题型

- 一 选择题 （20×1）

- 二 填空题 （10×1）

- 三 判断题 （10×1）
- 四 名词解释和证明题 （5）

- 五 计算题（3）

名词解释

- 集合 可数集-P15 不可数集 基数-P9 幂集-P10 等势-P15 鸽笼原理-P34
- 命题-P43 命题公式 原子命题-P45 复合命题-P45 文字 短语 子句 合取范式 析取范式 CP规则 辖域 自由变元 约束变元永真公式-P58 可满足公式-P59 永假公式-P58 US ES UG EG规则
- 欧拉图 哈密顿图 偶图 欧拉回路 握手定理 树连通图 线图 简单题 多重图 无向图 有向图 混合图 图的重数 **可达性矩阵 邻接矩阵 零图** 平凡图 子图 单向连通图 强连通图 欧拉公式 通路 回路
- 群 半群 含幺半群 交换群 代数系统 逆元 幺元 零元 可消去元 群的阶 元素的阶/周期 有限群 循环半群 生成元
- 等价关系 偏序关系 拟序关系 良序关系 哈斯图 布尔积幂 复合函数 单射 满射 双射 **最大元 最小元 极大元 极小元 上界 下界 上确界 下确界** 笛卡尔积 划分

德 · 摩根律： $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$；

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

分析

定理1.2 设A、B是任意两个集合，则

$$A\subseteq B,\ B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$$

（1） $(A\cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$；

（2） $A^c \cap B^c \subseteq (A\cup B)^c$。

证明:

① $\forall x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

② $\forall x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

由①、②知，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

简要说明$\{2\}$与$\{\{2\}\}$的区别, 举出它们的元素与子集.

解　$\{2\}$是以2为元素的集合, 子集有$\varnothing$, $\{2\}$;

$\{\{2\}\}$是以$\{2\}$为元素的集合, 子集有$\varnothing$, $\{\{2\}\}$.

求下列集合的基数和每个集合的幂集.

(1) $\{1, 2, 3\}$; 基数为3,幂集为:$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; 2^3

(2) $\{1, \{2, 3\}\}$; 基数为2,幂集为:$\{\varnothing, \{1\}, \{\{2,3\}\}, \{1,\{2,3\}\}\}$;$2^2$

(3) $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$; 基数为1,幂集为:$\{\varnothing, \{\{1,\{2,3\}\}\}\}$;$2^1$

(4) $\{\{1, 2\}\}$; 基数为1,幂集为:$\{\varnothing, \{\{1,2\}\}\}$;$2^1$

(5) $\{\{\varnothing, 2\}, \{2\}\}$; 基数为2,幂集为:$\{\varnothing, \{\{\varnothing,2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{\varnothing,2\},\{2\}\}\}$; 2^2

(6) $\{a, \{a\}\}$; 基数为2,幂集为:$\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a,\{a\}\}\}$;$2^2$

(7) $\{\varnothing, a, \{b\}\}$. 基数为3,幂集为:$\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing\}, \{\{b\}\}, \{\varnothing,a\}, \{\varnothing,\{b\}\}, \{a,\{b\}\}, \{\varnothing,a,\{b\}\}\}$; 2^2

定理1.3 （1）空集是一切集合的子集；
（2）空集是绝对唯一的。

选择. 下列命题中哪个是假的？ D

A. 对每个集合A， $\varnothing \in 2^A$。 B. 对每个集合A， $\varnothing \subseteq 2^A$。

C. 对每个集合A， $A \in 2^A$。 D. 对每个集合A， $A \subseteq 2^A$。

A= $\{1, 2, 3\}$； 基数为3,幂集为: $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

判断. 设X和A为任意两个集合，则 $A \in 2^X$ 等价于 $A \subseteq X$。

正确，A为X的子集的元素，说明A是X的子集；反之，A是X的子集，必定也是X的子集中的元素

判断. 对每个集合A， $\{A\} \subseteq 2^A$。 正确

一家银行的密码是两个英文字母后跟两个数字所组成的， 问存在多少种不同的密码

26×26×10×10

6个人坐成一个圆圈，问有多少种坐法?

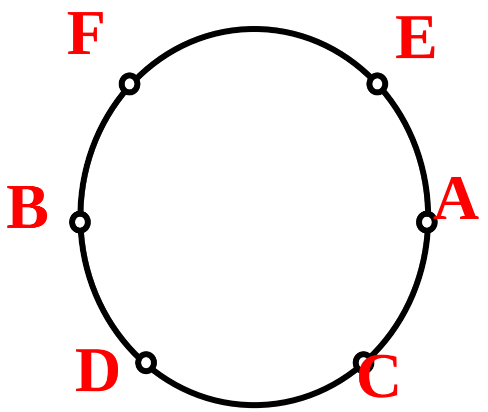


图2.3.2

E A C D B F

A C D B F

E

C D B F E A

(6×5×4×3×2×1)/6

A B C D E F

6×5×4×3×2×1

4男4女围圆桌 坐、男女交替就座有多少种坐法?

因为是圆桌，所以可以先按照4男或者4女来进行隔一个的排序，为(4!/4)，表示隔一个人坐一个，然后就是把剩下的性别的4个排放在这4个位置中，即乘以(4!)，因为是圆桌，所以先排男还是先排女都是一样的，结果为(4!/4)*(4!)

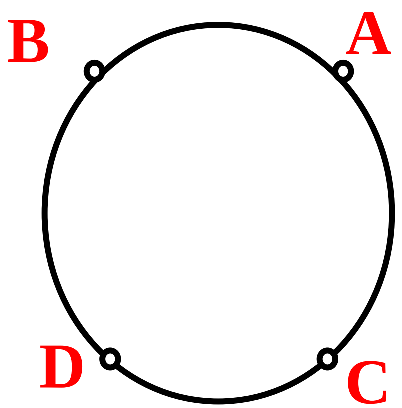


图2.3.2

在某次考试中，要求学生从10个要回答的问题中选8个，有多少种选法?

如果前三个问题必回答，那么又有多少种选法?

从10个要回答的问题中选8个,不同的选法数为：C(10,8)=45.

前三个问题必回答,不同的选法的个数为：C(7,5) = 21

证明 如果任选8个整数, 那么当用 7去除这8个整数时，它们当中至少有两个数有相同的余数

任何一个整数用7去整除时,可能的余数是0,1,2,3,4,5,6,将这可能的7个余数看成鸽笼,任取 8个整数为鸽子,则根据鸽笼原理，至少有两个数的余数相同.

证明:如果从1~25中任选14个整数,那么它们当中必有一个数是另一个数的倍数.

$1=2^0$

$2=2^1$

...

任何一个数都可以写成2^k*y（y中一定没有2作为因子，即奇数）

1到25之间有13个奇数（1 3 5 7…25），14个整数只有13种奇数的可能，必定至少有2个整数其奇数相同。

测试答案

判断题：

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$;　T	(2) $\varnothing \in \varnothing$; F	(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; T
(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;　T	(5) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; T	(6) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; F
(7) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$;F	(8) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$;T	(9) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;T
(10) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;T	(11) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$; T	(12) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$; F
(13) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$;F	(14) $\{a\} \in \{\{a\}\}$;T	(15) $\{a\} \subseteq \{a,\{a\}\}$;T
(16) $\{a\} \in \{a,\{a\}\}$T		

① **P规则（称为前提引用规则）：**在推理过程中，**如果引入前提集合中的一个前提，则称使用了P规则。**

② **T规则（逻辑结果引用规则）：**在推理过程中，**如果引入推理过程中产生的某个中间结果，则称使用了T规则。**

③ **CP规则（附加前提规则）：**在推理过程中，**如果逻辑结果为蕴涵式，并且将该蕴涵式的前件作为前提引入**，则称使用了CP规则。

证明：$P \Rightarrow Q \rightarrow R$

转化为证明：$P, Q \Rightarrow R$

假设G(x)，H(x)是只含自由变元x的谓词公式，S是不含x的谓词公式，则在全总个体域中，有：

(1) E_{25}: $\exists xG(x) = \exists yG(y)$ (改名规则)

E_{26}: $\forall xG(x) = \forall yG(y)$

(2) E_{27}: $\neg\exists xG(x) = \forall x\neg G(x)$

E_{28}: $\neg\forall xG(x) = \exists x\neg G(x)$ (量词转换律/量词否定等值式)

(3) E_{29}: $\forall x(G(x)\vee S) = \forall xG(x)\vee S$

E_{30}: $\forall x(G(x)\wedge S) = \forall xG(x)\wedge S$

E_{31}: $\exists x(G(x)\vee S) = \exists xG(x)\vee S$

E_{32}: $\exists x(G(x)\wedge S) = \exists xG(x)\wedge S$ (量词辖域的扩张与收缩律)

(4) E_{33}: $\forall x\, G(x) \vee \forall x\, H(x) = \forall x \forall y (G(x) \vee H(y))$

E_{34}: $\exists x G(x) \wedge \exists x H(x) = \exists x \exists y (G(x) \wedge H(y))$

(5) E_{35}: $\forall x (G(x) \wedge H(x)) = \forall x G(x) \wedge \forall x H(x)$

E_{36}: $\exists x (G(x) \vee H(x)) = \exists x G(x) \vee \exists x H(x)$ (量词分配律)

(6) E_{37}: $\forall x \forall y G(x,y) = \forall y \forall x G(x,y)$

E_{38}: $\exists x \exists y G(x,y) = \exists y \exists x G(x,y)$

（1）消去量词规则

① US（全称特指规则）

$\forall xG(x)\Rightarrow G(y)$，其中$G(x)$对$y$是自由的，或者

$\forall xG(x)\Rightarrow G(c)$，其中$c$为任意个体常量。

$\forall x(P(x,z)\vee\exists yQ(y))\Rightarrow P(y,z)\vee\exists yQ(y)$ √ $\forall x(\exists y(P(x,y))\Rightarrow \exists y(P(y,y)$ ✕

② ES（存在特指规则）

$\exists xG(x)\Rightarrow G(c)$，其中$c$为使$G(c)$为真的特定个体常量。

（2）引入量词规则

① UG（Universal Generalization，全称量词引入规则）

$G(x) \Rightarrow \forall y G(y)$，其中$G(x)$对于$y$是自由的。

② EG（Existential Generalization，存在量词引入规则）

$G(c) \Rightarrow \exists x G(x)$，其中$c$为特定个体常量，或者

$G(x) \Rightarrow \exists y G(y)$，其中$G(x)$对于$y$是自由的。

定义4.11 设R是非空集合A上的关系，

(1) 如果$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R)=1$，那么称R在A上是**自反的**(Reflexive)，或称R具有**自反性**(Reflexivity)；

例如：**同姓关系**。

(2) 如果$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)=1$，那么称R在A上是**反自反的**(Antireflexive)，或称R具有**反自反性**(Antireflexivity)。

例如：**父子关系**。

自反性和反自反性的关系矩阵表示判断方法($(r_{ij})_{n\times n}$是R的关系矩阵)，则

（1）R是自反的$\Leftrightarrow \forall i\forall j(i=j \rightarrow r_{ij}=1) = 1$。

（2）R是反自反的$\Leftrightarrow \forall i\forall j(i=j \rightarrow r_{ij}=0) = 1$。

（3）关系R不是自反的，也不是反自反的$\Leftrightarrow \exists i(r_{ii}=0) \land \exists j(r_{jj}=1)=1$。

自反性和反自反性的关系图表示判断方法(G_R是R的关系图)，则

（1）R是自反的$\Leftrightarrow$ G_R中每个结点都有自环。

（2）R是反自反的$\Leftrightarrow$ G_R中每个结点都没有自环。

（3）关系R既不是自反的，也不是反自反的

$\Leftrightarrow$ G_R中同时存在有自环的结点与没有自环的结点。

定义4.12 设R是非空集合A上的关系。

（1）如果$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\rightarrow \langle y,x\rangle\in R)=1$，则称关系R是**对称的**(Symmetric)，或称R具有**对称性**(Symmetry)。

例如：同姓关系。

（2）如果$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge(\langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,x\rangle\in R)\rightarrow x=y)=1$，则称关系R是**反对称的**(Antisymmetric)，或称R具有**反对称性**(Antisymmetry)。

例如：父子关系。

对称性和反对称性的集合表示判断方法

R是非空集合A上的关系，则

（1）R是对称的 $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)=1$

（2）R是反对称的$\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge (<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R) \rightarrow x=y)=1$$

（3）关系R既不是对称的，也不是反对称的$\Leftrightarrow$

$$\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,x> \notin R)$$

$$\wedge \exists s \exists t(s \in A \wedge t \in A \wedge <s,t> \in R \wedge <t,s> \in R \wedge s \neq t)=1$$

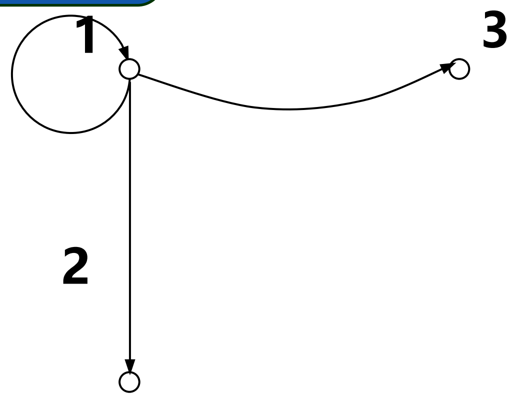
例4.23 设A＝{1,2,3}，A上的关系R和S的关系矩阵为M_R和M_S，关系T和V的关系图如下图(a)和(b)。试判定它们所具有的特殊性质。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

R是自反的、对称的和传递的

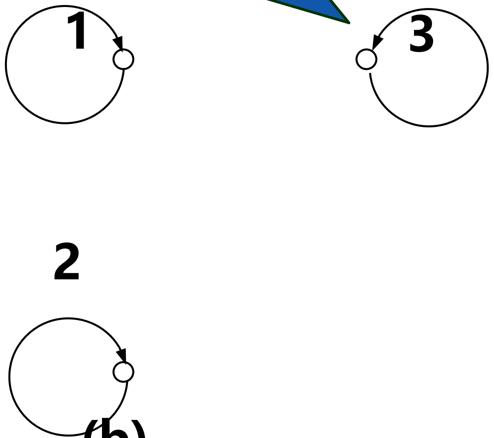
$$M_S=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

S是反自反的、对称的、反对称的和传递的



(a)

T是反对称的和传递的



(b)

V是自反的、对称的、反对称和传递的

例4.24 判定下列关系所具有的特殊性质。

（1）集合A上的全关系。

（2）集合A上的空关系。

（3）集合A上的恒等关系。

解　(1)集合A上的全关系具有自反性，对称性和传递性。

(2)集合A上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。

(3)集合A上的恒等关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。

定义5.4 给定非空集合A，设有集合$S=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$。如果满足

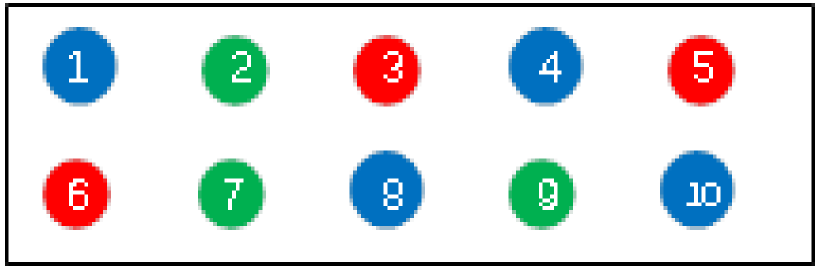
(1) $A_i \subseteq A$且$A_i \neq \Phi$，$i=1,2,\ldots,m$；

(2) $A_i \cap A_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2,\ldots,m$；

(3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$ 。

例5.5 中 {{1，4，8，10}，{2，7，9}，{3，5，6}}就是集合A={1，2，…，10}的一个划分

则称S为集合A的**一个划分**(Partition)，而$A_1,A_2,\ldots,A_m$叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。



定义5.9 设R是非空集合A上的关系，**如果R是自反的、反对称的和传递的**，则称R是A上的**偏序关系**(Partial Order Relation)，简称**偏序**，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。

序偶**<A,≤>**称为**偏序集**(PartialOrder Set)。

解题小贴士—偏序关系的判断方法

R是偏序关系⇔ R同时具有自反性、反对称性和传递性。

注意： (1) “≼”的逆关系是“≽”，“〈a, b〉∈≽”记为“a≽b”，读作“a大于等于b”。

(2) “≼” − “I_A”为A上的拟序关系，“≺” ∪ “I_A”为A上的偏序关系。

如果A上的关系R是偏序关系，那么可以按照下面的方式简化它的关系图。

（1）用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环； (因自反性)

（2）对任意x,y∈A，若x＜y，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；

(因反对称性)

（3）对任意x,y∈A，若x＜y，且不存在z∈A，使得x＜z，z＜y，则x与y之间用一条线相连，否则无线相连。 (因传递性)

按照（1），（2）和（3）作成的图被称为R的哈斯图（Hasse图）。

定义5.10　设<A,≤>是偏序集，B是A的非空子集，

（1）如果 $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq b))=1$，则称b为B的**最大元素**（Greatest Element），简称**最大元**；

（2）如果$\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\leq x))=1$，则称b为B的**最小元素**（Smallest Element），简称**最小元**。

最大元、最小元的求解方法

（1）b为B的最大元$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq b))=1$ 。

（2）b是B的最大元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最上端。

（3）b为B的最小元$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\leq x))=1$ 。

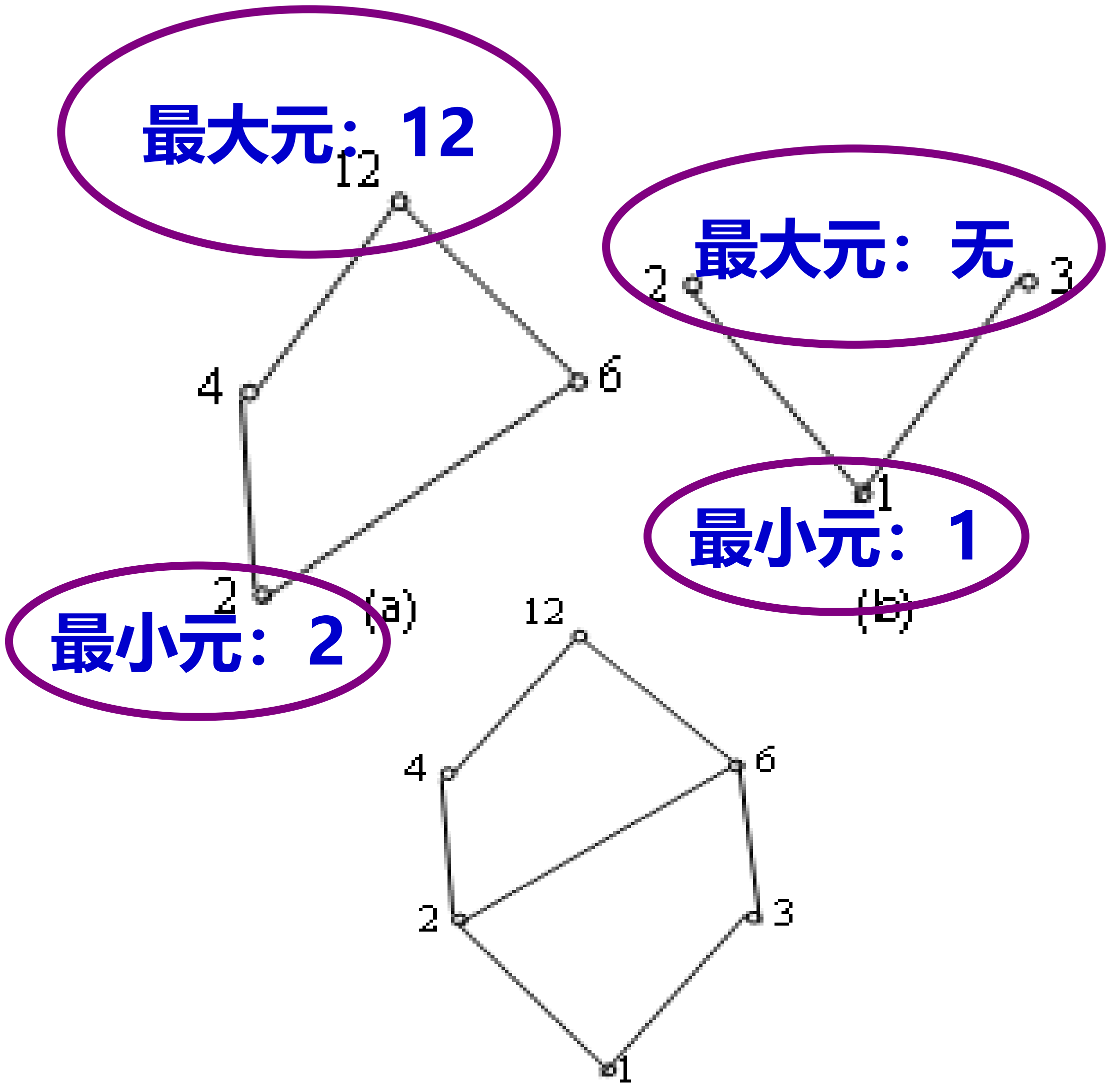
（4）b是B的最小元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最下端。

例5.19 设$B_1=\{2,4,6,12\}$，$B_2=\{1,2,3\}$是例5.18中集合A的子集，试求出B_1，B_2的最大元和最小元。

解 子集B_1，B_2形成的哈斯图分别如右图（a）和（b）所示。

从图（a）可以看出，B_1的最大元是12，最小元是2。

从图（b）可以看出，图的最上端存在两个元素2和3，它们之间不能比较，因此B_2无最大元，最小元是1。



（2）b是B的最大元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最上端。

（4）b是B的最小元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最下端。

定义5.11 设$<A,\leq>$是偏序集，**B是A的非空子集**，

（1）如果 $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\wedge b\leq x\rightarrow x=b))=1$，则称b为B的极大元素(Maximal Element)，简称极大元；

（2）如果$\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\wedge x\leq b\rightarrow x=b))=1$，则称b为B的极小元素(Smallest Element) ，简称极小元。

解题小贴士—极大元、极小元的求解方法

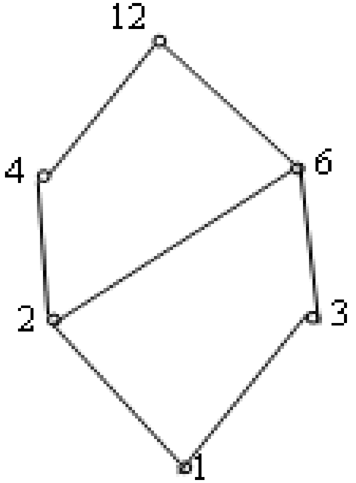
（1）b为B的极大元$\Leftrightarrow$ $\exists b(b\in)\wedge\forall x(x\in B\wedge b\leq x\rightarrow x=b))=1$ 。

（2）b是B的极大元$\Leftrightarrow$ 在B对应的哈斯图中，b的上面没有其他元素。

（3）b为B的极小元$\Leftrightarrow$ $\exists b(b\in)\wedge\forall x(x\in B\wedge x\leq b\rightarrow x=b))=1$ 。

（4）b是B的极小元$\Leftrightarrow$ 在B对应的哈斯图中，b的下面没有其他元素。

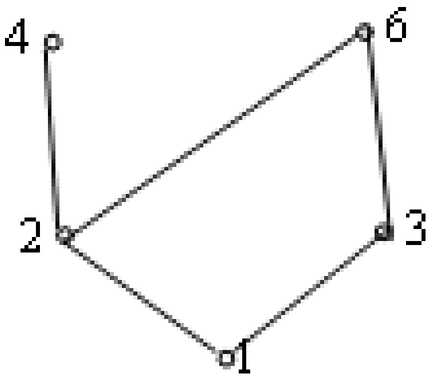
例5.20 设$B_3=\{1,2,3,4,6\}$，$B_4=\{4,6,12\}$是例5.18中集合A的子集，试求出B_3，B_4的最大元、最小元、极大元和极小元。



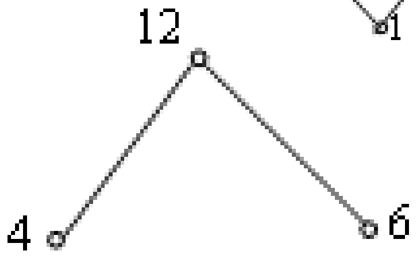
解 子集B_3，B_4形成的哈斯图分别如下图（a）和（b）所示。

B_3，B_4的最大元、最小元、极大元和极小元如下表所示。

集合	最大元	极大元	最小元	极小元
B_3	无	4,6	1	1
B_4	12	12	无	4,6



(a)



(b)

定义5.12 设<A,≤>是偏序集，B是A的任何一个子集。

(1) 如果$\exists a(a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq a))=1$，则称a为B的上界（Upper Bound）。

(2) 如果$\exists a(a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow a\leq x))=1$，则称a为B的下界（Lower Bound）。

(3) 令C={y|y是B的上界}，则称C的最小元为B的最小上界（Least Upper Bound）或 上确界，记SupB。

(4) 令D={y|y是B的下界}，则称D的最大元为B的最大下界（Greatest Lower Bound）或下确界，记InfB。

上界、下界的求解方法

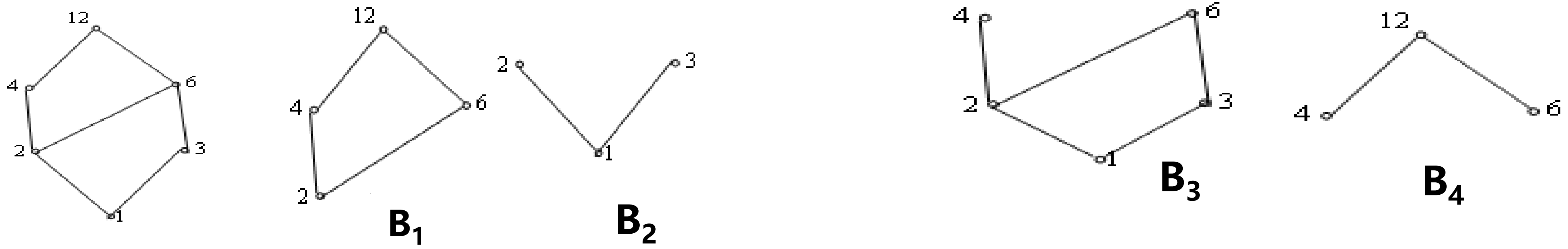
（1） $\exists a(a\in A \wedge \forall x(x\in B\rightarrow x\leq a))=1 \Leftrightarrow$ a为B的上界。

（2）在B的哈斯图中，找出B的最大元。若最大元存在，则最大元及其上面的元素都是B的上界；若最大元不存在，则向上找出“大”于其所有极大元的元素，这些元素就是B的上界。

(3 $\exists a(a\in A \wedge \forall x(x\in B\rightarrow a\leq x))=1 \Leftrightarrow$ a为B的下界。

（4）在B的哈斯图中，找出B的最小元。若最小元存在，则最小元及其下面的元素都是B的下界；若最小元不存在，则向下找出“小”于其所有极小元的元素，这些元素就是B的下界。

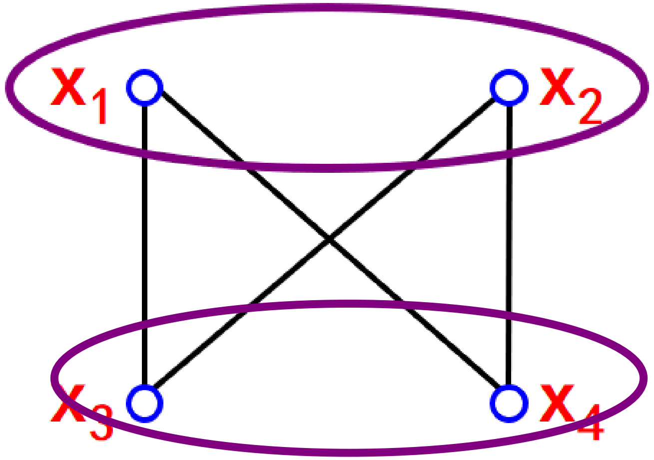
例5.21 试求A的子集B_1，B_2，B_3和B_4的上界、下界、上确界和下确界。



解 集合B_1，B_2，B_3和B_4的上界、下界、上确界和下确界如下表所示。

集合	上界	上确界	下界	下确界
B_1	12	12	1,2	2
B_2	6,12	6	1	1
B_3	12	12	1	1
B_4	12	12	1,2	2

例5.22 A={x_1,x_2,x_3,x_4}，A上定义偏序集<A,≤>的哈斯图如右图所示。求B={x_1,x_2}和C={x_3,x_4}最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界和下确界。



解　见下表。

集合	最大元	极大元	上界	上确界	最小元	极小元	下界	下确界
B	无	x_1,x_2	无	无	无	x_1,x_2	x_3,x_4	无
C	无	x_3,x_4	x_1,x_2	无	无	x_3,x_4	无	无

设n为正整数，考虑整数集合Z上的整除关系如下：

$R = \{<x,y> | \{x,y \in Z) \wedge (n|(x-y))\}$

证明R是一个等价关系。

- **证明（1） 对$\forall x \in Z$，有$n|(x-x)$，所以$<x,x> \in R$，即R是自反的。**
- **（2） 对$\forall x,y \in Z$，若$<x,y> \in R$，即$n|(x-y)$，所以 $m|(y-x)$，所以，$<y,x> \in R$，即R是对称的。**
- **（3） 对$\forall x,y,z \in Z$，若$<x,y> \in R$且$<y,z> \in R$，有$n|(x-y)$且$n|(y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$得$n|(x-z)$，所以，$<x,z> \in R$，即R是传递的。**
- **由(1)、(2)、(3)知，R是Z上的等价关系。 ■**

设R是集合A上的一个关系.

对∀a, b, c∈A，若<a, b>∈R并且<a, c>∈R，则有<b, c>∈R，则R称为A上的循环关系。

试证明R是A上的一个等价关系的充要条件是R是循环关系和自反关系。

- **“⇒” 若R是等价关系。**
- 1)、**显然R是自反的。**
- 2)、**对任意**a, b, c∈A，**若**<a, b>∈R, <a, c>∈R，**则由R是对称的，有**<b, a>∈R**并且**<a, c>∈R，**由R是传递的，所以，**<b, c>∈R。**即R是循环的关系。**

由1)，2)**知R是自反的和循环的。**

- “$\Leftarrow$” 若R是自反的和循环的。
- 1)、 显然R是自反性的；
- 2)、对任意a,b∈A,若<a,b>∈R,则由R是自反的,有<a,a>∈R，因R是循环的，所以，

$$<a,b>\in R 且 <a,a>\in R \Rightarrow <b,a>\in R,$$

即R是对称的。

- 3)、对任意a,b,c∈A，若<a,b>∈R，<b,c>∈R，则由R对称的，有<b,a>∈R并且<b,c>∈R；由R是循环的，所以<b,a>∈R且<b,c>∈R⇒<a,c>∈R，**即R是传递的。**
- **由1)、2)、3)知R是A上的一个等价关系。** ■

- **定义7.3.2** 设R是非空集合A上的关系，**如果R是自反的、反对称的和传递的**，则称R是A上的**偏序关系**(PartialOrderRelation)，简称偏序，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。序偶<A,≤>称为偏序集(PartialOrderSet)。

- （1）R是偏序关系⇔R同时具有自反性、反对称性和传递性；
- （2）R不是偏序关系⇔R不具备自反性或反对称性或传递性；
- （3）偏序“≤”的逆关系“$\leq^{-1}$”也是一个偏序，我们用“≥”表示，读作“大于等于”；
- （4）(“≤”$-I_A$)为A上的拟序关系，(“<”$\cup I_A$)为A上的偏序关系。

拟序　反自反
偏序　自反

试判断下列关系是否为偏序关系

集合A的幂集P(A)上的包含关系“⊆”；

实数集合R上的小于等于关系“≤”；

自然数集合N上的模m同余关系；

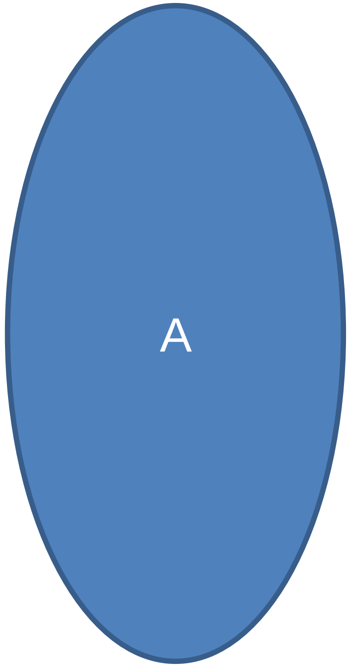
自然数集合N上的整除关系“|”；

- 根据偏序关系的定义知，（1），（2），（4）所对应的关系同时具有自反性，反对称性和传递性，所以都是偏序集；

- (3)所对应的关系不具有反对称性，所以它不是偏序关系；

模m同余关系是自反 对称 传递的，
所以是等价关系

- **定义8.2.2** 设f是从A到B的函数，
- 对任意$x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 \neq x_2$，有$f(x_1) \neq f(x_2)$，
- 则称f为从A到B的**单射**（**不同的x对应不同的y**）；
- 如果$\operatorname{ran} f = B$，则称f为**从A到B**的**满射**；
- 若f是**满射且是单射**，则称f为从A到B的**双射**。



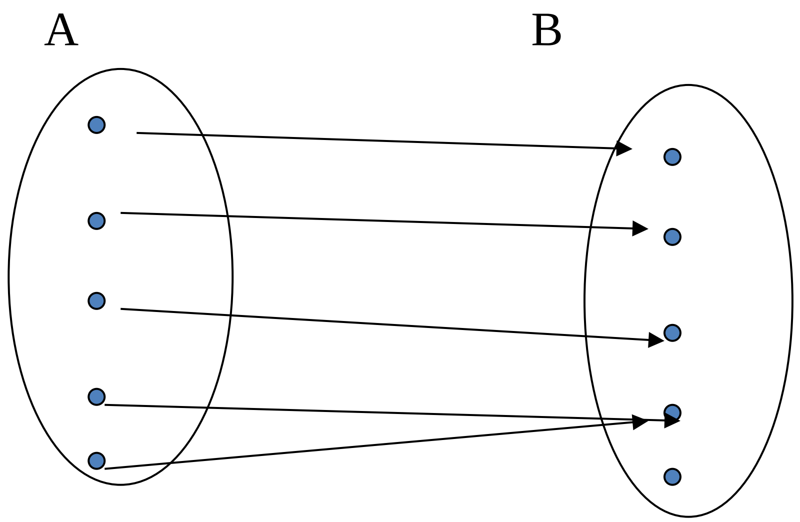
- （1）f:A→B是单射当且仅当对$x_1,x_2 \in A$，若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$；或(若$f(x_1)=f(x_2)$，则$x_1=x_2$)
- （2）f:A→B是满射当且仅当对$y \in B$，一定存在$x \in B$，使得$f(x)=y$;
- （3）f:A→B是双射当且仅当f既是单射，又是满射;

例8.2.4

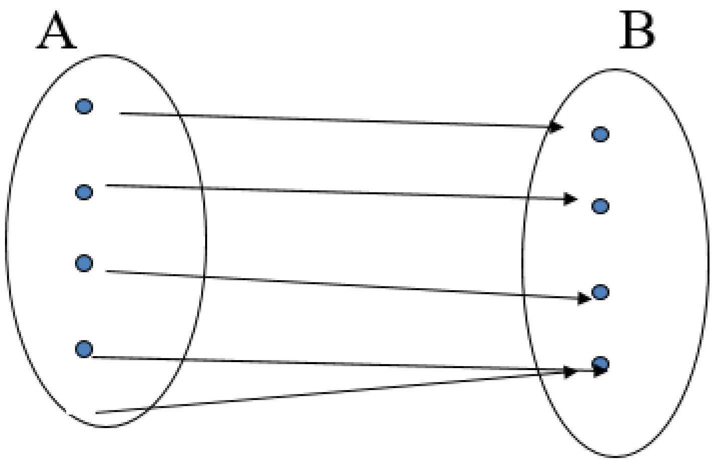
- **确定下列函数的类型。**
- **（1）设A={1,2,3,4,5},B={a,b,c,d}。f:A→B定义为：$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,a\rangle,\langle 5,d\rangle\}$;**
- **（2）设A={1,2,3},B={a,b,c,d}。f:A→B定义为：$f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle\}$;**
- **（3）设A={1,2,3},B={1,2,3}。f:A→B定义为 $f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$;**

（1）因为对任意y∈B，都存在x∈B，使得$\langle x,y\rangle \in f$，所以f是满射函数；
（2）因为A中不同的元素对应不同的象，所以f是单射函数；
（3）因为f既是单射函数，又是满射函数，所以f是双射函数。

- **设A，B为有限集合，f是从A到B的函数，则：**
- **f是单射的必要条件为|A|≤|B|；**
- **f是满射的必要条件为|B|≤|A|；**
- **f是双射的必要条件为|A|=|B|。**



- 设A，B是有限集合，且|A|=|B|，f是A到B的函数，则f是单射当且仅当f是满射。
- 证明必要性(⇒)：
- 设f是单射。显然，f是A到f(A)的满射，故f是A到f(A)的双射，因此|A|=|f(A)|。由|f(A)|=|B|，且$f(A) \subseteq B$，得f(A)=B，故f是A到B的满射。



- 充分性($\Leftarrow$)：

- 设f是满射。任取$x_1,x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$，假设$f(x_1)=f(x_2)$，由于f是A到B的满射，所以f也是$A-\{x_1\}$到B的满射，故$|A-\{x_1\}| \geq |B|$，即$|A|-1 \geq |B|$，这与$|A|=|B|$矛盾。因此$f(x_1) \neq f(x_2)$，故f是A到B的单射。

- 若f是A到B的双射，则f的逆函数f^{-1}也是B到A的双射。
- 证明（1）证明f是满射。
- 因为ranf^{-1}=domf=A，所以f^{-1}是B到A的满射。
- （2）说明f是单射。
- 对任意$b_1,b_2 \in B$，$b_1 \neq b_2$，假设$f^{-1}(b_1)= f^{-1}(b_2)$，即存在$a \in A$，使得$<b_1,a> \in f\text{-}1,<b_2,a> \in f^{-1}$，即$<a,b_1> \in f,<a,b_2> \in f$，这与f是函数矛盾，因此$f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$，故$f^{-1}$是B到A的单射。
- 综上，f^{-1}是B到A的双射。

设 R,S,T 是集合 A 上的关系，证明：$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

① 对任意$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle x,y\rangle\in R\cap S$.即$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\in S$.从而有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$，$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$，即$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}$.于是得到

$$(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}.$$

② 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$且$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$.从而有$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\in S$，即$\langle x,y\rangle\in R\cap S$.于是$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}$.即

$$R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}.$$

由①，②知$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

设 R,S,T 是集合 A 上的关系，证明：$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$

① 首先证明 $(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

对任意 $\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T$ $(x,z\in A)$，由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得 $\langle x,y\rangle\in(R\cup S)$ 并且 $\langle y,z\rangle\in T$，从而有 $\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle x,y\rangle\in S$.

由"$\circ$"知：

$$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ T \text{ 或}$$
$$\langle x,y\rangle\in S,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T,$$

所以 $\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)$. 即

$$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T).$$

设 R,S,T 是集合 A 上的关系，证明：$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$

② 接着证明 $(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$.

对任意 $\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)(x,z\in A)$，$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)$ 或 $\langle x,z\rangle\in(S\circ T)$

由“$\circ$”知：存在 $y\in A$，使得

$$\langle x,y\rangle\in R \text{ 并且} \langle y,z\rangle\in T \text{ 或} \langle x,y\rangle\in S \text{ 并且} \langle y,z\rangle\in T.$$

即有 $(\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle x,y\rangle\in S)$ 并且 $(\langle y,z\rangle\in T)$. 即

$$\langle x,y\rangle\in R\cup S \text{ 并且} \langle y,z\rangle\in T.$$

所以，由“$\circ$”知 $\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T$. 即：$(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$.

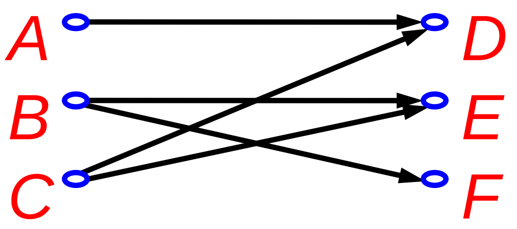
由①，②知 $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

定义6.1

一个**图**(Graph)是一个**序偶**$<V, E>$，记为$G = <V, E>$，其中：

(1) $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$是**有限非空集合**，$v_i$称为**结点**(Nodal Point)，简称**点**(Point)，V称为**结点集**(Nodal Set)。

(2) E是**有限集合**，称为**边集**(Frontier Set)。E中的每个元素都有V中的结点对与之对应，称之为**边**(Edge)。



- 注意：定义中的结点对即可以是**无序的**，也可以是**有序的**。
- 若边e与**无序结点对**(u,v)相对应，则称e为**无向边**(Undirected Edge)，记为$e = (u, v) = (v, u)$，这时称u、v是边e的两个**端点**(End point)，也称结点u与边e(结点v与边e)是**彼此相关联的**。
- 若边e与**有序结点对**$<u, v>$相对应，则称e为**有向边**(Directed Point)(或弧)，记为$e = <u, v>$，这时称u为e的**始点**(Initial Point)(或**弧尾**)，v为e的**终点**(terminal Point)(或**弧头**)，统称为e的**端点**。

对于一个图G，如果将其记为G = <V, E>，并写出V和E的集合表示，这称为**图的集合表示**。

而为了描述简便起见，在一般情况下，往往只画出它的图形：用小圆圈表示V中的结点，用由u指向v的有向线段或曲线表示有向边<u, v>，无向线段或曲线表示无向边(u, v)，这称为**图的图形表示**。

解题小贴士——图G = <V,E>的集合表示与图形表示相互转换的方法

（1）**集合表示转换为图形表示**。用小圆圈表示V中的每一个结点，结点位置可随意放，元素<u,v>用由u指向v的有向边表示，元素(u,v)用u与v相连的无向边表示。

（2）**图形表示转换为集合表示**。图中的所有结点构成结点集，图中的无向边用无序偶对表示，有向边用序偶表示，注意箭头指向的结点是序偶的第二元素。

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，称矩阵$M_R=(m_{ij})_{n\times m}$为关系R的**关系矩阵**(Relation Matrix)，其中

布尔矩阵

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \langle a_i,b_j\rangle\in R\\ 0 & \langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m)$$

M_R又被称为R的**邻接矩阵**(Adjacency Matrix)。

注意

1. 必须先对集合A,B中的元素排序。
2. A中元素序号对应矩阵元素的行下标。
3. B中元素序号对应矩阵元素的列下标。
4. 关系矩阵是0-1矩阵，称为**布尔矩阵**。

例4.11 设A = {1，2}，考虑P(A)上的包含关系R和真包含关系S。

（1）试写出R和S中的所有元素。

（2）试写出R和S的关系矩阵。

解 （1）因为P(A) = {Φ，{1}，{2}，{1，2}}，所以

R = {< Φ，Φ>，<Φ，{1}>，<Φ，{2}>，<Φ，{1，2}>，<{1}，{1}>，<{1}，{1，2}>,<{2}，{2}>，<{2}，{1，2}>,<{1，2}，{1，2}>}

S = {<Φ，{1}>，<Φ，{2}>，<Φ，{1，2}>，<{1}，{1，2}>，<{2}，{1，2}>}

（2）设R和S的关系矩阵分别为M_R和M_S，则有

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义4.7 （1）如果$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$阶布尔矩阵，则**A和B的布尔并**(Boolean Join)也是$m\times n$阶矩阵，记作$A\vee B$。若$A\vee B=C=(c_{ij})$，则：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{其他}\\ 0, & a_{ij}=0,\ b_{ij}=0\end{cases}\quad \boxed{\begin{matrix}(1\le i\le m,\\ 1\le j\le n)\end{matrix}}\qquad (4\text{-}4)$$

即$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$

（2） 如果$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$阶矩阵，则**A和B的布尔交**(Boolean Meet)也是$m\times n$阶矩阵，记作$A\wedge B$。如果$A\wedge B=D=(d_{ij})$，其中：

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & a_{ij}=1,\ b_{ij}=1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \boxed{\begin{matrix}(1\le i\le m,\\ 1\le j\le n)\end{matrix}}\qquad (4\text{-}5)$$

即$d_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$

（3）如果矩阵A=(a_{ij})是m×p阶布尔矩阵，B=(b_{ij})是p×n阶布尔矩阵，则**A和B的布尔积**(Boolean Product)是m×n阶布尔矩阵，记作A⊙B，若A⊙B =E=(e_{ij})，则：

$$e_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p}\left(a_{ik} \wedge b_{kj}\right)(1 \le i \le m,\quad 1 \le j \le n) \qquad (4\text{-}6)$$

注意：（1）两个布尔矩阵的行数和列数分别相同时才能进行布尔并和布尔交。

（2）当第一个布尔矩阵的列数等于第二个布尔矩阵的行数时，它们才能进行布尔积。

（3）式(4-6)中的“∧”，“∨”分别对应“×”，“+”时，即得普通矩阵乘法计算公式。

例4.12 令 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$、 $B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$和 $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$。

计算

(1) $A\vee B$;

(2) $A\wedge B$;

(3) $A\odot C$。

例4.12（续）

解 （1）根据式(4-4)，有

$$A\vee B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\vee0&1\vee1&0\vee1&1\vee0\\0\vee0&1\vee0&0\vee1&1\vee1\\1\vee0&0\vee1&0\vee0&0\vee1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

（2）根据式(4-5)，有

$$A\wedge B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\wedge0&1\wedge1&0\wedge1&1\wedge0\\0\wedge0&1\wedge0&0\wedge1&1\wedge1\\1\wedge0&0\wedge1&0\wedge0&0\wedge1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（3）根据式(4-6)，有

$$A\odot C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

设图$G = <V, E>$，其中$V = \{v_1, v_2, …, v_n\}$，并假定结点已经有了从v_1到v_n的次序，则n阶方阵$A_G = (a_{ij})_{nxn}$称为G的邻接矩阵(Adjacency Matrix)，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & 若(v_i, v_j) \in E或 < v_i, v_j > \in E \\ 0, & 否则 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

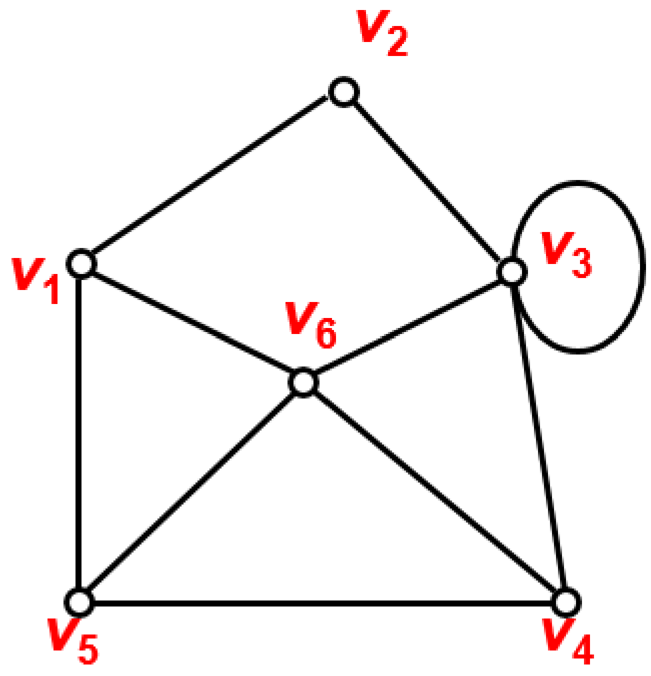
解题小贴士——图的邻接矩阵表示

（1）将图中的结点排序。

（2）图中第i个结点到第j个结点有边，则邻接矩阵的第i行第j列元素为1。

例6.4

试写出右图所示图G的邻接矩阵。



解 若结点排序为$v_1v_2v_3v_4v_5v_6$，则其邻接矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

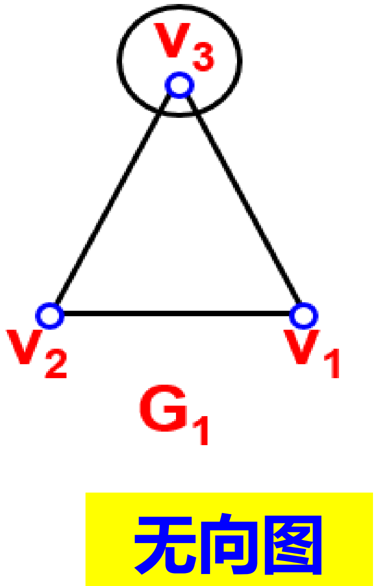
定义6.5 每条边都是**无向边**的图称为**无向图**(Undirected Graph)；

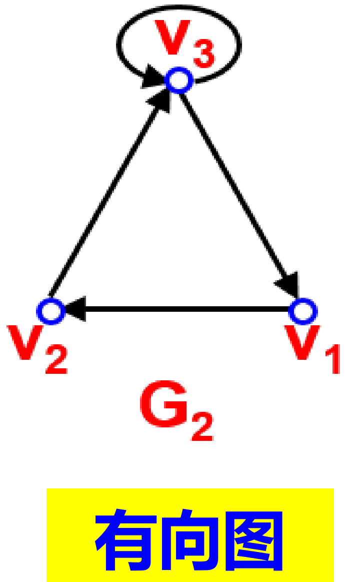
每条边都是**有向边**的图称为**有向图**(Directed Graph)；

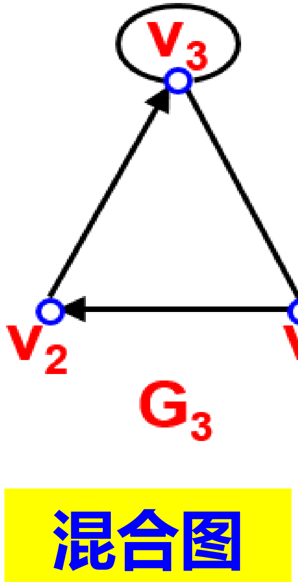
有些边是**无向边**，而另一些边是**有向边**的图称为**混合图**(Mixed Graph)。

- 第4章的关系图都是有向图，这时邻接矩阵就是关系矩阵。

例6.7 试判断下面三个图是无向图、有向图，还是混合图 。



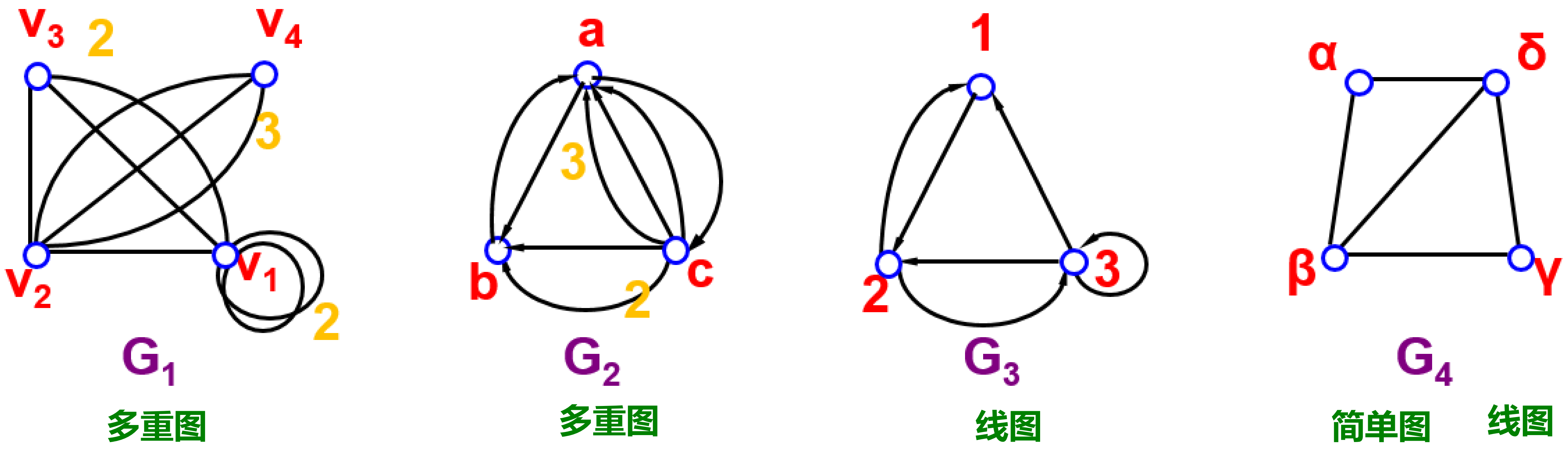




定义6.6

- 在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若有同始点和同终点的几条边，则这几条边称为平行边(Parallel Edge)；
- 在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为平行边。
- 两结点a、b间相互平行的边的条数称为边(a, b)或<a, b>的重数(Repeated Number)。
- 含有平行边的图称为多重图(Multigraph)
- 非多重图称为线图(Line Graph)；
- 无环的线图称为简单图(Simple Graph)。

试判断下图所示的4个图是多重图、线图还是简单图，并指出多重图中所有平行边的重数。



有颜色的数字表示多重图中所有平行边的重数

定义6.8 设有图$G = <V, E>$和图$G_1 = <V_1, E_1>$。

1. 若$V_1 \subseteq V$，$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的**子图**(Subgraph)，记为$G_1 \subseteq G$
2. 若$G_1 \subseteq G$，且$G_1 \neq G$(即$V_1 \subset V$或$E_1 \subset E$)，则称G_1是G的**真子图**(Proper Subgraph)，记为$G_1 \subset G$
3. 若$V_1 = V$，$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的**生成子图**(Spanning Subgraph)
4. 设$V_2 \subseteq V$且$V_2 \neq \Phi$，以V_2为结点集，以两个端点均在V_2中的边的全体为边集的G的子图，称为**V_2导出的G的子图**，简称**V_2的导出子图**(Induced Subgraph)

V_2导出的G的子图即为 $G - (V-V_2)$

解题小贴士——子图的判断

(1)子图的结点集和边集是G的结点集和边集的子集。

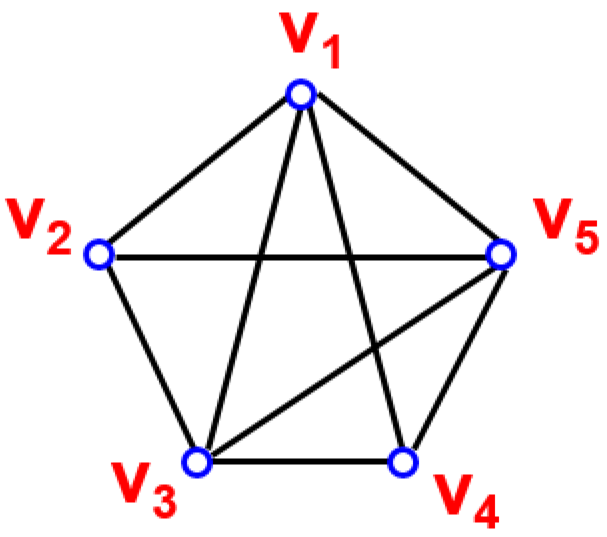
(2)真子图的结点集和边集是G的结点集或边集的真子集。

(3)**生成子图**与G的**结点集相同**而边集是子集。

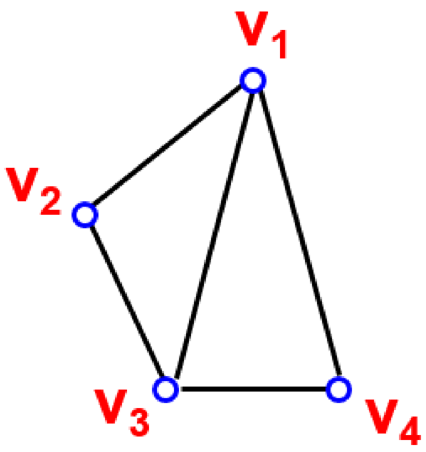
(4)导出子图V2要求V2包含G中所有**两个端点属于V_2**的**边**。

判断下图中，图G_1、G_2和G_3是否是图G的子图、真子图、生成子图、导出子图?

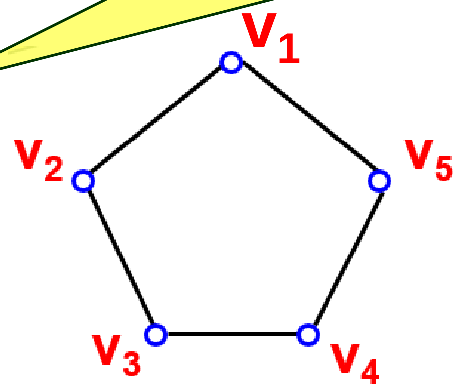
注 每个图都是它自身的**子图、生成子图和导出子图**



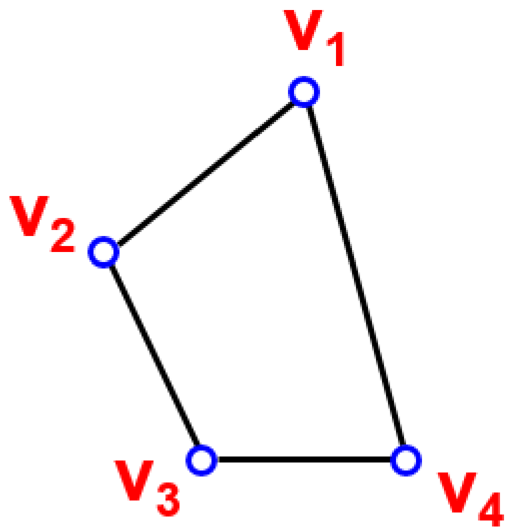
G



G_1



G_2



G的导出子图包括{v_1, v_2, v_3, v_4}之间所有的边

生成子图

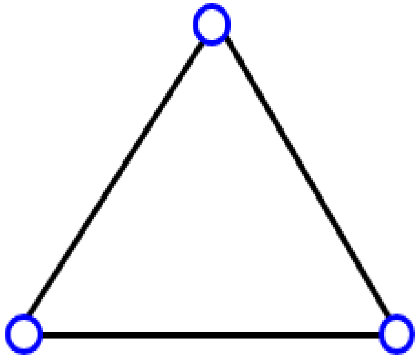
真子图

对于完全图来说，其邻接矩阵除主对角元为0外，其它元素均为1

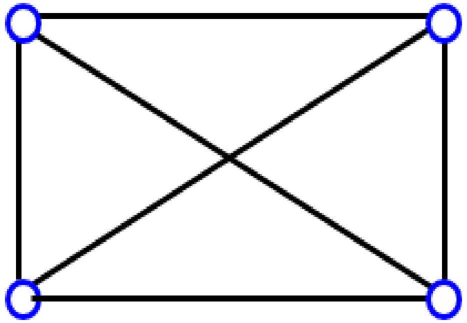
定义9.2.9 设G = <V, E>为一个具有n个结点的**无向简单图**，如果G中**任意两个结点间都有边相连**，则称G为**无向完全图**(Undirected Complete Graph)，简称G为**完全图**(Complete Graph)，记为K_n。

设G = <V, E>为一个具有n个结点的**有向简单图**，如果G中**任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连**，则称G为**有向完全图**(directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为K_n。

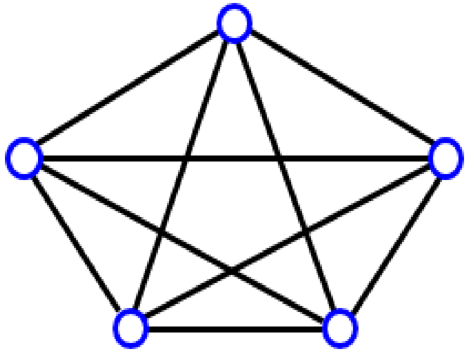
几个完全图



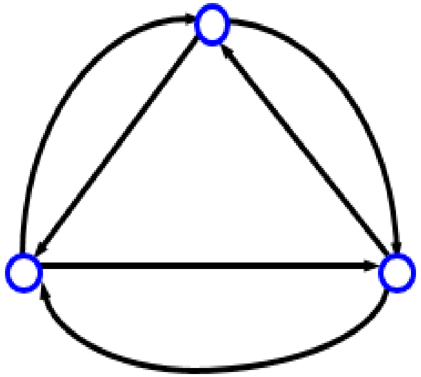
K_3



K_4



K_5



有向 K_3

无向完全图K_n的边数为 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$

有向完全图K_n的边数为 $P_n^2 = n(n-1)$

9个结点的无向简单图，度数要么为5或者为6，边数是36吗？

定义6.11 （1）图G = <V, E>中以结点v∈V为**端点的边数**(**有环时计算两次**)称为结点v的**度数**(Degree)，简称**度**，记为**deg(v)**。

（2）有向图G = <V, E>中以结点v为**始点的边数**称为v的**出度**(Out-Degree)，记为$\deg^+(v)$；以结点v为**终点的边数**称为v的**入度**(In-Degree)，记为$\deg^-(v)$。显然，$\deg(v) = \deg^+(v)+\deg^-(v)$。

（3）对于图G = <V, E>，**度数为1**的结点称为**悬挂结点**(Hanging Point)，以悬挂结点为端点的边称为**悬挂边**(Hanging Edge)。

设图$G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$的邻接矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 若G是**无向图**，则A中第i行元素是由结点v_i为端点的边所决定，其中为1的元素数目等于v_i的度数，即 $deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+a_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}+a_{ii}$
- 若G是有向图，则A中第i行元素是由结点vi为始点的边所决定，其中为1的元素数目等于vi的出度，即 $deg^{+}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$
- A中第i列元素是由结点v_i为终点的边所决定，其中为1的元素数目等于v_i的入度，即 $deg^{-}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}$

（1）结点*v*的度数就是以*v*为端点的边数（有环时计算两次）。

（2）结点*v*的出度就是以*v*为始点的边数。

（3）结点*v*的入度就是以*v*为终点的边数。

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图G = <V, E>，则有

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

证明　因为每条边都有两个端点(环的两个端点相同)，所以加上一条边就使得各结点的度数之和增加2，因此结论成立。

　这个结果是图论的第一个定理，它是由欧拉于1736年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断：如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

推论6.1 图中度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设图G = <V, E>，V_1 = {v | v∈V且deg(v)为奇数}，

V_2 = {v | v∈V且deg(v)为偶数}。

- **度数为奇数的结点**称为**奇度数结点**(Odd Degree Point)
- **度数为偶数的结点**称为**偶度数结点**(Even Degree Point)

式中2|E|和 $\sum_{v \in V_2} deg(v)$（偶数之和为偶数）均为偶数，因而 $\sum_{v \in V_1} deg(v)$ 也为偶数。

于是$|V_1|$为偶数，即度数为奇数的结点个数为偶数。

有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图 G = <V, E>，则有

$$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} deg^{-}(v) = |E|$$

证明 因为每条有向边具有1个始点和1个终点（环的始点和终点是同1个结点），因此，每条有向边对应1个出度和1个入度。图G中有$|E|$条有向边，则G中必产生$|E|$个出度，这$|E|$个出度即为各结点的出度之和，G中也必产生$|E|$个入度，这$|E|$个入度即为各结点的入度之和。因而，在有向图中，各结点的出度之和等于各结点的入度之和，都等于边数$|E|$。

以上两个定理及其推论都是非常重要的，应牢记、理解并灵活运用。

定义6.14 给定图G = <V, E>中结点和边相继交错出现的序列$\Gamma = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$。

(1) 若Γ中边e_i的两端点是v_{i-1}和v_i（G是有向图时要求v_{i-1}与v_i分别是e_i的始点和终点），$i = 1, 2, \cdots, k$，则称Γ为结点v_0到结点v_k的**通路**(Entry)。v_0和v_k分别称为此通路的**始点**和**终点**，统称为通路的**端点**。通路中边的数目k称为此通路的**长度**(Length)。当$v_0 = v_n$时，此通路称为**回路**(Circuit)。

(2) 若通路中的所有边互不相同，则称此通路为**简单通路**(Simple Entry)或一条**迹**。

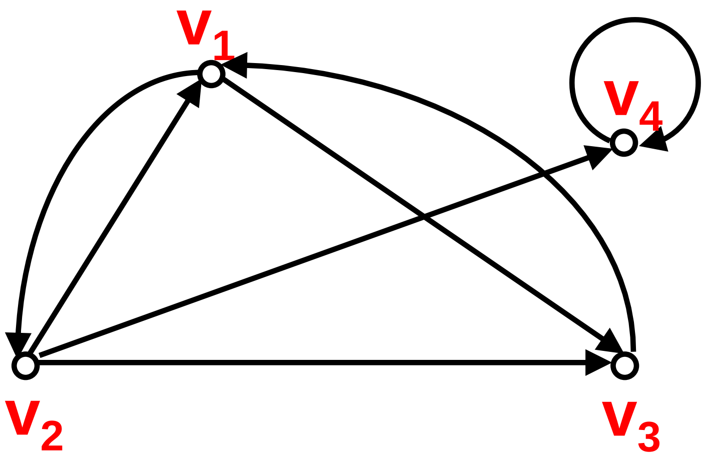
(3) 若通路中的所有结点互不相同（从而所有边互不相同），则称此通路为**基本通路**(Basic Entry)或者**初级通路**、**路径**。

推论6.2 在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_i到结点v_j（$v_i \neq v_j$）存在一条通路，则从v_i到v_j存在一条长度不大于**n-1**的基本通路。

定理6.5 在一个具有n个结点的图中，如果存在经过结点v_i回路，则存在一条经过v_i的长度不大于n的回路。

判断右图中图G中结点之间的可达关系，并求任两结点间的距离。

计算图G的邻接矩阵及其2、3次幂分别为：



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&2&2\\2&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$d(v_4, v_1) = d(v_4, v_2) = d(v_4, v_3) = \infty$　$d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$

$d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$

$d(v_3, v_4) = 3$

计算 $B_3 = I + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

为什么这里B_3是四个矩阵加在一起，原因就是本课件第81页的两个结论！n为4，所以n-1为3

推论6.2 在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_i到结点v_j（$v_i \neq v_j$）存在一条通路，则从v_i到v_j存在一条长度不大于**n-1**的基本通路。

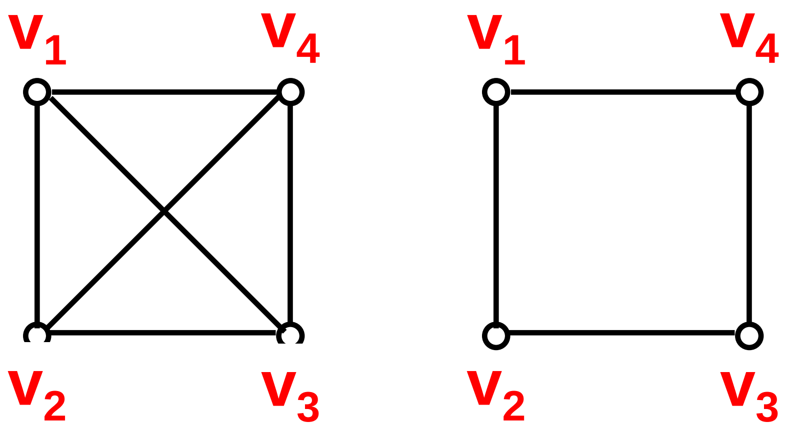
定理6.5 在一个具有n个结点的图中，如果存在经过结点v_i回路，则存在一条经过v_i的长度不大于n的回路。

- v_1到v_1, v_2, v_3, v_4都是可达的；
- v_2到v_1, v_2, v_3, v_4都是可达的；
- v_3到v_1, v_2, v_3, v_4都是可达的；
- v_4到v_4都是可达的，v_4到v_1, v_2, v_3都是不可达的。

设G = <V, E>是一个**线图**，其中V = {v_1, v_2, ..., v_n}，并假定结点已经有了从v_1到v_n的**次序**，称n阶方阵P = $(p_{ij})_{n\times n}$为图G的**可达性矩阵**(Accessibility Matrix)，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}v_i\text{到}v_j\text{可达}\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

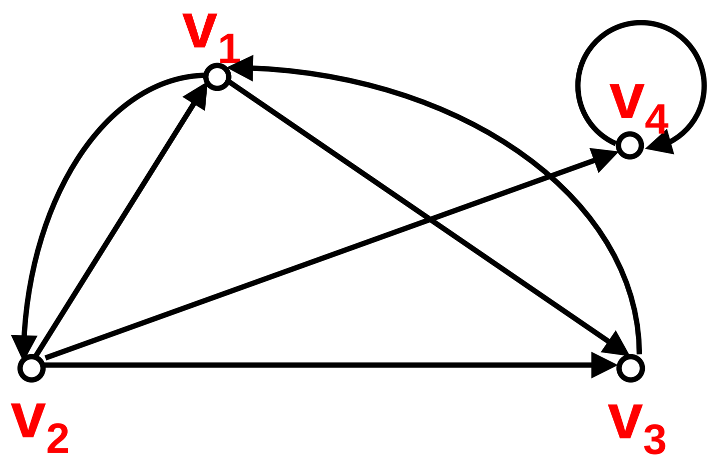
- 无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称。
- 与邻接矩阵不同，可达性矩阵不能给出图的完整信息，但由于它简便，在应用上还是很重要的。



- 如果我们知道矩阵B_{n-1}，则只需将其中的非零元素写成1，就可得到可达性矩阵，即

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & b_{ij}^{(n-1)}\neq 0\\ 0, & b_{ij}^{(n-1)}=0\end{cases} \qquad i,j=1,2,3,\cdots,n$$

- 例6.19图



$$B_3=\begin{pmatrix}4&3&4&2\\4&3&4&1\\3&1&3&1\\0&0&0&4\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

定理6.7

设G = <V, E>为线图，A、P分别是G的邻接矩阵和可达性矩阵，则有

$$P = I \vee A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots \vee A^{(n-1)}$$

这里，$A^{(i)}$表示做矩阵布尔积的i次幂。

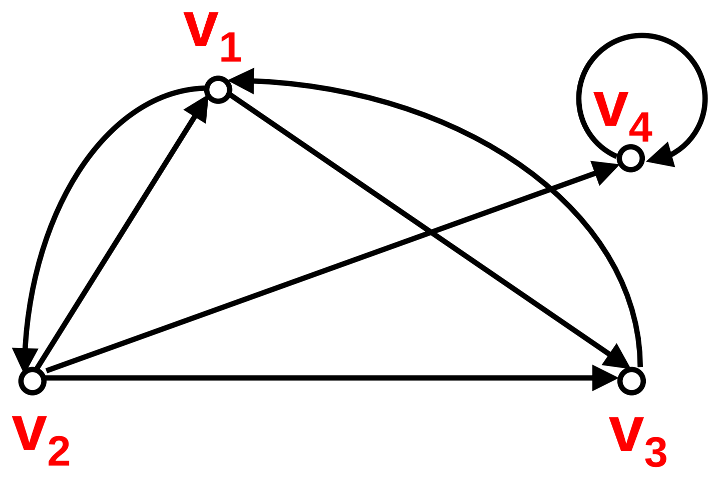
解题小贴士——可达性矩阵的计算

使用定理6.7，利用邻接矩阵及其布尔乘积与布尔并的计算即可。

求右图中图G中的可达性矩阵。

解 图G的邻接矩阵及其2、3次布尔乘法幂分别为：

与我们利用B_3求得的结果完全一致



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad P=I\vee A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

定义6.17 若无向图G中的**任何两个结点**都是**可达的**，则称G是**连通图**(Connected Graph)，否则称G**是非连通图**(Unconnected Graph)。

无向完全图K_n（n≥1）都是连通图，而多于一个结点的零图都是非连通图。

利用邻接矩阵A和可达性矩阵P，显然有：

非平凡无向线图G是连通图当且仅当它的可达性矩阵P的所有元素均为1。

无向图G=<V, E>中结点之间的可达关系R的每个等价类导出的子图都称为G的一个连通分支(Connected Component)。用p(G)表示G中的连通分支个数。

- 无向图G是连通图当且仅当p(G) = 1;
- 每个结点和每条边都在且仅在一个连通分支中。

无向图连通性的判断及其连通分支个数计算

(1) 利用结点之间的可达关系是等价关系，计算出所有等价类，每个等价类导出的子图就是一个连通分支，不同等价类的数目就是连通分支个数，连通分支个数为1即为连通图。

(2) 对于给出图形的无向图，直接观察图形易得相关结果。

定理10.2.1 设无向图G = <V,E>，|V| = n，|E| = m，下列各命题是等价的：

① G连通而不含回路(即G是树)

② G中无回路，且m = n-1

③ G是连通的，且m = n-1

④ G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路

⑤ G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通(n≥2)

⑥ G中每一对结点之间有惟一一条基本通路(n≥2)

定理7.3 一个图G = <V, E>存在生成树T_G = <V, E_T>的充分必要条件是G是连通的。

***不要求掌握证明**

■一个无向连通图G，如果G是树，则它的生成树是唯一的，就是G本身。

■如果G不是树，那么它的生成树就不唯一了。

■定理7.3的证明过程就给出了求连通图G = (n，m)的生成树的一种算法，称为“破圈法”，算法的关键是判断G中是否有回路。若有回路，则删除回路中的一条边，直到剩下的图中无回路为止，由定理7.1知，共删除m-n+1条边。

■由定理7.3和定理7.1，连通图G = (n，m)一定存在生成树，且其有n个结点，n-1条树枝，m-n+1条弦，因此选择G中不构成任何回路的n-1条边，就得到G的生成树，这种方法称为“避圈法”。

定义11.2.1 设G是**无孤立结点的图**，若存在一条通路(回路)，**经过图中每边一次且仅一次**，则称此通路(回路)为该图的一条**欧拉通路**(**回路**)(Eulerian Entry/Circuit)。具有欧拉回路的图称为**欧拉图**(Eulerian Graph)。

规定：平凡图为欧拉图。

以上定义既适合无向图，又适合有向图。

定理7.5 **无向图G = <V, E>具有一条欧拉通路，当且仅当G是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。**

由定理7.5的证明知：

若连通的无向图有两个奇度数结点，则它们是G中每条欧拉通路的端点。

- **推论7.1** 无向图G = <V, E>具有欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。
- **定理7.6** 有向图G具有欧拉通路，当且仅当G是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。
- **推论7.2** 有向图G具有欧拉回路，当且仅当G是连通的，且所有结点的入度等于出度。

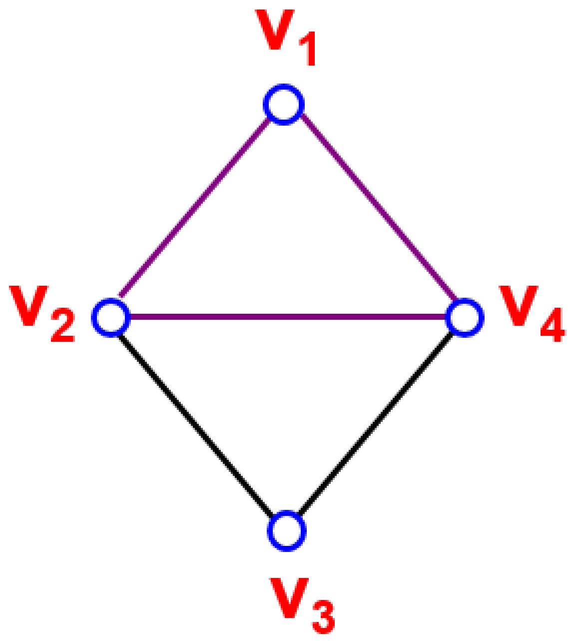
判断不是偶图

找到一条长度为奇数的回路，则该图不是偶图。

在实际应用中，定理7.10本身使用不多，我们常使用它的逆否命题来判断一个图不是偶图：

无向图G不是偶图的充分必要条件是G中存在长度为奇数的回路。

例如右图中存在长度为3的回路 $v_1v_2v_4v_1$，所以它不是偶图。



- 证明在具有n个结点的简单无向图G中，至少有两个结点的度数相同（n>2）.

证明 因为 G 是简单图，因此 G 中每个结点的度数均小于等于 $n-1$，若 G 中所有结点的度数均不相同，则 n 个结点的度数分别为 $0,1,2,3,\cdots,n-2,n-1$. 去掉 G 中孤立结点得 G 的子图 G_1，则 G_1 是具有 $n-1$ 个结点的简单无向图，其 $n-1$ 个结点的度数分别为 $1,2,3,\cdots,n-2,n-1$，即 G_1 中有一个结点关联 $n-1$ 条边，而 G_1 中只有 $n-1$ 个结点，从而这 $n-1$ 条边中至少有两条为平行边或至少有一条为自回路，故 G_1 不是简单图，矛盾.

- 设G是具有n个结点的简单无向图，如果G中每一对结点的度数之和均大于等于n−1,那么G是连通图.

证明 假设 G 不是连通图,则 G 至少有两个连通分支 G_1,G_2,设连通分支 G_1 中有 n_1 个结点,G_2 中有 n_2 个结点,$n_1+n_2\leqslant n$.分别从 G_1 和 G_2 中任取一个结点 u 和 v,由于 G 是简单图,从而 G_1 和 G_2 也是简单图,所以 $\deg(u)\leqslant n_1-1,\deg(v)\leqslant n_2-1$,故 $\deg(u)+\deg(v)\leqslant n_1-1+n_2-1\leqslant n-2$,与 G 中每对结点的度数之和大于等于 $n-1$ 矛盾.

- 下面各图中有多少个结点？

(1) 16条边，每个结点的度数均为2；

(2) 21条边,3个度数为4的结点，其余结点的度数均为3；

解 设该图的结点数为x，则由握手定理可知：

(1) $2x = 2 \times 16$，得 $x = 16$，故该图有 16 个结点；

(2) $3 \times 4 + 3 \times (x - 3) = 2 \times 21$，得 $x = 13$，故该有 13 个结点；

- 画出图7.9.2所示的图的补图.

解 图 7.9.2 所示的图的补图如图 7.9.3 所示.

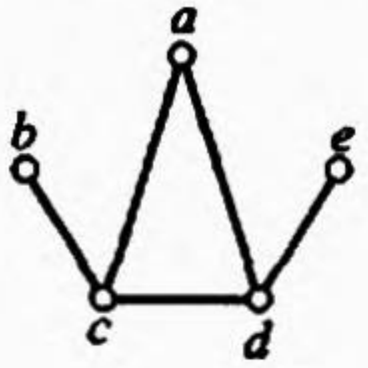


图 7.9.2

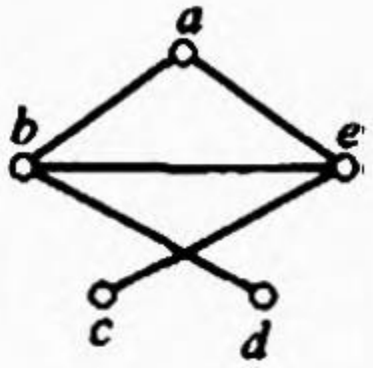


图 7.9.3

- 一棵树有两个结点度数为2，一个结点度数为3，三个结点度数为4，那么它有多少个度数为1的结点？

解：树中边数等于点数减一
$2\times2+3+3\times4+n=2(2+1+3+n-1)$

- n为何值时，无向完全图K_n是欧拉图？ n为何值时，无向完全图K_n仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路？

解：由于K_n的所有结点的度数均为n−1,要使n−1为偶数，n必须为奇数，故当且n为奇数时，无向完全图K_n是欧拉图.

图中仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路就必须使图中有且仅有两个奇度数结点，其他均为偶度数结点，由于K_n的所有结点的度数均为n−1,因此中只能有两个奇度数结点，当n=2时， K_n中只有两个奇度数结点，故K_2中仅有欧拉通路而无欧拉回路.

定义7.2 给定图G = <V, E>，若G的某个**生成子图**是**树**，则称之为G的**生成树**(Spanning Tree)，记为T_G。

- 生成树T_G中的边称为**树枝**(Branch)
- G中不在T_G中的边称为**弦**(Chord)
- T_G的所有弦的集合称为生成树的**补**(Complement)

解题小贴士——图G'是图G的生成树的判断

(1) 图G'是图G的生成子图。

(2) 图G'是树。

破圈法与避圈法

- **算法7.1** 求连通图G = <V, E>的生成树的**破圈法**：

  每次**删除回路中的一条边**，

  其删除的边的总数为**m-n+1**。

- **算法7.2** 求连通图G = <V, E>的生成树的**避圈法**：

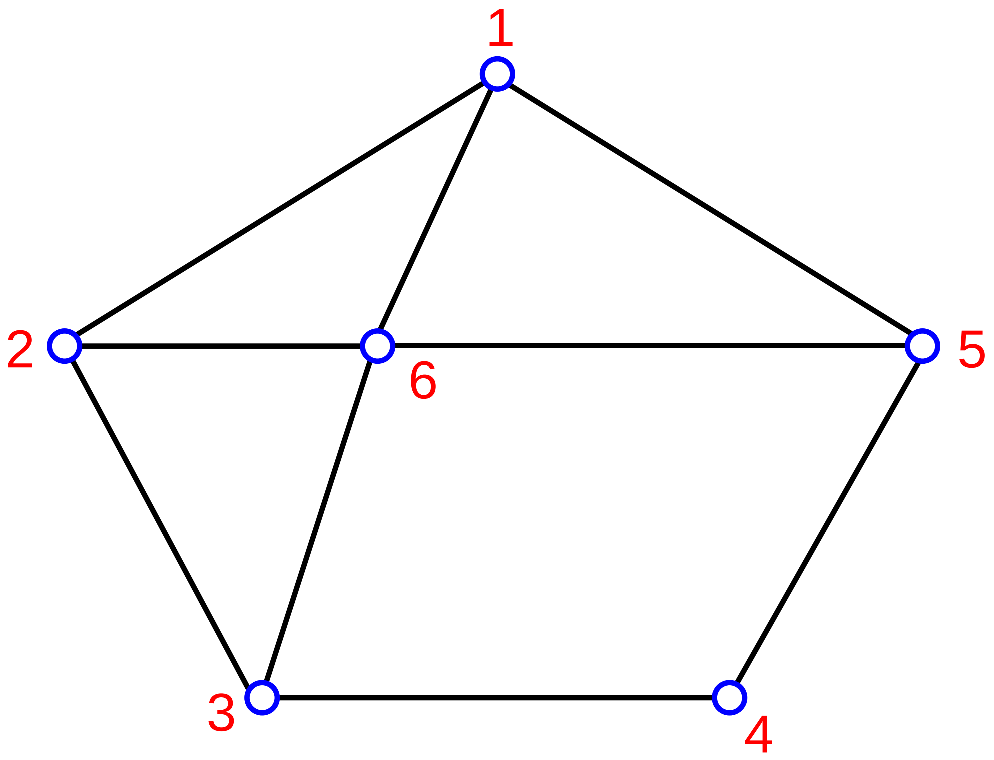
  每次**选取G中一条与已选取的边不构成回路的边**，

  选取的边的总数为**n-1**。

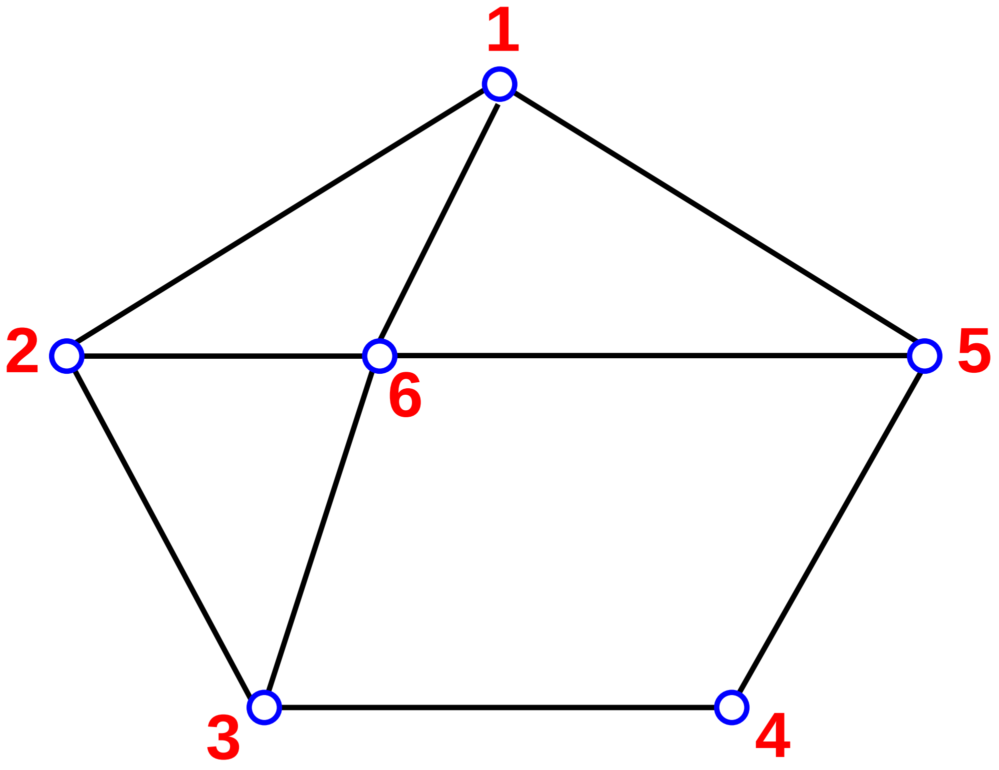
求连通图G = (n, m)的生成树

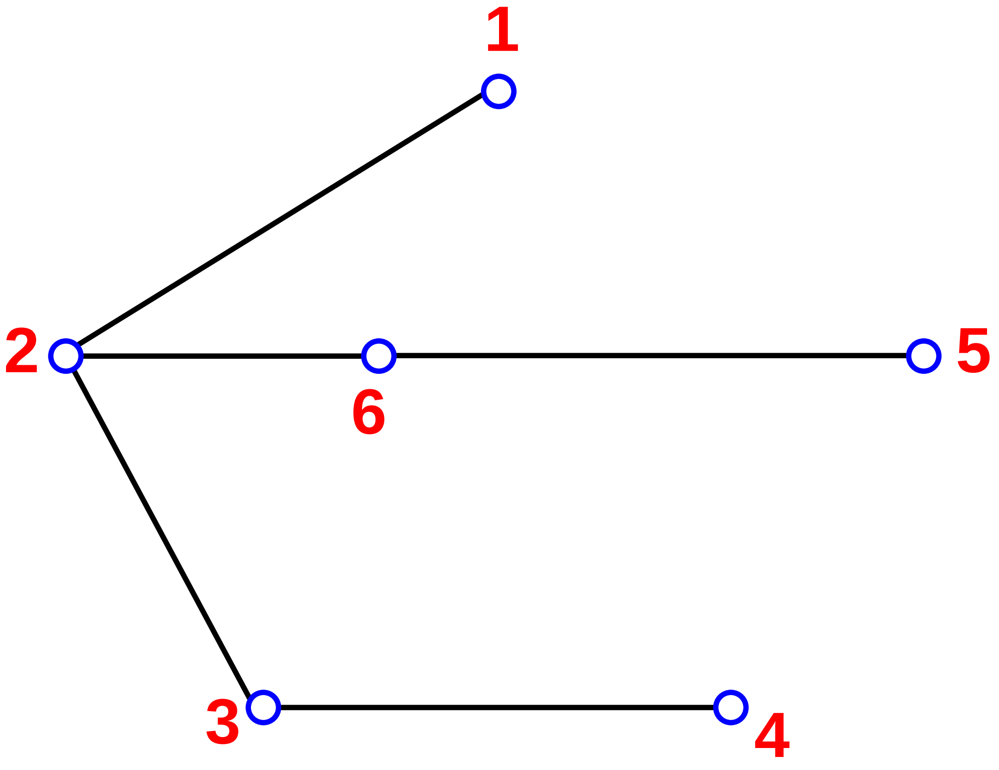
- 使用破圈法：找出一条回路，并删除该回路中的一条边，直到图中没有回路为止，删除的边的总数为m-n+1。
- 使用避圈法：选取一条边，验证该边与已选取的边不构成回路，选取的边的总数为n-1。

由于**删除回路上的边**和**选择不构成任何回路的边**有多种选法，所以产生的**生成树不是惟一的**。



➢ 由于n = 6，m = 9，所以m-n+1 = 4，故要删除的边数为4，因此只需4步即可。





- 由于n = 6，所以n-1 = 5，故要选取5条边，因此需5步即可。

- 由于生成树的形式不惟一，故上述两棵生成树都是所求的。
- 破圈法和避圈法的计算量较大，主要是需要找出回路或验证不存在回路。
- 选择哪种方法就比较m-n+1和n-1谁大谁小

二元运算：$A\times A\to A$

一元运算：$A\to A$

→

A上的n元运算

$A\times\cdots\times A\to A$

→

n个不同集合上的n元运算

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to A$

- **定义8.3** 设$A_1, A_2, \dots, A_n$，A是非空集合，如果 $*$：$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to A$是一个$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$到$A$的函数，则$*$称为一个**$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$到$A$的$n$元代数运算**（n-ary Algebraic Operation），简称n元运算（n-aryOperation）。当$A_1=A_2=\dots=A_n=A$时，则称运算“$*$”对集合A是**封闭**的（Closed），或者称“$*$”是**A上的n元运算**。

- **定义8.4** 设A是一个非空集合，$*_1, *_2, \dots, *_m$分别是定义在A上的$k_1, k_2, \dots, k_m$（$k_i \in Z^+$，$i = 1, 2, \dots, m$）元运算，则集合A和$*_1, *_2, \dots, *_m$所组成的系统称为**代数系统**，简称**代数**（Algebra），记为$< A, *_1, *_2, \dots, *_m >$。当$A$是有限集合时，该代数系统称为**有限代数系统**，否则称为**无限代数系统**。

常见代数系统：

- $< Z,+>$，$< Z,\cdot>$，$< Z,+,\cdot>$，$< R^*,\cdot,\div>$，$< M_n(R),+,\times>$，$< GL_n(R),\times>$，$< Z_n,\oplus >$和$< Z_n,\oplus,\otimes >$
- **集合代数**（Set Algebra）：$< P(A),\cap,\cup,\sim >$，$P(A)$是任意集合A的幂集
- **命题代数**（Proposition Algebra）：$< S,\wedge,\vee,\neg>$，S是所有命题公式的集合

- **定义9.1** 设$<G,*>$是二元代数。

（1）若“ $*$ ”运算满足**结合律**，则称$<G,*>$为**半群**；

（2）若$<G,*>$是**半群**，且G关于“$*$”运算存在**单位元**e，则称$<G,*>$为**含幺半群**或者**独异点**，记为$<G,*,e>$；

（3）设$<G,*>$为**含幺半群**，如果G中**每个**元素a都存在**逆元**a^{-1}，则称$<G,*>$为**群**(Group)。为简便起见，常用G来表示群$<G,*>$。

（4）若运算“ $*$ ”满足**交换律**，即$\forall a,b \in G$，都有$a*b = b*a$，则称群$<G,*>$为**可换群**或**阿贝尔**(Abel)**群**；

（5）**集合G的基数**称为群G的**阶**(Order)，记为$|G|$。若群G的阶有限，则称之为**有限群**，否则称为**无限群**。

非空集合G，运算“$*$”

$\downarrow$ 封闭性

二元代数$<G, *>$

$\downarrow$ 结合律

半群$<G, *>$

$\downarrow$ 单位元

含幺半群（独异点）$<G, *>$

$\downarrow$ 每个元素有逆元

群$<G, *>$

$\downarrow$ 交换律

可换群（阿贝尔群）$<G, *>$

- **群的判定和证明方法**

对任意非空集合G及其上的运算“$*$”，要说明G关于“$*$”是群，需要证明四点：

（1）运算“$*$”对集合G是封闭的；

（2）运算“$*$”在G上满足结合律；

（3）G中关于运算“$*$”存在单位元e；

（4）G中每个元素a都有逆元a^{-1}。

若要证明G是**可换群**，则还需要证明

（5）运算“$*$”满足交换律。

设n为任意非负整数，可以定义群中元素a的幂如下：

1）当$n>0$时，规定$a^n=\underbrace{a\cdots a}_{n\text{个}}$；（因满足封闭性和结合律）

2）当$n=0$时，规定$a^0=e$；（因有单位元）

3）因群G中a有逆元a^{-1}，可以定义a的负整数次幂，$a^{-n}=(a^{-1})^n=\underbrace{a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n\text{个}}$，

- 在群G中，对任意的整数n、m，元素a的幂方满足：
  - $a^n a^m=a^{n+m}$，$(a^n)^m=a^{nm}$。
- 进一步，若满足交换律，即$ab=ba$，则有$(ab)^n=a^n b^n$。

定义9.2 设e是群$< G,* >$的单位元，$a \in G$，

（1）使得$a^n = e$成立的**最小正整数**n称为元素a的**阶**或**周期**，记为$|a|$；

（2）若不存在这样的正整数n，使得$a^n = e$（即$\forall n \in Z^+$，都有$a^n \neq e$），则称a的阶无限。

- 由此可知，$< Z_6, \oplus >$中，0的阶是1，1和5的阶为6，2和4的阶为3,3的阶是2。
- 群$< G,* >$中**单位元e的阶为1**。
- **注意：**群的阶和群中元素的阶是不同的概念。

设函数 $g:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 定义为

$$g(x,y)=x*y=x+y-xy,$$

试证明二元运算“$*$”满足交换律和结合律.求幺元,并指出哪些元素有逆元,逆元是什么?

解 (1) 证明交换律成立.

对任意 $x,y\in\mathbf{Z}$, $x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$,所以二元运算“$*$”是可交换的.

(2) 证明结合律成立.

对任意 $x,y,z\in\mathbf{Z}$,

$$(x*y)*z=(x*y)+z-(x*y)z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z$$
$$=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,$$
$$x*(y*z)=x+(y*z)-x(y*z)=x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)$$
$$=x+y+z-xy-xz-yz+xyz.$$

即有 $(x*y)*z=x*(y*z)$.

所以二元运算“$*$”满足结合律.

(3) 求幺元.

设函数 $g: Z \times Z \to Z$ 定义为

$$g(x, y) = x * y = x + y - xy,$$

试证明二元运算“ * ”满足交换律和结合律. 求幺元, 并指出哪些元素有逆元, 逆元是什么?

解 (3) 求幺元.

设 Z 中有关于 $*$ 的幺元 e, 则对任意 $x \in Z$, 有 $x * e = e * x = x$. 根据“ * ”运算的定义有 $x + e - xe = x$, 从而有 $e(1 - x) = 0$, 由 x 的任意性知 $e = 0$.

(4) 寻找逆元.

设元素 $x \in Z$ 有逆元, 记为 x^{-1}, 则有 $x * x^{-1} = e$. 根据“ * ”运算的定义有 $x + x^{-1} - x x^{-1} = 0$, 从而有 $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$. 又因为 $x \in Z$, 所以 x 只能为 0 和 2, 即只有 0 和 2 才有逆元, $0^{-1} = 0$, $2^{-1} = 2$.

- 根据下面定义的实数集R上的二元运算“$*$ ”, 判断“$*$ ”是否可交换、是否可结合、R中关 于“ $*$”是否有幺元？为什么？如果有幺元,R中哪些元素有逆元？逆元是什么？

(1) $x * y = |xy|$; (2) $x * y = x$;

(3) $x * y = x + 3y$; (4) $x * y = \frac{1}{2}(x + y)$.

解 (1) 因为对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $|xy| = |yx|$, 所以有 $x * y = y * x$, 故“$*$”是可交换的. 对任意 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 有 $(x * y) * z = |xy| * z = |xyz|$, $x * (y * z) = x * |yz| = |xyz|$, 即有 $(x * y) * z = x * (y * z)$, 所以“$*$”是可结合的.

因为对每一个 $x \in \mathbf{R}$, 都不可能使对任意的 $y \in \mathbf{R}$ 有 $x * y = y$ 成立, 故 $\mathbf{R}$ 中不存在关于“$*$”的幺元.

(2) 因为对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$, 有 $x * y = x \neq y = y * x$, 故“$*$”是不可交换的.

对任意 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 有

$$(x * y) * z = x * z = x, \quad x * (y * z) = x * y = x.$$

即有 $(x * y) * z = x * (y * z)$, 所以“$*$”是可结合的.

假设 e 是实数集 $\mathbf{R}$ 上二元运算“$*$”的幺元, 则对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $e * x = x$, 与“$*$”运算的定义矛盾, 故 $\mathbf{R}$ 中不存在关于“$*$”的幺元.

- 根据下面定义的实数集R上的二元运算“* ”，判断“* ”是否可交换、是否可结合、R中关 于“ *”是否有幺元？为什么？如果有幺元，R中哪些元素有逆元？逆元是什么？

(1) $x * y = |xy|$;　　(2) $x * y = x$;

(3) $x * y = x + 3y$;　　(4) $x * y = \frac{1}{2}(x + y)$.

(3) 因为对 $2, 3 \in \mathbf{R}$，有 $2 * 3 = 2 + 3 \times 3 = 11$，$3 * 2 = 3 + 3 \times 2 = 12$，即 $2 * 3 \neq 3 * 2$，故“ * ”是不可交换的.

因为对 $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$，有

$$(1 * 2) * 3 = (1 * 2) + 3 \times 3 = 1 + 6 + 9 = 16,$$
$$1 * (2 * 3) = 1 + 3 \times (2 * 3) = 1 + 3(2 + 3 \times 3) = 34,$$

显然，$(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$，故“ * ”不是可结合的.

假设 e 是实数集 $\mathbf{R}$ 上二元运算“ * ”的幺元，则对任意的 $x \in \mathbf{R}$，有 $e * x = x$ 和 $x * e = x$，从而有 $e + 3x = x$ 和 $x + 3e = x$，于是得到 $x = -0.5e$ 和 $e = 0$，从而，$x = 0$，与 x 的任意性矛盾. 因此 $\mathbf{R}$ 中不存在关于“ * ”的幺元.

根据下面定义的实数集R上的二元运算“* ”，判断“* ”是否可交换、是否可结合、R中关于“ *”是否有幺元？为什么？如果有幺元，R中哪些元素有逆元？逆元是什么？

$$(4)\ x * y = \frac{1}{2}(x + y).$$

(4) 因为对任意 $x, y \in \mathbf{R}$，有 $x * y = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}(y+x) = y * x$，故“ * ”是可交换的.

因为对 $2, 4, 6 \in \mathbf{R}$，有

$$(2*4)*6 = \frac{1}{2}((2*4)+6) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2+4)+6\right) = \frac{9}{2},$$

$$2*(4*6) = \frac{1}{2}(2+(4*6)) = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}(4+6)\right) = \frac{7}{2},$$

显然，$(2*4)*6 \neq 2*(4*6)$，故“ * ”不是可结合的.

假设 e 是实数集 $\mathbf{R}$ 上二元运算“ * ”的幺元，则对任意 $x \in \mathbf{R}$，有 $e * x = x$ 和 $x * e = x$，从而有 $\frac{1}{2}(e+x) = x$，于是得到 $x = e$，与 x 的任意性矛盾. 因此 $\mathbf{R}$ 中不存在关于“ * ”的幺元.

- 设〈A, $*$〉是一个二元函数, 对于任意的α, b∈A， 都有 $(a*b)*a=a$ 和 $(a*b)*b=(b*a)*a$，试证明：

(1) 对任意的 $a, b \in A$，有 $a*(a*b)=a*b$；
(2) 对任意的 $a, b \in A$，有 $a*a=(a*b)*(a*b)$；
(3) 对任意的 $a \in A$，若 $a*a=e$，则必有 $e*a=a, a*e=e$；
(4) $a*b=b*a$ 当且仅当 $a=b$；
(5) 若还满足 $a*b=(a*b)*b$，则 $*$ 满足幂等律和交换律.

证明　(1) 对任意的 $a, b \in A$，有

$$a*(a*b)=((a*b)*a)*(a*b)=a*b;$$

(2) 对任意的 $a, b \in A$，有

$$a*a=((a*b)*a)*a=a*(a*b)*(a*b)=(a*b)*(a*b);$$

(3) 对任意的 $a \in A$，因为 $a*a=e$，所以

$$e*a=(a*a)*a=a,$$

$$a*e=a*(a*a)=a*a=e;$$

(4) 必要性：当 $a=b$ 时，显然有 $a*b=b*a$.
充分性：当 $a*b=b*a$ 时，

$$a=(a*b)*a=(b*a)*a=(a*b)*b=(b*a)*b=b;$$

(5) 对任意的 $a, b \in A$，有
$a*a=a*(a*a)=a$，即 $*$ 满足幂等律.
$a*b=(a*b)*b=(b*a)*a=b*a$，即 $*$ 满足交换律.

- 证明群G是交换群，当且仅当对任意a ,b∈G，有$(ab)^2=a^2b^2$
- 证明：设G是交换群，任意a,b∈G，$(ab)(ab)=a(ba)b=abab=aabb=a^2b^2$

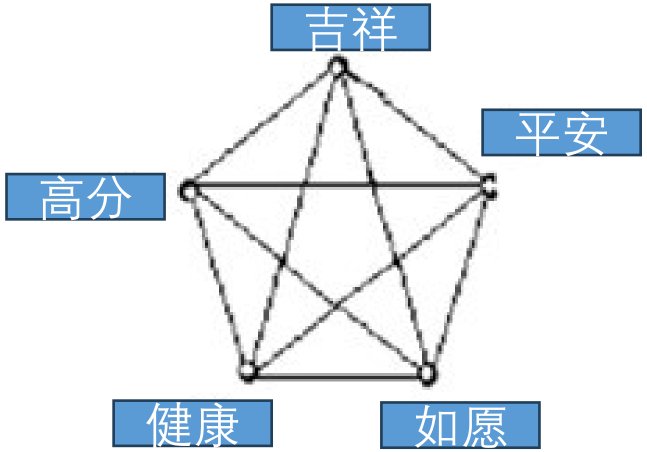
- 反之，对任意a,b∈G，有$(ab)^2=a^2b^2$，则$(ab)(ab)=aabb=abab$
- 左边乘以a^{-1},右边乘以b^{-1}，得ab=ba，因此群G是交换群

定义13.2.4 （1）在半群<S, ∗>中，若存在一个元素a∈S，使得对任意x∈S，都有

$$x = a^n，其中n \in Z^+，$$

则称<S, ∗>为**循环半群**，并称a为该循环半群的一个**生成元**；

- 祝大家取得好的成绩！



一 集合论

（1） 设 A,B 为任意集合,证:

(1)$A\subseteq B \Rightarrow P(A)\in P(B)$;

(2)$P(A)\subseteq P(B) \Rightarrow A\subseteq B$;

(3)$P(A)=P(B) \Leftrightarrow A=B$.

证明: (1)设 $A\subseteq B$,则对任意 $x\in P(A)$,有 $x\subseteq A$,又 $A\subseteq B$,所以 $x\subseteq B$,即有 $x\in P(B)$.所以 $P(A)\subseteq P(B)$;

(2)设 $P(A)\subseteq P(B)$,则对任意 $x\in A$,有$\{x\}\in P(A)$,又 $P(A)\subseteq P(B)$,所以$\{x|\in P(B)$,即有 $x\in B$.所以 $A\subseteq B$;

(3)“$\Rightarrow$",设 $P(A)=P(B)$,则有 $P(A)\subseteq P(B)$并且 $P(B)\subseteq P(A)$;由题(2)知 $P(A)\in P(B)=A\in B$.

同样可证 $P(B)\in P(A)=B\in A$.所以 $A=B$.

(2)从 7 个教员和 8 个学生中分别选出三个教员和两个学生组成一个委员会,问有多少种方法?

解:该委员会不同的组成方法种数为:C(7,3)×C(8,2)=980。

(3) 在某次考试中,要求学生从 10 个要回答的问题中选 8 个,问有多少种选法?如果前三个问题必须回答,那么又有多少种选法?

解 :若从 10 个要回答的问题中选 8 个,不同的选法种数为:C(10,8)=45。若前三个问题必须回答,不同的选法种数为:C(7,5)=21。

(4) 一教师每周上 7 次课,证明这教师至少有一天要上两次课(除星期天).

解:将一周的六天(除星期天)看成鸽笼,要上的7次课看成鸽子,则根据鸽笼原理,至少有一天要上两次课。

(5)证明题:如果任选 8 个整数,那么当用 7 去除时,它们当中至少有两个数有相同的余数.

解:任何一个整数用 7 去除时,可能的余数是 0,1,2,3,4,5,6,将这可能的 7 个余数看成鸽笼,任取的 8 个整数为鸽子,则根据鸽笼原理,至少有两个数的余数相同.

(6)证明:如果从 1~25 中任选 14 个整数,那么它们当中必有一个数是另一个数的倍数.

证明:因为任一正整数都可以写成 $2^k\times t$,其中 k 是非负整数,t 是正奇数,显然从 1-25 中

有 13 个奇数,由于选出的 14 个数都可以写成 $2^k \times t$ 的形式,而 t 的取值只有 13 种可能.由鸽笼原理知至少有两个数对应的奇数相同，于是对应于 k 大的那个整数是对应于 k 小的那个整数的倍数。

(7) 设 A、B 为集合,证明:(A∩B)U(A-B)=A.

证明

(1)(A∩B)U(A-B)∈A.

对任意的 x∈(A∩B)U(A-B),则 x∈A∩B 或 x∈A-B.

若 x∈A∩B,则有 x∈A,于是有(A∩B)U(A-B)∈A 成立;

若 x∈A-B,则仍然有 x∈A,于是有(A∩B)U(A-B)≤A 成立.

(2)A∈(A∩B)U(A-B).

对任意的 x∈A,若 x∈B,则有 x∈A∩B;若 x∉B,则有 x∈A-B.从而有 x∈(A∩B)U(A-B)，即 A∈(A∩B)U(A-B)成立.

根据(1)和(2)知(A∩B)U(A-B)=A。

(8)学校后勤服务中心必须确定为招待会供给的混合食物是否适当，为此调查了100人,37人说他们吃水果,33人说他们吃蔬菜,9人说他们吃奶酪和水果,12人说他们吃奶酪和蔬菜,12 人说他们吃水果和蔬菜,12人只吃奶酪,3人报告说他们三种食物都吃。受调查人中有多少人吃奶酪?三种食物都不吃的有多少人?

解 设 A、B 和 C 分别表示吃水果、蔬菜和奶酪的人构成的集合，则三种食物都不吃的人构成的集合表示为 $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. 根据题意得：

$$|U|=100,|A|=37,|B|=33,|C|=?,|A\cap B|=12,$$
$$|A\cap C|=9,|B\cap C|=12,|A\cap B\cap C|=3,|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|=12.$$

利用容斥原理得：

$$|C|=|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|+(|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$
$$=12+9+12-3=30;$$
$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|U|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$
$$=100-(37+33+30)+(12+9+12)-3=30.$$

则受调查人中有 30 人吃奶酪，三种食物都不吃的也有 30 人.

二 数理逻辑

（1） 下列语句哪些是命题;哪些不是命题,

(1)看球赛去!

(2)离散数学是计算机系的一门必修课.

(3)计算机有空吗?

(4)请勿高声讲话!

(5)2 是无理数.　(6)今天天气多好啊!

(7)2 是素数,当且仅当三角形有三条边. (8)明天我去上海. (9)太阳系以外的星球上有生物.　(10)蓝色和黄色可以调配成绿色. (11)不存在最大的质数.　(12)9+5≤10.

(13)x=3.　(14)我们要努力学习.　(15)雪是白的当且仅当太阳从东方升起. (16)鸡有三只脚.　(17)把门打开!

解 语句(2),(5),(7),(8),(9),(10),(11),(12),(14),(15),(16)是命题;

语句(1),(3),(4),(6),(13),(17)不是命题

（2） 将下列命题符号化.

(1)太阳明亮且湿度不高;　(2)如果我吃饭前完成家庭作业,并

且天不下雨,那么我就去看球赛; (3)如果你明天看不到我,那么我就去芝加哥; (4)如果公用事业费用增加或者增加基金的要求被否定,那么当且仅当现有计算机设备不适用的时候,才需购买一台新计算机; (5)小王不但聪明而且用功; (6)虽然天气很好,老王还是不来; (7)小李一边吃饭,一边看电视; (8)明天他在广州,或在北京; (9)控制台打字机既可作为输入设备,又可作为输出设备; (10)如果你不去上学,那么我也不去上学.

解 (1)设 P:太阳是明亮的;Q:湿度高,则命题(1)可符号化为:

$P\wedge\neg Q$

(2)设 P:我去吃饭前完成家庭作业;Q:天下雨;R:我去看球,则命题(2)可符号化为: $(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$.

(3)设 P:明天看到我;Q:我去芝加哥,则命题(3)可符号化为:

$\neg P\rightarrow Q$.

(4)设 P:公用事业费用增加的要求;Q:增加基金的要求;R:现有计算机设备适用;S:购买一台计算机,则命题(4)可符号化为:

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg R\leftrightarrow S)$.

(5)设 P:小王聪明;Q:小王用功,则命题(5)可符号化为:

$P\wedge Q$.

(6)设 P:天气很好;Q:老王来,则命题(6)可符号化为:

$P\wedge\neg Q$.

(7)设 P;小李吃饭;Q:小李看电视,则命题(7)可符号化为:

$P \wedge Q$.

(8)设 P:明天他去广州;Q:明天他在北京,则命题(8)可符号化为:

$P \vee Q$.

(9)设 P:控制台打字机作为输入设备;Q:控制台打字机作为输出设备,则命题(11)可符号化为:

$P \wedge Q$.

(10)设 P:你去上学;Q:我去上学,则命题(12)可符号化为:

$\neg P \rightarrow \neg Q$.

(3) 设命题 P:这个材料很有趣;Q:这些习题很难;R:这门课程使人喜欢.将下列句子符号化。

(1)这个材料很有趣,并且这些习题很难; (2)这个材料无趣,习题也不难,那么,这门课程就不会使人喜欢; (3)这个材料无趣,习题也不难,而且这门课程也不使人喜欢; (4)这个材料很有趣意味着这些习题很难,反之亦然; (5)或者这个材料很有趣,或者这些习题很难,并且两者恰具其一:

解 (1)$P \wedge Q$;

(2)$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$;

(3) $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$;

(4)$P \leftrightarrow Q$;

(5)$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$或$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$.

(4) 用基本等价公式证明下列等式.

(1)$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$;

(2)$P\rightarrow(Q\rightarrow P)=P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$;

(3)$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$;

(4)$\neg(P\leftrightarrow Q)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$;

(5)$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$.

解

(1) $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)=(\neg P\wedge\neg Q)\vee R$

$=\neg(P\vee Q)\vee R=(P\vee Q)\rightarrow R$;

(2)$P\rightarrow(Q\rightarrow P)=\neg P\vee(\neg Q\vee P)=P\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$=\neg\neg P\vee(\neg P\vee\neg Q)=\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$;

(3)$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=-P\vee(\neg Q\vee R)=\neg Q\vee(\neg P\vee R)=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$;

(4) $\neg(P\leftrightarrow Q)=\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$;

(5) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$

$=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\rightarrow R$.

(5) 将下列命题符号化,并用演绎法证明其论证是否正确.

(1)每一个大学生,不是文科学生,就是理工科学生;有的大学生是优等生;小张不是文科生,但他是优等生因而,如果小张是大学生,他就是理工科学生

(2)三角函数都是周期函数;一些三角函数是连续函数.所以一些周期函数是连续函数

(3)没有不守信用的人是可以信赖的;有些可以信赖的人是受

过教育的.因此,有些受过教育的人是守信用的.

(4)所有的玫瑰和蔷薇都是芳香而带刺的.因此,所有的玫瑰都是带刺的.

(5)每个旅客或者坐头等舱或者坐二等舱;每个旅客当目仅当他富裕时坐头等舱;有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕,因此,有些旅客坐二等舱

证明(1)设 $P(x)$:x 是一个大学生;$Q(x)$:x 是文科生;$S(x)$:x 是理工科生;$T(x)$:x 是优等生;c:小张,则上述句子(1)可符号化为:

$(\forall x)(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee S(x)))$, $(\exists x)(P(x)\wedge T(x))$, $\neg Q(c)\wedge T(c)\Rightarrow P(c)\rightarrow S(c)$.

① $\neg Q(c)\wedge T(c)$ P

② $(\forall x)(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee S(x)))$ P

③ $(P(c)\rightarrow(Q(c)\vee S(c))$ US,②

④ $P(c)$ P(附加前提)

⑤ $Q(c)\vee S(c)$ T,③,④,I

⑥ $\neg Q(c)$ T,①,I

⑦ $S(c)$ T,⑤,⑥,I

⑧ $P(c)\rightarrow S(c)$ CP,④,⑦

(2)设 $S(x)$:x 是三角函数;$T(x)$:x 是周期函数;$P(x)$:x 是连续函数,则上述句子(2)可符号化为:

$(\forall x)(S(x)\rightarrow T(x)),(\exists x)(S(x)\wedge P(x))\Rightarrow(\exists x)(T(x)\wedge P(x))$.

① $(\exists x)(S(x)\wedge P(x))$ P

②$(S(c) \wedge P(c))$ ES,①

③$(\forall x)(S(x) \rightarrow T(x))$ P

④$(S(c) \rightarrow T(c))$ US,③

⑤$S(c)$ T,②,I

⑥$T(c)$ T,④,⑤,1

⑧ $P(c)$ T,②,I

⑨ $T(c) \wedge P(c)$ T,⑥,⑦,I

⑩ $(\exists x)(T(x) \wedge P(x))$ EG,⑧

(3)设 $P(x)$:x 是守信用的;$Q(x)$:x 是可信赖的;$R(x)$:x 是受过教育的,则上述句子(3)可符号化为:

$\neg(\exists x)(\neg P(x) \wedge Q(x)))$, $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge P(x))$.

① $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$ P

②$(Q(c) \wedge R(c))$ ES,①

③$\neg (\exists x)(\neg P(x) \wedge Q(x))$ P

④$(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x))$ T,③,E

⑤$P(c) \vee \neg Q(c)$ US,③

⑥$Q(c)$ T,②, I

⑦$P(c)$ T,⑤,⑥,I

⑧$R(c)$ T,②, I

⑩ $R(c) \wedge P(c)$ T,⑦,⑧,I

⑪ $(\exists x)(R(x) \wedge P(x))$ EG,⑨

(4)设 P(x):x 是玫瑰;Q(x):x 是蔷薇;R(x):x 是芳香的;S(x):x 是带刺的,则上述句子(4)可符号化为:

$(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x)))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))$.

① $(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x)))$ P

② $(P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x))$ US,①

③ $(\neg P(x)A\neg Q(x))V(R(x)\wedge S(x))$ T,②,E

④ $\neg P(x)\vee S(x)$ T,③,I

⑤ $P(x)\rightarrow S(x)$ T,④,E

⑥ $(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))$ UG,⑤

(5)

设 P(x):x 是旅客;Q(x):x 坐头等舱;R(x):x 坐二等舱;S(x):x 是富裕的,则上述句子(5)可符号化为:

$(\forall x)(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x))),(\forall x)(P(x)\leftrightarrow(S(x)\leftrightarrow Q(x))),$

$(\exists x)(P(x)\wedge S(x))\wedge\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))=(\exists x)(P(x)\wedge R(x))$.

① $(\exists x)(P(x)\wedge S(x))\wedge\neg(Vx)(P(x)\rightarrow S(x))$ P

② $\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))$ T,①,I

③ $(\exists x)(P(x)\wedge\neg S(x))$ T,②,E

④ $P(c)\wedge\neg S(c)$ ES,③

⑤ $P(c)$ T,④,1

⑥ $\neg S(c)$ T,④,1

⑦$(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$ P

⑧$P(c) \rightarrow (Q(c) \vee R(c))$ US,⑦

⑨$Q(c) \vee R(c)$ T,⑤,⑧,I

⑩ $(\forall x)(P(x) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow Q(x)))$ P

⑪ $P(c) \rightarrow (S(c) \leftrightarrow Q(c))$ US, ⑩

⑫ $S(c) \leftrightarrow Q(c)$ T,⑤, ⑫ ,I

⑬ $Q(c) \rightarrow S(c)$ T, ⑫ ,1

⑭ $\neg Q(c)$ T,⑥. ⑬ ,1

⑮ $R(c)$ T,⑨, ⑭ ,1

⑯ $P(c) \wedge R(c)$ T,⑤, ⑮ ,I

⑰ $(\exists x)(P(x) \wedge R(x))$ EG, ⑯

(6) 指出下列各式的自由变元和约束变元,并决定量词的辖城.

(1)$(\exists x)((P(x) \vee R(x)) \wedge S(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;

(2)$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (\exists x)R(x) \vee S(x)$;

(3)$(\exists x)((P(x) \wedge (\forall y)Q(x,y))$;

(4)$(\forall x)(F(x) \wedge G(x,y)) \rightarrow ((\forall y)F(y) \wedge R(x,y,z))$;

(5)$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \wedge Q(x)$;

(6)$(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) V((P(x) \rightarrow Q(x))$.

解 (1)式中,$(\exists x)$的辖城为$((P(x) \vee R(x)) \wedge S(x))$,$P(x)$,$R(x)$,$S(x)$中

的 x 是约束变元;(∀x)的辖域为(P(x)∧Q(x)),P(x),Q(x)中的 x 是约束变元.

(2)式中,(∀x)的辖域为(P(x) ↔ Q(x)),P(x),Q(x)中的x是约束变元;(∃x)的辖域为R(x),R(x)中的x是约束变元;S(x)中的x是自由变元.

(3)式中,(∃x)的辖域为(P(x)∧(∀y)Q(x,y)),P(x),Q(x,y)中的 x 是约束变元;(∀y)的辖域为 Q(x,y),Q(x,y)中的 y 是约束变元,x 是自由变元.

(4)式中,(∀x)的辖域为(F(x)∧G(x,y)),F(x),G(x,y)中的 x 是约束变元;

G(x,y)中的 y 是自由变元;(∀y)的辖域为 F(y),F(y)中的 y 是约束变元;R(x,y,z)中的 x,y,z 都是自由变元.

(5)式中,(∀x)的辖域为(P(x)∧Q(x)),P(x),Q(x)中的 x 是约束变元;(∀x)的辖域为 P(x),P(x)中的 x 是约束变元;第二个 Q(x)中的 x 是自由变元.

(6)式中,(∀x)的辖域为 P(x),P(x)中的 x 是约束变元;(∃x)的辖域为 Q(x),Q(x)中的 x 是约束变元;(∀x)的辖域为 P(x),P(x)中的 x 是约束变元;第二个 Q(x)中的 x 是自由变元。

（7） 构造下列各命题的真值表，并指出下述命题中哪些是永真公式？哪些是永假公式？哪些 是可满足公式？

(1) $(P \to P) \vee (P \to \neg P)$;

(2) $P \to (P \vee Q \vee R)$;

(3) $(P \vee \neg P) \to \neg Q$;

(4) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

(5) $((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow Q$;

(6) $(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$;

解 (1) $(P \to P) \vee (P \to \neg P)$的真值表如下：

P	$\neg P$	$(P \to P)$	$(P \to \neg P)$	$(P \to P) \vee (P \to \neg P)$
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1

显然为永真公式.

(2) $P \to (P \vee Q \vee R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$P \to (P \vee Q \vee R)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

显然为永真公式.

(3) $(P \vee \neg P) \to \neg Q$ 的真值表如下:

P	Q	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$(P \vee \neg P) \to \neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	1	0

是可满足公式.

(4) $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P\to Q$	$Q\to R$	$P\to R$	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)$	
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

是永真公式.

(5) $((P\vee Q)\to R)\leftrightarrow Q$ 的真值表如下：

P	Q	R	$P\vee Q$	$P\vee Q\to R$	$(P\vee Q\to R)\leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

是可满足公式.

(6) $(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

是可满足公式.

(8) 设 A={<1,2>,<2,4>,<3,3>},B={<1,3>,<2,4>,<4,2>}.

求 A∪B, A∩B, domA, domB, ranA, ranB, dom(AUB), ran(A∩B), A。B.

解 AUB={<1,2>,<2,4>,<3,3>,<1,3>,<4,2>};

$A\cap B=\{<2,4>\}$;$domA=\{1,2,3\}$;$domB=\{1,2,4\}$;

$ranA=\{2,3,4\}$;$ranB=\{2,3,4\}$;

$dom(AUB)=\{1,2,3,4\}$; $ran(A\cap B)=\{4\}$;

$A\cdot B=\{<1,4>,<2,2>\}$.

(9) 设 $A=\{1,2,3\}$.

(1)举出 A 上的一元关系; (2)A 上有多少个二元关系.

解

(1)$R=\varnothing$;$R=\{1\}$;$R=\{2\}$;$R=\{3\}$;$R=\{1,2\}$;$R=\{1,3\}$;$R=\{2,3\}$;$R=\{1,2,3\}$;

(2)A 上的二元关系共有:$2^{|A|\times|A|}=2^{3\times3}=2^9$

(10) 设 $A=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分,若 $A_i\cap B\neq\varnothing$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,

问:$\{A1\cap B,A2\cap B,A3\cap B,\cdots,An\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分吗?

解{A,∩B,A,∩B,A;∩B,⋯,A,∩B}是集合 $A\cap B$ 的划分.因为

(1)对任意 $Ai\cap B,Aj\cap B$,当 $i\neq j$ 时,有:

$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=Ai\cap Aj\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$.

(2)$\mathbf{U}(Ai\cap B)=(\mathbf{U}A_i)\cap B=A\cap B$.

由(1),(2)知:$\{A_1\cap B,A_2\cap B,A_3\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分.

(11) 设 $A=\{1,2\},B=\{3,4,5\}$.写出 A 到 B 的所有函数和它们的象集,并指出哪些是单射、满射、双射

解 f1={<1,3>,<2,4>}|,f2={<1,3>,<2,5>}|,f3={<1,3>,<2,3>},

f4={<1,4>,<2,3>},f5={<1,4>,<2,4>},f6={ <1,4>,<2,5>},

f7= {<1,5>,<2,3>),f8={<1,5>,<2,4>},f9= {<1,5>,<2,5>);

f1(A)={3,4},f2(A)= {3,5},f3(A)={3},f4(A)= {3,4},f5(A)= {4},

f6(A)={4,5},f7(A)= {3,5},f8(A)={4,5},f9(A)= {5}.

其中 f1,f2.f4.f6,f7,,f8 为单射。因为|A|<|B|,所以不存在满射和双射.

(12)

设 R,S,T 是集合 A 上的关系,证明:

$$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$$

证明:

① 对任意$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}(x,y\in A)$,有$\langle x,y\rangle\in R\cap S$.即$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\in S$.从而有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$,$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$,即$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}$.于是得到

$$(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}.$$

② 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}(x,y\in A)$,有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$且$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$.从而有$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\in S$,即$\langle x,y\rangle\in R\cap S$.于是$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}$.即

$$R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}.$$

由①,②知$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

(13)

设 R,S,T 是集合 A 上的关系,证明:

$$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$$

证明:

① 首先证明$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

对任意$\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T$ $(x,z\in A)$,由"$\circ$"知:存在 $y\in A$,使得$\langle x,y\rangle\in(R\cup S)$并且$\langle y,z\rangle\in T$,从而有$\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in S$.

由"$\circ$"知:

$$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ T \text{ 或}$$
$$\langle x,y\rangle\in S,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T,$$

所以$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)$.即

$$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T).$$

② 接着证明$(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$.

对任意$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)(x,z\in A)$,$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)$或$\langle x,z\rangle\in(S\circ T)$.

由"$\circ$"知:存在 $y\in A$,使得

$$\langle x,y\rangle\in R \text{ 并且}\langle y,z\rangle\in T \text{ 或}\langle x,y\rangle\in S \text{ 并且}\langle y,z\rangle\in T.$$

即有$(\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in S)$并且$(\langle y,z\rangle\in T)$.即

$$\langle x,y\rangle\in R\cup S \text{ 并且}\langle y,z\rangle\in T.$$

所以,由"$\circ$"知$\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T$.即:$(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$.

由①,②知$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

(14) 设 G 为 9 个结点的无向图,每个结点的度数不是 5 就是 6.试证明 G 中至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

证明:由握手定理的推论可知,G 中度数为 5 的结点只能是 0、2、4 ,6, 8 个这五种情况,此时度数为 6 的结点分别为 9、7、5、3、1 个.以上五种情况都满足至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

（15） 设 G 是具有 6 个奇度数结点的无向连通图,那么,最少要在 G 中添加多少条边才能使 G 具有欧拉回路?

解:由握手定理可知,k 为偶数.要使 G 中具有欧拉回路,必须使 G 中每个结点的度数均为偶数,也就是说每个奇度数结点至少要增加一条邻接边,我们将6个奇度数结点中的每两

个结点组成一组,在它们之间连一条边,则所有结点的度数均成为偶数了,因此,最少要在 G 中添加 6/2 条边才能使 G 具有欧拉回路

（16） n(n⩾2)个结点的有向完全图中,哪些是欧拉图?为什么?

解 n(n⩾2)个结点的有向完全图都是欧拉图.因为有向完全图中每个结点和其他 n-1 个结点之间都有两个方向相反的有向边,因此每个结点的出度和入度都等于 n-1,所有有向完全图都是有向欧拉图。

（17）请说明<R,x>和<M,(Q), *〉为什么是含幺半群，而且不是群?其中<R,x>的 R 是实数集合,x 是实数的乘法运算；<M,(Q), *〉中 M,(Q)是全体有理数矩阵的集合,“·”是矩阵的乘法运算

解 (1)<R,x>.其中 R 是实数集合,x 是实数的乘法运算.显然 R 对“x”是封闭的,也满足结合律,R 中关于“×"的幺元是 1,因此<R,×>是含幺半群.但是,0 是 R 中关于“×”的零元,而零元无逆元,因此 R 中存在元素没有逆元,从而<R,×〉不是群.

(2)<M,(Q),*〉,其中 M,(Q)是全体有理数矩阵的集合,“*”是矩阵的乘法运算.显然 M,(Q)对“*”是封闭的,也满足结合律,M,(Q)中关于“*”的幺元是单位矩阵,因此<M,(Q),*〉是含幺半群.但是,M,(Q)中所有行列式值为 0 的矩阵无逆矩阵,因此 M,(Q)中存在没有逆元的元素,从而〈M,(Q), *〉不是群.