大气流体力学

课程内容

说明：（Ⅰ）表示《流体力学》；（Ⅱ）表示《动力气象》。

第一章 流体力学基础

§1 流体的物理性质和宏观模型 （概念）

①流体的主要物理性质：流动性、粘性和压缩性；

②流点的概念和流体的宏观模型------**连续介质假设(名词解释)。**

§ 2 流体的速度和加速度 （理解、计算和应用）

①描写流体运动的两种观点： Lagrange 观点和 Euler 观点及其差别以及两种变量的相互转换；（理解、计算）

②流体的加速度的定义、物理含义、计算；（理解、计算）

注意：流点加速度（L），局地加速度（E），加速度分量形式.

题：（Ⅰ）P38-例 1;P43-2(1);(Ⅱ)P14-6,7;

③微商算符的物理实质及其应用。（理解、和应用） 题：（Ⅰ）P43-3;

§ 3 迹线和流线 （概念、理解、计算）

①迹线和流线的概念、迹线和流线的物理实质； （概念、理解）

②迹线(L 氏)和流线（E 氏）方程求解的方法； （计算）

T:(Ⅰ)p43-2(2)(3);

(Ⅱ)p14-3,7(4);p15-10(3)(4);

注意：（1）迹线(L 氏)和流线（E 氏）方程的前提条件;

（2）轨迹方程就是迹线方程;

（3）计算运用高数的积分知识。

③迹线、流线的差别以及迹线、流线重合的条件（理解）

注意：重合时，求轨迹方程即为流线方程(Ⅰ)p43-2(3).

*§ 4 速度分解 （理解）

①亥姆霍兹速度分解定理的主要内容及其有关计算。

§ 5 涡度、散度和形变率 （概念、理解、计算）

①涡度、散度和形变率的定义，物理含义；（见（Ⅱ）p8-11）

②涡度、散度和形变率的计算； T:(Ⅱ)p15-18(4),p16-21(1)

③形变张量的概念(**A**)。

§ 6 速度势函数和流函数 （概念、理解、计算）

①速度势函数的定义、存在条件； (Ⅱ)p12(1.39)

②流函数的定义、存在条件； (Ⅱ)p12(1.42)

T:(Ⅰ)p40-例 6;(Ⅱ)p15-11,12,16,19

补充：定常流场，不可压缩流场（无辐散）（散度），有旋流场（涡度）

第二章 流体运动方程

§ 1 连续方程 （理解、 推导和应用）

①拉格郎日 (Lagrange) 观点下的流体连续方程；

②欧拉(Euler) 观点下的流体连续方程；

推导：见（II）p17(2.1)--(2.5)

§ 2 作用于流体的力、 应力张量（概念、 理解和计算）

①质量力和表面力的概念、 定义、 表示和差别；

②应力张量 **P**；

③广义的牛顿粘性假设。

§ 3 运动方程 （理解、 简单推导和应用）

①流体运动方程的建立；(普遍形式运动方程（II）p19(2.11))

②纳维-斯托可斯（ Navier—Stokes） 方程（II）p19（2.12）及其简化形式（II）p19(2.13)；压力梯度力定义。

③欧拉方程及其适用条件；

④静力方程(2.18)、条件；

§ 4 能量方程 （理解、 简单应用）

①动能方程；（II）p22(2.25)-(2.30)(其中有些式子有问题，对照（I）p62)

②热流量方程； ③伯努利方程

T:(Ⅰ)p72-3;p77-9,10;p81-5(1)

*** § 5单情况下的纳维—斯托克斯方程的一些准确解（了解）**

①流体运动的初边条件简介；　（知道）

②单情况下的纳维—斯托克斯方程的求解方法：平面库托流动、平面泊稷叶流动、埃克曼流动。

重点：连续方程、纳维—斯托克斯方程的建立及物理意义；

第三章 大气运动坐标系与方程组(Ⅱ)

§ 1 作用于大气上的力，惯性坐标系运动方程（理解、掌握）

(1)惯性坐标系概念；

(2)惯性坐标系运动方程 P32-(3.4)；

(3)名词解释：气压梯度力

§ 2 视示力，旋转坐标系运动方程（理解、掌握、推导）

(1)旋转坐标系概念

(2)绝对速度与相对速度(3.7);

(3)名词解释：个别变化，局地变化，平流变化，对流变化；

问题 2.2 何谓个别变化？何谓局地变化？何谓平流变化？及其它们之间的关系？

表达个别物体或系统的变化称为个别变化，其数学符号为 $\frac{d}{dt}$，也称为全导数。表达某一固定地点某一物理量变化称为

局地变化，其数学符号为$\frac{\partial}{\partial t}$，也称为偏导数。表达由空气的水平运动（输送）所引起的局地某物理量的变化称为平流变化，它的数学符号为$-\vec{V}\cdot\nabla$。例如，用$\frac{dT}{dt}$表示个别空气微团温度的变化，用$\frac{\partial T}{\partial t}$表示局地空气微团温度的变化。可以证明它们之间有如下的关系

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dT}{dt}-\vec{V}\cdot\nabla T-w\frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

式中$\vec{v}$为水平风矢量，W 为垂直速度。（2.4）式等号右边第二项称为温度的平流变化（率），第三项称为温度的对流变化（率）或称为垂直输送项。

(4)绝对加速度与相对加速度(3.15);

(5)旋转坐标系运动方程(3.18)及推导;

(6)名词：视示力，科氏力，惯性离心力；

§ 3 连续方程和热力学方程（理解、掌握、推导）

(1)连续方程推导 p17;

§ 4 球坐标系大气运动方程组简介（推导、掌握，应用）

(3.30)

运动方程(3.40)

连续方程 (3.41)

§ 5 局地直角坐标系的大气运动方程组（理解、掌握）

(3.44),(3.47),(3.49)

（1）熟记局地坐标系变量与球坐标系变量关系式（3.43）

§ 6 坐标变换，气压（ P）坐标系的大气方程组（推导、掌握，应用）

（1）p-z 坐标系的转换公式（3.60）；

（2）运动方程（3.68）（与 3.48 比较下）；

位势或称重力位势，其定义为单位质量的物体从海平面上升的高度

z 克服重力所做的功。

（3）证明（3.66）；（课后习题 14）

（3）连续方程(3.76)：推导见 p45-(3.69)-(3.76)

（4）热力学方程(3.80)及其推导;

§ 7 有关科里奥利参数 f 的三个近似（理解）

第四章 自由大气中的平衡关系

§ 1 自然坐标系（ 概念，理解）

§ 2 地转风（概念，理解、推导、应用）

§ 3 梯度风（概念，理解、推导、应用）

§ 4 惯性风与惯性振荡（理解）

§ 5 热成风（概念，理解、推导、应用）

§ 6 地转偏差（理解）

第五章 尺度分析和方程组的简化

§ 1 尺度，大气运动的分类（概念，理解）

（1）特征尺度的记号；

（2）大气运动尺度的划分（三类）；

⑶ 尺度分析概念；

⑷ 大气运动基本尺度的数量级（表 5.2）和大气运动变化量的尺度（表 5.3）；

§ 2 大气方程组的尺度分析（理解，掌握）

自己操作算算那 4 个方程

§ 3 大气方程组的简化（理解， 掌握、应用）

（1）各尺度的零级简化和一级简化方程组

（2）各种简化后的物理含义

⑶ 地转平衡，梯度平衡，旋转平衡概念；

（4）静力平衡；

§ 4 常见的特征无量纲参数（概念，理解）

罗斯贝数，雷诺数

第六章 量纲分析与π定理

§ 1 流体力学的模型试验和相似概念 (概念)

相似的概念：几何相似、 运动相似和动力相似（见（Ⅱ）p79）

§ 2 相似判据 （理解、 推导）

相似判据的概念和相似判据的确定方法。

§ 3 无量纲方程 （概念、 理解、 推导）

①概量、 特征值、 无量纲量的基本概念；

②无量纲方程和无量纲数

§ 4 特征无量纲数 （概念、 理解 、 应用）

Ro，Fr，Re 特征无量纲数的定义及物理意义。（见（Ⅰ）p92-96）；

§ 5 量纲分析和 π 定理 （理解、 应用）

量纲分析的基本概念和量纲分析的“齐次性” 原理；((Ⅱ)p81)

第七章 环流定理与涡度方程

（1）涡旋动力学基础理论：（概念、推导、理解、应用）

(1)环流的基本概念；

(2)开尔文定理；

(3)绝对环流与相对环流的联系；

（2）涡度方程及其讨论、涡度变化的原因。（推导、理解）

（1）涡度的定义和物理意义（Ⅱ）p95；

（2）绝对涡度与相对涡度的联系；

⑶绝对涡度方程及物理含义（Ⅱ）p96;

（4）涡度方程（F-H 方程）（Ⅰ）p132;

⑸位涡的定义（Ⅱ）p103;位涡守恒的条件，位涡守恒的物理意义（Ⅱ）p104.

王伟教学 PPT 中出现的习题：

例1-2-2 已知Euler变量 $u=x, v=-y, w=0$，请将其转换为Lagrange变量。

解：根据 $\begin{cases} dx/dt=u \\ dy/dt=v \\ dz/dt=w \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx/dt=x \\ dy/dt=-y \\ dz/dt=0 \end{cases}$ 直接积分 $\longrightarrow$

$\begin{cases} x=ae^{t} \\ y=be^{-t} \\ z=c \end{cases}$ 确定其中参数；

根据 $t=t_0 \rightarrow (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)=(a,b,c)$

$\rightarrow x=x_0e^{t}, y=y_0e^{-t}, z=z_0$ 即为所求。

思考：加速度

例　　已知Lagrange变量 $\begin{cases} x = ae^{-2t/k} \\ y = be^{-t/k} \\ z = ce^{-t/k} \end{cases}$，其中 a,b,c,k 均为常数，且 $k \neq 0$ ．求流点的加速度 。

例1-2-3 已知Lagrange变量 $\begin{cases} x = ae^{-2t/k} \\ y = be^{-t/k} \\ z = ce^{-t/k} \end{cases}$，其中 a,b,c,k 均为常数，且 $k \neq 0$ ．问此流体运动是定常的吗？

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \bullet \nabla\right)\vec{V}$$

流体运动加速度产生的原因：
流场的非定常性和非均匀性。

例1-2-4已知流体运动的速度场$\begin{cases} u = 1 + x + t \\ v = y - t^2 \end{cases}$，求流体运动的局地加速度。

习题1-2-2 如图所示，已知A、B两地相距3600公里，假定A地某时刻的温度为10度，而B地的温度为15度(假定A、B之间的气温是线性分布)，并且由A向B的气流速度为10米/秒。

①如果流动过程中空气的温度保持不变，问24小时后B地的温度将下降多少度？

②由于流动过程中空气的温度的变化为2.5度/天，则24小时后B地的温度变化又将如何？

习题1-2-3 已知流场为 $u = xt,\ v = yt,\ w = zt$，该流场中温度的分布为 $T = At^2/(x^2+y^2+z^2)$，其中A为已知常数，求初始位置位于$x = a, y = b, z = c$ 的流点温度随时间的变化率。

$$dT/dt = \frac{2At(1-t^2)}{(a^2+b^2+c^2)e^{t^2}}$$

例1-3-1 假设流体运动的Lagrange变量为：

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos\left(\omega t + tg^{-1}\frac{y_0}{x_0}\right)$$
$$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin\left(\omega t + tg^{-1}\frac{y_0}{x_0}\right)$$
$$z = z_0$$

参数方程

求迹线方程？

解：消去Lagrange变量中的参数 t，即可得迹线方程：

$$x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2) \qquad z = z_0$$

问题：若已知欧拉变量的流点速度场 $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$
如何求流点迹线方程？

根据速度定义，流点在时间 dt 内在迹线上的位移：

$$d\vec{r}=\vec{V}(x,y,z,t)dt \longrightarrow \begin{cases} dx=u(x,y,z,t)dt \\ dy=v(x,y,z,t)dt \\ dz=w(x,y,z,t)dt \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}=dt$$

本质上反映了E观点 ⟶ L观点。

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

例1-3-2 假设流体运动的Euler变量为：

$$u=-\omega y, v=\omega x, w=0$$

求流线方程 。

解：流线方程为：

$$dx/(-\omega y)=dy/(\omega x)=dz/0 \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega(xdx+ydy)=0 \\ dz=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{积分}} \begin{matrix} x^2+y^2=c_1 \\ z=c_2 \end{matrix}$$

流线方程。

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

例1-3-3 流体运动由Euler变量表示为：$u=kx, v=ky, w=0$

其中 k 为常数：

（1）求流线方程；

（2）请问同一地点不同时刻流速是否相同？同一流点不同时刻的流速是否相同？

(3) 求出 t =0时刻，过点（a，b，c）的迹线方程。

解: (1)根据 $\begin{cases} dx/kx = dy/ky \\ dz = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{积分}} \begin{cases} y = c_1 x \\ z = c_2 \end{cases}$

流线方程。

$$\frac{dx}{u(x(t),y(t),z(t),t)}=\frac{dy}{v(x(t),y(t),z(t),t)}=\frac{dz}{w(x(t),y(t),z(t),t)}=dt$$

(2)流动与时间无关，为定常流动：

同一地点不同时刻流速相同；

同一流点不同时刻的流速不相同；

(3)实质是E变量 $\longrightarrow$ L变量：

$$\begin{cases} dx/dt = u = kx \\ dy/dt = v = ky \\ dz/dt = w = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \ln x = kt + c_1 \\ \ln y = kt + c_2 \\ z = c_3 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \ln a \\ c_2 = \ln b \\ c_3 = c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = bx/a \\ z = c \end{cases}$$ （一直线）。

习题1-3-1已知流体运动的速度场为$\begin{cases}u=-y\\v=x\end{cases}$，求流场的迹线和流线。

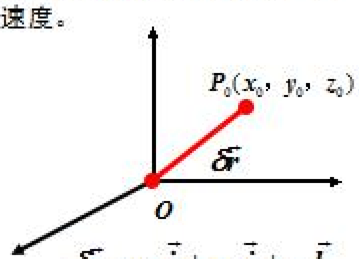
习题1-3-2已知流体运动的速度场为$\begin{cases}\boldsymbol{u=x}\\\boldsymbol{v=-y}\end{cases}$，求该流场中通过（1，1）点的流线。

习题1-3-3已知流体运动的速度场为$\begin{cases}\boldsymbol{u=x+t}\\\boldsymbol{v=-y+t}\end{cases}$，求$\boldsymbol{t}$=0时刻，过点**M** (-1,-1)的迹线和流线。

例1-4-1 已知流场： $\boldsymbol{u=mx, v=my, w=m}$

其中 $\boldsymbol{m}$为常数，计算坐标原点$\boldsymbol{O}$ 附近点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的转动线速度和形变线速度。

解：
$$\vec{V}_R=\vec{\omega}\big|_O\times\delta\vec{r}$$
$$\vec{V}_D=A\big|_O\bullet\delta\vec{r}$$



$$\delta\vec{r}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$$

$$u = mx, v = my, w = m$$

需要计算：

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \qquad A = (e_{ij}) \quad i, \ j = 1,2,3$$

对于转动线速度: $(\nabla \times \vec{V})\big|_0 = 0 \quad \vec{V}_R\big|_{P_0} = 0$

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \text{或} \vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \wedge \vec{V} \\ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$u = mx, v = my, w = m$$

形变线速度: $A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$e_{31} = e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\vec{V}_D\big|_{P_0} = (x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = m(x_0\vec{i} + y_0\vec{j})$$

例1-5-1已知流体二维速度场为 $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ ，分别计算涡度和散度。

解：$(\nabla \Lambda \vec{V})_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y = 2(x - y)$

$$D = \nabla_h \bullet \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y = 2(x + y)$$

例1-5-2已知流体速度场分别为：

① $u = 2\omega y, v = w = 0$ ② $u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$

③ $u = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, w = 0$

分别判断上述流体运动是否有旋、是否有辐散和形变？

① $u = 2\omega y, v = w = 0$

$$(\nabla \Lambda \vec{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 2\omega = -2\omega$$ → 有旋

$$D = \nabla_h \bullet \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ → 无辐散

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ → 无法形变

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega$$ → 有切形变

② $u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$

$$(\nabla \Lambda \vec{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega$$ → 有旋

$$D = \nabla_h \bullet \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ → 无辐散

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ → 无法形变

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$ → 无切形变

③ $u=-\frac{y}{x^2+y^2}, v=\frac{x}{x^2+y^2}, w=0$

$$(\nabla\Lambda\vec{V})_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ → 无旋

$$D=\nabla_h\bullet\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$ → 无辐散

$$e_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\quad e_{22}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$ → 有法形变

$$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$ → 有切形变

习题1-6-2 请问是否存在既满足无辐散条件又满足无旋条件的流动？如存在，请举例说明。

解： 满足无辐散条件又满足无旋条件，即：

$$\nabla\times\vec{V}=0\qquad\nabla\bullet\vec{V}=0$$

$$u=at, v=0, w=0$$

习题1-6-3 请证明无辐散的平面无旋流动：（1）流函数和势函数都是调和函数（满足二维拉普拉斯方程）（2）等势函数线和等流函数线正交。

解：根据题意，无辐散的平面无旋流动满足：

$$\nabla\times\vec{V}=0 \qquad \vec{V}=-\nabla\varphi \qquad u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \qquad \vec{V}=\vec{k}\times\nabla\psi \qquad u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

流函数和势函数都是调和函数（满足二维拉普拉斯方程）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\zeta\\[2ex]\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-D\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\end{cases}$$

等势函数线和等流函数线正交 $\nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} = 0$

证明

$$\nabla \varphi \bullet \nabla \psi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} \right) \bullet \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \bar{j} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y} \right)$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

例3-2-1：假定满足几何、运动相似，试求质量力仅为重力的理想流体运动的相似判据。

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \qquad \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{l}{tu} \equiv St \qquad \frac{u^2}{gl} \equiv Fr \qquad \frac{\Delta p}{\rho u^2} \equiv Eu$$