《概率论与数理统计》

习 题 解 答

教材：《概率论与数理统计及其应用》，浙江大学盛骤、谢式千编，高等教育出版社，20XX 年 7月第一版

目　录

第一章　随机事件及其概率 1

第二章　随机变量及其分布 9

第三章　随机变量的数字特征 25

第四章　正态分布 33

第五章　样本及抽样分布 40

第六章　参数估计 43

第七章　假设检验 54

第一章　随机事件及其概率

1、解：（1） $S=\{2,3,4,5,67\}$

（2） $S=\{2,3,4,\cdots\}$

（3） $S=\{H,TH,TTH,\cdots\}$

（4） $S=\{HH,HT,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$

2、设 A, B 是两个事件，已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{8}$，求 $P(A\cup B)$，$P(\overline{A}B)$，$P(\overline{AB})$，$P[(A\cup B)(\overline{AB})]$

解：∵ $P(A)=\frac{1}{4},P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{8}$

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P[(A\cup B)(\overline{AB})]=P[(A\cup B)-(AB)]$$

$$=P(A\cup B)-P(AB)\qquad (AB\subset A\cup B)$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

3、解：用 A 表示事件“取到的三位数不包含数字 1”

$$P(A)=\frac{C_8^1C_9^1C_9^1}{900}=\frac{8\times 9\times 9}{900}=\frac{18}{25}$$

4、在仅由 0，1，2，3，4，5 组成且每个数字至多出现一次的全体三位数字中，任取一个三位数，（1）该数是奇数的概率；（2）求该数大于 330 的概率。

解：用 A 表示事件“取到的三位数是奇数”，用 B 表示事件“取到的三位数大于 330”

(1) $P(A)=\dfrac{C_3^1C_4^1C_4^1}{C_5^1A_5^2}=\dfrac{3\times 4\times 4}{5\times 5\times 4}$=0.48

2） $P(B)=\dfrac{C_2^1A_5^2+C_2^1C_4^1}{C_5^1A_5^2}=\dfrac{2\times 5\times 4+1\times 2\times 4}{5\times 5\times 4}$=0.48

5、袋中有 5 只白球，4 只红球，3 只黑球，在其中任取 4 只，求下列事件的概率

（1）4 只中恰有 2 只白球，1 只红球，1 只黑球；

（2）4 只中至少有 2 只红球；

（3）4 只中没有白球

解：用 A 表示事件“ 4 只中恰有 2 只白球，1 只红球，1 只黑球”

（1）$$P(A)=\frac{C_5^2C_4^1C_3^1}{C_{12}^4}=\frac{120}{495}=\frac{8}{33}$$

（2）用 B 表示事件“ 4 只中至少有 2 只红球”

$$P(B)=\frac{C_4^2C_8^2+C_4^3C_8^1+C_4^4}{C_{12}^4}=\frac{67}{165}\quad 或\ P(B)=1-\frac{C_4^1C_8^3+C_8^4}{C_{12}^4}=\frac{201}{495}=\frac{67}{165}$$

（3）用 C 表示事件“ 4 只中没有白球”

$$P(C)=\frac{C_7^4}{C_{12}^4}=\frac{35}{495}=\frac{7}{99}$$

6、解：用 A 表示事件“某一特定的销售点得到 k 张提货单”

$$P(A)=\frac{C_n^k(M-1)^{n-k}}{M^n}$$

7、解：用 A 表示事件“ 3 只球至少有 1 只配对”，B 表示事件“没有配对”

（1）$$P(A)=\frac{3+1}{3\times2\times1}=\frac{2}{3}\ 或\ P(A)=1-\frac{2\times1\times1}{3\times2\times1}=\frac{2}{3}$$

（2）$$P(B)=\frac{2\times1\times1}{3\times2\times1}=\frac{1}{3}$$

8、（1）设 $P(A)=0.5, P(B)=0.3, P(AB)=0.1$，求 $P(A|B)$，$P(B|A)$，$P(A\cup B)$，$P(A|A\cup B)$，$P(AB|A\cup B)$，$P(A|AB)$；

（2）袋中有 6 只白球，5 只红球每次在袋中任取一只球，若取到白球，放回，并放入 1 只白球，若取到红球不放回也不再放回另外的球，连续取球四次，求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率。

解 $P(A)=0.5, P(B)=0.3, P(AB)=0.1$

（1）$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.1=0.7$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cup AB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$$

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P[(AB)(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{0.1}{0.7}=\frac{1}{7}$$

$$P(A|AB)=\frac{P[A(AB)]}{P(AB)}=\frac{P(AB)}{P(AB)}=1$$

（2）设 $A_i=\{$第i次取到白球$\}$ $i=1,2,3,4$， $B=\{$第一、二次取到白球且第三、四次取到红球则$\}$， $B=A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}$

$$P(B)=P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2A_3)$$

$$=\frac{6}{11}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{840}{20592}=0.0408$$

9、解： 用 A 表示事件“取到的两只球中至少有 1 只红球”， B 表示事件“两只都是红球”

方法 1 $P(A)=1-\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{5}{6}$， $P(B)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$， $P(AB)=P(B)=\frac{1}{6}$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/6}{5/6}=\frac{1}{5}$$

方法 2 在减缩样本空间中计算

$$P(B\ A)=\frac{1}{5}$$

10、解： A 表示事件“一病人以为自己患了癌症”， B 表示事件“病人确实患了癌症”

由已知得， $P(AB)=0.05, P(A\overline{B})=0.45, P(\overline{A}B)=0.10, P(\overline{A}\,\overline{B})=0.40$

（1）∵ $A=AB\cup A\overline{B}$， AB与$A\overline{B}$ 互斥

∴ $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=0.05+0.45=0.5$

同理 $P(B)=P(AB\cup \overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=0.05+0.1=0.15$

（2） $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.05}{0.5}=0.1$

（3） $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$, $P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \dfrac{0.1}{0.5} = 0.2$

（4） $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$, $P(A|\bar{B}) = \dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0.45}{0.85} = \dfrac{9}{17}$

（5） $P(A\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.05}{0.15} = \dfrac{1}{3}$

11、解：用 A 表示事件“任取 6 张，排列结果为 ginger”

$$\therefore P(A) = \frac{A_2^2 A_2^1 A_3^1 A_3^1}{A_{11}^6} = \frac{1}{9240}$$

12、据统计，对于某一种的两种症状：症状 A、症状 B，有 20%的人只有症状 A，有 30%的人只有症状 B，有 10%的人两种症状都有，其他的人两种症状都没有，在患这种疾病的人群中随机的选一人，求

（1）该人两种症状都没有的概率；

（2）该人至少有一种症状的概率；

（3）已知该人有症状 B，求该人有两种症状的概率。

解：用 A 表示事件“该种疾病具有症状 A”，B 表示事件“该种疾病具有症状 B”

由已知 $P(A\bar{B}) = 0.2$，$P(\bar{A}B) = 0.3$，$P(AB) = 0.1$

（1）设 $C = \{$该人两种症状都没有$\}$，$\therefore C = \bar{A}\,\bar{B}$

$\because S = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB \cup \bar{A}\bar{B}$, 且 $A\bar{B}, \bar{A}B, AB, \bar{A}\bar{B}$ 互斥

$\therefore P(C) = P(\bar{A}\,\bar{B}) = 1 - P(A\bar{B}) - P(\bar{A}B) - P(AB) = 1 - 0.2 - 0.3 - 0.1 = 0.4$

或 $\because A \cup B = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$，且 $A\bar{B}$、$\bar{A}B$、AB 互斥

$\therefore P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6$

即 $P(C) = P(\bar{A}\,\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

（2）设 $D = \{$该人至少有一种症状$\}$，$\therefore D = A \cup B$

$\because A \cup B = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$，且 $A\bar{B}$、$\bar{A}B$、AB 互斥

即 $P(D) = P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6$

（3）设 $E = \{$已知该人有症状 B，求该人有两种症状$\}$，$\therefore E = AB|B$

$B=AB\cup AB$，　　$AB,\bar{A}B$ 互斥

$P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=0.1+0.3=0.4$

即　$P(E)=P(A|B)=\dfrac{P[(AB)B]}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.4}=\dfrac{1}{4}$

13、解：用 B 表示“讯号无误差地被接受”

A_i 表示事件“讯号由第 i 条通讯线输入”，$i=1,2,3,4$,

$P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.1, P(A_4)=0.2;$

$P(B|A_1)=0.9998$，$P(B|A_2)=0.9999$，$P(B|A_3)=0.9997$, $P(B|A_4)=0.9996$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.4\times0.9998+0.3\times0.9999+0.1\times0.9997+0.2\times0.9996=0.99978$$

14、一种用来检验 50 岁以上的人是否患有关节炎的检验法，对于确实患有关节炎的病人，有 85%给出了正确的结果；而对于已知未患关节炎的人有 4%会认为他患关节炎，已知人群中有 10%的人患有关节炎，问一名被检验者经检验，认为它没有关节炎，而他却患有关节炎的概率。

解：用 A 表示事件“确实患有关节炎的人”，B 表示事件“检验患有关节炎的人”

C 表示事件：“一名被检验者经检验，认为它没有关节炎，而他却患有关节炎”

所求为 $P(C)=P(A|\bar{B})$，由已知 $P(A)=0.1$，$P(B|A)=0.85$，$P(B|\bar{A})=0.04$

则　$P(\bar{A})=0.9$，$P(\bar{B}|A)=0.15$，$P(\bar{B}|\bar{A})=0.96$

由贝叶斯公式得

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(A)P(\bar{B}|A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}=\frac{0.1\times0.15}{0.1\times0.15+0.9\times0.96}=0.017$$

15、解：用 D 表示事件“程序因计算机发生故障被打坏”

A、B、C 分别表示事件“程序交与打字机 A、B、C 打字”

由已知得　$P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.1$；

$P(D|A)=0.01$，$P(D|B)=0.05$，$P(D|C)=0.04$

由贝叶斯公式得

$$P(A|D)=\frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.3\times 0.05+0.1\times 0.04}=\frac{6}{25}=0.24$$

$$P(B\ D)=\frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{0.3\times 0.05}{0.6\times 0.01+0.3\times 0.05+0.1\times 0.04}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$P(A\ D)=\frac{P(C)P(D|C)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{0.1\times 0.04}{0.6\times 0.01+0.3\times 0.05+0.1\times 0.04}=\frac{6}{25}=0.16$$

16、解：用 A 表示事件“收到可信讯息”， B 表示事件“由密码钥匙传送讯息”

由已知得　$P(A)=0.95$，$P(\bar{A})=0.05$，$P(B|A)=1$，$P(B|\bar{A})=0.001$

由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{0.95\times 1}{0.95\times 1+0.05\times 0.001}\approx 0.999947$$

17、解：用 A 表示事件“第一次得 H”，B 表示事件“第二次得 H”，

C 表示事件“两次得同一面”

则　$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1+1}{2^2}=\frac{1}{2}$，

$P(AB)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$P(BC)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$P(AC)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$\therefore$　$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AC)=P(A)P(C)$

$\therefore$　A,B,C 两两独立

而 $P(ABC)=\frac{1}{4}$，$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$

$\therefore$　A,B,C 不是相互独立的

18、解：用 A 表示事件“运动员 A 进球”，B 表示事件“运动员 B 进球”，

C 表示事件“运动员 C 进球”，

由已知得　$P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(C)=0.6$

则 $P(\bar{A})=0.5$， $P(\bar{B})=0.3$， $P(\bar{C})=0.4$

（1）设 $D_1=\{$恰有一人进球$\}$，则 $D_1=A\bar{B}\bar{C}\bigcup\bar{A}B\bar{C}\bigcup\bar{A}\bar{B}C$ 且 $A\bar{B}\bar{C},\bar{A}B\bar{C},\bar{A}\bar{B}C$ 互斥

$\therefore P(D_1)=P(A\bar{B}\bar{C}\bigcup\bar{A}B\bar{C}\bigcup\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$

（A,B,C相互独立）

$=0.5\times0.3\times0.4+0.5\times0.7\times0.4+0.5\times0.3\times0.6=0.29$

（2）设 $D_2=\{$恰有二人进球$\}$，则 $D_2=ABC\bigcup ABC\bigcup A\bar{B}C$且 $ABC,ABC,A\bar{B}C$ 互斥

$\therefore P(D_2)=P(AB\bar{C}\bigcup\bar{A}BC\bigcup A\bar{B}C)$

$=P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)$

$=P(A)P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(C)$

（A,B,C相互独立）

$=0.5\times0.7\times0.4+0.5\times0.7\times0.6+0.5\times0.3\times0.6=0.44$

（3）设 $D_3=\{$至少有一人进球$\}$，则 $D_3=A\bigcup B\bigcup C$

$\therefore P(D_3)=P(A\bigcup B\bigcup C)$

$=1-P(\overline{A\bigcup B\bigcup C})$

$=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$ （$\because \bar{A},\bar{B},\bar{C}$相互独立）

$=1-0.5\times0.3\quad0=4\quad0$

19、解：设 B 表示事件“病人能得救”

A_i 表示事件“第 i 个供血者具有 $A-RH^{+}$血型”， $i=1,2,3,\cdots$

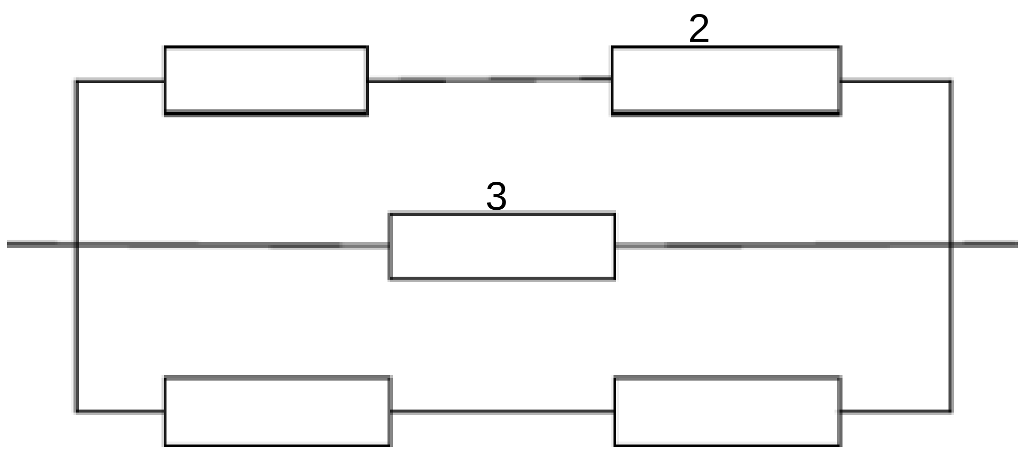
则 $B=A_1\bigcup\bar{A}_1A_2\bigcup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bigcup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$

且 $A_1,\bar{A}_1A_2,\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$ 互斥， A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立

$$\therefore\quad P(B)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)$$

$$=0.4+0.6\times0.4+(0.6)^2\times0.4+(0.6)^3\times0.4=0.8704$$

20、一元件（或系统）正常工作的概率称为元件（或系统）的可靠性，如图设有 5 个独立工作的元件 1，2，3，4，5 按先串联后并联的方式联接（称为串并联系统），设元件的可靠性为 p，求系统的可靠性。



解：设 $B=\{$系统可靠$\}$， $A_i=\{$元件 i 可靠$\}$，$i=1,2,3,4,5$

由已知得 $P(A_i)=p(i=1,2,3,4,5)$ A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 相互独立

法 1： $B=A_1A_2\cup A_3\cup A_4A_5$

$$\therefore P(B)=P(A_1A_2\cup A_3\cup A_4A_5)$$

$$=P(A_1A_2)+P(A_3)+P(A_4A_5)-P(A_1A_2A_3)-P(A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

$$=p^2+p+p^2-p^3-p^3-p^4+p^5\qquad(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\text{相互独立})$$

$$=2p^2+p-2p^3-p^4+p^5$$

法 2： $P(B)=1-P(\overline{A_1A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4A_5})$

$$=1-P(\overline{A_1A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4A_5})\qquad(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\text{相互独立})$$

$$=1-[1-P(A_1A_2)][1-P(A_3)][1-P(A_4A_5)]$$

$$=1-[1-P(A_1)P(A_2)][1-P(A_3)][1-P(A_4)P(A_5)]$$

$(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5$相互独立$)$

$$=1-(1-p^2)(1-p)(1-p^2)=p+2p^2-2p^3-p^4+p^5$$

21、用一种检验法检测产品中是否含有某种杂质的效果如下，若真含有杂质检验结果为含有的概率为 0.8；若真不含有杂质检验结果为不含有的概率为 0.9；根据以往的资料知一产品真含有杂质或真不含有杂质的概率分别为 0.4，0.6。今独立地对一产品进行了 3 次检验，结果是 2 次检验认为含有杂质，而有 1 次检验认为不含有杂质，求此产品真含有杂质的概率。

解：用 A 表示事件“真含有杂质”，

用 B 表示事件“3 次检验，结果是 2 次检验认为含有杂质，而有 1 次检验认为不含有杂质”

由已知得 $P(A)=0.4$，$P(\bar{A})=0.6$，$P(B|A)=C_3^2\times(0.8)^2\times0.2$，

$P(B|\bar{A})=C_3^2\times(0.1)^2\times0.9$

由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.4\times C_3^2\times(0.8)^2\times0.2}{0.4\times C_3^2\times(0.8)^2\times0.2+0.6\times C_3^2\times(0.1)^2\times0.9}=\frac{1536}{1698}=0.905$$

第二章 随机变量及其分布

1、设在某一人群中有 40%的人血型是 A 型，现在在人群中随机的选人来验血，直至发现血型是 A 型的人为止，以 Y 记进行验血的次数，求 Y 的分布律。

解：$P\{Y=k\}=(1-0.4)^{k-1}\times0.4 \quad k=1,2,\cdots$

2、解：用 A_i 表示第 i 个阀门开 $(i=1,2,3)$，且 A_1,A_2,A_3 相互独立，$P(A_i)=0.8\,(i=1,2,3)$

$$P\{X=0\}=P[\bar{A}_1(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3)]=P(\bar{A}_1)[P(\bar{A}_2)+P(\bar{A}_3)-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)]$$

$$=0.2(0.2+0.2-0.2\times0.2)=0.072$$

$$P\{X=1\}=P[A_1(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3)\cup\bar{A}_1A_2A_3]=0.8(0.2+0.2-0.04)+0.2\times(0.8)^2$$

$$=0.416$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2A_3)=(0.8)^3=0.512$$

3、据信有 20%的美国人没有任何健康保险，现任意抽查 12 个美国人，以 X 表示 15 人无任何健康保险的人数（设各人是否有健康保险是相互独立的），问 X 服从

什么分布，写出 X 的分布律，并求下列情况下无任何健康保险的概率

（1）恰有 3 人；（2）至少有两人；（3）不少于 1 人且不多于 3 人；（4）多于 5 人。

解： $X \sim B(15,0.2)$

$$P\{X=k\}=C_{15}^{k}(0.2)^{k}\times(0.8)^{15-k}\quad k=0,1,2,\cdots\cdots,15$$

（1） $P\{X=3\}=C_{15}^{3}(0.2)^{3}\times(0.8)^{12}=0.2501$

（2） $P\{X\geq 2\}=1-C_{15}^{0}(0.2)^{0}\times(0.8)^{15}-C_{15}^{1}0.2\times(0.8)^{14}=0.8329$

（3）

$$P\{1\leq X\leq 3\}=C_{15}^{1}(0.2)^{1}\times(0.8)^{14}+C_{15}^{2}(0.2)^{2}\times(0.8)^{13}+C_{15}^{3}(0.2)^{3}\times(0.8)^{12}=0.6129$$

（4） $P\{X>5\}=1-\sum_{k=0}^{5}C_{15}^{k}(0.2)^{k}\times(0.8)^{15-k}=0.0611$

4、解：用 X 表示 5 个元件中正常工作的元件个数

$$P(X\geq 3)=C_{5}^{3}(0.9)^{3}\times(0.1)^{2}+C_{5}^{4}(0.9)^{4}\times 0.1+(0.9)^{5}=0.9914$$

5、某生产线生产玻璃制品， 生产过程中玻璃制品常出现气泡， 以致产品成为次品，设次品率为 $p=0.001$，现取 8000 件产品，用泊松近似，求其中次品数小于 7 的概率。

解：设 X 表示 8000 件产品中的次品数，则 $X\sim B(8000,0.001)$

由于 n 很大， P 很小，利用 $X\overset{\text{近似地}}{\sim}\pi(8)$，所以 $P\{X<7\}=\sum_{k=0}^{6}\frac{8^{k}e^{-8}}{k!}=0.3134$

6、解：（1） $X\sim\pi(10)$

$$\therefore P\{X>15\}=1-P\{X\leq 15\}=1-\sum_{k=0}^{15}\frac{10^{k}e^{-10}}{k!}=1-0.9513=0.0487$$

（2） $\because\ X\sim\pi(\lambda)$

$$\therefore \frac{1}{2}=P\{X>0\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{\lambda^{0}e^{-\lambda}}{0!}$$

$$\therefore P\{X=0\}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\qquad\therefore \lambda=\ln 2=0.7$$

$$\therefore P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(0.7)^k e^{-0.7}}{k!} = 1 - 0.8442 = 0.1558$$

或 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\ln 2 e^{-\ln 2}}{1!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

7、解：(1) $X \sim \pi(2)$ $\quad P\{X = 0\} = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = e^{-2} = 0.1353$

(2) 设 Y 表示一分钟内，5 个讯息员中未接到讯息的人数，则 $Y \sim B(5, e^{-2})$

$\therefore P\{Y = 4\} = C_5^4 (e^{-2})^4 (1 - e^{-2}) = 0.00145$

(3) $\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (P\{X = k\})^5 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-2} 2^k}{k!}\right)^5$

8、一教授当下课铃打响时，他还不结束讲解，他常结束他讲解在下课铃响后一分钟以内，以 X 表示响铃至结束讲解的时间，设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定 k；(2) 求 $P\left\{X \leq \frac{1}{3}\right\}$；(3) 求 $P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}$；(4) 求 $P\left\{X > \frac{2}{3}\right\}$

解：(1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 kx^2 dx = \frac{k}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{k}{3}$ $\quad \therefore k = 3$

(2) $P\left\{X \leq \frac{1}{3}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27}$

(3) $P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = x^3 \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$

(4) $P\left\{X > \frac{2}{3}\right\} = \int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{2}{3}}^{1} 3x^2 dx = x^3 \Big|_{\frac{2}{3}}^{1} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

9、解：方程 $t^2 + 2Xt + 5X - 4 = 0$ 有实根，即 $\Delta = (2X)^2 - 4(5X - 4) \geq 0$

得 $X \geq 4$ 或 $X \leq 1$，所以有实根的概率为

$P\{(X \geq 4) \cup (X \leq 1)\} = P\{X \geq 4\} + P\{X \leq 1\}$

$= \int_0^1 0.003x^2 dx + \int_4^{10} 0.003x^2 dx = 0.937$

10、解：：（1） $P\{X<1\}=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\frac{x}{100}e^{-\frac{x^2}{200}}dx=-e^{-\frac{x^2}{200}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{200}}\approx 0.005$

（2） $P\{X>52\}=\int_{52}^{+\infty}f(x)dx=\int_{52}^{+\infty}\frac{x}{100}e^{-\frac{x^2}{200}}dx=-e^{-\frac{x^2}{200}}\Big|_{52}^{+\infty}=-e^{-\frac{52^2}{200}}\approx 0$

（3） $P\{X>26|X>20\}=\frac{P\{X>26\}}{P\{X>20\}}=\frac{e^{-\frac{26^2}{200}}}{e^{-\frac{20^2}{200}}}=0.25158$

11、设实验室的温度 X（以℃计）为随机变量，其概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{9}(4-x^2) & -1\le x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（1）某种化学反应在温度 $X>1$ 时才能反应，求在实验室中这种化学反应发生的概率；

（2）在 10 个不同的实验室中，各实验室中这种化学反应是否会发生是相互独立的，以 Y 表示 10 个实验室中有这种化学反应的实验室的个数，求 Y 的分布律；

（3）求 $P\{Y=2\},P\{Y\ge 2\}$。

解：（1）

$$P\{X>1\}=\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{9}(4-x^2)dx=(\frac{4}{9}x-\frac{1}{27}x^3)\Big|_1^2=\frac{8}{9}-\frac{8}{27}-\frac{4}{9}+\frac{1}{27}=\frac{5}{27}$$

（2） $Y\sim B(10,\frac{5}{27})$， $P\{Y=k\}=C_{10}^{k}\left(\frac{5}{27}\right)^k\times\left(\frac{22}{27}\right)^{10-k}\quad k=0,1,2,\cdots,10$

（3） $P\{Y=2\}=C_{10}^{2}(\frac{5}{27})^2\times(\frac{22}{27})^8=0.2998$

$$P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-C_{10}^{0}(\frac{5}{27})^0(\frac{22}{27})^{10}-C_{10}^{1}(\frac{5}{27})^1(\frac{22}{27})^9=0.5778$$

12、（1）设随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}0.2 & -1<y\le 0\\ 0.2+Cy & 0<y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试确定常数 C，求分布函数 $F(y)$，并求 $P\{0\le Y\le 0.5\}$， $P\{Y>0.5|Y>0.1\}$

（2）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/8 & 1<y<2\\ x/8 & 2\le y<4\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求分布函数 $F(y)$，$P\{1\le X\le 3\}$，$P\{X\ge 1|X\le 3\}$

解：（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)dy=\int_{-1}^{0}0.2dy+\int_{0}^{1}(0.2+Cy)dy$

$$=0.2y\Big|_{-1}^{0}+(0.2y+\frac{C}{2}y^2)\Big|_{0}^{1}=0.4+\frac{C}{2}\qquad \therefore C=1.2$$

$$\therefore\ f(y)=\begin{cases}0.2 & -1<y\le 0\\ 0.2+1.2y & 0<y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{y}0dt & y<-1\\ \int_{-1}^{y}0.2dt & -1\le y<0\\ \int_{-1}^{0}0.2dy+\int_{0}^{y}(0.2+1.2y)dy & 0\le y<1\\ \int_{0}^{1}(0.2+1.2y)dy & y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & y<-1\\ 0.2y+0.2 & -1\le y<0\\ 0.6y^2+0.2y+0.2 & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

$$P\{0\le Y\le 0.5\}=F(0.5)-F(0)=0.2+0.2\times 0.5+0.6\times(0.5)^2-0.2=0.25$$

$$P\{Y>0.1\}=1-F(0.1)=1-0.2-0.2\times 0.1-0.6\times 0.1^2=0.774$$

$$P\{Y>0.5\}=1-F(0.5)=1-0.2+0.2\times 0.5-0.6\times 0.5^2=0.55$$

$$\therefore\ P\{Y>0.5|Y>0.1\}=\frac{P\{Y>0.5,Y>0.1\}}{P\{Y>0.1\}}=\frac{P\{Y>0.5\}}{P\{Y>0.1\}}=\frac{0.55}{0.774}=0.7106$$

（2）$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_{0}^{x}\frac{1}{8}dt & 0\le x<2\\ \int_{0}^{2}\frac{1}{8}dt+\int_{2}^{x}\frac{t}{8}dt & 2\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{8}x & 0\le x<2\\ \frac{x^2}{16} & 2\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

$$P\{1\le X\le 3\}=F(3)-F(1)=\frac{9}{16}-\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$$

$$P\{X\le 3\}=F(3)=\frac{9}{16}$$

$$\therefore P\{X \ge 1 | X \le 3\} = \frac{P\{1 \le X \le 3\}}{P\{X \le 3\}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{7}{9}$$

13、解： $P\{X = i, Y = j\} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}$

$P\{X = i, Y = i\} = 0 \quad i \ne j, i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

当 n=3 时，（X，Y）联合分布律为

X \ Y	1	2	**3**
1	0	1/6	**1/6**
2	1/6	0	**1/6**
3	**1/6**	**1/6**	**0**

14、设有一加油站有两套用来加油的设备设备 A 是加油站工作人员操作的，设备 B 是顾客自己操作的， A，B 均装有两根加油软管，随机取一时刻， A，B 正在使用软管数分别为 X，Y。X，Y 的联合分布律为

X \ Y	0	1	**2**
0	0.10	0.08	**0.06**
1	0.04	0.20	**0.14**
2	0.02	0.06	0.30

（1）求 $P\{X = 1, Y = 1\}$，$P\{X \le 1, Y \le 1\}$

（2）至少有一根软管在使用的概率；

（3） $P\{X = Y\}$，$P\{X + Y = 2\}$

解：（1） $P\{X = 1, Y = 1\} = 0.2$，

$$P\{X \le 1, Y \le 1\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\}$$
$$= 0.10 + 0.08 + 0.04 + 0.20 = 0.42$$

（2）设 $C = \{$至少有一根软管在使用$\}$

$$P(C) = P\{(X \ge 1) \cup (Y \ge 1)\} = 1 - P\{X = 0, Y = 0\} = 1 - 0.10 = 0.90$$

（3） $P\{X = Y\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 2\}$

$$= 0.10 + 0.20 + 0.30 = 0.60$$

$$P\{X + Y = 2\} = P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 0\}$$
$$= 0.06 + 0.20 + 0.02 = 0.28$$

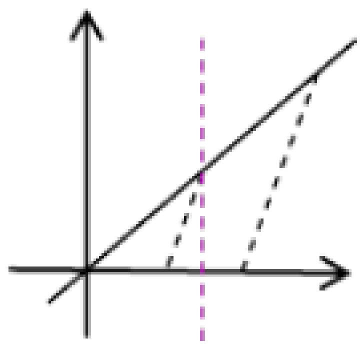
15、设随机变量（ X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+4y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

是确定常数 C；并求 $P\{X>2\}$； $P\{X>Y\}$；$P\{X+Y<1\}$

解：$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ce^{-(2x+4y)}dxdy=-\frac{C}{8}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}\cdot(-e^{-4y})\Big|_0^{+\infty}=\frac{C}{8}$， $\therefore C=8$

$$P\{X>2\}=\iint_{x>2} f(x,y)dxdy=\int_2^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}8e^{-(2x+4y)}dy=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}\cdot(-e^{-4y})\Big|_0^{+\infty}=e^{-4}$$



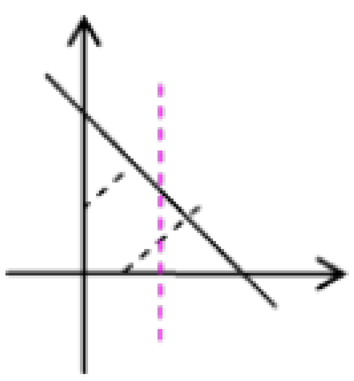
$0\le x<\infty$

$0\le y\le x$

$$P\{X>Y\}=\iint_{x>y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}8e^{-(2x+4y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-2x}(-2e^{-4y})\Big|_0^x dx=\int_0^{+\infty}(-2e^{-6x}+2e^{-2x})dx$$

$$=(\frac{1}{3}e^{-6x}-e^{-2x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}$$



$0\le x\le 1$

$0\le y\le 1-x$

$$P\{X+Y<1\}=\iint_{x+y<1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}8e^{-(2x+4y)}dy$$

$$=\int_0^1 2e^{-2x}(-e^{-4y})\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1(2e^{-2x}-2e^{2x-4})dx$$

$$=(-e^{-2x}-e^{2x-4})\Big|_0^1=(1-e^{-2})^2$$

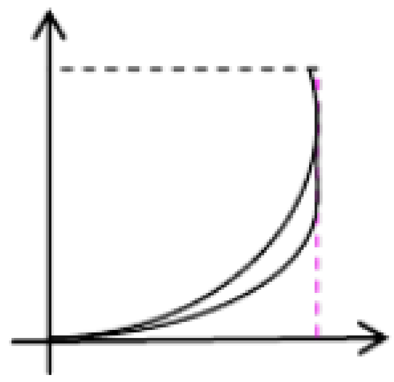
16、设随机变量（X，Y）在由曲线 $y=x^2, y=\dfrac{x^2}{2}, x=1$ 所围成的区域 G 均匀分布

（1）求（X，Y）的概率密度；

（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$

解：（1）$S_G=\int_0^1 (x^2-\dfrac{x^2}{2})dx=\dfrac{1}{6}$，　　$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in G\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2）



$$\begin{array}{lll} 0\le x\le 1 & 0\le y\le \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\le y\le 1\\ \frac{x^2}{2}\le y\le x^2 \quad 或 & \sqrt{y}\le x\le\sqrt{2y} & \sqrt{y}\le x\le 1\end{array}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2}6\cdot dy & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

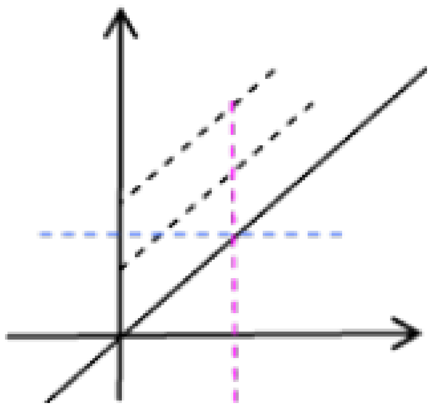
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}6\cdot dx & 0\le y\le\frac{1}{2}\\ \int_{\sqrt{y}}^{1}6\cdot dy & \frac{1}{2}\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}) & 0\le y\le\frac{1}{2}\\ 6(1-\sqrt{y}) & \frac{1}{2}\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

17、（1）在 14 题中求边缘概率密度；

解：（1）

X \ Y	0	1	2	P{X=x i}
0	0.10	0.08	0.06	0.24
1	0.04	0.20	0.14	0.38
2	0.02	0.06	0.30	0.38
P{Y=y i}	0.16	0.34	0.50	1

（2）



$\begin{matrix} 0 \le x < +\infty \\ x \le y < +\infty \end{matrix}$ 或 $\begin{matrix} 0 \le y < +\infty \\ 0 \le x < y \end{matrix}$

$$\therefore\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y}dy & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{y} e^{-y}dx & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} ye^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

22、（1）设一离散型随机变量的分布律为

Y	-1	0	1
P_k	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

又 Y_1，Y_2 是两个相互独立的随机变量，且 Y_1，Y_2 与 Y 有相同的分布律，求 Y_1 与 Y_2 的联合分布律，并求 $P\{Y_1 = Y_2\}$;

（2）在 14 题中 X 与 Y 是否相互独立。

解：(1)

$Y_2 \backslash Y_1$	-1	0	1
-1	$\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta^2}{4}$	$\frac{\theta}{2}(1-\theta^2)$	$\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta^2}{4}$
0	$\frac{\theta}{2}(1-\theta^2)$	$(1-\theta^2)^2$	$\frac{\theta}{2}(1-\theta^2)$
1	$\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta^2}{4}$	$\frac{\theta}{2}(1-\theta^2)$	$\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta^2}{4}$

且 $P\{Y_1 = Y_2\} = P\{Y_1 = -1, Y_2 = -1\} + P\{Y_1 = 0, Y_2 = 0\} + P\{Y_1 = 1, Y_2 = 1\}$

$$= \frac{\theta^2}{4} + (1-\theta^2) + \frac{\theta^2}{4} = \frac{3}{2}\theta^2 - 2\theta + 1$$

（2）$P\{X = 0, Y = 0\} = 0.10$ 又 $\because$ $P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = 0.0384$

$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$，$\therefore$ X 与 Y 不相互独立

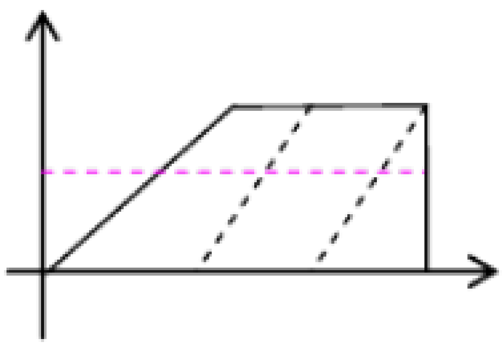
23、设 X，Y是两个相互独立的随机变量，X～U(0,1)，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}8y & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

试写出 X，Y的联合概率密度，并求 $P\{X>Y\}$。

解：$\because$ $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}8y & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$，且 X 与 Y 相互独立

$$\therefore f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}8y & 0<x<1,0<y<\frac{1}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$$



$0\le y<\frac{1}{2}$

$y\le x<1$

$$P\{X>Y\}=\iint_{x>y}8ydxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}(8y-y^2)dy=(4y^2-\frac{8}{3}y^3)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

24、设随机变量 X具有分布律

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2+1$ 的分布律。

解：

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$
$Y=X^2+1$	5	2	1	2	10

$Y=X^2+1$	1	2	5	10
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

即

$Y=X^2+1$	1	2	5	10
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

25、 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $U=|X|$ 的概率密度。

解：$U=|X|$，$\because f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad -\infty<x<+\infty$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时， $u\in[0,+\infty)$

当 $u\le 0$ 时， $F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{|X|\le u\}=0$， $\therefore f_U(u)=0$

当 $u>0$ 时， $F_U(u)=P(U\le u)=P(|X|\le u)=P(-u\le X\le u)=F_X(u)-F_X(-u)$

$$\therefore f_U(u)=F_U'(u)=\varphi_X(u)+\varphi_X(-u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$$

故 $U=|X|$ 的概率密度为： $f_U(u)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$

26、解：

（1） $Y=\sqrt{X}$， $\because f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$， 当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $y\in(0,+\infty)$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)=0$， $\therefore f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)=P(X\le y^2)=F_X(y^2)$

$$f_Y(y)=F_Y'(u)=2yf_X(y^2)=2ye^{-y^2}$$

故 $Y=\sqrt{X}$ 的概率密度为： $f_Y(y)=\begin{cases}2ye^{-y^2} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（2） $Y=\frac{X+1}{2}$， $\because f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$， 当 $x\in(-1,1)$ 时， $y\in(0,1)$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{X+1}{2}\le y)=0$， $\therefore f_Y(y)=0$

当 $0<y<1$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{X+1}{2}\le y)=P(X\le 2y-1)=F_X(2y-1)$

$$\therefore\ f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(2y-1)\cdot 2=1$$

当 $y\geq 1$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$

故 $Y=\dfrac{X+1}{2}$ 的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（3） $Y=X^2$，$\because\ f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad -\infty<x<+\infty$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$y\in[0,+\infty)$

当 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=0$，$\therefore\ f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

故 $Y=X^2$ 的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$

27、设一圆的半径 X 是一随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}(3x+1) & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求圆面积 A 的概率密度。

解：$A=\pi X^2$，$\because\ f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}(3x+1) & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，当 $x\in(0,2)$ 时，$y=\pi x^2\in(0,4\pi)$

当 $y\leq 0$ 时，$F_A(y)=P\{A\leq y\}=P\{\pi X^2\leq y\}=0$，$\therefore\ f_A(y)=0$

当 $0<y<4\pi$ 时，

$$F_A(y)=P\{A\leq y\}=P\{\pi X^2\leq y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y}{\pi}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right\}=\int_{-\sqrt{\frac{y}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{y}{\pi}}}f_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{\pi}}}\frac{1}{8}(3x+1)dx$$

$$\therefore\ f_A(y)=F_A'(y)=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{\frac{y}{\pi}}+1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}=\frac{3}{16\pi}+\frac{1}{16\sqrt{\pi y}}$$

当 $y \geq 4\pi$ 时，

$$F_A(y)=P\{A\leq y\}=P\{\pi X^2\leq y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y}{\pi}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right\}=\int_0^2\frac{1}{8}(3x+1)dx=1,\quad\therefore\ f_A(y)=0$$

故 $A=\pi X^2$ 的概率密度为：
$$f_A(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{16\pi}+\dfrac{1}{16\sqrt{\pi y}} & 0<y<4\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

28、解：因为 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\quad (x,y)\in R^2$$

$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，当 x、$y\in(-\infty,+\infty)$ 时，$z\in[0,+\infty)$

当 $z\leq 0$ 时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leq z\}=0$，$f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，
$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leq z\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq z}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rd\theta dr=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\left(-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_0^z=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\left(1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\right)'=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

故 $A=\pi X^2$ 的概率密度为：
$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)} & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$$

29、解：$\because\ f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$f_Y(y)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+y^2}\quad -\infty<y<+\infty$，且 X 与 Y 相互独立

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{z-1}^{z+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy=\frac{1}{2\pi}(\arctan(z+1)-\arctan(z-1))$$

30、解：$\because f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$，$\because f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 ye^{-\lambda y} & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$，且 X 与 Y 相互独立

由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ $\begin{cases}z-y>0\\ y>0\end{cases}\Rightarrow 0<y<z$，

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)}\lambda^2 ye^{-\lambda y}dy=\lambda^3 e^{-\lambda z}\frac{z^2}{2}$

故 $Z=X+Y$ 的概率密度为：$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda^3 e^{-\lambda z}\dfrac{z^2}{2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

31、解：$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，且 X 与 Y 相互独立

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\begin{cases}\int_0^z dy & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 dy & 1\le z\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}z & 0\le z<1\\ 2-z & 1\le z\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

32、设随机变量 X，Y 相互独立，它们的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}e^{-3x} & x>0,0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（1）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（2）求 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数；

（3）求概率 $P\left\{\frac{1}{2}<Z\le 1\right\}$。

解（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 \frac{3}{2}e^{-3x}dy & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{3}{2}e^{-3x}dx & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2） $$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \int_0^x 3e^{-3t}dt & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-3x} & x>0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(t)dt=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_0^y\frac{1}{2}dt & 0\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{2}y & 0\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

$$\therefore F_{max}(Z)=P\{\max(X,Y)\le Z\}=F_X(Z)\cdot F_Y(Z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-3z})z & 0\le z<2\\ 1-e^{-3z} & z\ge 2\end{cases}$$

（3） $$P\left\{\frac{1}{2}<Z\le 1\right\}=F_{max}(1)-F_{max}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(1-e^{-3})-\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-3}+\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$$

33、解：（1） X 在 $(0,l)$ 上服从均匀分布，概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（2）两个小段均服从 $(0,l)$ 上的均匀分布：$f_{X_i}(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad i=1,2$

$$\therefore F_{X_i}(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x}{l} & 0<x<l\\ 1 & x\ge l\end{cases}\quad i=1,2$$

$Y=\min(X_1,X_2)$，$\therefore F_Y(y)=1-[1-F_{X_1}(x)]^2=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-(1-\frac{y}{l})^2 & 0<x<l\\ 1 & x\ge l\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2(l-y)}{l^2} & 0<y<l\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，从而得证

34、解：（1） U 的可能取值是 0，1，2，3

$$P\{U=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{12}$$

$$P\{U=1\}=P\{X=0,y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

$$P\{U=2\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=0,Y=2\}$$

$$+P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{29}{120}$$

$$P\{U=3\}=P\{X=3,Y=0\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\}=\frac{1}{120}+0+0=\frac{1}{120}$$

或

U	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}+0+0$

即：

U	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{1}{120}$

（2）V 的可能取值为 0,1,2

$$P\{V=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=0\}$$

$$+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=0\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{120}=\frac{27}{40}$$

$$P\{V=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=3,Y=1\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+0=\frac{13}{40}$$

$$P\{V=2\}=P\{X=2,Y=2\}+P\{X=3,Y=2\}=0+0=0$$

或

V	0	1	2
P	$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+0$	0+0

即：

V	0	1
P	$\frac{27}{40}$	$\frac{13}{40}$

（3）W的可能取值是 0, 1, 2, 3, 4, 5

$$P\{W=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{12}$$

$$P\{W=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

$$P\{W=2\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{5}{12}$$

$$P\{W=3\}=P\{X=3,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}$$

$$=\frac{1}{120}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\frac{1}{12}$$

$$P\{W=4\}=P\{X=2,Y=2\}+P\{X=3,Y=1\}=0+0$$

$$P\{W=5\}=P\{X=3,Y=2\}=0$$

或

W	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}$	0+0	0

即：

W	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

第三章　随机变量的数字特征

1、解：

$$P\{X=4\}=P\{X=5\}=P\{X=6\}=\frac{1}{5},\ P\{X=7\}=\frac{2}{5}$$

$$P\{X=4\}=P\{X=5\}=P\{X=6\}=\frac{1}{5},\ P\{X=7\}=\frac{2}{5}$$

$$E(X)=\frac{29}{5}$$

2、解：

$$P\{Y=4\}=\frac{4}{29},\ P\{Y=5\}=\frac{5}{29},\ P\{Y=6\}=\frac{6}{29},\ P\{Y=7\}=\frac{14}{29}$$

$$E(Y)=\frac{175}{29}$$

3、解：设 X 为取到的电视机中包含的次品数,

$$P\{X=k\}=\frac{C_2^k C_{10}^{3-k}}{C_{12}^3},\quad k=0,1,2,\ 即$$

X	0	1	2
p_k	$\frac{12}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$E(X)=0\times\frac{12}{22}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{1}{22}=\frac{1}{2}$$

4、解：设 X 为所得分数

$$P\{X=k\}=\frac{1}{6},\quad k=1,2,3,4,5,\quad P\{X=k\}=\frac{1}{36},\quad k=7,8,9,10,11,12$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}k\times\frac{1}{6}+\sum_{k=6}^{12}k\times\frac{1}{36}=\frac{49}{12}$$

5、解：（1）已知 $X\sim\pi(\lambda)$，由 $P\{X=5\}=P\{X=6\}$

则 $\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^6}{6!}e^{-\lambda}$，解得 $\lambda=6$

故 $E(X)=\lambda=6$

（2）由于 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\frac{6}{\pi^2k^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ 不是绝对收敛，则 $E(X)$ 不存在。

6、（1）某城市一天水的消费量 X（百万升计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求一天的平均耗水量。

（2）设某种动物的寿命 X（以年计）是一个随机变量，起分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 5\\ 1-\frac{25}{x^2} & x>5\end{cases}$$

求这种动物的平均寿命 $E(X)$。

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{3}d(-e^{-\frac{x}{3}})=-\frac{x^2}{3}e^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2x}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx$

$$=\int_0^{+\infty}2xd(-e^{-\frac{x}{3}})=-2xe^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2e^{-\frac{x}{3}}dx=-6e^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^{+\infty}=6$$

（2）解法 1：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)=\int_5^{+\infty}xd(1-\frac{25}{x^2})=50\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=50\cdot(-\frac{1}{x})\Big|_5^{+\infty}=10$

解法 2：当 $x\neq 5$ 时，$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & x<5\\ \frac{50}{x^3} & x>5\end{cases}$，$\therefore\ f(x)=\begin{cases}0 & x\le 5\\ \frac{50}{x^3} & x>5\end{cases}$

$$\therefore E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_5^{+\infty}x\frac{50}{x^3}dx=50\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=50\cdot(-\frac{1}{x})\Big|_5^{+\infty}=10$$

7、解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 42x(1-x)^5dx=\frac{1}{4}$

8、解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^2 x\cdot 2(1-\frac{1}{x^2})dx=(x^2-2\ln x)\Big|_1^2=3-2\ln 2$

9、解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^0 x\cdot\frac{3}{2}x(1+x)^2dx+\int_0^1 x\cdot\frac{3}{2}x(1-x)^2dx=0$

10、设 $X\sim B(4,p)$，求数学期望 $E(\sin\frac{\pi X}{2})$

解：由 $P\{X=k\}=C_4^k p^k(1-p)^{4-k}$， $k=0,1,2,3,4$

$$
\begin{aligned}
E(\sin\frac{\pi X}{2})&=0+\sin\frac{\pi}{2}\cdot C_4^1 p\cdot(1-p)^3+0+\sin\frac{3\pi}{2}\cdot C_4^3p^3\cdot(1-p)+0\\
&=4p\cdot(1-p)^3+0-4p^3\cdot(1-p)=4p(1-p)(1-2p)
\end{aligned}
$$

11、解： R 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi x^3}{6}\cdot f(x)dx=\int_0^a\frac{\pi x^3}{6}\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{\pi}{24}a^3$$

12、解：

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_0^4 x^2\cdot\frac{3}{10}xe^{-\frac{3}{10}x}dx+\int_4^{+\infty}16\cdot\frac{3}{10}xe^{-\frac{3}{10}x}dx=\frac{200}{9}-\frac{440}{9}e^{-\frac{6}{5}}$$

13、解： Y_1的分布函数为

$$F_{min}(y_1)=\begin{cases}0, & y_1<0\\ 1-(1-y_1)^n, & 0\le y_1<1\\ 1, & y_1\ge 1\end{cases}$$

Y_1的概率密度为

$$f_{min}(y_1)=\begin{cases}n(1-y_1)^{n-1}, & 0<y_1<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}y_1 f_{min}(y_1)dy_1=\int_0^1 y_1\cdot n(1-y_1)^{n-1}dy_1=\frac{1}{n+1}$$

Y_n的分布函数为

$$F_{max}(y_n)=\begin{cases}0, & y_n<0\\ y_n^{\,n}, & 0\le y_n<1\\ 1, & y_n\ge 1\end{cases}$$

Y_n的概率密度为

$$f_{max}(y_n)=\begin{cases} n y_n^{\,n-1}, & 0<y_n<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(Y_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} y_n f_{max}(y_n)dy_n=\int_0^1 y_n\cdot n y_n^{\,n-1}dy_n=\frac{n}{n+1}$$

14、设随机变量 (X, Y)具有分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X,Y)$, $E(3X+2Y)$。

解：X 的分布律为

X	0	1	2
$P_{i\cdot}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

Y 的分布律为

Y	0	1	2
$P_{\cdot j}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2} i\cdot p_{i\cdot}=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2},\quad E(Y)=\sum_{j=0}^{2} j\cdot p_{\cdot j}=0\times\frac{10}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$

或$E(X)=\sum_{i=0}^{2} i\cdot p_{i\cdot}=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i\cdot p_{ij}$

$$=0\times\frac{3}{28}+0\times\frac{9}{28}+0\times\frac{3}{28}+1\times\frac{3}{14}+1\times\frac{3}{14}+1\times 0+2\times\frac{1}{28}+2\times 0+2\times 0=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} j\cdot p_{ij}=0\times\frac{3}{28}+1\times\frac{9}{28}+2\times\frac{3}{28}+0\times\frac{3}{14}+1\times\frac{3}{14}+2\times 0+0\times\frac{1}{28}+1\times 0+2\times 0=\frac{3}{4}$$

$$E(XY)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i\cdot j\cdot p_{ij}=0\times 0\times\frac{3}{28}+0\times 1\times\frac{9}{28}+0\times 2\times\frac{3}{28}+1\times 0\times\frac{3}{14}+1\times 1\times\frac{3}{14}+1\times 2\times 0$$

$$+2\times 0\times\frac{1}{28}+2\times 1\times 0+2\times 2\times 0=\frac{3}{14}$$

$$E(X-Y)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}(i-j)p_{ij}=(0-0)\cdot\frac{3}{28}+(0-1)\cdot\frac{9}{28}+(0-2)\cdot\frac{3}{28}+(1-0)\cdot\frac{3}{14}+(1-1)\cdot\frac{3}{14}$$
$$+(1-2)\cdot 0+(2-0)\cdot\frac{1}{28}+(2-1)\cdot 0+(2-2)\cdot 0=-\frac{1}{4}$$

$$E(3X+2Y)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}(3i+2j)p_{ij}=(3\times 0+2\times 0)\cdot\frac{3}{28}+(3\times 0+2\times 1)\cdot\frac{9}{28}+(3\times 0+2\times 2)\cdot\frac{3}{28}$$
$$+(3\times 1+2\times 0)\cdot\frac{3}{14}+(3\times 1+2\times 1)\cdot\frac{3}{14}+(3\times 1+2\times 2)\cdot 0$$
$$+(3\times 2+2\times 0)\cdot\frac{1}{28}+(3\times 2+2\times 1)\cdot 0+(3\times 2+2\times 2)\cdot 0=3$$

15、解：

$$E(\min(X,Y))=1\cdot(P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\})+2\cdot P\{X=2,Y=2\}=\frac{3}{14}$$

$$E\left(\frac{Y}{X-1}\right)=1\cdot(P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\})+2\cdot P\{X=0,Y=2\}+\frac{1}{2}\cdot P\{X=1,Y=1\}$$
$$+\frac{1}{3}P\{X=2,Y=1\}+\frac{2}{5}\cdot P\{X=2,Y=2\}=\frac{9}{14}$$

16、设随机变量 (X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$。

解： $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x\cdot 24xydy=12\int_0^1 x^2y^2\Big|_0^{1-x}dx=12\int_0^1 x^2(1-x)^2dx=\frac{2}{5}$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}y\cdot 24xydy=\frac{2}{5}$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy\cdot 24xydy=\frac{2}{15}$$

17、某工程对完成某种工程的天数 X 是随机变量，具有分布律

X	10	11	12	13	14
P_k	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

所得利润（以元计）为

$$Y=1000(12-X$$

求 E(Y)，$D(Y^2)$

解：$E(Y)=\sum_{k=10}^{14}1000(12-k)\cdot p_k=1000(12-10)\times 0.2+1000(12-11)\times 0.3+1000(12-12)\times 0.3$
$+1000(12-13)\times 0.1+1000(12-14)\times 0.1=400$

$$E(Y^2)=\sum_{k=10}^{14}\left[1000(12-k)\right]^2\cdot p_k=\left[1000(12-10)\right]^2\times 0.2+\left[1000(12-11)\right]^2\times 0.3$$
$$+\left[1000(12-12)\right]^2\times 0.3+\left[1000(12-13)\right]^2\times 0.1+\left[1000(12-14)\right]^2\times 0.1$$
$$=2000^2\times 0.2+1000^2\times 0.3+0^2\times 0.3+(-1000)^2\times 0.1+(-2000)^2\times 0.1=1.6\times 10^6$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=1.6\times 10^6-400^2=1.44\times 10^6$$

18、解：$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2,\quad \sqrt{D(X)}=\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}\sigma$$

19、解：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=\frac{1}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1-p}{p^2}$$

20、解：（1） $E(X)=\int_\theta^{+\infty}x\cdot\frac{k\theta^k}{x^{k+1}}dx=\frac{k}{k-1}\theta$

（2）由于 $\int_\theta^{+\infty}x\cdot\frac{\theta}{x^2}dx=+\infty$，则当 $k=1$时，$E(X)$不存在。

（3） $E(X^2)=\int_\theta^{+\infty}x^2\cdot\frac{k\theta^k}{x^{k+1}}dx=\frac{k}{k-2}\theta^2$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{k\theta^2}{(k-1)^2(k-2)}$$

（4）由于 $\int_{\theta}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2\theta^2}{x^3} dx = +\infty$，则当 $k=2$时，$D(X)$不存在。

21、（1）在 14题中，求 $Cov(X,Y)$，ρ_{xy}

(2) 在 16题中，求 $Cov(X,Y)$，ρ_{xy}，$D(X,Y)$

解：（1）由 14题，$E(X)=\frac{1}{2}$，$E(Y)=\frac{3}{4}$，$E(XY)=\frac{3}{14}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{14}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{9}{56}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{2} i^2 \cdot p_i = 0^2\times\frac{15}{28}+1^2\times\frac{12}{28}+2^2\times\frac{1}{28}=\frac{16}{28}$$

$$E(Y^2)=\sum_{j=0}^{2} j^2 p_j = 0^2\times\frac{10}{28}+1^2\times\frac{15}{28}+2^2\times\frac{3}{28}=\frac{27}{28}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{16}{28}-(\frac{1}{2})^2=\frac{9}{28}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{27}{28}-(\frac{3}{4})^2=\frac{45}{112}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{9}{56}}{\sqrt{\frac{9}{28}}\cdot\sqrt{\frac{45}{112}}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

（2）由 16 题，$E(X)=\frac{2}{5}$，$E(Y)=\frac{2}{5}$，$E(XY)=\frac{2}{15}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{15}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{2}{75}$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2\cdot 24xydy=\frac{1}{5}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2\cdot 24xydy=\frac{1}{5}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{5}-(\frac{2}{5})^2=\frac{1}{25}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{5}-(\frac{2}{5})^2=\frac{1}{25}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{2}{75}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}}=-\frac{2}{3}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}-2\cdot\frac{2}{75}=\frac{2}{75}$$

（3）X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.24	0.38	0.38

Y 的分布律为

Y	0	1	2
p_k	0.16	0.34	0.5

$E(X)=1.14,\quad E(Y)=1.34$

$$E(XY)=1\cdot P\{X=1,Y=1\}+2(P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\})$$
$$+4\cdot P\{X=2,Y=2\}=1.8$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.2724$

$E(X^2)=1.9,\quad E(Y^2)=2.34$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.6004,\quad D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.5444$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.4765$$

22、设随机变量 (X,Y)具有 $D(X)=9,\quad D(Y)=4,\quad \rho_{xy}=-\frac{1}{6}$，求$D(X+Y),\quad D(X-3Y+4)$。

解：$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=-1$

$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=9+4+2\times(-1)=11$

$D(-3Y)=(-3)^2\cdot D(Y)=9\times 9=36$

$Cov(X,-3Y)=-3Cov(X,Y)=(-3)\times(-1)=3$

$\therefore D(X-3Y+4)=D(X-3Y)=D(X)+D(-3Y)+2Cov(X,-3Y)=51$

23、解：（1）$E(X_1^2(X_2-4X_3)^2)=E(X_1^2)(E(X_2^2)-8E(X_2)E(X_3)+16E(X_3^2))=17$

（2）$E(X_i)=\frac{1}{2},\quad E(X_i^2)=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3$

$$E((X_1-2X_2+X_3)^2)=E(X_1^2)+4E(X_2^2)+E(X_3^2)-4E(X_1)E(X_2)$$
$$+2E(X_1)E(X_3)-4E(X_2)E(X_3)=\frac{1}{2}$$

24、设随机变量 (X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

验证 X,Y不相关，但 X,Y不是相互独立的。

解：$E(X)=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}} x\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} x\,dy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}} y\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} y\,dy=0$

$E(XY)=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}} xy\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\,dy=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{2}{3}\times 0=0$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，则 X,Y 不相关。

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} dy=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} dx=1+y & -1<y<0\\ \int_{y}^{1} dx=1-y & 0\le y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由于当 $|y|<x,0<x<1$时，$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X,Y 不相互独立。

25、解：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{号球放入第 }i\text{号盒子}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$

$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$，$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=1$

第四章　正态分布

1、解：$\because Z \sim N(0,1)$

（1）$\therefore P\{Z \le 1.24\} = \Phi(1.24) = 0.8925$

$$P\{1.24 < Z \le 2.37\} = \Phi(2.37) - \Phi(1.24) == 0.9911 - 0.8925 = 0.0986$$

$$P\{-2.37 < Z \le -1.24\} = \Phi(-1.24) - \Phi(-2.37) = -\Phi(1.24) + \Phi(2.37)$$
$$= -0.8925 + 0.9911 = 0.0986$$

（2）$\because P\{Z \le a\} = 0.9147, \quad \therefore \Phi(a) = 0.9147,$ 得 $a = 1.37$

$P\{Z \ge b\} = 0.0526, \quad 1 - \Phi(b) = 0.0526, \quad \Phi(b) = 0.9474,$ 得 $b = 1.62$

2、解：$\because X \sim N(3,16)$

$$\therefore P\{4 < X \le 8\} = \Phi(\frac{8-3}{4}) - \Phi(\frac{4-3}{4}) = \Phi(1.25) - \Phi(0.25) = 0.8944 - 0.5987 = 0.2957$$

$$P\{0 < X \le 5\} = \Phi(\frac{5-3}{4}) - \Phi(\frac{0-3}{4}) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.75)$$
$$= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.75) = 0.6915 - 1 + 0.7734 = 0.4649$$

3、（1）设 $X \sim N(25,36)$，试确定 C，使 $P\{|X-25| \le C\} = 0.9544$；

（2）设 $X \sim N(3,4)$，试确定 C，使 $P\{X > C\} \ge 0.95$

解：（1）$\because X \sim N(25,36), \quad P\{|X-25| \le C\} = 0.9544$

$$\therefore P\{25 - C \le X \le 25 + C\} = 0.9544$$

即 $\Phi(\frac{25+C-25}{6}) - \Phi(\frac{25-C-25}{6}) = 0.9544$

$$\Phi(\frac{C}{6}) - \Phi(\frac{-C}{6}) = 2\Phi(\frac{C}{6}) - 1 = 0.9544$$

$$\Phi(\frac{C}{6}) = 0.9772, \quad \therefore \frac{C}{6} = 2, \quad C = 12$$

（2）$\because X \sim N(3,4), \quad P\{X > C\} \ge 0.95$

即 $1 - \Phi(\frac{C-3}{2}) \ge 0.95, \quad \Phi(\frac{3-C}{2}) \ge 0.95$

$$\frac{3-C}{2} \ge 1645, \quad C \le -0.29$$

4、解：（1）$\because X \sim N(3315, 575^2)$

$$\therefore P\{2584.75 \le X \le 4390.25\} = \Phi(\frac{4390.25-3315}{575}) - \Phi(\frac{2584.75-3315}{575})$$
$$= \Phi(1.87) - \Phi(-1.27) = \Phi(1.87) - 1 + \Phi(1.27) = 0.9693 - 1 + 0.8980 = 0.8673$$

（2）

$$\because P\{X \le 2719\} = \Phi(\frac{2719-3315}{575}) = \Phi(-1.04) = 1 - \Phi(1.04) = 1 - 0.8508 = 0.1492$$

$$\therefore Y \sim B(25, 0.1492)$$

$$\therefore P\{Y \le 4\} = \sum_{i=0}^{4} C_4^i (0.1492)^i (1-0.1492)^{4-i} = 0.6664$$

5、解：$\because X \sim N(6.4, 2.3)$

$$\therefore P(X > 8 | X > 5) = \frac{P\{X > 8\}}{P\{X > 5\}} = \frac{1-\Phi(\frac{8-6.4}{\sqrt{2.3}})}{1-\Phi(\frac{5-6.4}{\sqrt{2.3}})} = \frac{1-\Phi(1.055)}{1-\Phi(-0.923)} = \frac{1-0.8554}{\Phi(0.923)} = \frac{0.1446}{0.8212} = 0.1761$$

6、解：（1）$\because X \sim N(11.9, (0.2)^2)$

$$\therefore P\{11.7 < X < 12.3\} = \Phi(\frac{12.3-11.9}{0.2}) - \Phi(\frac{11.7-11.9}{0.2}) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1)$$
$$= 0.9772 - 1 + 0.8413 = 0.8185$$

设 A={两只电阻器的电阻值都在 11.7 欧和 12.3 欧之间}

则 $P(A) = (0.8185)^2 = 0.6699$

（2）设 X, Y 分别是两只电阻器的电阻值，则 $X \sim N(11.9, (0.2)^2)$，$Y \sim N(11.9, (0.2)^2)$，且 X, Y 相互独立

$$\therefore P\{(X > 12.4) \cup (Y > 12.4)\} = 1 - P\{X \le 12.4\} \cdot P\{Y \le 12.4\} = 1 - \left[\Phi(\frac{12.4-11.9}{0.2})\right]^2$$
$$= 1 - [\Phi(2.5)]^2 = 1 - (0.9938)^2 = 0.0124$$

7、一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从均值 $\mu = 160$，均方差为 σ 的正态分布，若要求 $P\{120 < X < 200\} \ge 0.80$，允许 σ 最大为多少？

解：因为 $X \sim N(160, \sigma^2)$

由 $0.80 \le P\{120 < X < 200\} = \Phi(\frac{200-160}{\sigma}) - \Phi(\frac{120-160}{\sigma})$

从而 $2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1\geq 0.80$，即 $\Phi(\frac{40}{\sigma})\geq 0.9$，查表得 $\frac{40}{\sigma}\geq 1.282$，故 $\sigma\leq 31.2$

8、解：（1）$\because X \sim N(90,(0.5)^2)$

$$\therefore P\{X<89\}=\Phi(\frac{89-90}{0.5})=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$

（2）设 $X \sim N(d,(0.5)^2)$

由

$$P\{X\geq 80\}\geq 0.99,\quad \therefore 1-\Phi(\frac{80-d}{0.5})\geq 0.99,\quad \Phi(\frac{d-80}{0.5})\geq 0.99,\quad 即\ \frac{d-80}{0.5}\geq 2.33$$

从而 $d\geq 81.17$

9、解：$\because$ X与Y相互独立，且 $X\sim N(150,3^2)$，$Y\sim N(100,4^2)$

则（1）$W_1=X+Y\sim N(150+100,3^2+4^2)=N(250,5^2)$

$$W_2=2X+Y\sim N(2\times 150+100,2^2\times 3^2+4^2)=N(400,52)$$

$$W_3=\frac{X+Y}{2}\sim N(\frac{250}{2},\frac{5^2}{2^2})=N(125,(2.5)^2)$$

$$P\{X+Y<242.6\}=\Phi(\frac{242.6-250}{5})=\Phi(-1.48)=1-\Phi(1.48)=1-0.9306=0.0694$$

$$P\left\{\left|\frac{X+Y}{2}-125\right|>5\right\}=P\left\{\frac{X+Y}{2}<125-5\right\}+P\left\{\frac{X+Y}{2}>125+5\right\}$$

$$=\Phi(\frac{125-5-125}{2.5})+1-\Phi(\frac{125+5-125}{2.5})=\Phi(-2)+1-\Phi(2)$$

$$=2-2\Phi(2)=2-2\times 0.9772=0.0456$$

10、解：（1）$\because X\sim N(10,(0.2)^2)$，$Y\sim N(10.5,(0.2)^2)$，且X与Y相互独立

$$\therefore X-Y\sim N(-0.5,2\times(0.2)^2)=N(-0.5,(0.282)^2)$$

$$P\{X-Y<0\}=\Phi(\frac{0-(-0.5)}{0.282})=\Phi(1.77)=0.9616$$

（2）设 $X\sim N(10,(0.2)^2)$，$Y\sim N(10.5,\sigma^2)$，且X与Y相互独立

$$\therefore X-Y\sim N(-0.5,2\times(0.2)^2)=N(-0.5,(0.2)^2+\sigma^2)$$

由 $0.90\leq P\{X-Y<0\}=\Phi(\frac{0-(-0.5)}{\sqrt{0.2^2+\sigma^2}})=\Phi(\frac{0.5}{\sqrt{0.2^2+\sigma^2}})$

$$\therefore \frac{0.5}{\sqrt{0.2^2+\sigma^2}} \geq 1.28，故\ \sigma \leq 0.3348$$

11、设某地区女子的身高（以 m 计）$W \sim N(1.63,(0.025)^2)$，男子身高（以 m 计）$M \sim N(1.73,(0.05)^2)$，设各人身高相互独立。

（1）在这一地区随机选一名女子，一名男子。求女子比男子高的概率。

（2）在这一地区随机选 5 名女子，求其中至少有 4 名的身高大于 1.60 的概率。

（3）在这一地区随机选 50 名女子，求这 50 名女子的平均身高大于 1.60 的概率。

解：$\because W \sim N(1.63,(0.025)^2),\quad M \sim N(1.73,(0.05)^2)$，且 W 与 M 相互独立

（1）$\therefore W-M \sim N(1.63-1.73,(0.025)^2+(0.05)^2)=N(-0.1,(0.056)^2)$

$$P\{W>M\}=P\{W-M>0\}=1-\Phi(\frac{0.1}{0.056})=1-\Phi(1.79)=1-0.9633=0.0367$$

（2）$P\{W>1.60\}==1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.025})=1-\Phi(-1.2)=\Phi(1.2)=0.8849$

设 5 名女子中身高大于 1.60 的人数为 Y，则 $Y \sim B(5,0.8849)$

$$\therefore P\{Y\geq 4\}=C_5^4(0.8849)^4(1-0.8849)^1+C_5^5(0.8849)^5(1-0.8849)^0=0.8955$$

（3）$\because W_i \sim N(1.63,0.025^2),\quad i=1,2,\cdots,50$，且它们相互独立

则 $\overline{W}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} W_i \sim N(1.63,\frac{(0.025)^2}{50})=N(1.63,0.003535^2)$

P｛ $P\{\overline{W}>1.60\}=1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.003535})=1-\Phi(-8.4866)=\Phi(8.4866)\approx 1$

12、解：（1）$P\{\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-\mu}{\sigma}\}=0.20 \qquad \frac{16-\mu}{\sigma}=-0.84$ ①

$P\{\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{20-\mu}{\sigma}\}=0.9 \qquad \frac{20-\mu}{\sigma}=1.28$ ②

由①，②解得，

$\mu=17.6,\quad \sigma=1.885$

（2）$3X+2Y-6Z \sim N(0,\ 49)$

$$P\{\frac{3X+2Y-6Z}{7}<\frac{-7}{7}\}=0.1587$$

13、解：（1）$Z=m-X-30$

（2）$Z \sim N(m-30,\ 7.5^2)$

（3）$P\{Z\geq 450\}\geq 0.95 \qquad P\{\frac{Z-(m-30)}{7.5}\geq\frac{450-(m-30)}{7.5}\}\geq 0.95$

$$\frac{450-(m-30)}{7.5} \le 1.645 \qquad m \ge 492.4$$

14、解：(1) $Z \sim N(m-30,\ 3^2+7.5^2)$

（2）$P(Z \ge 450) \ge 0.90$

$$P\{\frac{Z-(m-30)}{\sqrt{3^2+7.5^2}} \ge \frac{450-(m-30)}{\sqrt{3^2+7.5^2}}\} \ge 0.90$$

$$\frac{450-(m-30)}{\sqrt{3^2+7.5^2}} \le 1.28 \qquad m \ge 490.36$$

15、某种电子元件的寿命 X（以年记）服从数学期望为 2 的指数分布，各元件的寿命相互

独立。随机取 100 只元件，求这 100 只元件的寿命之和大于 180 的概率。

解：$\because$ X服从参数为 2的指数分布 $\therefore E(X)=2,\ D(X)=4$

$X_i=\{$第i个电子元件的寿命$\}$，X_i与X具有相同分布 $(i=1,2,\cdots,100)$，且它们独立

$$\therefore \sum_{i=1}^{100} X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(100\times 2,100\times 4)=N(200,20^2)$$

$$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\right\}=1-\Phi\left(\frac{180-200}{20}\right)=\Phi(1)=0.8413$$

16、解：$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i-100\times 25}{\sqrt{100\times 1}} \sim N(0,1)$

$$P\{24.74 \le \overline{X} \le 25.25\}=P\{\frac{2475-2500}{10} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i-2500}{10} \le \frac{2525-2500}{10}\}=0.9876$$

17、解：$X_i \sim N(-0.5\times 10^{-7},\ 0.5\times 10^{-7})$

$$E(X_i)=0, \qquad D(X_i)=\frac{10^{-14}}{12}=\sigma^2$$

$$\frac{\sum X_i-400\times 0}{\sqrt{400}\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P\{\left|\sum X_i\right|<0.5\times 10^{-6}\}=P\{\left|\frac{\sum X_i}{\sqrt{400}\sigma}\right|<\frac{0.5\times 10^{-6}}{\sqrt{400}\sigma}\}=0.6156$$

18、解：（1）$\because X \sim B(1000,0.2)$，$\therefore X \overset{\text{近似地}}{\sim} N(1000\times0.2,1000\times0.2\times0.8)=N(200,160)$

$$P\{170\le X\le185\}\approx\Phi(\frac{185+0.5-200}{\sqrt{160}})-\Phi(\frac{170-0.5-200}{\sqrt{160}})$$
$$=\Phi(2.41)-\Phi(1.15)=0.9920-0.8749=0.1171$$

$$P\{X\ge190\}\approx1-\Phi(\frac{190-0.5-200}{\sqrt{160}})=\Phi(0.83)=0.7967$$

$$P\{X\le180\}\approx\Phi(\frac{180+0.5-200}{\sqrt{160}})=\Phi(-1.54)=1-\Phi(1.54)=1-0.9382=0.0618$$

（2）设至少需要装 n 部电话，才能使其中含有白色电话机的部数不少于 50 部的概率大于 0.95

即 $0.95<P\{X\ge50\}=1-\Phi(\frac{50-0.2n}{\sqrt{n\times0.2\times0.8}})=\Phi(\frac{0.2n-50}{\sqrt{n\times0.2\times0.8}})$

$\therefore \frac{0.2n-50}{\sqrt{n\times0.2\times0.8}}>1.645$，$n>304.9552$，从而取 $n\ge305$

19、一射手射击一次得分 X 是一个随机变量，具有分布律

X	8	9	10
P_k	0.01	0.29	0.70

（1）求独立射击 10 次总得分小于等于 96 的概率；

（2）求在 900 次独立射击中得分为 8 的射击次数大于等于 6 的概率。

解：（1）$\because E(X)=8\times0.01+9\times0.29+10\times0.70=9.69$

$$E(X^2)=8^2\times0.01+9^2\times0.29+10^2\times0.70=94.13$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)=94.13-9.69^2=0.2339$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10}X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(10\times9.69,10\times0.2339)=N(96.9,(1.53)^2)$$

设第 i 个射手射击一次得分为 X_i，X_i（$i=1,2,3,\cdots,10$）和 X 具有相同的分布且它们相互独立

$$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i\le96\right\}=\Phi\left(\frac{96-96.9}{1.53}\right)=\Phi(-0.59)=1-\Phi(0.59)=1-0.7224=0.2776$$

（2）设 X={900 次独立射击中得分为 8 分的射击次数 }，则 $X\sim B(900,0.01)$

$$\therefore P\{X\ge6\}=1-\Phi\left(\frac{6-0.5-900\times0.01}{\sqrt{900\times0.01\times0.99}}\right)=\Phi(1.17)=0.8790$$

第五章　样本及抽样分布

1、解：

（1） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=\begin{cases}2^4 e^{-2\sum_{i=1}^{4}x_i}, & x_i>0, i=1,2,3,4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（2） $P\left\{\frac{1}{2}<X_1<1, 0.7<X_2<1.2\right\}=P\left\{\frac{1}{2}<X_1<1\right\}P\{0.7<X_2<1.2\}$

$$=(e^{-1}-e^{-2})(e^{-1.4}-e^{-1.2})$$

（3） $E(X)=\frac{1}{2}, \theta=\frac{1}{2}, D(X)=\theta^2=\frac{1}{4}, E(\bar{X})=E(X)=\frac{1}{2}, D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{1}{16}.$

（4） $E(X_1X_2)=E(X_1)?E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$E\left[X_1(X_2-0.5)^2\right]=E(X_1)E(X_2-0.5)^2=\frac{1}{2}DX_2=\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$

（5） $D(X_1X_2)=E[(X_1X_2)^2]-\left[E(X_1X_2)\right]^2$

$=E(X_1^2X_2^2)-(\frac{1}{4})^2$

$=E(X_1^2)E(X_2^2)-(\frac{1}{4})^2$

$=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2$　　　$(\because E(X_i^2)=D(X_i)+(EX_i)^2)$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

2、解：

（1） $P\{\max(E(X_1X_2X_3)<85\}=\prod_{i=3}^{3}P\{X_i<85\}=\left[\Phi(\frac{85-75}{10})\right]^3=\left[\Phi(1)\right]^3=0.5955$

(2) $P\{(60<X_1<80)\cup(75<X_3<90)\}$

$=P(60<X_1<80)+P(75<X_3<90)-P(60<X_1<80)\cdot P(75<X_3<90)$

$=\Phi(\frac{80-75}{10})-\Phi(\frac{60-75}{10})+\Phi(1.5)-\Phi(0)-\left[(\Phi(0.5)-\Phi(-1.5))(\Phi(1.5)-\Phi(0))\right]$

$=0.6915+0.3392-1+0.4332-0.6247\times 0.4332$

$=0.7873.$

(3) $E(X_i)=E(X)=75, D(X_i)=D(X)=100$

$E(X_i^2)=D(X_i)+(EX_i)^2=5725$

$E(X_1^2X_2^2X_3^2)=E(X_1^2)E(X_2^2)E(X_3^2)=5725^3=1.8764\times 10^{11}$,

(4) $D(X_1X_2X_3)=E(X_1^2X_2^2X_3^2)-[E(X_1X_2X_3)]^2=5725^3-75^6$

$D(2X_1-3X_2-X_3)=4D(X_1)+9D(X_2)+D(X_3)=14D(X)=1400$

(5) $P\{X_1+X_2\le 148\}=P\{\bar{X}\le 74\}=\Phi(\frac{74-75}{10/\sqrt{2}})$

$=[1-\Phi(0.14)]=0.4443.$

3、解：(1) $P\{X_1=1, X_2=2, X_3=3\}=P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=2\}\cdot P\{X_3=3\}$

$$=\frac{5e^{-5}}{1!}\cdot\frac{5^2e^{-5}}{2!}\cdot\frac{5^3e^{-5}}{3!}=\frac{5^6e^{-15}}{12}\approx 0.000398$$

(2) $P\{X_1+X_2=1\}=P\{X_1=1, X_2=0\}+P\{X_1=0, X_2=1\}$

$$=\frac{5e^{-5}}{1!}\cdot\frac{e^{-5}}{0!}+\frac{e^{-5}}{0!}\cdot\frac{5e^{-5}}{1!}=10e^{-10}.$$

4、(1) 设总体 $X\sim N(52,(6.3)^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{36}$ 是来自 X 的容量为 36 的样本，求 $P\{50.8<\bar{X}<53.8\}$。

(2) 设总体 $X\sim N(12,4)$，$X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自 X 的容量为 5 的样本，求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率 .

解：(1) ∵ $X\sim N(52,(6.3)^2)$，则 $\bar{X}\sim N(52,\frac{(6.3)^2}{36})$

$$P\{50.8<\bar{X}<53.8\}=\Phi(\frac{53.8-52}{6.3/\sqrt{36}})-\Phi(\frac{50.8-52}{6.3/\sqrt{36}})=\Phi(1.7143)-\Phi(-1.1429)$$

$=\Phi(1.7143)+\Phi(1.1429)-1=0.9536+0.8729-1$

(2) $P\{|\bar{X}-\mu|>1\}=1-P\{|\bar{X}-\mu|\le 1\}$

$$=1-P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{5}}\right|\le\frac{1}{2/\sqrt{5}}\right\}=2-2\Phi(1.1180)=0.2628$$

5、求总体 N(20，3)的容量分别为 10，15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率 .

解：记$\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}Y_i$，$\bar{X}$与$\bar{Y}$独立，且

$$\bar{X}\sim N(20,\frac{3}{10}),\ \bar{Y}\sim N(20,\frac{3}{15}),\ 则\ \bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$$

$$\therefore P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>0.3\}=P\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{1/\sqrt{2}}\right|>0.3\times\sqrt{2}\}=2[1-\Phi(0.3\times\sqrt{2})]$$

$$\approx 2[1-\Phi(0.4243)]=2(1-0.6628)=0.6744$$

6、解：$\bar{x}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}x_i=74.92,$

$$s^2=\frac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})^2=201.5037$$

$s=14.1952.$

7、解：（1）$\because X_i\sim N(76.4,383),\therefore\frac{X_i-76.4}{\sqrt{383}}\sim N(0,1)$

$$\therefore U=\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-76.4)^2}{383}=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-76.4)^2}{383}\sim\chi^2(4)$$

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{383}=\frac{3\cdot\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{383}=\frac{3S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$$

由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$有$D[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}]=2(n-1)$

即：$(n-1)^2D(\frac{S^2}{\sigma^2})=2(n-1)$从而$D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

当$n=4$时，$D(S^2)=\frac{2}{3}\sigma^4.$

（2）$P\{0.711<U\le 7.779\}=P\{U\le 7.779\}-P\{U\le 0.711\}$

$=(1-P\{U>7.779\})-(1-P\{U>0.711\})$

$=P\{U>0.711\}-P\{U>7.779\}$

$=0.95-0.1=0.85$

$P\{0.352<W\le 6.251\}=P\{W>0.352\}-P\{W>6.251\}$

$=0.95-0.1=0.85.$

8、解：证$\because X\sim t(n)$

$\therefore X$ 具有如下结构： $X=\dfrac{U}{\sqrt{Y/n}}$

其中 $U\sim N(0,1), Y\sim \chi^2(n)$, 且 U 和 Y 相互独立，从而

$X^2=\dfrac{U^2}{Y/n}, U^2\sim \chi^2(1)$, 且 U^2 与 Y 也相互独立,

故 $X^2\sim F(1,n)$.

第六章　参数估计

1、解： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b} & 0<x<b\\ 0 & 其他\end{cases}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^b x\cdot\dfrac{1}{b}dx=\dfrac{b}{2}$

令 $A_1=\mu_1$，即 $\overline{X}=\dfrac{b}{2}$，解得 b 的矩估计量为 $\hat{b}=2\overline{X}$

$\hat{b}=2\overline{x}=\dfrac{2}{9}(0.5+0.6+0.1+1.3+0.9+1.6+0.7+0.9+1.0)=1.689$

2、设总体 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$ 参数 θ 未知

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X，的样本，求 θ 的矩估计量。

解：$\because E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}dx=\dfrac{x^2}{\theta}\Big|_0^{\theta}-\dfrac{2x^3}{3\theta^2}\Big|_0^{\theta}=\dfrac{\theta}{3}$

令 $A_1=\mu_1$，即 $\overline{X}=\dfrac{\theta}{3}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=3\overline{X}$

3、设总体 $X\sim B(m,p)$，参数 $m,p(0<p<1)$ 均未知， $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，

求 m 与 p 的矩估计量（对于具体样本值， 若求得的 $\hat{m}$ 不是整数， 则与 $\hat{m}$ 最接近的整数作为 m 的估计）。

解：（1）由 $\begin{cases}\mu_1=E(X)=mp\\ \mu_2=E(X^2)=D(X)+E^2(X)=mp(1-p)+(mp)^2\end{cases}$

令 $\begin{cases} A_1 = \mu_1 \\ A_2 = \mu_2. \end{cases}$，即 $\begin{cases} A_1 = mp \\ A_2 = mp(1-p) + (mp)^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} p = 1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1} \\ m = \dfrac{\mu_1}{p} \end{cases}$

$\therefore m, p$ 的矩估计量为 $\begin{cases} \hat{p} = 1 - \dfrac{A_2 - A_1^2}{A_1} = 1 - \dfrac{(n-1)S^2}{n\overline{X}} \\ \hat{m} = \dfrac{\overline{X}}{\hat{p}} \end{cases}$

4、解：（1）$E(X) = \lambda$　令 $A_1 = \mu_1$，即 $\overline{X} = \lambda$，解得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \overline{X}$

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} (x = 0,1,2,\cdots)$$

$$P\{X = x_i\} = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} (x_i = 0,1,2,\cdots)$$

似然函数

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = (e^{-\lambda})^n \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + (\sum_{i=1}^{n} x_i) \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0$$

解得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

（2）由（1）知 $\hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{1}{10}(6+4+9+6+10+11+6+3+7+10) = 7.2$

5、(1) 设 X 服从参数为 $p(0 < p < 1)$ 的几何分布，其分布律为 $P\{X = x\} = (1-p)^{x-1} p$，$x = 1,2,\cdots$，参数 p 未知。设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一个样本值。求 p 的最大似然估计值。

（2）一个运动员，投篮的命中率为 $p(0 < p < 1$，未知)，以 X 表示他投篮直至投中为止所需的次数。他共投篮 5 次得到 X 的观察值为

5　1　7　4　9

求 p 的最大似然估计值。

解：（1）似然函数

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$$

$$\ln L(p)=n\ln p+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\ln p=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}{1-p}\overset{令}{=}0,\ 解得\ p=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$$

故 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$

（2）$\because \bar{x}=\frac{5+1+7+4+9}{5}=\frac{26}{5}$，$\therefore\ \hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{5}{5+1+7+4+9}=\frac{5}{26}$

6、解：由 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

（1）σ^2已知，似然函数 $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\ln L(\mu)=-n\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(2\mu-2x_i)=0$$

即 $\sum_{i=1}^{n}(\mu-x_i)=n\mu-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

解得 μ 的最大似然估计值 $\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$

（2）μ已知，似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\frac{d}{d\sigma^2}\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

解得 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$，故 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i)^2$.

7、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一相应的样本值。

（1）总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ $0 < \theta < +\infty$，求参数 θ 的最大似然估计量和估计值。

（3）设 $X \sim B(m, p)$， m已知， $p(0 < p < 1)$未知，求 p 的最大似然估计值。

解：（1）似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i}{\theta}}$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - 2\ln\theta - \frac{x_i}{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - 2n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{令}}{=} 0，\text{解得 } \theta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}\bar{x}$$

故 θ 的最大似然估计值为： $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}\bar{x}$

故 θ 的最大似然估计量为： $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}\overline{X}$

（2）似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x_i}{\theta}}$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[2\ln x_i - \ln(2\theta^3) - \frac{x_i}{\theta}\right] = \sum_{i=1}^{n} 2\ln x_i - n\ln(2\theta^3) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{2\theta^3}\cdot 6\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{令}}{=} 0，\text{解得 } \theta = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{3}\bar{x}$$

故参数 θ 的最大似然估计值为： $\hat{\theta} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{3}\bar{x}$，估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{3}\overline{X}$

（3）$\because X\sim B(m,p)$，m已知，$\therefore P\{X=x_i\}=C_m^{x}p^{x}(1-p)^{m-x}$　　$x=1,2,\cdots,m$

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}$$

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}[\ln C_m^{x_i}+x_i\ln p+(m-x_i)\ln(1-p)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln C_m^{x_i}+\ln p\sum_{i=1}^{n}x_i+\ln(1-p)(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{nm-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}\overset{令}{=}0,\ 即\ \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p(1-p)}=\frac{nm}{1-p}$$

解得 $p=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{mn}=\dfrac{\bar{x}}{m}$

故 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{mn}=\dfrac{\bar{x}}{m}$

8、解：似然函数为

$$L(\theta)=P\{X=1\}\cdot P\{X=2\}\cdot P\{X=1\}=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$.

9、解：

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i,\alpha,\beta)\prod_{i=1}^{n}f_{Y_i}(y_i,\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\alpha-\beta)^2}{2\sigma^2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_i-\alpha+\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{2n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha-\beta)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha+\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\alpha,\beta)=-n\ln(2\pi)-2n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha-\beta)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha+\beta)^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(\alpha,\beta)=\frac{2}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha-\beta)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha+\beta))=0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\ln L(\alpha,\beta)=\frac{2}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha-\beta)-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha+\beta)\right)=0$$

联立　解得 $\alpha=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2},\ \beta=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$,

故 α,β 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2},\ \hat{\beta}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$.

10、解：（1）由 $\mu_1=EX=\theta/2$，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\bar{X}$

$$E(\hat{\theta})=2E(\bar{X})=2E(X)=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量。

（2） $EY=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda$

令 $\lambda=\bar{Y}$ 得 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}=\bar{Y}$.

$$EZ=E(3Y+Y^2)=3EY+E(Y^2)$$

$\because$ $EY=\lambda$， $E(Y^2)=D(Y)+(EY)^2=\lambda+\lambda^2$

$\therefore$ $E(Z)=3\lambda+(\lambda+\lambda^2)=4\lambda+\lambda^2$

（3） $U=3\bar{Y}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$

$$E(U)=E(3\bar{Y}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=3E(\bar{Y})+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2)=3\lambda+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda+\lambda^2)=4\lambda+\lambda^2=E(Z)$$

因此 U 是 $E(Z)$ 的无偏估计 .

11、已知 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知，设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$$

$$T_2=\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5}$$

$$T_3=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$$

（1）指出 T_1,T_2,T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量。

（2）在上述的无偏估计量中指出哪一个较为有效。

解：（1）由题知 $E(X_i)=\theta,\quad D(X_i)=\theta^2$

$$E(T_1)=E[\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)]=\frac{1}{6}(EX_1+EX_2)+\frac{1}{3}(EX_3+EX_4)=\theta$$

$$E(T_2)=E(\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5})=2\theta$$

$$E(T_3)=E(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4})=\theta$$

$\therefore T_1,T_3$ 是 θ 的无偏估计量。

（2）

$$D(T_1)=D\left[\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)\right]=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[D(X_3)+D(X_4)]=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_3)=D(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4})=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]=\frac{1}{4}\theta^2$$

$\therefore D(T_3)\le D(T_1)$，故 T_3 比 T_1 更有效。

12、解：$X \sim N(\mu,1296)$，$n=27,\ \bar{x}=1478$

（1）μ 置信水平为 0.95，$1-\alpha=0.95,\alpha=0.05$ 查表得 $z_{\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ 即

$z_{0.025}=\Phi^{-1}(0.975)=1.96$

$\therefore \mu$ 的置信水平为 0.95 的置信区间：

$$(\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(1478\pm\frac{36}{\sqrt{27}}\times1.96)=(1478\pm13.58)=(1464.42,1491.58)$$

（2）μ 置信水平为 0.90，$1-\alpha=0.90,\alpha=0.1$ 查表得 $z_{\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ 即

$z_{0.05}=\Phi^{-1}(0.95)=1.645$

$\therefore \mu$ 的置信水平为 0.90 的置信区间：

$$(\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(1478\pm\frac{36}{\sqrt{27}}\times1.65)=(1478\pm11.40)=(1466.60,1489.40)$$

13、以 X 表示某种小包装糖果的重量（以 g 计）设 $X \sim N(\mu,4)$，今取得样本（容

量 n=10）

55.95 56.54 57.58 55.13 57.48 56.06 59.93 58.30 52.57 58.46

（1）求 μ 的最大似然估计值；

（2）求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：$\because X \sim N(\mu,4)$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{8}}$

（1）似然函数 $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{8}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{8}}$

$$\ln L(\mu)=-n\ln(2\sqrt{2\pi})-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(2\mu-2x_i)=0$，即 $\sum_{i=1}^{n}(\mu-x_i)=n\mu-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

解得 $\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$，而

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(55.95+56.54+57.58+55.13+57.48+56.06+59.93+58.30+52.57+58.46)=56.8$$

故 μ 的最大似然估计值为：$\hat{\mu}=56.8$

（2）$\because$ μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间：$(\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}})$

$\because \bar{x}=56.8$

$1-\alpha=0.95$，查表得 $Z_{\frac{\alpha}{2}}=\Phi^{-1}(0.975)=1.96$

$\therefore$ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为：

$$(56.8\pm\frac{2}{\sqrt{10}}\times1.96)=(56.8\pm1.24)=(55.56,58.04)$$

14、解：

（1）σ^2 的无偏估计值 $\hat{\sigma}^2=s^2=(1.381)^2=1.9072$

μ 的无偏估计值 $\hat{\mu}=\bar{x}=14.72$

（2）$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

μ 置信水平为 0.90, $1-\alpha=0.90,\alpha=0.1$ 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(29)=1.6991$

$\therefore$ μ 的置信水平为 0.90 的置信区间：

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(14.72\pm\frac{1.381}{\sqrt{30}}\times1.6991)=(14.72\pm0.428)=(14.292,15.148)$$

15、一油漆商希望知道某种新的内墙油漆的干燥时间，在面积相同的 12 块内墙上做实验，记录了干燥时间（以分计）得样本均值 $\bar{x}=66.3$ 分，样本标准差 $s=9.4$ 分。设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，求干燥时间的数学期望的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间：$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

$\because$ $\bar{x}=66.3$，$s=9.4$

$1-\alpha=0.95$，$n=12$，查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(11)=2.2010$

$\therefore$ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为：

$$(66.3\pm\frac{9.4}{\sqrt{12}}\times2.2010)=(66.3\pm5.97)=(60.33,72.27)$$

16、解：由题知，$n=32,\bar{x}=19.07,s=3.245$

μ 置信水平为 0.95, $1-\alpha=0.95,\alpha=0.05$ 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(31)=2.0395$

$\therefore$ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间：

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(19.07\pm\frac{3.245}{\sqrt{32}}\times2.0395)=(19.07\pm1.17)=(17.9,20.24)$$

17、设 X 是春天捕到得某种鱼的长度（以 m 计）设 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知。下面是 X 的一个容量为 $m=13$ 的样本：

13.1 5.1 18.0 8.7 16.5 9.8 6.8 12.0 17.8 25.4 19.2 15.8 23.0

（1）求 σ^2 的无偏估计量；

（2）求 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：$\because$ $N(\mu,\sigma^2)$

$$\bar{x}=\frac{1}{13}(13.1+5.1+18.0+8.7+16.5+9.8+6.8+12.0+17.8+25.4+19.2+15.8+23.0)=14.7077$$

$$s^2=\frac{1}{13-1}\sum_{i=1}^{13}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{12}\left[(13.1-14.7077)^2+\cdots+(23.0-14.7077)^2\right]=37.75$$

$\therefore\ \sigma^2$ 的无偏估计量为： $\hat{\sigma}^2=s^2=37.75$

$\because\ \sigma^2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为： $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$1-\alpha=0.95$ ， $n=13$ ， 查表得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(12)=23.337$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(12)=4.404$

$\therefore\ \sigma$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为： $\left(\sqrt{\frac{12\times37.75}{23.337}},\sqrt{\frac{12\times37.75}{4.404}}\right)=(4.406.10.142)$

18、解：由题知 $\bar{x}_A=81.31$, $s_A^2=60.76$, $\bar{x}_B=78.61$, $s_B^2=48.24$, $n_1=9, n_2=15$

参数未知， $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间

$$\left(\bar{x}_A-\bar{x}_B\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_A^2+(n_2-1)s_B^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{8\times60.76+14\times48.24}{9+15-2}}=7.27$

查表得 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(22)=2.0739$

得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(81.31-78.61\pm2.0739\times7.27\times\sqrt{8/45})=(2.7\pm6.357)=(-3.657,9.057)$$

19、解：由题知 $n_1=9, n_2=11$ $1-\alpha=0.95$

查表得 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(8,10)=3.85$,

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(8,10)=\frac{1}{F_{0.025}(10,8)}=\frac{1}{4.30}$$

由 $s_X^2=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)$

计算得 $\bar{x}=0.69,\ s_X^2=\frac{1}{8}(5.22-9\times0.69^2)=0.1169$，

$\bar{y}=1.3636,\ s_Y^2=\frac{1}{10}(22.14-11\times1.3636^2)=0.1687$

$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{s_X^2}{s_Y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_X^2}{s_Y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)=(0.148,2.446)$$

20、解：（1） $n_1=8,n_2=10\ \bar{x}=15.75,\quad S_X^2=46.21,\quad \bar{y}=23.3,\quad S_Y^2=92.68$

单侧置信区间 $\left(0,\frac{s_X^2}{s_Y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}\right)$ 查表得 $F_{0.95}(7,9)=\frac{1}{F_{0.05}(9,7)}=\frac{1}{3.68}$

$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信上限

$$\overline{\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}}=\frac{s_X^2}{s_Y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}=\frac{46.21}{92.68}\times3.68=1.835$$

（2） σ_X 的置信水平为 0.95 的单侧置信区间 $\left(0,\frac{\sqrt{n-1}s_X}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right)$

查表得 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(7)=2.167$， σ_X 的置信水平为 0.95 的单侧上限为

$$\bar{\sigma}_X=\frac{\sqrt{n-1}s_X}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}=\frac{\sqrt{7\times46.21}}{\sqrt{2.167}}=12.22$$

21、解： μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信区间 $(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),\infty)$

由 17 题知 $\bar{x}=14.7076,s=6.144,t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(12)=1.7823$

μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限为 $\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=11.67$

22、解：由 18 题知 $\bar{x}_A=81.31,\quad s_A^2=60.76,\quad \bar{x}_B=78.61,\quad s_B^2=48.24,\quad s_w=7.27$，

$n_1=9,n_2=15$，查表得 $t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.10}(22)=1.3212$，

$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.90 的单侧置信上限

$$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{x}_A-\bar{x}_B+t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\cdot s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=2.7+4.0499=6.75$$

第七章　假设检验

1、一车床工人需要加工各种规格的工件，已知加工一工件所需的时间服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，均值为 18 分，标准差为 4.62 分。现希望测定，是否由于对工作的厌烦影响了他工作效率，今测得以下的数据：

20.01　19.32　18.76　22.42　20.49　25.89　20.11　18.97　20.90

试依据这些数据（取显著性水平 $\alpha=0.05$），检验假设：$H_0:\mu\le 18$，$H_1:\mu>18$。

解：设 $H_0:\mu\le 18$，$H_1:\mu>18$.

这是 σ^2 已知的右边检验问题，选统计量：$z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$\because \alpha=0.05$，查表得：$z_{\alpha}=z_{0.05}=1.645$

$\therefore$ 当 H_0 为真时，拒绝域为：$\left\{z=\dfrac{\bar{x}-x_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_{0.05}=1.645\right\}$

$$\because \bar{x}=\frac{1}{9}(20.01+19.32+18.76+22.42+20.49+25.89+20.11+18.97+20.90)$$
$$=20.7633$$

$\sigma=4.62$，$n=9$，$\mu_0=18$

$$\therefore z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{20.7633-18}{4.62/\sqrt{9}}\approx 1.7944>1.645$$

$\therefore$ 拒绝 H_0，即由于对工作的厌烦影响了他工作效率。

2、《美国公共健康》杂志（1994 年 3 月）描述涉及 20143 个个体的一项大规模研究，文章说从脂肪中摄取热量的平均百分比是 38.4%（范围是 6%到 71.6%），在某一大学医院进行一项研究以判定在该医院中病人的平均摄取量是否不同于 38.4%，抽取了 15 个病人测得平均摄取量为 40.5%，样本标准差为 7.5%。设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知。试取显著性水平 $\alpha=0.05$ 检验假设 $H_0:\mu=38.4$，$H_1:\mu\ne 38.4$

解：设 H_0： $\mu = 38.4$， H_1：$\mu \neq 38.4$

这是 σ^2 未知关于 μ 的双边检验，检验统计量为： $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$\because \alpha = 0.05$， $n = 15$， 查表得： $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448$

$\therefore$ 当 H_0 为真时，拒绝域为： $\left\{ |t| = \left|\dfrac{\overline{x} - x_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > t_{0.025}(14) = 2.1448 \right\}$

又由题知： $\overline{x} = 40.5\%$， $s = 7.5\%$， $\mu_0 = 38.4\%$

$\therefore \quad |t| = \left|\dfrac{40.5\% - 38.4\%}{7.5\%/\sqrt{15}}\right| \approx 1.0844 < 2.1448$

故应接受 H_0，即认为脂肪摄取量的平均百分比为 38.4%。

3、自某种铜溶液测得 9 个铜含量的百分比的观察值，算得样本均值为 8.3，标准差为 0.025，设样本来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2 未知。试依据这一样本取显著性水平 α=0.01 检验 H_0：$\mu \geq 8.42$，H_1：$\mu < 8.42$。

解：设 H_0：$\mu \geq 8.42$， H_1：$\mu < 8.42$

这是 σ^2 未知关于 μ 的左边检验，检验统计量为： $t = \dfrac{X - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$\because \quad \alpha = 0.01$， $n = 9$， 查表得： $t_{\alpha}(n-1) = t_{0.01}(8) = 2.8965$

$\therefore$ 当 H_0 为真时，拒绝域为： $\left\{ t = \dfrac{x - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{0.01}(8) = -2.8965 \right\}$

又由题知： $\overline{x} = 8.3$， $s = 0.025$， $\mu_0 = 8.42$

$\therefore \quad t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{8.3 - 8.42}{0.025/\sqrt{9}} = -14.4000 < 2.8965$

故应拒绝 H_0，即认为 $\mu < 8.42$。

4、检验假设： H_0： $\mu = 72.46$， H_1： $\mu \neq 72.46$

解：这是 σ^2 未知关于 μ 的双边检验

检验统计量为： $t = \dfrac{X - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

在 $\because \alpha = 0.05$， $n = 16$， $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$

$\therefore$ 拒绝域为： $\left\{ |t| = \left| \dfrac{\bar{x} - x_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq t_{0.025}(15) = 2.1315 \right\}$

又由题知： $\bar{x} = 72.69$

$s = 8.34, \quad \mu_0 = 72.64$

$$\therefore \quad t = \left| \frac{72.69 - 72.64}{8.34 / \sqrt{16}} \right| \approx 0.024 < 2.1315$$

接受 H_0，即可认为某地区成年男子的平均体重为 72.64。

5、检验假设： $H_0: \mu \leq 200$， $H_1: \mu > 200$

解：这是 σ^2 未知关于 μ 的右边检验

检验统计量为： $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

$\because \alpha = 0.05$， $n = 10$， $t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(9) = 1.8331$

$\therefore$ 拒绝域为： $\left\{ t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} > t_{0.05}(9) = 1.8331 \right\}$

又由题知： $\bar{x} = \dfrac{1}{10}(208 + 180 + 232 + 168 + 212 + 208 + 254 + 229 + 230 + 181) = 210.2$

$s^2 = \dfrac{1}{9}(2.2^2 + 30.2^2 + 21.8^2 + 42.2^2 + 1.8^2 + 2.2^2 + 43.8^2 + 18.8^2 + 19.8^2 + 29.2^2) = 744.18$

$s = 27.28$

$\mu_0 = 200$

$$\therefore \quad t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{210.2 - 200}{27.28 / \sqrt{9}} \approx 1.1217 < 1.8331$$

接受 H_0，即认为 $\mu \leq 200$。

6、检验假设： $H_0: \sigma^2 = 5000$， $H_1: \sigma^2 \neq 5000$，

解：这是 μ 未知，关于 σ^2 的双边检验

检验统计量为： $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$\because \alpha = 0.02$， $n = 26$， $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.523$， $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.313$

$\therefore$ 拒绝域为： $\{\chi^2 \le 11.523 或 \chi^2 \ge 44.313\}$

又由题知： $s^2 = 7200$ $\sigma_0^2 = 5000$

$$\therefore \quad \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{25 \times 7200}{5000} = 36$$

$\therefore$ χ^2 未落入拒绝域，故接受 H_0，认为某牌号电池的寿命的标准差为 5000 小时。

7、某种标准类型电池的容量（以安 -时计）的标准差 $\sigma=1.66$，随机地取 10 只新类型的电池测得它们的容量如下

146 141 135 142 140 143 138 137 142 136

设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 未知，问标准差是否有变动，即需检验假设（取 $\alpha=0.05$）：H_0：$\sigma^2=1.66^2$，H_1：$\sigma^2 \ne 1.66^2$

解：设 H_0：$\sigma^2=1.66^2$，H_1：$\sigma^2 \ne 1.66^2$

这是 μ 未知，关于 σ^2 的双边检验，检验统计量为： $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$\alpha=0.05$，$n=10$，查表得： $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=19.022$

$\therefore$ 当 H_0 为真时，拒绝域为： $\{\chi^2 \le \chi^2_{0.975}(9)=2.7 或 \chi^2 \ge \chi^2_{0.025}(9)=19.022\}$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(146+141+135+142+140+143+138+137+142+136)=140$$

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\left[(146-140)^2+(141-140)^2+\cdots+(136-140)^2\right]$$

$$= \frac{1}{9}(36+1^2+25+4+0+9+4+9+4+16)=12, \quad \sigma_0^2=166^2$$

$$\therefore \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times 12}{1.66^2} \approx 83.824 \ge 19.022$$

故应拒绝 H_0，认为标准差有变动。

8、检验假设： H_0：$\sigma \le 140$，H_1：$\sigma > 140$

解：这是 μ 未知，关于 σ^2 的右边检验，则

检验统计量为： $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$\because$ $\alpha=0.05$，$n=25$，$\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.05}(24)=36.415$

$\therefore$ 拒绝域为： $\{\chi^2 \ge 36.415\}$

又由题知： $s^2=154.3494^2$　　$\sigma_0^2=140^2$

$$\therefore\quad \chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{24\times154.3494^2}{140^2}=29.172<36.415$$

$\therefore$ χ^2 未落入拒绝域，故接受 H_0，认为 $\sigma\le140$

9、由某种铁的比热的 9 个观察值得到样本标准差 $s=0.0086$设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知。试检验假设（ $\alpha=0.05$）

$$H_0:\sigma\ge0.0100,\quad H_1:\sigma<0.0100$$

解：设 $H_0:\sigma\ge0.0100$，$H_1:\sigma<0.0100$

这是 μ未知，关于 σ^2 的左边检验，则检验统计量为： $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$\alpha=0.05$，$n=9$，查表得： $\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.95}(8)=2.733$

$\therefore$ 当 H_0 为真时，拒绝域为： $\{\chi^2<\chi^2_{0.95}(8)=2.733\}$

又由题知： $s^2=0.0086^2$，$\sigma_0^2=0.01^2$

$$\therefore\ \chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times0.0086^2}{0.01^2}=5.9186>2.733$$

故接受 H_0，认为 $\sigma\ge0.01$

10、(1)检验假设： $H_0:\mu\ge3315$， $H_1:\mu<3315$

这是 σ^2 未知关于 μ 的左边检验

检验统计量为： $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$\because$ $\alpha=0.1$， $n=30$， $t_\alpha(n-1)=t_{0.1}(29)=1.3114$

$\therefore$ 拒绝域为： $\{t<-1.3114\}$

又由题知： $\bar{x}=3189$， $s=488$， $\mu_0=3315$

$$\therefore\quad t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{3189-3315}{488/\sqrt{30}}\approx-1.4142<-1.3114$$

拒绝 H_0，即认为 $\mu<3315$

(2) 检验假设： $H_0:\sigma\le525$， $H_1:\sigma>525$

这是 μ 未知，关于 σ^2 的右边检验，则

检验统计量为： $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$\because\ \alpha=0.05$， $n=30$， $\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.05}(29)=42.557$

$\therefore$ 拒绝域为： $\{\chi^2\geq 42.557\}$

又由题知： $s^2=488^2$ $\sigma_0^2=525^2$

$$\therefore\quad \chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{29\times 488^2}{525^2}=25.056<42.557$$

$\therefore$ χ^2 未落入拒绝域，故接受 H_0，认为 $\sigma\leq 525$

11、检验假设： H_0 ： $\mu_1\leq\mu_2$， H_1 ： $\mu_1>\mu_2$

解：这是 σ^2 未知，关于总体均值的比较

检验统计量为： $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

$\because\ \alpha=0.05$， $n_1=9$， $n_2=4$， $t_{0.05}(n_1+n_2-2)=t_{0.05}(11)=1.7959$

$\therefore$ 拒绝域为： $\left\{t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}}}\geq t_{0.05}(11)=1.7959\right\}$

由题， A 班、 B 班考试成绩的样本均值和样本方差分别为：

$\bar{x}=80$， $s_1^2=110.25$

$\bar{y}=65$， $s_2^2=174$

又

$$s_{\omega}^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{8\times 110.25+3\times 174}{9+4-2}=127.636,\qquad s_{\omega}=11.2976$$

$\therefore$ 现观测值 $t=2.2094>1.7959$

$\therefore$ 拒绝 H_0，认为 $\mu_1>\mu_2$

12、检验假设： H_0 ： $\mu_1\geq\mu_2$， H_1 ： $\mu_1<\mu_2$

解：这是 σ^2 未知，关于总体均值的比较

检验统计量为： $t=\dfrac{X-Y}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

∵ $\alpha=0.05$， $n_1=13$， $n_2=13$， $t_{0.05}(n_1+n_2-2)=t_{0.05}(24)=1.7109$

∴ 拒绝域为： $\left\{t=\dfrac{x-y}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{13}}}\le -t_{0.05}(24)=-1.7109\right\}$

由题，晴天、雨天水的混浊度的样本均值和样本方差分别为：

$\bar{x}=6.177$， $s_1^2=17.5003$

$\bar{y}=9.477$， $s_2^2=33.6853$

又

$$s_\omega^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{13\times 17.5003+13\times 33.6853}{13+13-2}=27.7255, s_\omega=5.2655$$

∴ 现观测值 $t=-1.5978>-1.7959$

∴ 接受 H_0， 认为 $\mu_1\ge\mu_2$。