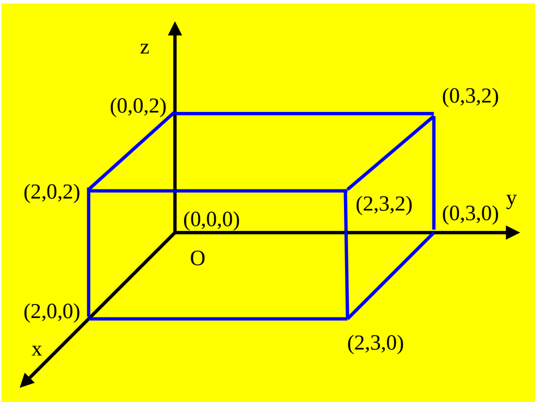
第三次作业及答案

姓名：　　　　　　　　　　　　　　　　　　学号：

1、长方体如图所示，八个坐标分别为（0，0，0），（2，0，0），（2，3，0），（0，3，0），（0，0，2），（2，0，2），（2，3，2），（0，3，2）。试对长方体进行 $S_x=1/2$，$S_y=1/3$，$S_z=1/2$ 的比例变换，求变换后的长方体各顶点坐标。



6-1

解：三维比例变换矩阵 $T=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

又∵ $P'=P\cdot T$，∴可写成

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \\ x_5' & y_5' & z_5' & 1 \\ x_6' & y_6' & z_6' & 1 \\ x_7' & y_7' & z_7' & 1 \\ x_8' & y_8' & z_8' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

∴经变换后的各点坐标为

A(0,0,0)

B(1,0,0)

C(1,1,0)

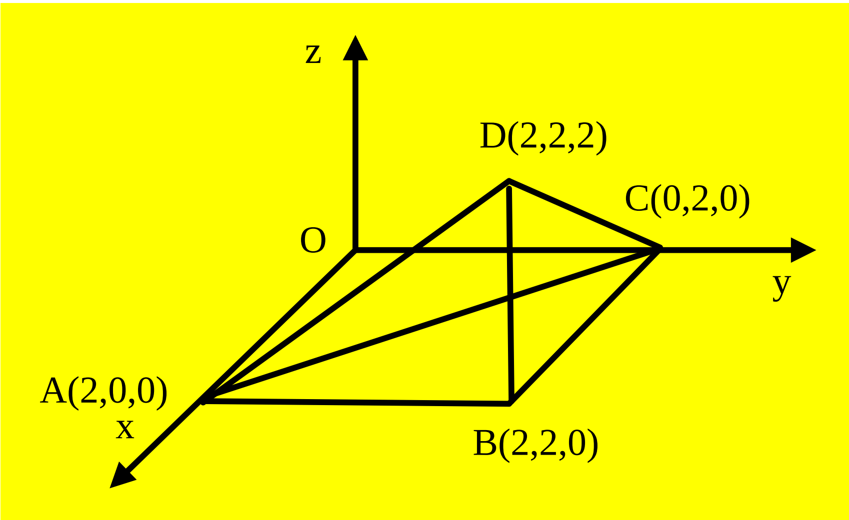
D(0,1,0)

E(0,0,1)

F(1,0,1)

G(1,1,1) H(0,1,1)

2、空间四面体的顶点坐标为 A（2，0，0），B（2，2，0），C（0，2，0），D（2，2，2），如图所示，求解：（1）关于点 P（2，-2，2）整体放大 2 倍的变换矩阵。（2）变换后的空间四面体顶点坐标。



6-3

(1) 先将P点平移至原点，变换矩阵T_1

$$T_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&2&-2&1\end{bmatrix}$$

② 进行比例变换，变换矩阵T_2

$$T_2=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

③ 将P点反平移回原处，变换矩阵T_3

$$T_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&-2&2&1\end{bmatrix}$$

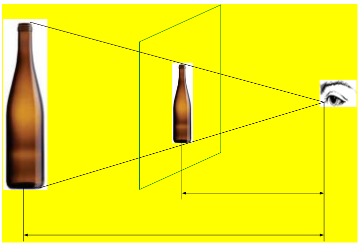
$\therefore T=T_1\cdot T_2\cdot T_3=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\-2&2&-2&1\end{bmatrix}$

(2) 变换后的四面体顶点坐标

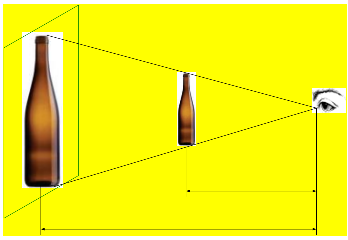
$$P'=P\cdot T=\begin{bmatrix}2&0&0&1\\2&2&0&1\\0&2&0&1\\2&2&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&2&0\\0&0&2&0\\-2&2&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&-2&1\\2&6&-2&1\\-2&6&-2&1\\2&6&2&1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(2,2,-2)$ $(2,6,-2)$ $(-2,6,-2)$ ，$(2,6,2)$

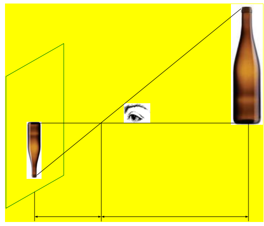
6、视点、屏幕和物体的位置关系有三种。屏幕位于物体和视点之间，如图（a）所示；物体位于屏幕和视点之间，如图（b）所示；视点位于屏幕和物体之间，如图（c）所示。设用户坐标系建在物体上，视径为 R，视距为 d，请分析这 3 种情形下像和物之间的关系。



（a）　屏幕位于物体和视点之间



（b）物体位于屏幕和视点之间



（c）视点位于屏幕和物体之间

解：（a）屏幕位于物体和视点之间 ,所得像相对于物体呈正立缩小状态。
（b）物体位于屏幕和视点之间,所得像相对于物体呈正立放大状态。
（c）视点位于屏幕和物体之间，所得像相对于物体呈倒立缩小状态。

4、给出三次 Bezier 曲线的定义和矩阵表达式和二次 B 样条曲线的定义、矩阵表达式和几何性质，并给出两类曲线的特点。

7-4. 三次

解：①Bezier曲线

定义：当n=3时，Bezier曲线的控制多边形有4个控制点P_0、P_1、P_2和P_3，Bezier曲线是三次多项式。

$$P(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)$$
$$=(1-t)^3\cdot P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)\cdot P_2+t^3\cdot P_3$$
$$=(-t^3+3t^2-3t+1)\cdot P_0+(3t^3-6t^2+3t)\cdot P_1+(-3t^3+3t^2)P_2+t^3P_3,$$

$t\in[0,1]$.

矩阵形式：$P(t)=[t^3\ t^2\ t\ 1]\cdot\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&3&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{bmatrix}$，$t\in[0,1]$

特点：不能使用控制多边形对曲线的形状进行局部调整，如果改变某点控制点位置，整段曲线会受到影响，三次Bezier曲线是自由曲线。

②二次B样条曲线.

定义：二次B样条曲线的n=2，k=0,1,2. 二次B样条曲线是二次多项式

$$F_{0,2}(t)=\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}(-1)^jC_3^j(t+2-j)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3!}{3!}(t+2)^2-\frac{3!}{2!}(t+1)^2+\frac{3!}{2!}t^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(t-1)^2$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-2t+1)$$

$F_{1,2}(t)=\frac{1}{2}(-2t^2+2t+1)$　　$F_{2,2}(t)=\frac{1}{2}t^2$.

二次B样条的~~参数~~分段表达式为 $P_{i,2}(t)=\sum_{k=0}^{2}P_{i+k}F_{k,2}(t)=P_i\cdot F_{0,2}(t)+P_{i+1}\cdot F_{1,2}(t)+P_{i+2}\cdot F_{2,2}(t)$　$(i=0,1,2,\dots m)$

对于i=0段曲线，写成矩阵形式为：

$$P(t)=\frac{1}{2}[t^2\ t\ 1]\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\end{bmatrix},\ t\in[0,1]$$ 式中

No.

Date.

P_k为分段曲线的控制多边形的三个顶点：P_0、P_1和P_2。

几何性质：

$$P'(t)=[t\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\end{bmatrix},\ t\in[0,1]$$

将$t=0$、$t=1$和$t=1/2$分别代入式中

$$\begin{cases}P(0)=\frac{1}{2}(P_0+P_1)\\ P(1)=\frac{1}{2}(P_1+P_2)\end{cases}\qquad\begin{cases}P'(0)=(P_1-P_0)\\ P'(1)=(P_2-P_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}P_0+\frac{3}{4}P_1+\frac{1}{8}P_2=\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}[P(0)+P(1)]+P_1\}\\ P'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(P_2-P_0)=P(1)-P(0)\end{cases}$$

3个顶点$P_0P_1P_2$确定一段二次B样条曲线，该曲线是一段抛物线。一般情况下，B样条曲线不经过控制点，曲线起点只与前两个控制点有关。

n个顶点定义的二次B样条，实际上是n-2段抛物线的连接，由于在连接点处具有相同的切线方向，所以二次B样条曲线达到一阶连续性。