициентами которого будут кодовые символы на выходе кодера, определим сложением $a(x) \cdot g_1(x)$ и $a(x) \cdot g_2(x)$

(здесь сложение не по модулю 2)

$$\begin{aligned} a(x) \cdot g_1(x) &= 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + \\ a(x) \cdot g_2(x) &= 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 \end{aligned}$$

$$b(x) = (1, 1) + (0, 1)x + (1, 0)x^2 + (0, 1)x^3 + (1, 1)x^4$$

Последовательность \bar{b} кодовых символов определяется двойными коэффициентами в круглых скобках полинома $b(x)$, т. е.

$$\bar{b} = 11 \ 01 \ 10 \ 01 \ 11 \ 00 \ 00\dots$$

Избыточность, которая вводится при сверточном кодировании, позволяет, как и в случае блочных кодов, исправлять определенное количество ошибок, которые появляются на выходе демодулятора из-за действия сигнала помехи. Подробно вопрос декодирования сверточного кода будет рассмотрен ниже. Отметим, что в определенных случаях при сверточном декодировании возможно возникновение такого явления, как «катастрофическая ошибка». Эта ошибка возникает, когда конечное число ошибок на выходе демодулятора вызывает бесконечное число ошибок на выходе декодера.

Исследования показали, что необходимым и достаточным условием для возможного распространения катастрофических ошибок является наличие у полиномиальных генераторов $g_1(x)$ и $g_2(x)$ **общего полиномиального множителя степени не менее единицы**.

Например, сверточному кодеру, изображенному на рис. 4, соответствуют следующие полиномиальные генераторы: $g_1(x) = 1 + x$, $g_2(x) = 1 + x^2$.

Эти генераторы $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеют общий полиномиальный множитель $1 + x$, так как

$$1 + x^2 = (1 + x) \cdot (1 + x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + (1 + 1) \cdot x + x^2 = 1 + x^2,$$

следовательно, в кодере (рис. 4) может происходить распространение катастрофической ошибки при декодировании.

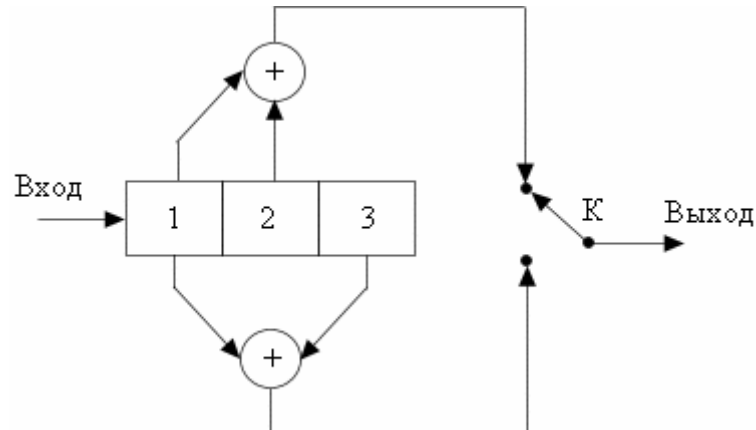


Рис. 4. Сверточный кодер

Кодеру (рис. 1), как уже отмечалось, соответствуют полиномиальные генераторы

$$g_1(x) = 1 + x + x^2,$$

$$g_2(x) = 1 + x^2,$$

которые не имеют общего полиномиального множителя степени не менее единицы, поэтому в этом кодере невозможно распространение катастрофической ошибки при декодировании.

Рассмотрим работу кодера (рис. 1) на двух примерах, при поступлении на его вход двух последовательностей информационных символов.

1. В этом примере на вход кодера подана последовательность информационных символов: 10000... Реакция кодера на этот входной сигнал является важной характеристикой, которая называется **импульсной характеристикой** кодера (по аналогии с названием «импульсная характеристика $g(t)$ линейной цепи», которая является реакцией цепи на δ – импульс).

Предположим, что к моменту поступления этой входной последовательности все ячейки регистра сдвига кодера находились в состоянии 0. Тогда, после поступления 1 в первую ячейку регистра на выход кодера через коммутатор будет считана кодовая последовательность 11. Затем в первую ячейку регистра записывается второй информационный символ входной последовательности, т. е. 0, а ее первый символ 1 перейдет во вторую ячейку регистра, в результате чего через коммутатор на выход поступит

вторая кодовая последовательность 10. После поступления на вход кодера третьего информационного символа 0 в ячейках регистра будет записана последовательность 001 и на выход через коммутатор поступит третья кодовая последовательность 11. После поступления на вход кодера четвертого информационного символа 0 в ячейках регистра будет записана последовательность 000 и на выход через коммутатор поступит четвертая кодовая последовательность 00. Рассмотренный пример характеризуют табл. 1 и рис. 5.

Таблица 1

Номер тактового интервала k	Входные символы	Содержимое ячеек регистра		Символы на контактах коммутатора (на выходе)		
		1	2	3	Верхний	Нижний
	Исходное состояние	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0

На рис. 5 введены следующие обозначения:

$T_{\text{вх}}$ – величина тактового интервала для входного сигнала;

$T_{\text{вых}} = \frac{T_{\text{вх}}}{2}$ – величина тактового интервала для выходного сигнала.

На рис. 5, б стрелками показаны моменты переключения коммутатора.

Для кодера рис. 1 каждому входному информационному символу соответствуют два кодовых символа на выходе. Поэтому длительность тактового интервала $T_{\text{вых}}$ (на выходе) в два раза меньше, чем длительность тактового интервала $T_{\text{вх}}$ (на входе). На рис. 5, в изображена **импульсная характеристика** кодера – реакция на единичный символ, подаваемый на вход кодера. Входной сигнал, соответствующий этому единичному символу, представлен на рис. 5, а. На всех трех рис. 5, а, б, в по горизонтальной оси откладываются значения двух величин: непрерывного времени t и параметра k . Согласно рис. 5, в этот параметр k принимает целые значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и обозначает номер тактового интервала на выходе кодера длительностью $T_{\text{вых}}$. Значение времени $t = 0$ удобно выбрать в середине тактового интервала, обозначенного через $k = 0$. Значения, которые параметр k принимает на рис. 5, в отложим также вдоль горизонтальных осей на рис. 5, а и 5, б.

На рис. 5, а видно, что входной сигнал, соответствующий символу 1, имеет длительность $T_{\text{вх}} = 2 T_{\text{вых}}$, т. е. занимает интервалы $k = 0$ и $k = 1$,

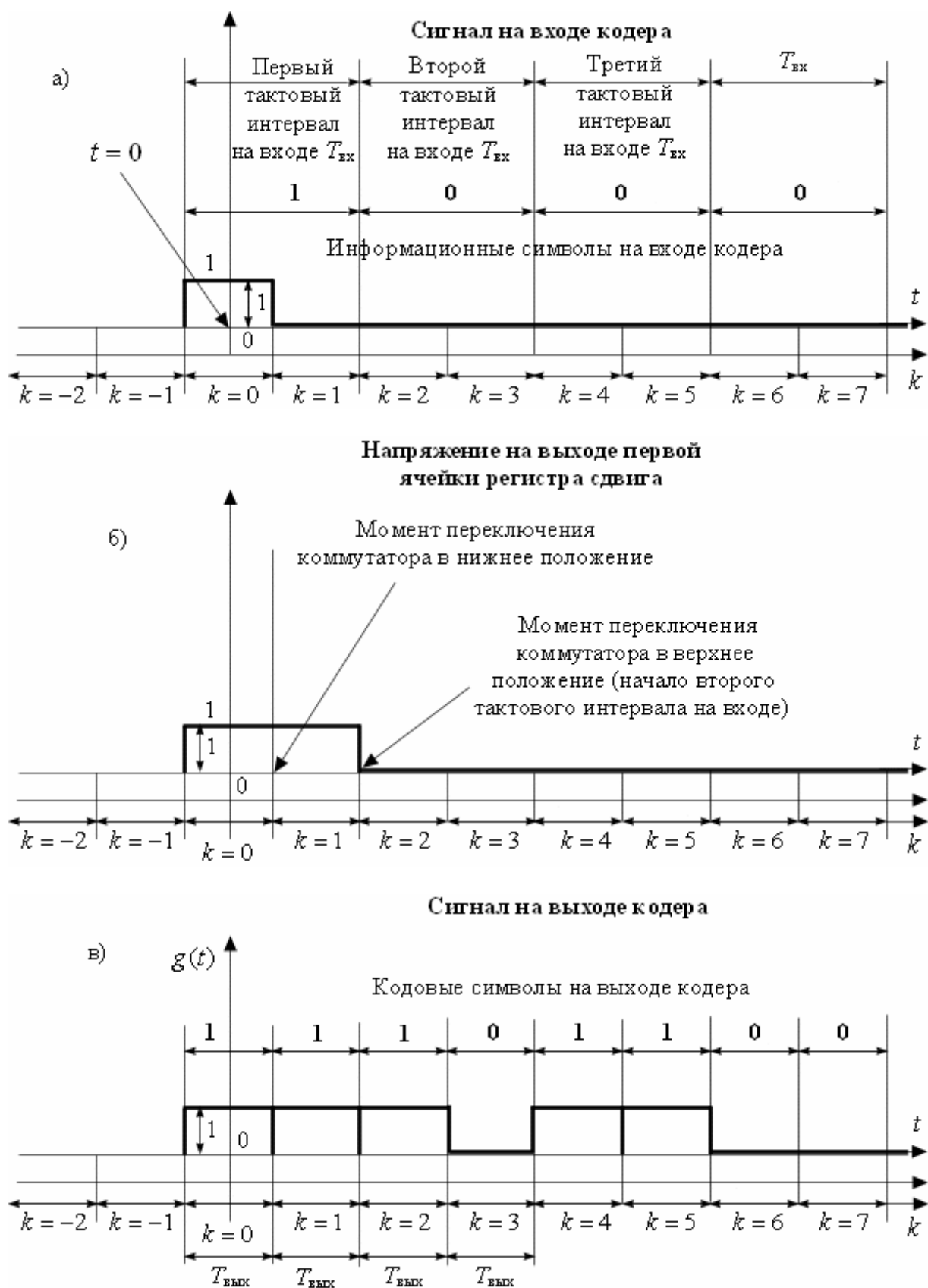


Рис. 5 : а) сигнал на входе кодера, изображенного на рис. 1;
 б) напряжение на выходе первой ячейки регистра;
 в) сигнал на выходе: импульсная характеристика сверточного кодера

причем, на интервале $k = 0$ этот сигнал имеет форму прямоугольного импульса с амплитудой 1, а на интервале $k = 1$, этот сигнал равен нулю.

Форму сигнала, соответствующего символу 1, можно изменять, т. е. длительность прямоугольного импульса с амплитудой 1 может быть меньше длительности интервала $k = 0$; только не допускается, чтобы длительность прямоугольного импульса превышала длительность интервала $k = 0$. Например, нельзя, чтобы длительность прямоугольного импульса на входе была равна сумме длительностей интервалов $k = 0$ и $k = 1$, т. е. равна величине $T_{\text{вх}}$. Причина этого ограничения заключается в том, что при его нарушении сигнал на выходе кодера нельзя представить в виде свертки импульсной характеристики кодера и входной последовательности. Для получения свертки необходимо, чтобы длительность прямоугольных импульсов на входе кодера не превышала длительность прямоугольных импульсов на выходе кодера.

2. Рассмотрим работу кодера при поступлении на его вход произвольной последовательности информационных символов, например: 1110000...

На этом примере поясним, почему рассматриваемый метод кодирования называется сверточным. Построив для заданной входной последовательности таблицу, аналогичную табл. 1, найдем, что соответствующая кодовая последовательность на выходе кодера будет иметь вид

$$11 \ 01 \ 10 \ 01 \ 11 \ 00 \ 00 \ 00... \quad (4)$$

Эту выходную последовательность (4) можно также определить и другим способом, а именно на основе следующей формулы

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \cdot x(n - k), \quad (5)$$

формула (5) является дискретным аналогом известной формулы

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau, \quad (6)$$

представляющей сигнал $y(t)$ на выходе линейной цепи с импульсной характеристикой $g(t)$ в виде свертки импульсной характеристики $g(t)$ с входным сигналом $x(t)$.

В отличие от (6) в (5) сигналы на выходе и входе кодера рассматриваются не при непрерывном изменении времени t , как в (6), а на соответствующих тактовых интервалах, указанных на рис. 6, на которых эти сигналы принимают постоянные значения, равные 0 (В) или 1 (В).

В (5) используются такие обозначения:

k – номер тактового интервала длительностью $T_{\text{вых}}$ (см. рис. 6); этот параметр k при суммировании принимает целые значения и является аналогом переменной интегрирования τ в (6);

n – номер тактового интервала длительностью $T_{\text{вых}}$ на выходе кодера, на котором определяется выходной сигнал $y(n)$; этот параметр n является аналогом времени наблюдения t выходного сигнала $y(t)$ в (6);

$g(k)$ – значение импульсной характеристики кодера на k -м интервале длительностью $T_{\text{вых}}$ (рис. 6);

график функции $x(n-k)$ получается из графика функции $x(-k)$ путем сдвига этого графика на n тактовых интервалов $T_{\text{вых}}$ вправо, (если $n > 0$);

график функции $x(-k)$ получается из графика функции $x(k)$ путем зеркального отображения этого графика относительно вертикальной оси, проходящей через середину интервала $k = 0$ (рис. 6);

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ – символ суммирования в (5) является аналогом символа интегрирования $\int_{-\infty}^{\infty}$ в (6); при этом суммирование в (5) осуществляется по модулю 2.

На рис. 6, а изображена импульсная характеристика $g(k)$ сверточного кодера.

На рис. 6, б изображен входной сигнал $x(k)$, соответствующий заданной последовательности информационных символов 1110000...

На рис. 6, в изображен сигнал $x(-k)$, который является зеркальным отображением сигнала $x(k)$ относительно вертикальной оси, проходящей через нулевого точку ($t = 0$). Сигнал $x(-k)$ равен сигналу $x(n-k)$ при $n = 0$. На рис. 6, г изображен сигнал $x(1-k)$, равный сигналу $x(n-k)$ при $n = 1$. График этого сигнала $x(1-k)$ получается из графика сигнала $x(-k)$ путем его сдвига вправо на один тактовый интервал $T_{\text{вых}}$ (параметр $n = 1$ соответствует одному тактовому интервалу $T_{\text{вых}}$).

Аналогично, график сигнала $x(n-k)$ при любом значении n получается из графика сигнала $x(-k)$ путем его сдвига вправо на n - тактовых интервалов, равных длительности $T_{\text{вых}}$. Учитывая свойства графиков функций $g(k)$ и $x(n-k)$, изображенных на рис. 6, (т. е. то, что $g(k) \equiv 0$ при $k < 0$ и $x(n-k) = 0$ при $k > n$) в (5) можно изменить пределы суммирования, т. е. бесконечные пределы заменить на конечные

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=0}^n g(k) \cdot x(n-k). \quad (7)$$

По (7) найдем значения сигнала $y(n)$ на выходе сверточного кодера для значений $n: n = 0, 1, 2, \dots, 10, 11$.

При вычислении значений $y(n)$ по (5) необходимо придерживаться такого порядка:

вначале определяем обычную сумму для (5), а затем – значение этой суммы по модулю 2.

Так, $y(0)$ вычисляется согласно (5) при $n = 0$, т. е. необходимо определить

$$y(0) = \sum_{k=0}^n g(k) \cdot x(0 - k) = \sum_{k=0}^n g(k) \cdot x(-k),$$

где функция $g(k)$ изображена на рис. 6, а, а $x(-k)$ – на рис. 6, в.

Из этих рисунков видно, что обе функции $g(k)$ и $x(-k)$ одновременно не равны нулю только на одном интервале переменной k , а именно, на интервале $k = 0$, на котором каждая из этих функций равна 1В, и поэтому от суммы останется только одно слагаемое (для $k = 0$) $g(0) \cdot x(0) = 1 \cdot 1 = 1$, для $k = 1, 2, \dots$ соответствующие произведения равны 0 и, таким образом, при $n = 0$ обычная сумма равна 1.

Теперь нужно определить значение этой суммы по модулю 2 $1 \pmod{2} = 1$. Итак, окончательное значение $y(0) = 1$.

Значение $y(1)$ вычисляется при $n = 1$ аналогично, т. е.

$$y(1) = \sum_{k=0}^n g(k) \cdot x(1 - k).$$

Кривая $g(k)$ по-прежнему изображена на рис. 6, а, а кривая $x(1 - k)$ на рис. 6, г. Из этих рисунков видно, что снова имеется только один интервал (теперь это $k = 1$), где обе кривые одновременно отличаются от нуля и поэтому снова окончательное значение $y(1) = 1$.

При $n = 2$ имеем только два тактовых интервала (это $k = 0$ и $k = 2$), на которых обе функции $g(k)$ и $x(2 - k)$ не равны 0. Поэтому *обычная* сумма

$$y(2) = \sum_{k=0}^{n=2} g(k) \cdot x(2 - k) \text{ будет равна } 2, \text{ но так как } 2 \pmod{2} = 0, \text{ то } y(2) = 0.$$

Повторяя эту процедуру вычислений $y(n)$ при $n = 3, 4, \dots, 10, 11$, найдем все остальные значения $y(n)$. Полученные результаты сведем в табл. 2.

Таблица 2

Входные информационные символы	1		1		1		0		0		0	
n – номер тактового интервала на выходе кодера	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Кодовые символы $y(n)$	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0

Импульсная характеристика
кодера

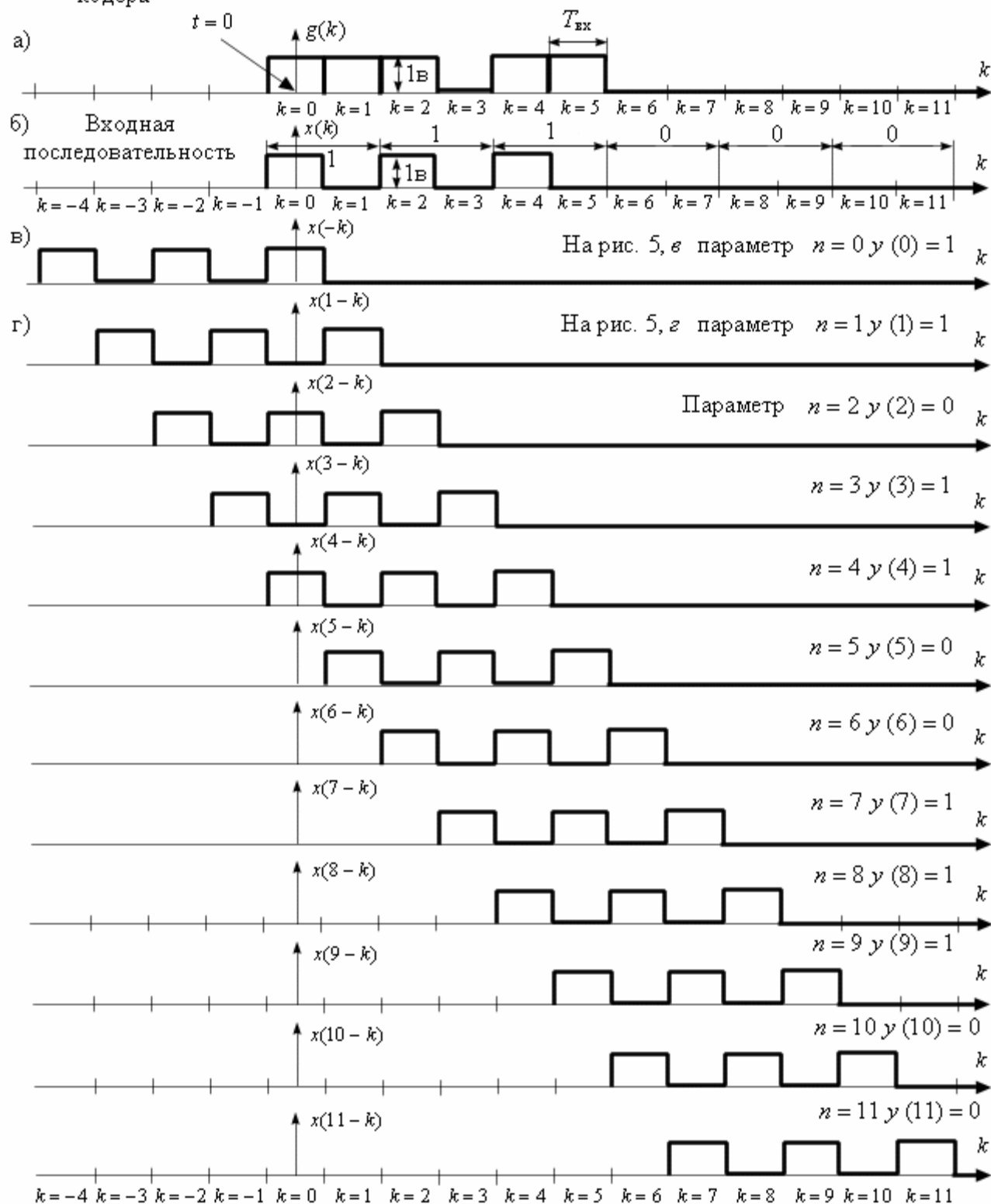


Рис. 6 : а) импульсная характеристика сверточного кодера;
б) входной сигнал; в) сигнал $x(-k)$; г) сигнал $x(n-k)$.

В табл. 2 представлены кодовые символы, когда на вход кодера поступает информационная последовательность 111000. Сравнивая кодовую последовательность, представленную этой таблицей с последовательностью (4), видим, что они идентичны. Но кодовая последовательность в табл. 2 получена на основе (5), которая является дискретной сверткой импульсной характеристики кодера с входной последовательностью информационных символов. Отсюда и появилось название «сверточный кодер» для кодера, изображенного на рис. 1; а по названию кодера стали называть и сам метод кодирования – «сверточное кодирование».

Древовидные и решетчатые диаграммы

Для большей наглядности табл. 2 можно отобразить диаграммой рис. 7. Построение диаграммы начинаем с точки a и будем применять следующее правило:

если на вход кодера первым информационным символом будет подана единица (1), то через точку a проводим небольшой отрезок, направленный *вниз*;

если бы первым информационным символом был 0, то этот вертикальный отрезок направили бы *вверх* от точки a .

Так как первый информационный символ, подаваемый на вход, есть 1, то вертикальный отрезок, проходящий через точку a , согласно правилу, направляем вниз. Этот единичный символ, подаваемый на вход кодера согласно табл. 2, является причиной появления на выходе кодовой последовательности из двух символов 11; поэтому из конца вертикального отрезка проводим горизонтальный отрезок, который обозначаем как 11.

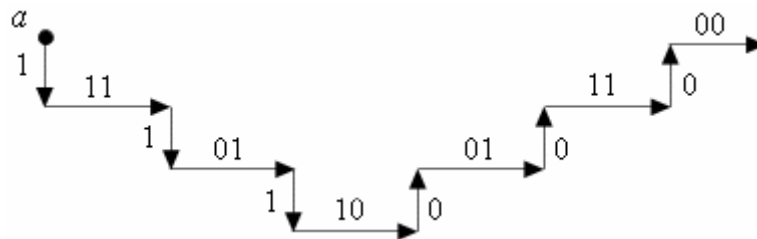


Рис. 7. Диаграмма выходных символов (ими обозначены горизонтальные отрезки), как реакция кодера на входные символы (ими обозначены вертикальные отрезки)

Так как второй информационный символ, поступающий на вход снова, – есть 1, то, согласно правилу, из конца первого горизонтального отрезка проводим вертикальный отрезок, направленный снова вниз. Поступивший на вход кодера второй информационный символ согласно табл. 2 является причиной появления на выходе кодера последовательности 01 и поэтому горизонтальный отрезок, проведенный из конца второго вертикального отрезка, обозначаем как 01 и т. д. Начиная с 4-го символа на вход подаются нулевые символы, и поэтому вертикальные отрезки, соответствующие

щие этим символам, направляем вверх. В результате получаем всю диаграмму, изображенную на рис. 7.

Если вместо взятой в данном примере входной последовательности информационных символов на вход кодера подадим другую последовательность, то таблица заполнится другими символами, и им будет соответствовать другая диаграмма. Всевозможные диаграммы можно объединить в одну общую диаграмму (рис. 8), которую назовем *древовидной диаграммой* для сверточного кода, а исходные диаграммы будут являться ветвями этого дерева. Так диаграмме, изображенной на рис. 7, на общей древовидной диаграмме рис. 8 соответствует ветвь, обозначенная пунктиром. Т. е. если на вход кодера поступают информационные символы 111000, то на выходе кодера получаем: 11 01 10 01 11 00.

Еще раз напомним, что при построении диаграммы рис. 8 и табл. 2 предполагается, что *первоначально ячейки регистра сдвига содержали одни нули*.

На рис. 8 видно, что древовидная диаграмма состоит из узлов и ребер. Узлы – это точки, которые обозначены буквами: *a, b, c* и *d*. Узлы также называют **состояниями** кодера. Ребра – это горизонтальные отрезки, над которыми стоят обозначения 00, 01, 10 или 11.

Появление любой из этих комбинаций на выходе кодера зависит от **состояния** кодера, т. е. от того, из какого узла *a, b, c* или *d* выходят ребра, и от того, какой информационный символ 0 или 1 поступает на вход кодера. Под состоянием кодера (рис. 1) можно понимать состояние первой и второй ячеек регистра сдвига *перед* подачей информационного символа на вход кодера или также можно понимать состояние второй и третьей ячейки *после* подачи информационного символа. Имеет место, что при подаче на вход информационного символа символ, который был до этого в первой ячейке, смещается во вторую, а тот, который был во второй, смещается в третью ячейку регистра.

В дальнейшем, чтобы исключить возможную путаницу, будем всегда понимать под **состоянием** кодера содержание второй и третьей ячеек *после* подачи информационного символа. В общем случае, когда кодовое ограничение $K > 3$ под состоянием кодера будем понимать содержание *последних* $K - 1$ ячеек регистра сдвига *после* подачи информационного символа.

Итак, состояния кодера (рис. 1) могут принимать следующие значения: 00, 10, 01 или 11 и эти состояния соответствуют узлам *a, b, c* и *d*, т. е. $a = 00$; $b = 10$; $c = 01$; $d = 11$.

Из древовидной диаграммы видно, что при росте длины входной информационной последовательности число узлов на дереве растет как 2^L , а число ребер как $2 \cdot 2^L$, где L – номер уровня на диаграмме (рис. 8), т. е. чрезвычайно быстро, что является существенным недостатком древовидных диаграмм. Заметим, что величина L связана с номером N информаци-

онного символа, подаваемого на вход кодера, простым соотношением $L = N - 1$.

В 1967 г. Д. Форни удалось преодолеть этот недостаток. Он обратил внимание на то, что ребра, выходящие из любых двух вершин древовидной диаграммы, которым соответствуют одинаковые состояния (например состояние c), полностью тождественны. Это является причиной того, что, начиная с уровня 3, верхнее и нижнее поддеревья также одинаковы, поэтому их можно отождествить. В результате вместо древовидной диаграммы Форни получил решетчатую диаграмму, изображенную на рис. 9, в которой отмеченный выше недостаток древовидной диаграммы отсутствует. Решетчатая диаграмма также состоит из ребер и узлов.

Все узлы решетки, расположенные вдоль верхней горизонтали, имеют одно и тоже состояние $a = 00$. Узлы, расположенные вдоль второй горизонтали, также имеют одно состояние $b = 10$. Вдоль третьей горизонтали узлы имеют состояние $c = 01$ и вдоль четвертой горизонтали состояние $d = 11$.

При построении решетки, как и при построении древовидной диаграммы (рис. 8), предполагается, что первоначально ячейки регистра сдвига кодера содержали одни нули, т. е. вначале кодер находится в состоянии $a = 00$. Поэтому построение решетки начинается с левого узла $a = 00$ (в верхней горизонтали решетки).

Если на вход кодера, находящегося в состоянии $a = 00$, поступает информационный символ 0 или 1, то на выходе появляются соответственно кодовые символы 00 или 11. Поэтому из узла a проводим два ребра, обозначенных соответственно 00 и 11. При этом ребро 00, соответствующее отклику кодера на символ 0, идет выше ребра 11, соответствующего отклику кодера на символ 1.

Это соответствует расположению аналогичных ребер на древовидной диаграмме, где ребро 00 расположено выше ребра 11.

На решетчатой диаграмме для усиления различия откликов кодера на 0 и 1, ребра, обозначающие эти отклики, будем изображать сплошной и пунктирной линиями соответственно.

Таким образом, на уровне 0 обе диаграммы (древовидная и решетчатая) в качественном отношении полностью соответствуют друг другу.

Это соответствие также проявляется и для 1-го и 2-го уровней. На обеих диаграммах на 1-м уровне имеется два узла a и b , из которых выходят 4 ребра. Из узла a выходят ребра 00 и 11, причем ребро 00 (это отклик кодера на нулевой информационный символ) идет выше ребра 11 (поскольку это отклик на единичный символ). Из узла b выходят ребра 10 и 01. Ребро 10 – это отклик кодера на нулевой символ, и это ребро идет выше ребра 01, которое является откликом кодера на единичный символ. Тоже соответствие для обеих диаграмм проявляется и для 2-го уровня, на котором уже задействовано 4 узла с состояниями a, b, c и d .

Различие между диаграммами, начиная с 3-го уровня, носит принципиальный характер. На древовидной диаграмме на 3-м уровне расположено 8 узлов: два узла «*a*», два узла «*b*», два узла «*c*» и два узла «*d*», а на решетчатой диаграмме на 3-м уровне количество узлов изменилось по сравнению со 2-м уровнем, т. е. осталось равным 4.

Два узла «*a*» на древовидной диаграмме отождествляются и превращаются в один узел «*a*» на решетчатой диаграмме. Аналогично происходит и с другими узлами «*b*», «*c*» и «*d*».

На 4-м уровне на древовидной диаграмме отождествляются четыре узла «*a*», четыре узла «*b*», четыре узла «*c*» и четыре узла «*d*» и превращаются соответственно в один узел «*a*», один узел «*b*», один узел «*c*» и один узел «*d*» на решетчатой диаграмме. В отличие от древовидной диаграммы в результате описанных отождествлений получается решетчатая диаграмма, на которой на любом уровне после 3-го имеется всего 4 узла.

В общем случае (при любом K) число вершин в решетчатой диаграмме не растет, а остается равным 2^{K-1} (где K – длина кодового ограничения). В рассматриваемом примере кодера $K=3$, поэтому получаем $2^{K-1} = 2^{3-1} = 4$. На древовидной диаграмме, как уже отмечалось, при увеличении номеров уровней происходит катастрофический рост числа узлов и соответственно ребер, что делает древовидные диаграммы менее привлекательными для практического использования, особенно при декодировании.

По заданной последовательности входных информационных символов (ИС) с помощью решетчатой диаграммы и по древовидной диаграмме легко определить последовательность кодовых символов (ПКС) на выходе кодера. Так например, для последовательности 111000 входных символов с помощью решетчатой диаграммы на основе использования изложенных выше правил движения по решетке получаем кодовую последовательность 11 01 10 01 11 00, которая, естественно, совпадает с кодовой последовательностью, полученной по древовидной диаграмме. Данной кодовой последовательности на решетчатой диаграмме соответствует путь, обозначенный точками (рис. 9).

Этот путь получается следующим образом. Движение по решетке начинаем с расположенного слева узла *a*. Так как на вход кодера поступает единичный ИС, то этому символу на диаграмме соответствует пунктирное ребро, выходящее из узла *a* и идущее в узел с состоянием *b*. Этому ребру на диаграмме соответствуют символы 11, которые и появляются на выходе кодера. Следующим ИС снова является 1, и ему на диаграмме также соответствует пунктирное ребро, выходящее из узла с состоянием *b* и идущее в узел с состоянием *d*. Этому ребру на диаграмме соответствуют символы 01, появляющиеся на выходе кодера. Третьим ИС также является 1, поэтому ему снова соответствует пунктирное ребро из узла с состоянием *d* в следующий узел с тем же состоянием *d* (по горизонтали), которое обозна-

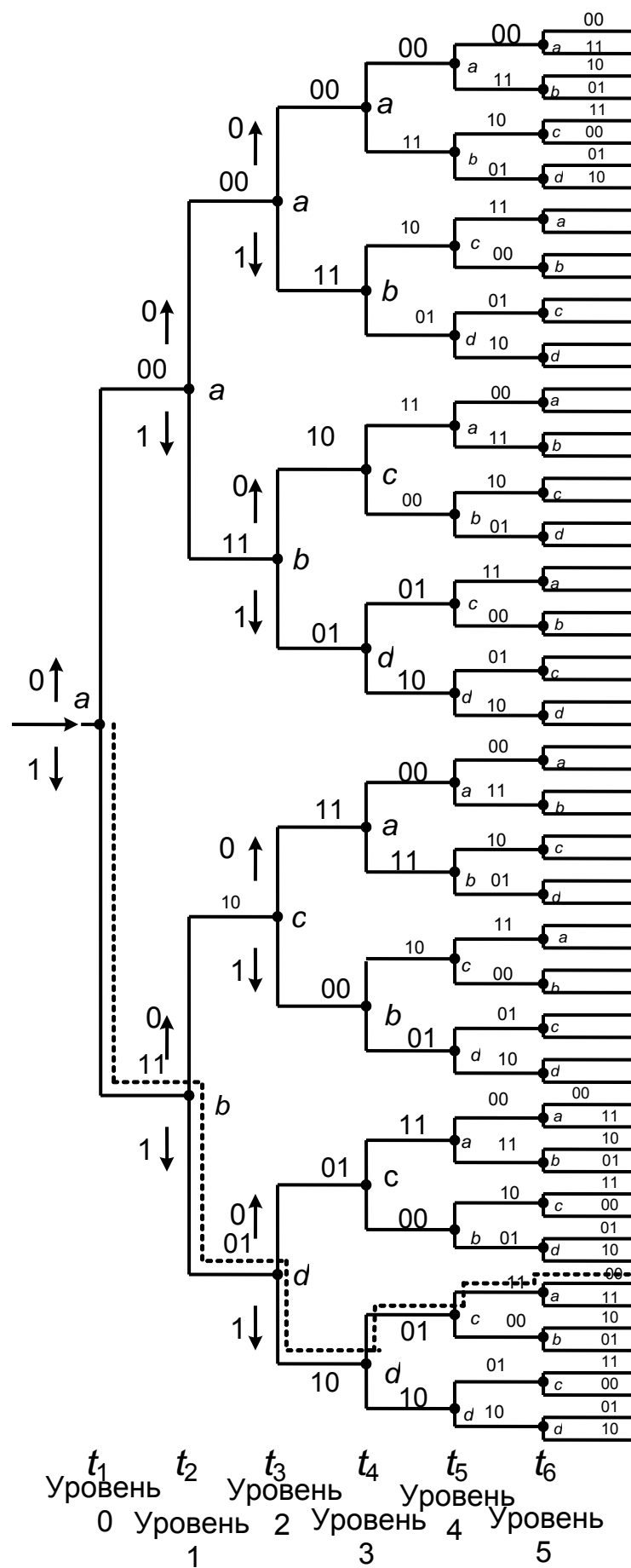


Рис. 8. Древоподобное представление кодера

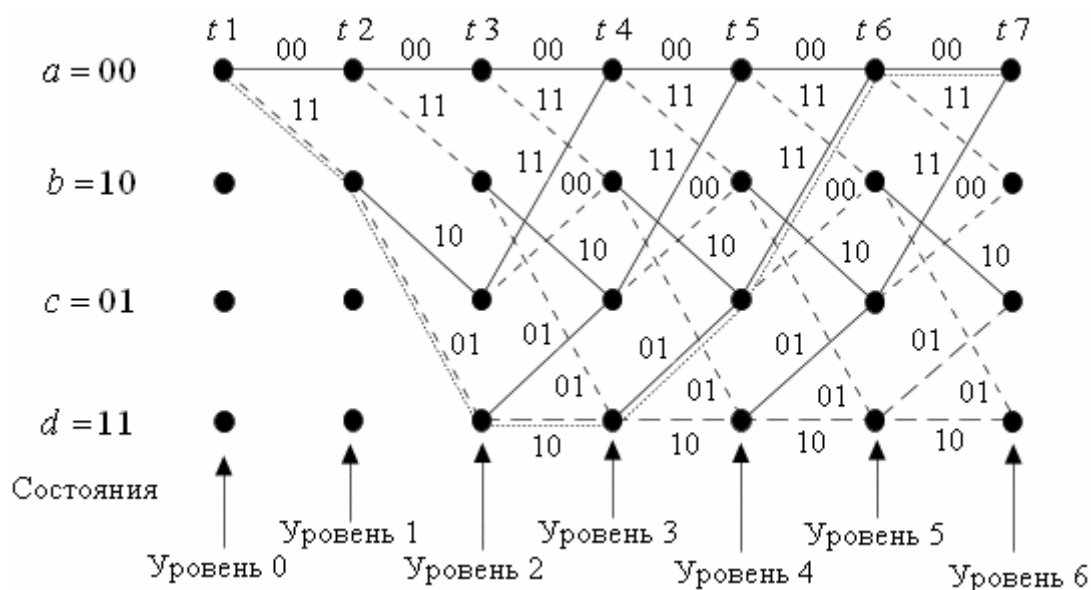


Рис. 9. Решетчатая диаграмма кодера

чено 10, и эти же символы появляются на выходе кодера, как отклик кодера на третью информационную единицу. Четвертым ИС является 0 и поэтому ему соответствует ребро в виде сплошной линии, выходящей из узла с состоянием d в узел с состоянием c , и это ребро обозначено 01 и т. д.

С помощью решетчатой диаграммы по заданной ПКС нетрудно определить также ИС, которые явились причиной появления заданных кодовых символов. Так, если кодовая последовательность имеет вид 11 01 10 01 11 00, то соответствующей информационной последовательностью будет 111000. В этом случае соответствие между кодовыми и информационными символами устанавливаем по диаграмме, начиная с левого узла a .

Из узла a выходят два ребра, но только одно из них обозначено как 11, и так как это ребро пунктирное, ему соответствует информационный символ 1. Из узла b снова выходят два ребра, одно из них ребро 10, а другое ребро обозначено 01, и так как это ребро тоже пунктирное, то ему соответствует снова информационный символ 1 и т. д. В итоге получаем всю искомую последовательность информационных символов 111000.

В 1967 г. Д. Форни обосновал применение решетчатых диаграмм, в том же году другой американский ученый А. Д. Витерби предложил новый метод декодирования сверточных кодов, основанный на использовании решетчатых диаграмм в виде достаточно простой итеративной процедуры, которая получила название «алгоритм Витерби» и успешно применяется на практике и в настоящее время.

Цель декодирования в случае использования сверточных кодов такая же, как и при использовании блочных кодов – исправить возможные ошибки при приеме кодовых символов, которые могут возникнуть на выходе демодулятора. Поэтому возникает вопрос о количестве исправляемых оши-

блок. Сколько ошибок может быть исправлено при декодировании сверточного кода?

В случае блочного кода имелось в виду количество ошибок, которые могут произойти в пределах одной кодовой последовательности (одного блока), поэтому количество исправляемых ошибок определялось целым числом q_u , которое меньше, чем $d/2$, где d – кодовое расстояние.

В случае сверточного кодирования нет блоков, поэтому необходимо:

1) ввести какую-то единицу длины, эквивалентную длине блока. При постановке вопроса о количестве исправляемых ошибок сверточным кодом нужно иметь в виду количество ошибок в пределах этой единицы длины;

2) определить для сверточных кодов такой важный параметр, как кодовое расстояние d (или параметр, эквивалентный кодовому расстоянию), так как количество исправляемых ошибок определяется через величину этого параметра d .

Исследования сверточных кодов показали:

если интервал между ошибками составляет $5 \times K$ символов или более, то при сверточном декодировании каждая из этих ошибок исправляется независимо от другой ошибки, т. е. как одиночная ошибка;

если же интервал между двумя соседними ошибками меньше, чем $(3...5) \times K$ символов, то независимое исправление в общем случае уже невозможно, так как процесс исправления первой ошибки еще может не закончиться, а декодер приступит к исправлению второй ошибки, и на каком-то временном интервале одновременно исправляются обе ошибки (или большее число ошибок).

Таким образом, в случае сверточных кодов интервал протяженностью $(3...5) \times K$ кодовых символов можно считать той условной единицей длины, которая эквивалентна длине блока в случае блочных кодов.

Напомним, что кодовое расстояние d в случае блочных кодов определялось, как минимальное расстояние между всевозможными парами кодовых последовательностей (блоков). Было установлено, что оно равно минимальному весу (минимальной норме) кодовой последовательности, отличной от нулевой кодовой последовательности. Эту величину можно также считать расстоянием Хемминга между нулевой последовательностью и кодовой последовательностью с минимальным весом.

Это свойство кодового расстояния для блочных кодов можно распространить и на сверточные коды. Кодовое расстояние d для сверточного кода можно определить как минимальное расстояние между всевозможными кодовыми последовательностями сверточного кода. Это расстояние d по аналогии с блочными кодами будет равно расстоянию Хемминга. Когда на вход кодера поступают только нулевые информационные символы, на выходе сверточного кодера получается нулевая последовательность. Кодовая последовательность с минимальным весом получается на выходе кодера,

когда на его вход поступает одна информационная единица и только одни нули.

Эта последовательность ранее была получена и была названа «импульсной характеристикой сверточного кодера» (рис. 5). Можно найти отклик кодера на указанную последовательность 1000... также с помощью решетчатой диаграммы. Это будет та же самая последовательность 11 10 11 00 00... Расстояние Хемминга между этой кодовой последовательностью и нулевой кодовой последовательностью равна 5, т. е. кодовое расстояние для сверточного кода, порождаемым кодером на рис. 1, будет равно $d = 5$.

Для блочных кодов количество исправляемых ошибок q_u при декодировании одного блока определялось неравенством $q_u < d/2$. Исследования сверточных кодов показали, что и для них количество исправляемых ошибок q_u при декодировании должно удовлетворять тому же строгому неравенству

$$q_u < d/2. \quad (8)$$

Таким образом, если $d = 5$, то при сверточном декодировании можно исправить две ошибки, т. е. $q_u = 2$, так как $2 < 5/2$.

В случае сверточных кодов вместо параметра $d(L)$ кодового расстояния часто используют эквивалентный параметр d_f , который называется *минимальным просветом* или просто *просветом*. Более подробно об этом параметре будет изложено в дальнейшем.

АЛГОРИТМ СВЕРТОЧНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ВИТЕРБИ

В целях реализации устойчивой работы кодера при сверточном декодировании периодически проводят очистку (промывку) регистра сдвига кодера от информационных символов путем подачи на кодер некоторого количества нулевых символов (не информационных). Эта операция называется *периодическим отбрасыванием*. Следующая партия информационных символов (ИС) поступает на кодер, когда все ячейки регистра сдвига находятся в нулевом состоянии, т. е. в состоянии $a = 00$. Обозначим:

- 1) \bar{m} – последовательность информационных символов, поступивших на вход кодера;
- 2) \bar{u} – последовательность кодовых символов с выхода кодера, которая передавалась по каналу;
- 3) \bar{z} – принятая последовательность, полученная с выхода демодулятора и поступившая на вход декодера.

С учетом сказанного рассмотрим алгоритм сверточного декодирования Витерби с использованием решетчатой диаграммы. Декодирование начинается в момент t_1 (рис. 10). В результате очистки кодера между сооб-

щениями будем считать, что декодер находится в начальном состоянии $a = 00$.

Предположим, что входная последовательность ИС на входе кодера

$$\bar{m} = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0. \quad (9)$$

От кодера по каналу связи передавалась кодовая последовательность (КП)

$$\bar{u} = 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00, \quad (10)$$

состоящая из одних нулевых символов (можно было бы в качестве примера выбрать любую другую КП, но за последовательностью, состоящую из одних нулей, проще проследить по решетчатой диаграмме). Далее предположим, что в результате ошибок в демодуляторе на вход декодера вместо передаваемой кодовой последовательности (КП) (10) поступила последовательность

$$\bar{z} = 10 \quad 00 \quad 10 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad (11)$$

(т. е. ошибки произошли в тех разрядах, где стоят единицы).

На основании вышесказанного следует, что если расстояние между единицами в КП \bar{z} меньше, чем $(3...5) \times K$, где $(K = 3)$, то каждую из этих ошибок нельзя считать одиночной ошибкой, независимой от другой ошибки и если $2 < d/2 = 5/2$, то эти две ошибки должны быть исправлены при использовании алгоритма сверточного декодирования Витерби.

На рис. 10 изображена решетчатая диаграмма декодера.

Решетчатая диаграмма декодера на рис. 10 отличается от решетчатой

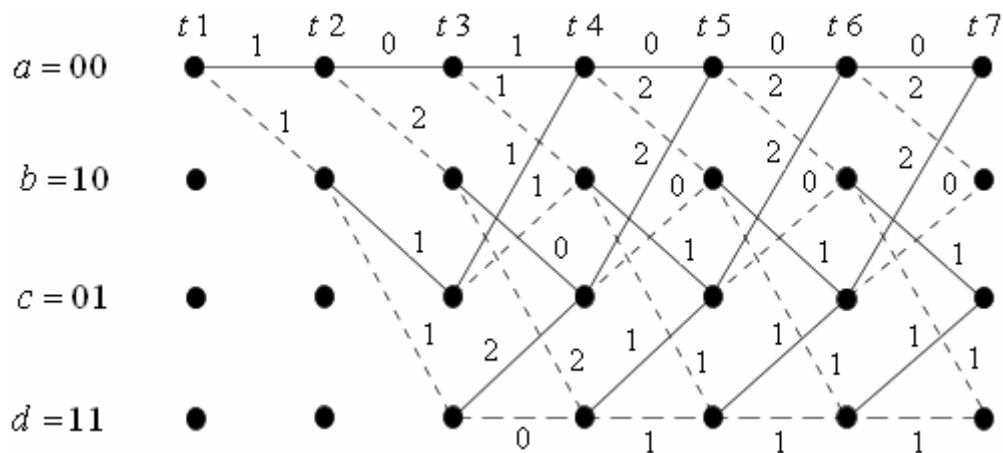


Рис. 10. Решетчатая диаграмма декодера
(степень кодирования $1/2$, $K = 3$)

диаграммы кодера на рис. 9 тем, что ребрам этих решеток соответствуют разные обозначения. Числа над ребрами решетки декодера определяются, как расстояния Хемминга между двумя символами принятой последовательности \bar{z} , расположенными над данным ребром, и двумя символами, которыми отмечено данное ребро на решетке кодера (рис. 9).

Теперь изобразим отдельно ту часть решетчатой диаграммы декодера, которая расположена между моментами t_1 и t_4 , для дальнейшего удобства обозначим буквами узлы на этой диаграмме.

Определим по диаграмме на рис. 11 метрику путей по Хеммингу, исходящих из одной точки k и приходящих в узлы o, r, e, s . Видим, что в узел o приходят два пути: k, l, n, o и k, m, f, o . Определим по диаграмме метрику этих путей:

$$\Gamma_{k,l,n,o} = 1 + 0 + 1 = 2, \Gamma_{k,m,f,o} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

В узел r также приходят два пути: k, l, n, r и k, m, f, r ; их метрики равны:

$$\Gamma_{k,l,n,r} = 1 + 0 + 1 = 2, \Gamma_{k,m,f,r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

В узел e также приходят два пути: k, l, p, e и k, m, t, e ; их метрики равны: $\Gamma_{k,l,p,e} = 1 + 2 + 0 = 3, \Gamma_{k,m,t,e} = 1 + 1 + 2 = 4.$

В узел s также приходят два пути: k, l, p, s и k, m, t, s ; их метрики равны:

$$\Gamma_{k,l,p,s} = 1 + 2 + 2 = 5, \Gamma_{k,m,t,s} = 1 + 1 + 0 = 2.$$

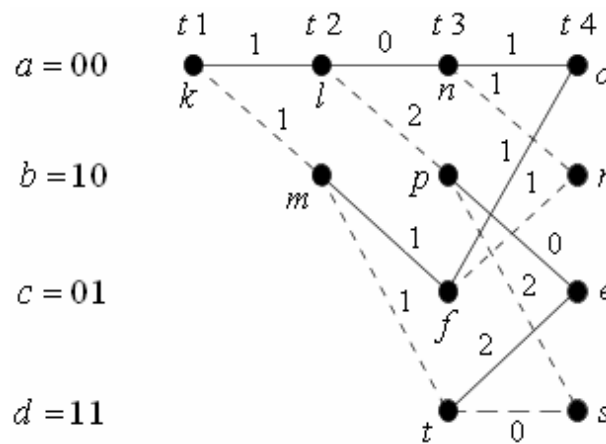


Рис. 11. Решетчатая диаграмма декодера между моментами t_1 и t_4

Целью алгоритма Витерби является то, что из двух путей, приходящих в каждый из узлов o, r, e, s , *выжившим считается только один* – тот путь, которому соответствует меньшая метрика. С учетом этого из двух путей, приходящих в узел o , выживет путь k, l, n, o . Из остальных пар выживут соответственно k, l, n, r ; k, l, p, e и k, m, t, s .

Снова построим диаграмму, но на ней укажем только выжившие пути к моменту t_4 (рис. 12).

Теперь полученную диаграмму на рис. 12 достроим соответствующими ребрами до момента t_5 (из каждого узла o, r, e, s проводим два новых ребра).

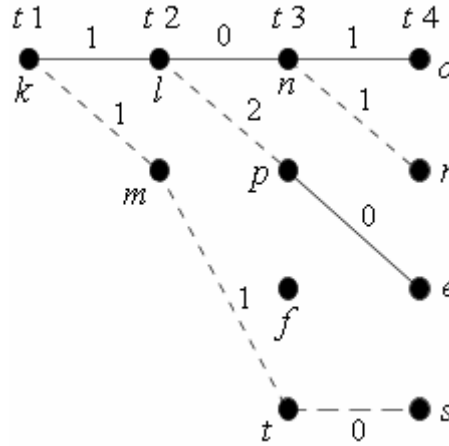


Рис. 12. Выжившие пути к моменту t_4

Над вновь достроенными ребрами (рис. 13) указываем расстояния Хемминга между двумя символами принятой последовательности \bar{z} , расположенными над новыми ребрами и соответствующими двумя символами на **кодовой** диаграмме (рис. 9), которыми отмечены эти новые ребра. Снова видим, что в узел j приходят два пути: k, l, n, o, j и k, l, p, e, j ; метрика этих путей равна:

$$\Gamma_{k,l,n,o,j} = 1 + 0 + 1 + 0 = 2, \quad \Gamma_{k,l,p,e,j} = 1 + 2 + 0 + 2 = 5.$$

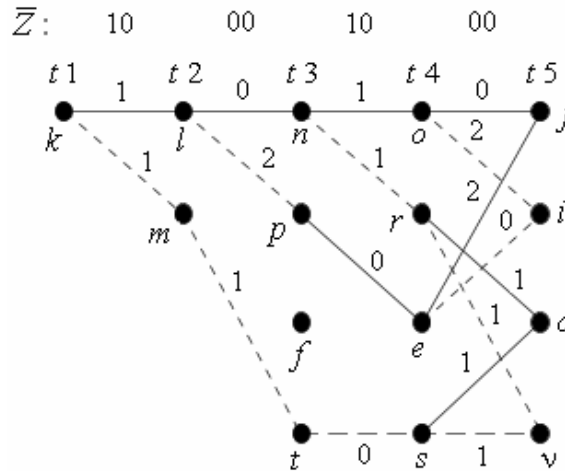


Рис. 13. Выжившие пути к моменту t_4 ,
достроенные до момента t_5

В узел i также приходят два пути: k, l, n, o, i и k, l, p, e, i :

$$\Gamma_{k,l,n,o,i} = 1 + 0 + 1 + 2 = 4, \quad \Gamma_{k,l,p,e,i} = 1 + 2 + 0 + 0 = 3.$$

В узел q также приходят два пути: k, l, n, r, q и k, m, t, s, q :

$$\Gamma_{k,l,n,r,q} = 1 + 0 + 1 + 1 = 3, \quad \Gamma_{k,m,t,s,q} = 1 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

В узел v также приходят пути: k, l, n, r, v и k, m, t, s, v :

$$\Gamma_{k,l,n,r,v} = 1 + 0 + 1 + 1 = 3, \Gamma_{k,m,t,s,v} = 1 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Аналогично вышесказанному из двух путей, приходящих в узел j , выживает путь k, l, n, o, j ; из двух путей, приходящих в узел i , выживает путь k, l, p, e, i . Двум путям, приходящим в узел q , соответствуют одинаковые расстояния Хемминга, равные 3. Поэтому из этих двух путей произвольно выбираем любой, например: k, l, n, r, q . Аналогично из двух путей, приходящих в узел v , произвольно выбираем путь k, l, n, r, v . Снова строим диаграмму от момента t_1 до момента t_5 и на ней указываем только выжившие пути для момента t_5 .

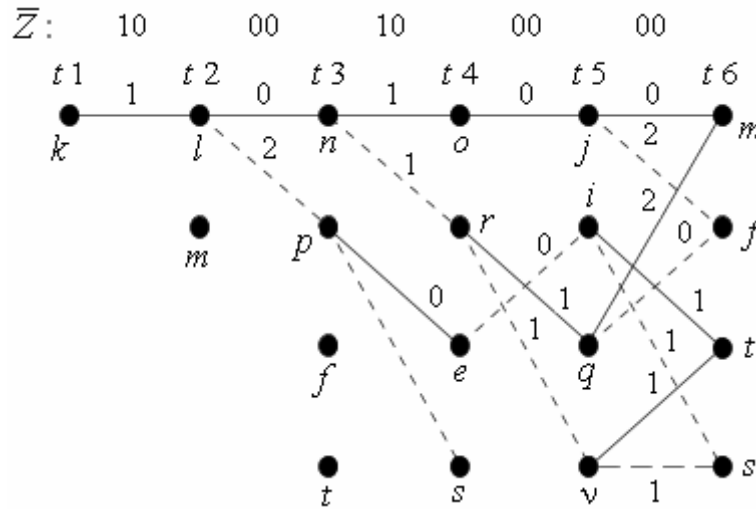


Рис. 14. Выжившие пути к моменту t_5 , достроенные до момента t_6

Достраиваем полученную диаграмму соответствующими ребрами до момента t_6 и указываем над вновь проведенными ребрами соответствующие расстояния Хемминга. Находим:

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 = 2, \Gamma_{k,l,n,r,q,m} = 1 + 0 + 1 + 1 + 2 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,f} = 1 + 0 + 1 + 0 + 2 = 4, \Gamma_{k,l,n,r,q,f} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 3,$$

$$\Gamma_{k,l,p,e,i,t} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 = 4, \Gamma_{k,l,n,r,v,t} = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

$$\Gamma_{k,l,p,e,i,s} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 = 4, \Gamma_{k,l,n,r,v,s} = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Согласно вышесказанному выживают такие пути: k, l, n, o, j, m ; k, l, n, r, q, f ; k, l, p, e, i, t ; k, l, p, e, i, s ; строим на диаграмме эти пути (рис. 15).

Снова достраиваем полученную диаграмму соответствующими ребрами до момента t_7 и указываем над вновь проведенными ребрами на рис. 15 соответствующие расстояния Хемминга. Находим:

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,\alpha} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2, \Gamma_{k,l,p,e,i,t,\alpha} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 2 = 6,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,z} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 = 4, \Gamma_{k,l,p,e,i,t,z} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 0 = 4,$$

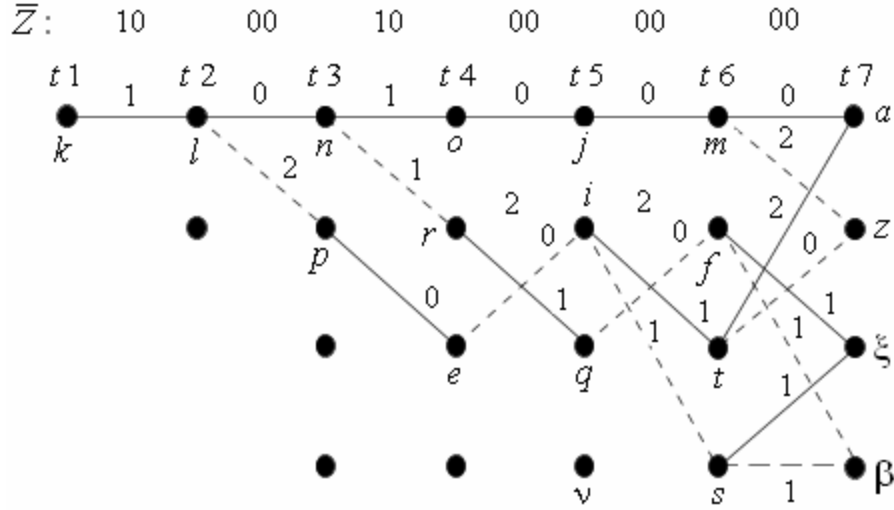


Рис. 15. Выжившие пути к моменту t_6 , достроенные до момента t_7

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\xi} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4, \Gamma_{k,l,p,e,i,s,\xi} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 1 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\beta} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4, \Gamma_{k,l,p,e,i,s,\beta} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 1 = 5.$$

Выживают пути: k, l, n, o, j, m, α ; k, l, n, o, j, m, z ; k, l, n, r, q, f, ξ ; k, l, n, r, q, f, β . Построим на диаграмме эти пути (рис. 16).

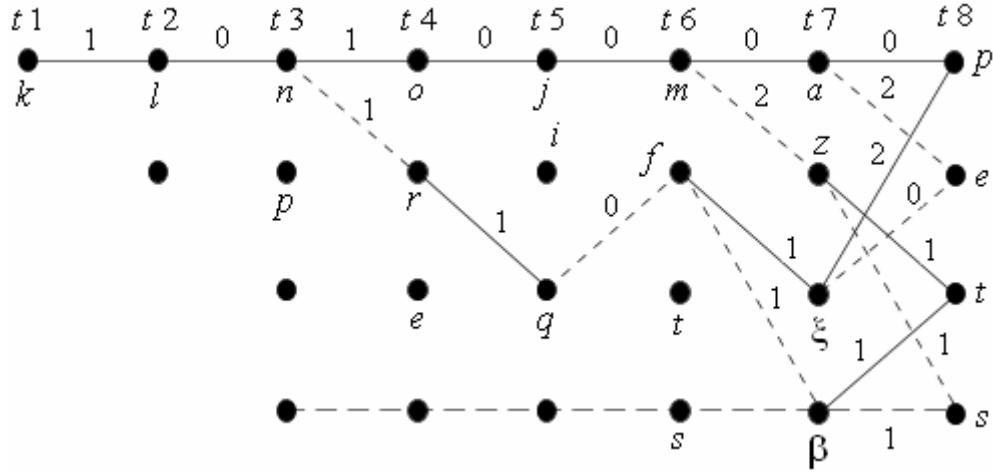


Рис. 16. Выжившие пути к моменту t_7 , достроенные до момента t_8

Снова достраиваем полученную диаграмму соответствующими ребрами до момента t_8 и указываем над вновь проведенными ребрами на рис. 16 соответствующие расстояния Хемминга. Находим:

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,\alpha,p} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\xi,p} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,\alpha,e} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\xi,e} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,z,t} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 1 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\beta,t} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,m,z,s} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 1 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r,q,f,\beta,s} = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 5.$$

Выживают пути: $k, l, n, o, j, m, \alpha, p$; $k, l, n, o, j, m, \alpha, e$; k, l, n, o, j, m, z, t ; k, l, n, o, j, m, z, s ; строим на диаграмме декодера эти пути (рис. 17).

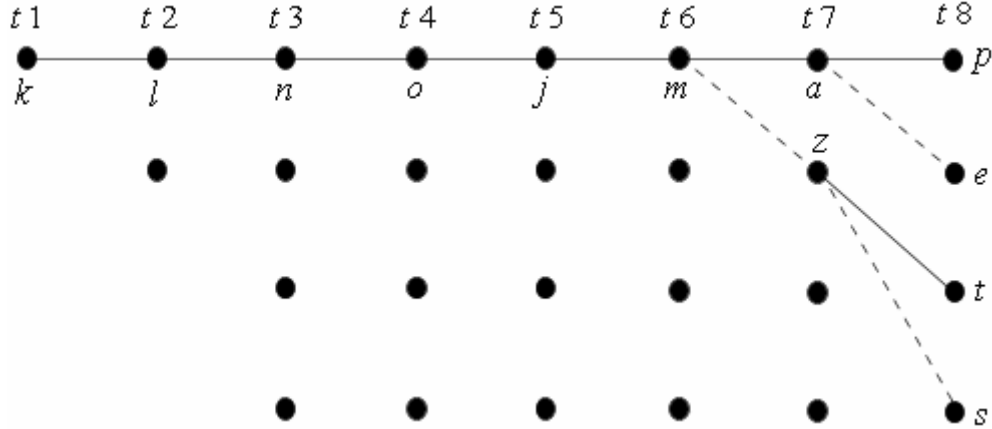


Рис. 17. Выжившие пути на решетчатой диаграмме декодера к моменту t_8

Из построенной на рис. 17 диаграммы декодера видно, что от момента t_1 до момента t_6 выжил только один путь k, l, n, o, j, m . Теперь перенесем этот один выживший путь k, l, n, o, j, m с диаграммы декодера на диаграмму кодера, изображенную на рис. 9. Этому пути на диаграмме кодера (рис. 18) соответствуют обозначения ребер: 00 00 00 00 00.

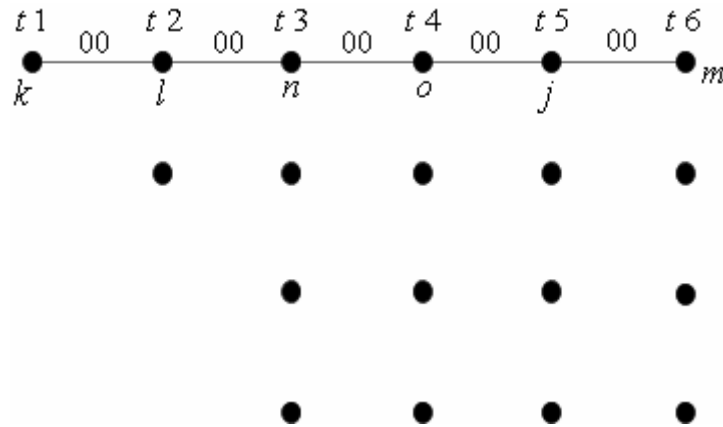


Рис. 18. Выживший путь k, l, n, o, j, m на диаграмме кодера

Декодер принимает решение, что на интервале от t_1 до t_6 по каналу передавалась последовательность кодовых символов, соответствующая выжившему пути k, l, n, o, j, m т. е.: 00 00 00 00 00. Эта последовательность совпадает с последовательностью \bar{u} : 00 00 00 00 00 от мо-

мента t_1 до t_6 . Таким образом, ошибки, возникшие на выходе демодулятора, оказываются исправленными.

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы:

1. При декодировании используются как решетчатая диаграмма кодера, так и решетчатая диаграмма декодера. Когда из демодулятора поступает пара принятых символов между моментами времени t_i и t_{i+1} , то определяются расстояния Хемминга между этой парой символов и парами символов, которыми отмечены ребра решетчатой диаграммы кодера между теми же моментами времени t_i и t_{i+1} и эти расстояния Хемминга пишут над соответствующими ребрами решетчатой диаграммы декодера. Обозначения на ребрах решетки декодера накапливаются декодером в процессе декодирования.

Из сказанного следует, что решетчатая диаграмма кодера всегда одна и та же (она не зависит от принятой последовательности), а решетчатая диаграмма декодера определяется как диаграммой кодера, так и принятой последовательностью \bar{u} , т. е. ее вид (значения цифр над ребрами) зависит от принятой последовательности \bar{z} .

2. С помощью пометок (цифр) на ребрах решетчатой диаграммы декодера для момента времени t_i определяются расстояния Хемминга между принятой последовательностью \bar{z} и путями по диаграмме декодера. Все пути начинаются в точке a (которой соответствует состояние $a = 00$) и заканчиваются в узлах решетки декодера для момента t_i . Для каждого момента времени t_i (где $i > 3$) имеем четыре узла и в каждый узел приходят два пути (все они начинаются в одной той же точке a), т. е. всего путей будет 8, исходящих из точки a .

Декодирование Витерби состоит в том, что из двух путей, приходящих в один узел, при продолжении операции декодирования выживает только один – тот, которому соответствует меньшее расстояние Хемминга. Если эти два расстояния имеют одинаковую величину, то произвольно выбирается любой из двух.

Отсекание одного из двух путей, сходящихся в узле решетки, гарантирует, что число продолжающихся путей будет равно числу состояний (т. е. четырем для рассматриваемого кодера). В этом заключается существенное преимущество решетчатой диаграммы при сравнении с древовидной диаграммой при декодировании. Как отмечалось выше, при использовании древовидной диаграммы число возможных путей растет очень быстро – по закону $2 \cdot 2^L$.

В результате использования алгоритма декодирования Витерби находится наиболее вероятный (с минимальным расстоянием Хемминга) путь через решетку декодера. При определении этого пути происходит исправление ошибок, возникших при приеме передаваемой кодовой последовательности.

Как уже отмечалось, количество ошибок q_u , произошедших на интервале $(3...5) \times K$ символов и исправляемых при сверточном декодировании, должно удовлетворять неравенству $q_u < d/2$, где d – кодовое расстояние (см. (8)). Величина d может быть определена как число единичных символов в импульсной характеристике сверточного кодера. Эту же величину d можно определить как величину *минимального просвета* d_f или просто *просвета*. При этом имеет место равенство $d = d_f$.

Параметр d_f определяется с помощью решетчатой диаграммы декодера следующим образом. Предполагается, что по каналу передавалась нулевая последовательность

$$\bar{U} = 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \quad (12)$$

и принятая последовательность \bar{Z} также нулевая, т. е.

$$\bar{Z} = 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00. \quad (13)$$

Для этой нулевой последовательности \bar{Z} с помощью решетчатой диаграммы *кодера* строится решетчатая диаграмма *декодера*, представленная на рис. 19.

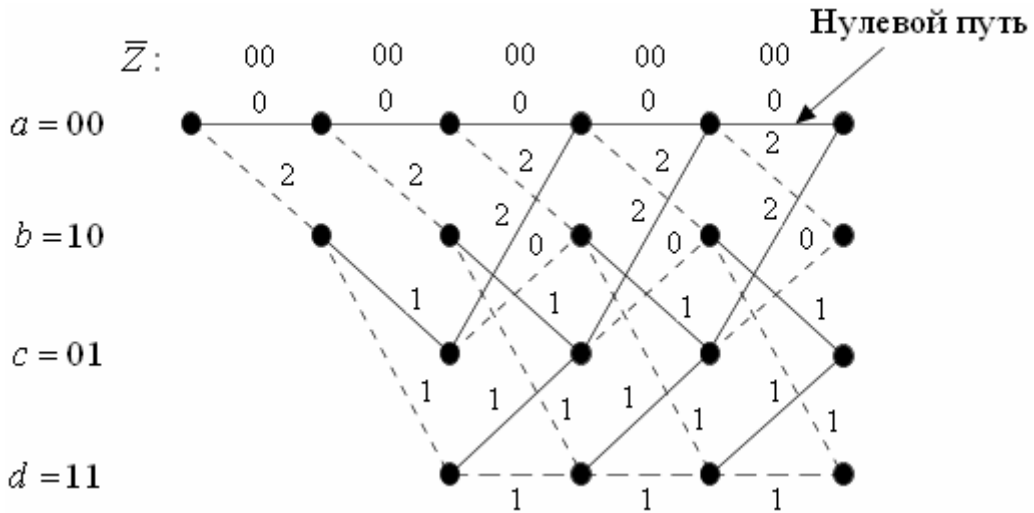


Рис. 19. Решетчатая диаграмма декодера последовательности \bar{Z} (13)

На диаграмме декодера (рис. 19) строятся всевозможные пути, которые **расходятся из нулевого пути и снова возвращаются на нулевой путь в каком-то узле.**

На рис. 20 построены три пути, расходящиеся из нулевого пути в точке k и возвращающиеся на нулевой путь соответственно в точках a, j, d . Эти пути обозначим: $k, m, f, a; k, m, t, e, j; k, m, f, r, q, d$.

Из диаграммы на рис. 20 можно определить метрику этих путей по Хеммингу:

$$\Gamma_{k, m, f, a} = 2 + 1 + 2 = 5,$$

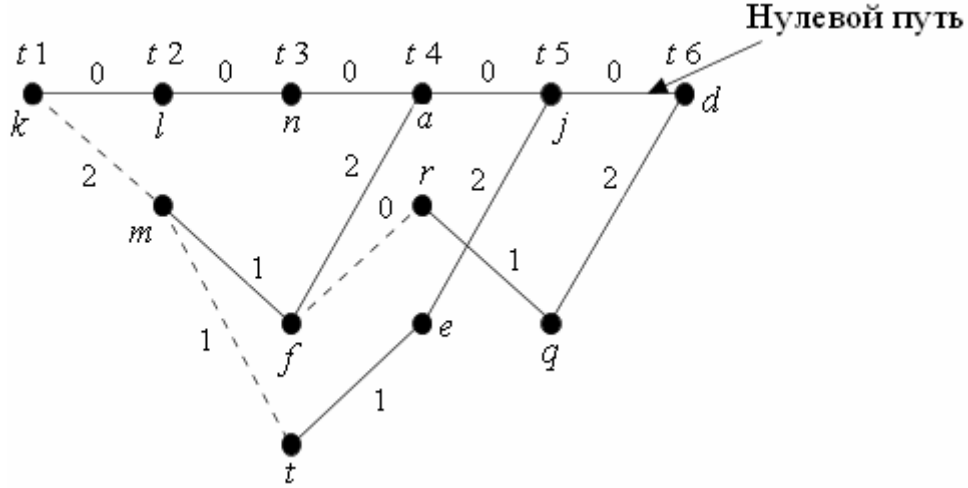


Рис. 20. Решетчатая диаграмма декодера последовательности \bar{Z} от момента t_1 до момента t_6 (13)

$$\Gamma_{k,m,t,e,j} = 2 + 1 + 1 + 2 = 6,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,q,d} = 2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6.$$

На рис. 20 можно построить и другие аналогичные пути, но им будут соответствовать метрики большей величины. Минимальная величина из метрик таких путей называется *минимальным просветом* (или просто *просветом*) и обозначается d_f .

Таким образом, для рассматриваемого сверточного кода (степень кодирования равна $1/2, K=3$) величина просвета $d_f=5$. Эта величина d_f совпадает с величиной d для данного кода, которая определялась как число 1 (единиц) в импульсной характеристике кодера, т. е. $d_f = d = 5$. Следовательно, величину просвета d_f можно использовать также как и величину d для определения количества исправляемых ошибок на интервале протяженностью $(3...5) \times K$ символов.

Рассмотрим еще один случай исправления комбинаций ошибок, характерный для ОФМ, когда две ошибки следуют друг за другом. Пусть

$$\bar{U}_1 = 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00, \quad (14)$$

$$\bar{Z}_1 = 01 \ 10 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 00. \quad (15)$$

Как отмечено выше в (11) и в последовательности (15) ошибкам соответствуют единичные символы.

Построим диаграмму декодера (рис. 21) для последовательности \bar{Z}_1 (15).

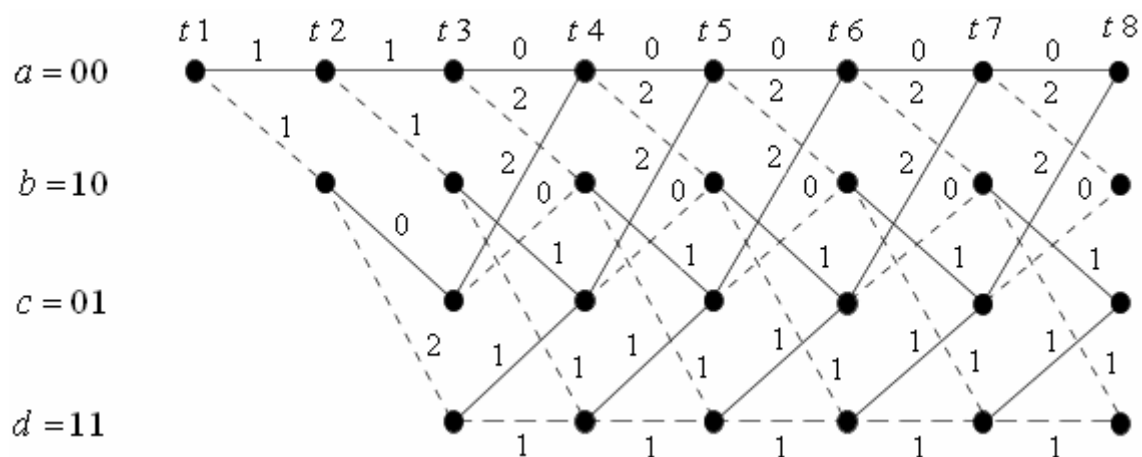


Рис. 21. Диаграмма декодера

Далее на рис. 22–29 изобразим отдельно части решетчатой диаграммы декодера (рис. 21) аналогично изложенному выше материалу.

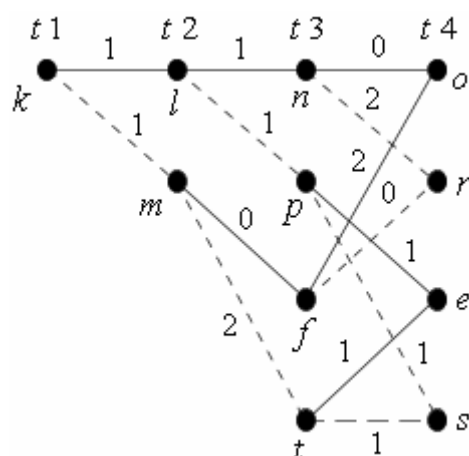


Рис. 22. Выжившие пути к моменту t_4

$$\Gamma_{k,l,n,o} = 1 + 1 + 0 = 2 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,o} = 1 + 0 + 2 = 3,$$

$$\Gamma_{k,l,n,r} = 1 + 1 + 2 = 4,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r} = 1 + 0 + 0 = 1 \vee,$$

$$\Gamma_{k,l,p,e} = 1 + 1 + 1 = 3 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,t,e} = 1 + 2 + 1 = 4,$$

$$\Gamma_{k,l,p,s} = 1 + 1 + 1 = 3 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,t,s} = 1 + 2 + 1 = 4,$$

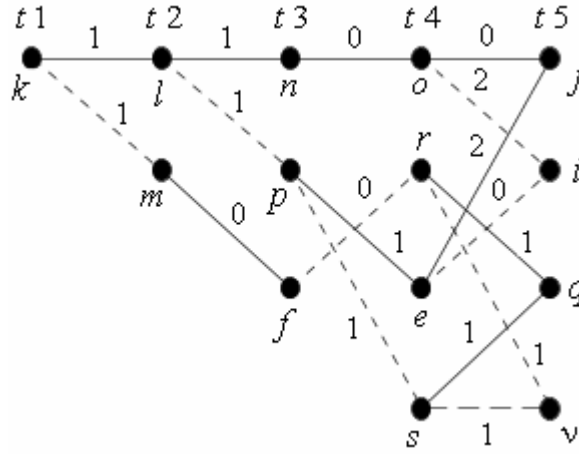


Рис. 23. Выжившие пути к моменту t_4 ,
достроенные до момента t_5

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l,n,o,j} &= 1+1+0+0=2\vee, \quad \Gamma_{k,l,p,e,j} = 1+1+1+2=5, \\ \Gamma_{k,l,n,o,i} &= 1+1+0+2=4, \quad \Gamma_{k,l,p,e,i} = 1+1+1+0=3\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q} &= 1+0+0+1=2\vee, \quad \Gamma_{k,l,p,s,q} = 1+1+1+1=4, \\ \Gamma_{k,l,p,s,v} &= 1+1+1+1=4, \quad \Gamma_{k,m,f,r,v} = 1+0+0+1=2\vee. \end{aligned}$$

Выжившие пути на рис. 22 и 23, а также на рис. 24 ... 29 отмечены знаком \vee .

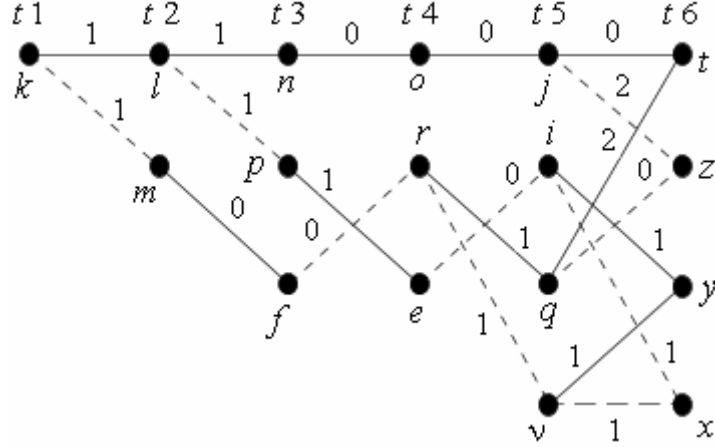


Рис. 24. Выжившие пути к моменту t_5 ,
достроенные до момента t_6

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l,n,o,j,t} &= 1+1+0+0+0=2\vee, \quad \Gamma_{k,m,f,r,q,t} = 1+0+0+1+2=4, \\ \Gamma_{k,l,n,o,j,z} &= 1+1+0+0+2=4, \quad \Gamma_{k,m,f,r,q,z} = 1+0+0+1+0=2\vee, \\ \Gamma_{k,l,p,e,i,y} &= 1+1+1+0+1=4, \quad \Gamma_{k,m,f,r,v,y} = 1+0+0+1+1=3\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,v,x} &= 1+0+0+1+1=3\vee, \quad \Gamma_{k,l,p,e,e,i,x} = 1+1+1+0+1=4. \end{aligned}$$

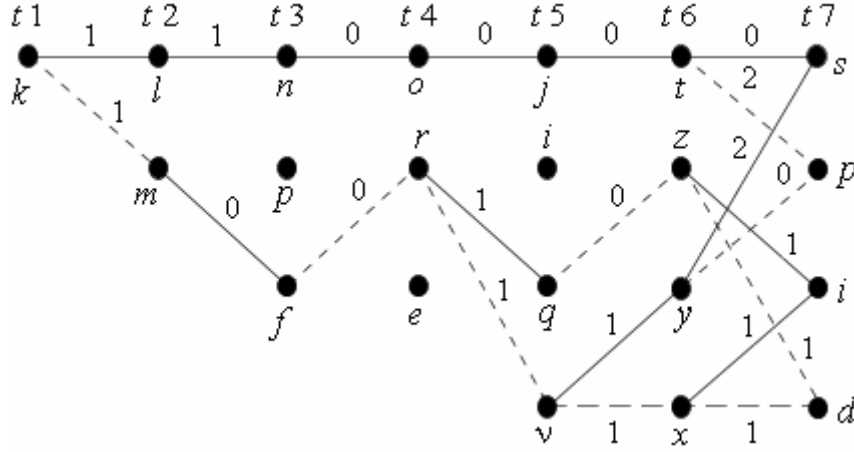


Рис. 25. Выжившие пути к моменту t_6 ,
достроенные до момента t_7

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,t,s} = 1+1+0+0+0+0 = 2 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,v,y,s} = 1+0+0+1+1+2 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,t,p} = 1+1+0+0+0+2 = 4,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,v,y,p} = 1+0+0+1+1+0 = 3 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,q,z,i} = 1+0+0+1+0+1 = 3 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,v,x,i} = 1+0+0+1+1+1 = 4,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,q,z,d} = 1+0+0+1+0+1 = 3 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,v,x,d} = 1+0+0+1+1+1 = 4.$$

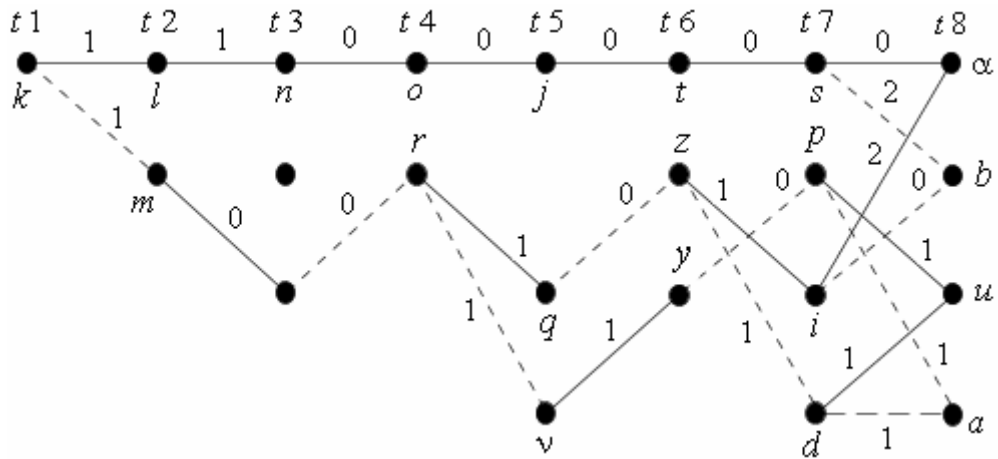


Рис. 26. Выжившие пути к моменту t_7 ,
достроенные до момента t_8

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,\alpha} = 1+1+0+0+0+0+0 = 2 \vee,$$

$$\Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,\alpha} = 1+0+0+1+0+1+2 = 5,$$

$$\Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,b} = 1+1+0+0+0+0+2 = 4,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b} &= 1+0+0+1+0+1+0=3\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,v,y,p,u} &= 1+0+0+1+1+0+1=4, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,u} &= 1+0+0+1+0+1+1=4\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,v,y,p,a} &= 1+0+0+1+1+0+1=4, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,a} &= 1+0+0+1+0+1+1=4\vee.\end{aligned}$$

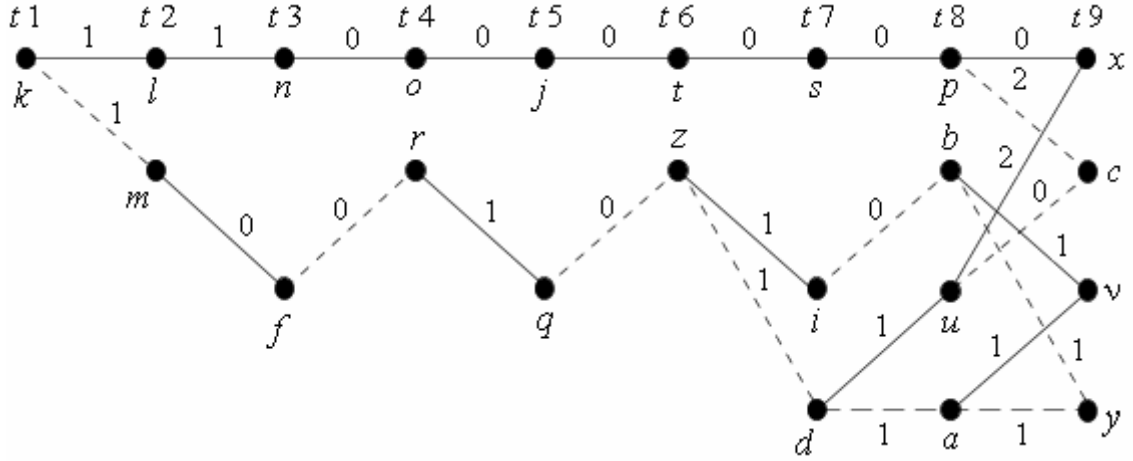


Рис. 27. Выжившие пути к моменту t_8 , достроенные до момента t_9

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,x} &= 1+1+0+0+0+0+0+0=2\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,u,x} &= 1+0+0+1+0+1+1+2=6, \\ \Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,c} &= 1+1+0+0+0+0+0+2=4\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,u,c} &= 1+0+0+1+0+1+1+0=4, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,v} &= 1+0+0+1+0+1+0+1=4\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,a,v} &= 1+0+0+1+0+1+1+1=5, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,y} &= 1+0+0+1+0+1+0+1=4\vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,d,a,y} &= 1+0+0+1+0+1+1+1=5.\end{aligned}$$

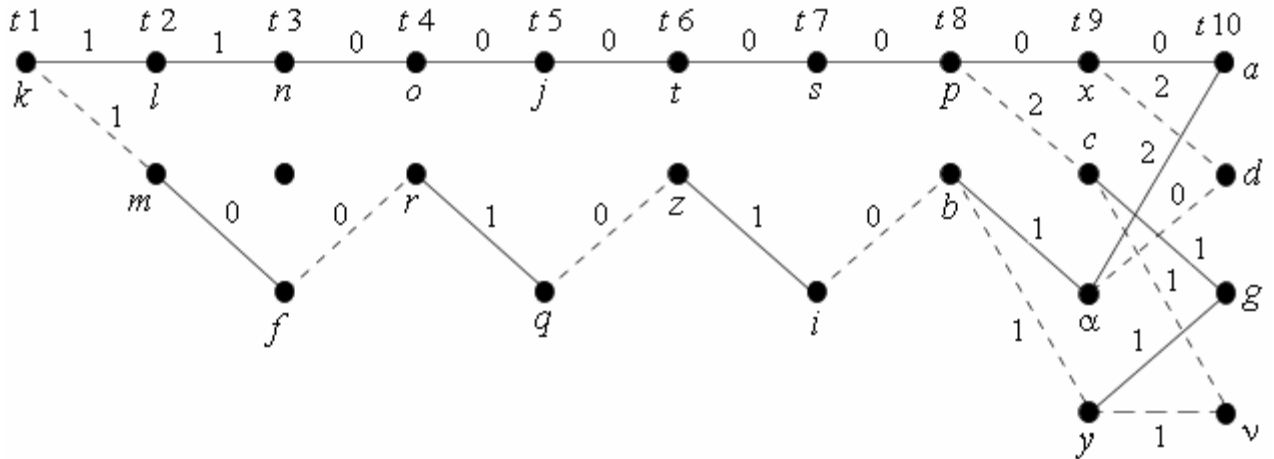


Рис. 28. Выжившие пути к моменту t_9 , достроенные до момента t_{10}

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,x,a} = 2 \vee, \quad \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,\alpha,a} = 6, \quad \Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,x,d} = 4 \vee, \\ \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,\alpha,d} = 4, \quad \Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,c,g} = 5 \vee, \quad \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,y,g} = 5, \\ \Gamma_{k,l,n,o,j,t,s,p,c,v} = 5 \vee, \quad \Gamma_{k,m,f,r,q,z,i,b,y,v} = 5. \end{aligned}$$

Строим на рис. 29 те пути, которые отмечены знаком \vee .

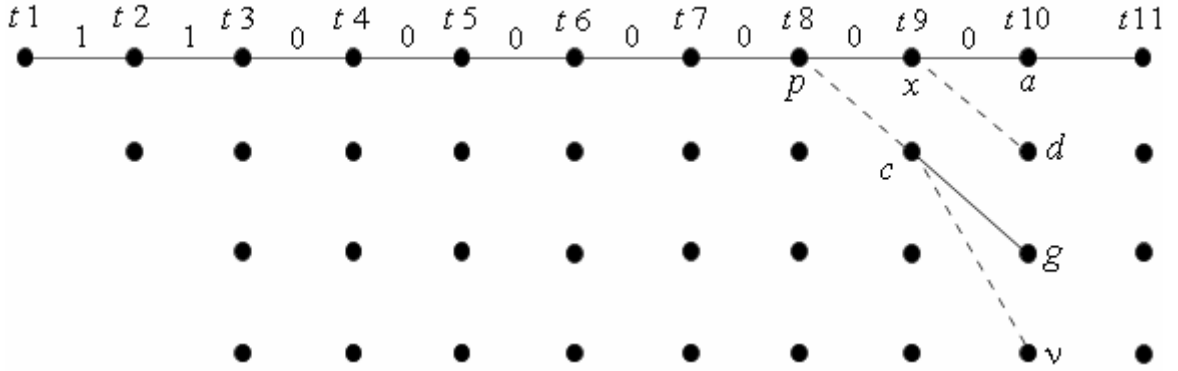


Рис. 29. Выживший путь от момента t_1 до момента t_8

1. Для момента t_{10} можно из 8 путей оставить тот путь, метрика которого минимальна (равна 2), так как метрика других путей существенно больше.

2. Если для момента t_{10} веса двух путей одинаковые (например равны 4), то лучше выбрать тот путь, которому соответствует меньший вес для момента t_9 . Для момента t_9 галочкой (\vee) отмечен тот путь (рис. 27), для которого метрика d равна 2.

Из диаграммы рис. 29 можно сделать вывод, что от момента t_1 до момента t_8 выжил только один путь k, l, n, o, j, t, s, p . Перенесем этот выживший путь с диаграммы декодера на диаграмму кодера (рис. 9).

Аналогично приведенному выше примеру по данным (9), (10), (11) декодер (рис. 29) принимает решение, что на интервале от t_1 до t_8 по каналу передавалась ПКС, соответствующая выжившему пути k, l, n, o, j, t, s, p , т. е. 00 00 00 00 00 00 00 00 (рис. 9). Эта последовательность совпадает с последовательностью $\bar{U}_1 : 00 00 00 00 00 00 00 00$ (14) от момента t_1 до момента t_8 и ошибки, возникшие на выходе демодулятора, исправлены.

Главным критерием при выборе сверточного кода является требование, чтобы код не допускал катастрофического распространения ошибок и имел максимальный просвет при данной степени кодирования и длине кодового ограничения. Список наиболее известных кодов со степенью кодирования $1/2$, если K имеют значения от 3 до 9, и со степенью кодирования $1/3$, если K имеют значения от 3 до 8, приводится в табл. 3.

Таблица 3

Степень кодирования	Длина кодового ограничения	Просвет	Векторы кода
1/2	3	5	111 101
	4	6	1111 1011
	5	7	10111 11001
	6	8	101111 110101
	7	10	1001111 1101101
	8	10	10011111 11100101
	9	12	110101111 100011101
1/3	3	8	111 111 101
	4	10	1111 1011 1101
	5	12	11111 11011 10101
	6	13	101111 110101 111001
	7	15	1001111 1010111 1101101
	8	16	11101111 100011011 10101001

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. **Кларк, Дж. мл. Кейн, Дж.** Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Пер. с англ. – М. : Радио и связь. – 1987. – Вып. 28.
2. **Скляр, Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Пер. с англ. – М. : Вильямс, 2003. – 1104 с.: ил.

Дополнительная

3. **Прокис, Дж.** Цифровая связь / Пер. с англ. – М. : Радио и связь, 2000. – 788 с. : ил.

Учебное пособие

Куликов
Леонард Николаевич

Москалец
Мария Николаевна

Теория электрической связи
Основы теории сверточного кодирования

Редактор *Е. Ю. Пономарева*

План изданий 2006 г., п. 33.

Подписано к печати 29.05.2006.

Объем 2,5 усл.-печ. л. Тираж 600 экз. Зак. 22

РИО ГОУ ВПО СПбГУТ. 191186 СПб., наб. р. Мойки 61
Отп. в ООО «Дельфи». 193232 СПб., пр. Большевиков, 22

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА**

Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВЕРТОЧНОГО
КОДИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2006**

