大气流体力学思考题与习题集

（大气科学专业适用）

李 国 平 编

成都信息工程学院大气科学学院

二００一年六月编写 二００五年二月修订

目　录

一、流体力学基础

思考题

(一)名词解释

1 流体 2 连续介质假设 3 拉格朗日变量 4 欧拉变量 5 个别变化 6 局地变化 7 迁移变化 8 定常流场 9 迹线 10 流线 11 涡度 12 环流 13 散度 14 体涨速度 15 形变率 16 切形变 17 法形变 18 形变张量 19 速度势函数 20 流函数 21 流点

(二)解释、回答问题

1　设稀薄气体分子自由程是几米的数量级，问下列两种情况连续介质假设是否成立?

(1)人造卫星在飞离低空大气层进入高空稀薄气体层时。

(2)假想地球在这样的稀薄气体中运动。

2　已知在拉氏观点和欧拉观点下分别有速度函数 $V=x_0^2+y_0^2+t^2$ 和 $V=x^2+y^2+t^2$，说明它们分别表示的物理意义及它们之间的异同。

3　迹线和流线有什么区别?什么条件下两者是重合的?

4　流体运动的涡度的定义和物理意义是什么?涡度和速度环流、角速度有什么关系?

5　什么是散度?散度和体积膨胀速度有什么关系?

6　何谓速度势?在什么条件下，流体运动可引入速度势?为什么要引入速度势?

7　什么是二维运动?什么是平面无辐散运动?引入流函数的条件是什么?

习 题

1　已知速度场分布为：$u = yzt, v = zxt, w = 0$

求时间 t=20 时，质点在点(1，2，2)处的加速度是多少?

2　给定速度场

$$u=x^2y，v=-3y，w=2z^2$$

试求：

(1)流动是几维运动?

(2)流动是否为不可压流动?

(3)在空间点(3，1，2)上流点的加速度。

3、设流体运动由下列欧拉变数下的速度函数

$u = x + t, v = -y + t, w = 0$ 给出。求 t=0 时通过(-1，-1，1)点的流线及轨迹。

4　给定拉格朗日型流场

$$x = ae^{-t/k}, y = be^{t/k}, z = ce^{t/k} \quad (k = const. \neq 0)$$

试求该流场

(1)是否为定常流场?

(2)是否为不可压缩流场?

(3)是否为有旋流场?

5　已知速度场

$$u=y+z，v=z+x，w=x+y$$

试以初始时刻各流点的坐标(a，b，c)作为拉氏变量去描述流体的运动。

6　设流体运动以欧拉变数给出

$$u=ax+t^2，v=by-t^2，w=0\ (a+b=0)$$

将此转换为拉氏变数，并用两种变数分别求流场的加速度。

7　流体运动由拉氏变数表达为

$x=x_0e^t$，$y=y_0e^{-t}$，$z=z_0$(x_0, y_0, z_0均为常数)

(1)求 t=0 时，流点的初始位置。

(2)当 t=1 时，位置为(e,1/e，0)及(1，1，1)的流体质点，其初始位置各位于何处?

(3)初始位置为(0，0，0)及(1，1，1)的流体质点，求它们以后各时刻的速度和加速度。

(4)求轨迹曲线方程，并作图。

8　北京与南京相距 1000km，某日北京气温为 10℃，南京气温为 15℃，北京向南京的气流速度为 $12m\cdot s^{-1}$。

(1)若空气流动过程中温度不变，南京的气温平均每日下降多少?

(2)若空气流动过程中每日温度升高 2.5℃，试求南京每日气温的变化。

9　Given: $u=3x+2yz+u_0, v=4xy+3t+v_0, w=0$, where u_0, v_0 are constants

(1)Is this a Eulerian or a lagrargian description ?

(2)What is the local acceleration ?

(3)What is the advection acceleration ?

(4)What is the Eulerian derivative ?

10　写出涡线与流线重合的条件。并判断下列流场的涡量与速度向量是否平行。

$u=-ky, v=kx, w=[\varphi(z)-2k^2(x^2+y^2)]^{1/2}$ （k 是常数）。

11　以 Lagrange 变数(a，b，c)给出流体的运动规律为

$$u=ae^{-2t}, v=b(1+t)^2, z=ce^{2t}(1+t)^{-2}$$

(1)求流体的速度场。

(2)问流动是否定常?

(3)求 t=0 时过空间点(1，1，1)点的流线。

(4)求 t=0 时过空间点(1，1，1)点的迹线。

12　已知一平面流场，流速分布为 u=1-y，v=t(t 为时间)

(1)是否存在速度势、流函数，若存在，试求出它们。

(2)求 t=1 时，过点(0，0)的流体的流线方程和迹线方程。

13　已知平面不可压流场的流函数为$\psi = ax^2 - ay^2$，其中 a 为常数。

(1)证明该流动无旋。

(2)求流动的速度势。

(3)求过点(x,y)=(1,2)的流线方程。

14　一不可压流体的流动，x 方向的速度分量为

$u = ax^2 + by$　(a,b 均为常数)

z 方向的速度分量为零，设 y 方向的速度分量为 v，且 y=0 处 v=0，求 y 方向的速度分量的表达式。

15　已知x－y平面上的不可压平面流动，y方向的速度分量为$v=y^2-2x+2y$，求x方向的速度分量。

16　考虑一流场，流函数为 ψ=10xy+17。

(1)流动是否为平面不可压流动?

(2)流动是否无旋?

17　平面不可压流动的势函数为 $\psi=ax^2+bxy-ay^2$。

(1)求流函数 ψ。

(2)求空间点(1，0)上流点的加速度。

18　已知下列平面流动的速度分布

(1)　$u = \dfrac{cx}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{cy}{x^2 + y^2}$

(2) $u=\frac{-cy}{x^2+y^2},v=\frac{cx}{x^2+y^2}$

求其速度势和流函数。

19　流体运动由欧拉变数表示为

$$u=kx，v=ky，w=0$$

(1)求加速度场。

(2)求流线方程并作图。

(3)求 t=0 时通过(1，2，1)点的流体质点的轨迹方程。

(4)求涡度场，散度场和形变率。

20　已知流体运动的拉氏变数为

$$x=x_0e^{-2kt}，y=y_0e^{2kt}，z=z_0e^{kt}$$

(1)求速度场，并说明是否定常。

(2)求加速度场。

(3)判断是否存在速度势，是否存在流函数。

21　设平面定常无旋运动的速度势 $\phi==\frac{1}{2}k(x^2-y^2)$，k 为常数，试证明流体运动是无辐散的，求出流函数，并图示之。

22　设速度场为

$$u=-x^2y，v=x^2y，w=0$$

(1)求涡度，散度和形变率。

(2)求依逆时针方向绕圆$x^2+y^22=a^2$一周的速度环流。

(3)求速度势和流函数。

23　设$u=u_0$，$v=v_0\cos ax$，其中u_0，v_0及a都是常数。

(1)试推导水平气流的流线方程，并作出流线图。

(2)计算此运动的散度和涡度。在这一流型中，何处的涡度最大?

二、流体运动方程组

思考题

(一)名词解释

1　不可压流体　2　无辐散流体　3　均匀不可压流体　4　密度定常流体　5　均质流体　6　质量力　7　表面力　8　应力张量　9　法应力　10　切应力 11　N-S 方程　12 欧拉运动方程　13　静力方程　14　伯努利方程　15　平面库脱(Couette)流动　16　平面泊苏叶(Poseuille)流动

习　题

1　在两间距为 2h的固定无界平板间，有两层厚度均为h的液体，上下层液体分别具有粘性系数μ_1和μ_2，密度ρ_1和ρ_2，且$\rho_1<\rho_2$。若两种液体在恒压力梯度力dp/dx=K的作用下沿平板方向作平面定常直线运动，试导出平板间的速度分布。

2　设两无界平板间充满不可压流体，且作定常、直线运动，两板间距离为 h，上板以常速 U 沿 x 方向在均匀压力差(即$\dfrac{\partial p}{\partial x}$=const)下运动，下板固定，即有边界条件：z=0, u=0, z=h, u=U。试证流速场为：

$$u=\frac{z}{h}U-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{z}{h}(1-\frac{z}{h})$$

3　不可压粘性流体在重力作用下沿倾斜无界平壁作定常、平行直线运动。上表面为自由面，压力为P_a，平壁与水平面倾角为α，流体密度为ρ，粘性系数为μ，深

度为h，求压力场，速度场和粘性应力分布。

4　考虑两块无限平板间的粘性不可压流体的定常层流运动。设两板间距离为 h，流体的密度和粘性系数分别为ρ和μ，不计流体的质量力。

(1)若沿板向的压力梯度为常数，两板不动。

(2)若沿板向没有压力梯度，上板不动，下板以常数U_1在其自身平面内沿流动方向作直线运动。

(3)若沿板向压力梯度为常数，上板不动，下板以常数U_1在其自身平面内沿流动方向作直线运动。试分别求上述三种情况下板间流体的速度分布。

5　考虑相距为 h 的两固定的平行平板间均密度流体的定常层流运动。设流体的粘性系数为μ，长度 L 上的压力落差为ΔP，平板与水平间的夹角为α，流体的密度为ρ，求流体的速度分布、通过每一截面的体积流量和平均流速。

6　如果上题中上板以速度 U 在自身平面内沿流动方向作等速运动，是结果又如何?

7　设有两平行板，间距为 d。下板静止，上板以匀速 U 移动，现有粘性不可压流体在此平行板间作定常直线运动，试求

(1)流体的速度。

(2)流函数和速度势。

8、粘性μ、密度ρ、厚度 h 的液体层在重力作用下沿一斜板作稳定流动，斜板与水平面倾角为θ，液体层表面相接触的空气粘性可忽略。试求液体层内速度分布及斜板面的切应力。

9　两块倾角为α的无限大平行板间充满粘性系数为μ、密度为ρ的不可压流体。若下板固定，上板在其本身平面内以匀速 U 滑动。设流体的运动是平行于 U 的定常直线运动，沿平板运动方向的压力梯度为零。

(1)求流体中的速度分布。

(2)U 为何值时，通过平板间任一横截面的流量为零?

(3)在上述 U 值下流体的速度分布又如何?

10　均匀不可压流体流过平板。在板的前端流速均匀为 U，由于流体受到平板表面作用，使板末端流速分布为 u=$\frac{z}{h}U$ (z＜h),u=U(z≥h)，试求平板对流体的作用力(设质量力不计，流动定常)。

11　Venturi（文托利）管中截面积不等，在大截面积 A 与小截面积 B 处插入 U 型压力计。假设理想不可压流体在管中作定常运动，试根据连续方程和伯努利方程证明：

$$V_B = [2\rho_m \frac{gh}{\rho(1-\sigma_B^2/\sigma_A^2)}]^{\frac{1}{2}}$$

其中ρ为流体密度，ρ_M为压力计中液体的密度，h为U型压力计测得的流体落差。

12　一半径为 a 的无限长直立圆柱插于原静止的具有自由面的均质流体中，此圆柱以角速度ω作等速转动时，求自由面的形状。

13　在半径为a的柱型圆筒中盛有高度为h_0的液体。设圆筒绕对称轴以ω的常角速度旋转，试求圆筒中旋转液体自由面的形状，以及液面最高点h_{max}及最低点h_{min}的差与ω的关系。

三、大气运动方程组

思考题

(一)名词解释

1　个别变化　2　局地变化　3　平流变化　4　对流变化　5　科里奥利(coriolis)力 6　惯性离心力　7　科氏加速度　8　地转向心加速度　9　重力位势 10　位势米 11　定常运动　12　不可压流体　13　干洁大气　14　绝热大气　15　等位温大气　16　局地切平面　17　局地直角坐标系　18　惯性坐标系　19　旋转坐标系　20　梯度　21　升度　22　倾向　23　速度散度　24　质量散度　25　有效重力　26　均质不可压流体

(二)解释、回答问题

1　一个一定质量的人，在走向赤道时，其重量会略有减少；但他从朝东运行的火车中出来并转入朝西运行的火车中时，重量会略有增加。

2　位于地球上固定地点的观测者看不出地转偏向力的存在。

3　地转偏向力的方向，在南半球和北半球是相反的。

4　在赤道上，水平运动不会引起水平科氏力。

5　地球自转对大气有哪些动力作用?

6　如果地球不自转，有没有惯性离心力?有没有曲率项力?

7　为什么地球不可能是一个绝对球体?

8　为什么把地球引力和惯性离心力二者合并为有效重力?

9　地球静止卫星能保持在赤道上空一个固定的轨道上。

10　重力的方向与等高面垂直否?与等位势高度面垂直否?

11　在什么情况下，基本方程中可以不考虑地球曲率的作用?又在什么情况下，热力过程可视为绝热过程?

12　动力气象学和天气学、数值天气预报之间的关系如何?

13　谈谈你对大气运动的确定性和随机性的看法。

14　试概述大气动力学的历史、现状及发展趋势。

习 题

1　证明相对加速度可表示为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{V^2}{2})+(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}$$

2　流场为定常的、均匀的、沿纬圈运动的带状环流，试求空气微团的绝对速度和绝对加速度。

3　设地面重力为g_0，不考虑惯性离心力，证明：当z<<a时，重力可近似表示为：$g=g_0(1-2z/a)$

其中 a 为地球平均半径。

4　一个气块为 20 米·秒$^{-1}$的速度沿赤道向西运动。试计算：

(1) 由地球以外的观测者以及与地球一起转动的坐标系内的观测者来看，指向地球中心的视示加速度各为多大?

(2) 在旋转坐标系内的科氏力有多大?

5　一人造地球卫星经过赤道的飞行方向与赤道成 60°角，其相对速度(设为水平速度)为 6×10^3米·秒$^{-1}$，求通过赤道上空时的科氏加速度。

6　计算赤道上空有效重力为零的高度。一地球卫星进入那个高度的轨道中则为静止卫星，试求其旋转周期。

7　证明曲率项力与空气微团的相对速度垂直，并可表示为 $-\frac{1}{r}\vec{N}\times\vec{V}$，其中 $\vec{N}=v\vec{i}+u\vec{j}+utg\varphi\vec{k}$。

8　证明地球引力位势 Φ_a，惯性离心力位势 Φ_e 及重力位势 Φ 分别满足：

(1)　$\nabla^2\phi_a=0$　(2)　$\nabla^2\phi_e=-2\Omega^2$ (3)　$\nabla^2\phi=-2\Omega^2$

其中 ∇^2 为三维拉普拉斯(Laplace)算子。

9　试求空气微团绝对速度的散度和旋度。

10　大气中的水汽含量在无凝结也无蒸发等相变过程发生时，具有守恒性。试仿照大气质量连续方程的推导方法，推导出 z 坐标系中水汽质量守恒方程与水汽混合比应当满足的方程。

11　青藏高原是世界上最大、最高的高原，其平均高度约为海拔 4000 米，西南沿的坡度为 1%，坡的走向为正西北—东南向。

(1) 风速为 14.142 米·秒$^{-1}$的西风流经高原时，产生多大的垂直速度(用米·秒$^{-1}$表示)?是爬坡还是下坡?

(2) 一块空气以平均 5×10^{-2}米·秒$^{-1}$的垂直速度从海平面气压为 1000 百帕处爬上高原时，其气压变成 650 百帕，假设水平面上的气压梯度处处可以忽略。试求这块空气给斜坡中点造成的局地气压变化率(用百帕/3 小时表示)。

(3) 若一块空气从高原下滑至海平面时，其气压在 3 小时内变化了 10 百帕，该处所测得的 3 小时变压为 0.01 百帕，设空气的密度为 1.29 千克·米$^{-3}$，水平气压梯度可忽略，试求该气块下滑至海平面时的速度。

12　一艘船以 10 千米·小时$^{-1}$的速度向正北行驶，地面气压以 5 帕·千米$^{-1}$的变率向西北方向增加。若船上的气压以 100 帕/3 小时的变率减小，问附近岛上气象站的气压倾向是多少?

13 有一个 1 千克的干空气块以常垂直速度上升。若气块以 0.1 瓦·千克$^{-1}$的变率被辐射加热，要使其温度保持不变，所需的上升速度应为多大?

14　试证标量的个别微商在惯性坐标系和旋转坐标系中相等。

15　设地球为球体，试计算在地球引力方向和有效重力方向之间作为地面纬度函数的夹角，这个夹角的最大值是多少?

16　如果一垒球运动员在纬度 30° N 处扔出一球，4 秒钟内飞出的水平距离为 100 米，问由于地球自转对球产生的水平偏离是多少?

17　不计空气阻力影响，求赤道处从高度 h 的一固定平台上下落的物体的水平位移，若 h=5 千米，位移数值是多少?

18　一个重 60 千克的人进入一列火车，火车以 20 米•秒$^{-1}$的速度沿赤道向西行驶。试计算他的重量的视变化。

19　(1)地球上的某一地点，铅直地向上发射了一支火箭，其速度是W_0；在无摩擦力的情况下，试证：火箭落在发射点的西边，与发射点的距离是$\frac{4W_0^2\Omega}{3g^2}\cos\varphi$　。

(2)从赤道向上发射一支火箭，速度是 500 米•秒$^{-1}$，试计算其降落时的位移量。

20　一列火车以 50 米•秒$^{-1}$的速度沿一弯曲轨道平稳地行驶，站在秤台上的一乘客发现其重量比火车静止时增加 10%，设轨道是倾斜的，则作用于乘客身上的力垂直于车厢地板，问弯道的半径有多大?

21　气象站正北 50 千米处的气温比气象站低 3℃，如果风以 20 米•秒$^{-1}$速度从东北方向吹来并且空气以 1℃•小时$^{-1}$的加热率被辐射加热，问气象站的气温变化是多少?

四、尺度分析与方程组的简化

思考题

(一)名词解释

1　大气运动尺度　2　次天气尺度　3　天气尺度　4　行星尺度　5　尺度分析　6　(准)地转近似　7　水平无辐散近似　8　水平运动近似　9　(准)静力近似　10　诊断方程　11　预报方程　12　弗罗德(Froude)数　13　罗斯贝(Rossby)数　14　基别尔(kibel)数　15　雷诺(Reynolds)数　16　旋转雷诺数　17　平流惯性力　18　局地惯性力 19　平流时间尺度　20　对流时间尺度　21　均质大气　22　等温大气　23　层结大气　24　大气标高　25　摄动(Perturbation)法或W·K·B(Wentzcl-kramers-Brillouin)方法　26　z坐标系　27　p坐标系　28　θ坐标系　29　σ坐标系　30　蒙哥马利(Montgomery)流函数

(二)解释、回答问题

1　在大气动力学中，地转偏向的垂直分量是不重要的；由垂直速度所引起的地转偏向力也是不重要的。

2　气压梯度力的垂直分量比水平分量大得多。但在运动方程中，水平分量却起了重要的作用。

3　热带的风不是准地转的。

4　大气运动分类的原则是什么?

5　$\dfrac{W}{U}<\dfrac{Z}{L}$的意义是什么?

6　大尺度运动有哪些主要特点?

7　原始方程组在 p 坐标系内呈现的形式，要比在 z 坐标系内的形式更简单些。

8　在θ坐标系中，热力学方程具有特别简单的形式。

9　ω和 w 的符号，几乎都是相反的；但 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 与 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ 两项通常具有相同的符号。

习 题

1　导弹在 45° N处以 1000 米·秒$^{-1}$的速度向东发射，试比较曲率项$u^2 tg\phi/a$和水平科氏力的数量级。如果导弹运行了 1000 千米，问由于这两项的作用，导弹的路径偏离为多少?在这种情况下，曲率项能略去吗?

2　若认为摩擦层中湍流摩擦力与水平科氏力有同样大小的量级，试由此估计摩擦层的高度。设湍流摩擦力为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}=k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zy}}{\partial z}=k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

取湍流系数$k=10^2$米·秒$^{-1}$。

3　估计一个典型龙卷的运动中各项的量级并写出零级运动方程。取用的尺度如下：U～100 米·秒$^{-1}$，W～10 米·秒$^{-1}$，L～10^2米，H～10 千米，△P～40 百帕。在这种情况下，流体静力近似是否成立?

4　若地球大气由一不可压缩流体组成，其密度到处相同，等于海平面的观测值(约 1.25 千克·米$^{-3}$)，对观测到的海平面气压值(1013 百帕)来说，这种大气该有多厚?

5　利用流体静力近似和状态方程，证明均质大气高度 H=RT/g 是等温大气中气压和密度减小到其 e 分之一的高度。

6　设等温大气温度随时间变化，但地面气压维持不变，证明在相当于均质大气的高度处，空气的密度也维持不变。

7　假设不考虑地球曲率的作用，科氏参数 f 为常数，空气在完全没有外力作用下作水平运动，证明：

(1) 运动的轨迹一园(称为惯性园)，并设微团的初始位置为x=y=0，初速度$u=u_0$，$v=v_0$，求u和v　。

(2) 绕园一周所需的时间(称为惯性周期)为 $\tau_i=2\pi/f$。

(3) 试从力的平衡关系证明在北半球点作反气旋式运动，在南半球作气旋式运动。

8　在一定条件下，大气中某一点的运动可用下述方程描写

$$\frac{\partial u}{\partial z}-fv=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=0$$

(1)若初始时刻$u=u_0$，$v=v_0$，试求该质点的速度分量u和v在$t>t_0$时的表达式。

(2)求该空气质点运动速率的表达式。

(3)证明该质点的运动轨迹为一正圆形。

(4)若$u_0=5$ 米·秒$^{-1}$，$v_0=5$ 米·秒$^{-1}$，设质点所处的纬度为 45° N，试求出该质点在 t=0 时相对于园心的初始坐标(x_0，y_0)以及该圆形的半径长度(精确到 0.1 千米)。

(5)试从力的平衡关系证明在北半球点作反气旋式运动，在南半球作气旋式运动。

9　估计在天气尺度运动中，$2\Omega\sin\phi v$ 和 $2\Omega\cos\phi w$ 在什么区域内具有相同的量级。

10　证明 P 坐标系的热力学方程可写为

$$(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial\phi}{\partial p}+\sigma_s\omega+\frac{\alpha}{\rho C_p}\varepsilon=0$$

其中$\sigma_s=-\alpha\dfrac{\partial\ln\theta}{\partial p}$为静力稳定度参数，α 为比容。

11　证明上题中稳定度参数可以用φ写成

$$\sigma_s=\frac{\partial^2\phi}{\partial p^2}-\frac{1}{p}\frac{\partial\phi}{\partial p}(\frac{R}{C_p}-1)=\frac{1}{p^2}(\frac{\partial}{\partial\ln p}-\frac{R}{C_p})\frac{\partial\phi}{\partial\ln p}$$

12　试证在等温大气中，静力稳定度参数σ_s与气压的平方成反比。

13　设绝对温度以指数形式随高度递减，即$T = T_0 e^{-z/H}$，其中T_0=273K是Z=0 处的温度，H是以T_0为依据的均质大气高度。试证

$$p = p_0 e^{(1-e^{z/h})}$$

式中p_0是z=0 处的气压。如果温度直减率变为干为绝热直减率，试求此时的大气高度。

14　设温度为等递减率大气的地面温度T_0随时间变化，但地面气压保持不变。证明在各固定高度上，气压随时间的变率在对应于T_0的均质大气高度处最大。

15　一般认为大气压力降低速度超过 5 百帕·秒$^{-1}$，就会对人的生命产生危险，假如有人从T=273K，p=1000 百帕的地表面上升，问上升速度多大时，人的生命就会由于气压变化而发生危险?

16　证明均质大气(密度不随高度变化的大气)具有一固定高度，并且该高度只决定于下边界的气温。如果地面气温T_0=273K，地面气压为 100 千帕，试计算均质大气的高度。

17　利用上题的条件下计算气温随高度的变化。

18　证明具有均匀直减率γ(γ=-dT/dz)的大气在 p 等压面的位势高度为

$$z = \frac{T_0}{\gamma}[1-(\frac{p_0}{p})^{-R\gamma/g}]$$

其中T_0，p_0分别是海平面处的气温和气压。

19　试证对具有绝热直减率(即位温为常数)的大气，位势高度可写为

$$z = H_\theta[1-(\frac{p_0}{p})^{-R/C_p}]$$

其中p_0是z=0 处的气压，$H_\theta = C_p\theta/g$ 是大气的总位势高度。

20　同一气压系统在各高度上的中心的连线(如图)称为气压系统的中心轴线，证明：

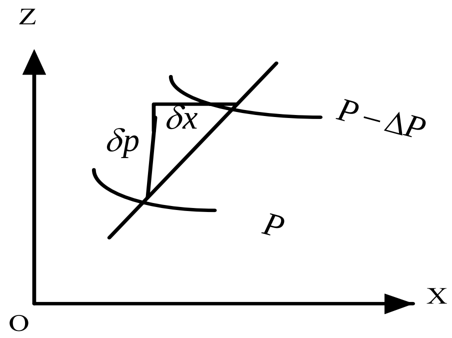
(1)对于热力不对称的气压系统，中心轴线是倾斜的，其倾斜角满足

$$tg\alpha = \frac{\delta x}{\delta z} = \frac{1}{T}(\frac{\partial T}{\partial x})_p(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p$$

提示：轴线上$(\frac{\partial T}{\partial x})_p$ =0

(2)对于热力对称的气压系统(如冷低压)，等压面坡度随高度的变化为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial x})_p = \frac{1}{T}(\frac{\partial T}{\partial x})_p$$



20题图

21　对大尺度运动，试估计ω的尺度，并说明

ω≈-ρ gw

22　利用p坐标系的连续方程，根据ω估计大尺度运动中水平散度D_p的大小。

23　 用尺度分析说明大尺度运动中

$D_p \approx D$, $\zeta_p \approx \zeta$

其中D_p，ζ_p为p坐标系的水平散度和垂直涡度，D，ζ为z坐标系的水平散度和垂直涡度。

24　证明等位温面高度梯度和等压面高度梯度之间有以下关系

$$\nabla_p z - \nabla_\theta z = \frac{1}{\gamma_d - \gamma}\nabla_p T$$

25　证明θ坐标系的垂直速度dθ/dt和Z坐标系的垂直速度w有以下近似关系

$$w \approx \frac{T}{\theta}\frac{1}{\gamma_d-\gamma}\frac{d\theta}{dt}$$

提示：等位温面高度的局地变化和平流变化相对于其对流变化可略去。

26　估计在天气尺度运动中等压面坡度和等温面坡度的量级。

27　证明从 z 到 θ 坐标系，水平气压梯度力的转换关系为

$$\frac{1}{\rho}\nabla_z p=\nabla_\theta \psi$$

其中 $\Psi=C_pT+\Phi$ 为蒙哥马利流函数。

28　根据 p-σ 坐标系的转换关系，证明

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla)_p+\omega\frac{\partial}{\partial p}=(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla)_\sigma+\dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

29　作为零级近似，试证明

(1)中尺度水平运动风压场关系为

$$\overrightarrow{V_h}=\frac{1}{(\zeta+f)}\vec{k}\times\nabla_h(\frac{V_h^2}{2}+\phi)$$

(2)小尺度水平运动风压场关系为

$$\overrightarrow{V_h}=\frac{1}{\zeta}\vec{k}\times\nabla_h(\frac{V_h^2}{2}+\phi)$$

30　证明 p 坐标系中大尺度简化的水平运动方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(f+\zeta)v=-\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+(f+\zeta)u=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

其中 $P=\phi+(u^2+v^2)/2$

31　证明 p 坐标系中，静力稳定度参数

$$\sigma_s = -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$$

可以写成

(1) $\sigma_s = \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} - \frac{1}{p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}(\frac{R}{C_p} - 1)$

(2) $\sigma_s = \frac{1}{p^2}(\frac{\partial}{\partial \ln p} - \frac{R}{C_p})\frac{\partial \Phi}{\partial \ln p}$

(3) $\sigma_s = \frac{\alpha^2 N^2}{g}$

(4) $\sigma_s = \frac{C_\alpha^2}{p^2} = \frac{N^2 H^2}{p^2}$

其中$C_\alpha^2 = \frac{RT^2}{g}(\gamma_d - \gamma), H = \frac{RT}{g}$。

五、量纲分析与π定理

思考题

(一)名词解释

1　几何相似　2　运动相似　3　动力相似　4　相似判据　5　欧拉数　6　斯特劳哈勒数　7　马赫数　8　努森数　9　Π定理　10　物理相似　11　现象相似　12　量纲　13　量纲独立

习 题

1　应用Π定理给出粘性流体 LMT 系统中，管子两端的压力差△p 与管道直径 d，粘性系数μ，流体密度ρ，单位时间内通过管截面的通量 Q，管长 L 之间的关系式。

2　大气湍流运动决定于动力条件和热力条件，若认为主要因子有位温θ，位温梯度$\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$，风速垂直切变$\dfrac{\partial V}{\partial z}$和重力加速度 g，试由量纲分析原理导出理查逊数的表达式。

3　考虑无限长直管中的定常流动，如果管中的平均流速为 U，管子截面的特征尺寸为 D，流体的密度ρ和粘性系数μ均为常数，证明由于粘性而产生的单位长度管段上的压力(损失)差为

$$\Delta p=\frac{\mu U}{D}f(R_e)\qquad (R_e=\frac{\rho UD}{\mu})$$

4　深水螺旋桨的推力 F 决定于螺旋桨的直径 d，船只航行速度 U，流体密度ρ，螺旋桨的转速 N，流体的粘性系数μ和重力加速度 g，试用量纲分析法讨论推力 F 和哪些无量纲量有关。

5　流体的阻力 F，决定于流体运动的速度 U，流体排水量 Q，流体的密度ρ，流体的粘性系数μ和重力加速度 g，试用量纲分析法研究阻力公式。

6　小球在重力作用下在均质不可压粘性流体中等速降落。如果以 a，ρ_1，ρ_2，μ和 g 分别表示小球的半径和密度，流体的密度和粘性系数，重力加速度。证明小球降落的速度U可写为

$$U = \frac{\rho_1 a^2 g}{\mu} f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

7　设有半径为 a 的小球，在粘性系数为μ的流体中以速度 U 下落。已知流体对小球的粘性阻力(合力)F(单位为牛顿)与 a，μ，U 有关，即 F=f(a，μ，U)，试用π定理求

(1)F 的具体形式，

(2)阻力系数C_D与特征雷诺数R_e的关系式。

8　类似于上题，已知小球下落速度U与下述物理有关：小球半径a，粘性系数μ，小球与流体的比重差△q= g（ρ_0-ρ），（ρ_0、ρ分别是小球和流体的密度)，试用π定理求小球下落速度。

9　直径为 10^{-5}m的水滴，在速度为 2×10^{-2}m·s^{-1}的上升气流中，问它是否会落向地面，设空气的粘性系数为 1.792×10^{-5}kg·m^{-1}·s^{-1}，密度为 1.2kg·m^{-3}。

提示：取上题结果中的相似常数 C=2/9。

10　Assume a raindrop can be approximated as a sphere of diameter falling with velocity w, use dimensional analysis to obtain an exprssion for the drag force F_D, as it fall through air of viscosity μ and density ρ　。

六、大气运动方程的变形

思考题

(一)名词解释

1　开尔文(kelvin)环流定理或汤姆森(Thomson)环流定理　2　皮叶克尼斯(Bjerknes)环流定理　3　绝对涡度　4　地转涡度或行星涡度　5　地转风涡度　6　切变涡度　7　曲率涡度　8　横向散度　9　纵向散度　10　f-平面（常数）近似　11　β－平面近似　12　赤道β—平面近似　13　力管　14　力管效应15　β效应　16　位涡　17　赫姆霍兹(Helmhotz)定理　18　旋转风　19　辐散风　20　U角动量　21　角动量　22　地转流函数　23　泰勒柱　24　背风槽　25　斜压矢量　26罗斯贝参数　27　埃特(Ertel)位涡　28　热成风涡度　29　平衡方程　30　汇流　31　涡度方程的准地转近似

(二)解释、回答问题

1　汇流并不一定表示辐合。

2　要精确地测定散度是困难的。

3　大气斜压性主要表现在空间哪一个平面上?在等压面上大气有无斜压性?等压面上看到的等温线是否表示大气的斜压性?

4　散度和流量有何联系?涡度和环流有何联系?

5　有下列两种流场：

(1)u=cy，v=0　(2)　$u=-\dfrac{cy}{x^2+y^2}, v=\dfrac{cx}{x^2+y^2}$　$(v_r=0, v_\theta=\dfrac{c}{r})$

试说明 $\zeta \neq 0$ 不一定表示空气作旋转运动，而空气旋转运动也有可能 $\zeta=0$。

6　你如何理解当 $d(\zeta+f)/dt=0$ 时，β对ζ变化的作用。

7　试述诊断分析在现代天气动力学中的作用。

习 题

1　假定摩擦力和风速的大小成正比，方向与风向相反，如果在经圈平面上取一物质环线，初始时刻环流为零，当环线内力管数保持不变时，试求任意时刻的环流及可能达到的最大环流。

2　在 OXY 平面上，有一个边长为 1000 千米的正方形，如果其间的温度分布向东以 1℃/200 千米的变率增加，而气压向北以 1 百帕/200 千米的变率增加，又在原点的气压为 1000 百帕。试计算沿正方形的环流变率。

3　假设中心在赤道上半径为 100 千米的园形区域内的空气，起始时相对于地球是静止的。如果这个园形气团沿着一等压面移向北极，试求围绕周线的环流和平均切线速度。

4　在 30°处有一园形气柱，其半径为 100 千米，如果开始时空气是静止的，当气柱膨胀到原来半径的两倍时，其周界的平均切线速度为多少?

5　有一东风气流，风速向北以 10 米•秒$^{-1}$/500 千米的变率减小，问围绕边长为 1000 千米的正方形的环流是多少?　又正方形中的平均涡度是多少?

6　一气旋性涡旋处于旋转平衡，其切线速度的分布为 $V=V_0(\frac{r}{r_0})^n$，其中 V_0 是距涡旋中心 r_0 处的切线速度。若 r_0 处的气压为 p_0，并设空气的密度为常数，试分别求半径为 r 处绕某一流线的环流及 r 处的涡度和气压。

7　求

(1)满足 $\zeta=0$ 的平面曲线运动的速度;

(2)满足ζ=ζ$_0$为常数的平面曲线运动的速度。

8　求以下四种平面曲线运动的涡度

(1)$V_h=cr^2$　(2)$V_h=c$　(3)$V_h=c/r^2$　(4)$V_h=c/r^{1/2}$

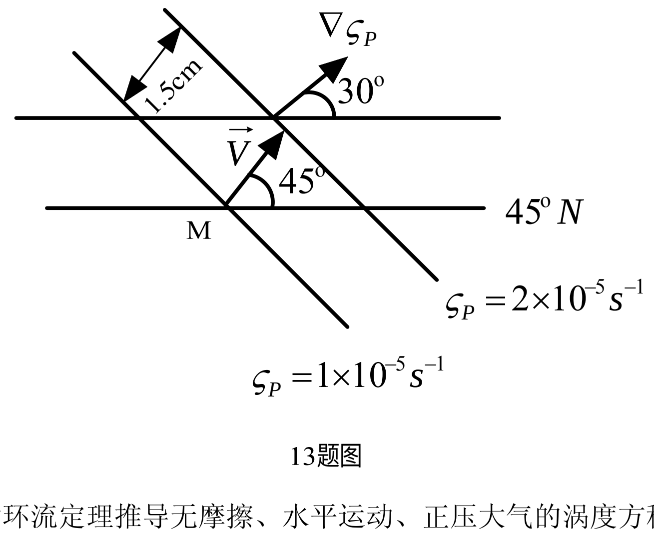
9　在一半径为 r 的园上取等距的三点，试根据此三点风速的切向分量，推导计算园内风场平均涡度的公式。

10　求一呈现气旋性弯曲，半径为 60 千米的环形流线上风场的涡度，已知该流线和邻近流线上的风速为 11 米·秒$^{-1}$。

11　考虑两同心的园柱体中间的流体。内径为 200 千米，外径为 600 千米，若流体的切线方向的速度分布为$V=10^6/r$(米·秒$^{-1}$)，r是离中心的距离，以米为单位，求流体的平均涡度。

12　在正压、不可压缩的流体内，有一半径为r的铅直涡旋，其相对涡度为ζ$_0$，若在同一纬度变为原来厚度N倍，试求变化后的涡度ζ和涡旋边沿的流速。

13　利用p坐标系中的绝对涡度守恒定律(设ω=0)，根据所给的 500 百帕等压面示意图(比例尺 1：2×10^7)，求M点相对涡度的变化。



13题图

14　利用绝对环流定理推导无摩擦、水平运动、正压大气的涡度方程。

15　在正压情形下，若水平散度 D 为常数，试求绝对涡度的变化。

16　在正压无辐散大气中位于 30° N的气块的相对涡度为 5×10^{-5}秒$^{-1}$，由于大尺度

运动，气块移到 60° N，求此时的相对涡度。

17　在正压、水平无辐散大气中位于 30° N的气块有相对涡度 5.338×10^{-5}秒$^{-1}$，气块由于某种原因受到扰动而向北运动，求气块的相对涡度变为零的纬度。

18　证明正压无辐散且ω=0 的涡度方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_p^2\psi + J(\psi,\nabla_p^2\psi) + \beta(\frac{\partial\psi}{\partial x})_p = 0$$

其中 $J(\psi,\nabla_p^2\psi)$ 表示为雅可比(Jacobi)行列式。

19　证明在等压面坐标系中的地转风散度为

$$\nabla\cdot\overrightarrow{V_g} = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{ctg\varphi}{a}v_g = -\frac{\beta v_g}{f}$$

其中a为地球平均半径，φ为纬度。在 45° N处南风风速为 10 米•秒$^{-1}$时，问地转风的散度是多少?

20　在一半径为 r 的园上取等距的三点，试推导根据三点风速的径向分量来计算园内风场平均散度的公式。

21　平均间隔为 500 千米的流线以 10°的夹角辐合，若风速恒为 10 米•秒$^{-1}$，试计算风场的散度。

22　距测站东、北、西、南各 250 千米的风的记录为： 90° ，10 米•秒$^{-1}$；120° ，4 米•秒$^{-1}$；90° ，8 米•秒$^{-1}$；60° ，4 米•秒$^{-1}$。试计算测站上的水平散度值。

23　一个无线电探空站上空各层水平散度值的计算结果如下

气压(百帕)	水平散度($\times10^{-5}$秒$^{-1}$)
1000	+0.9
850	+0.6
700	+0.3
500	0
300	−0.6

100 -1.0

假设大气是等温的，温度为 260K，并令在 1000 百帕上 w=0，计算每层的垂直速度(要求编制程序计算)。

24 已知

$$u=-\frac{1}{\rho f^2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial p}{\partial t}),\ v=-\frac{1}{\rho f^2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial p}{\partial t})$$

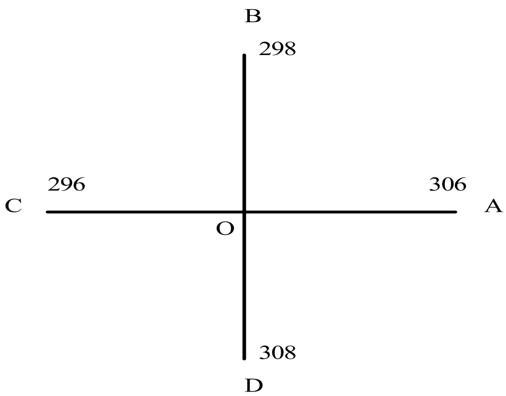
假定ρ，f 均为常数，试求该变压风的水平散度和涡度。

25 根据下列条件，试求地转风的水平散度和涡度。

(1)f 及ρ均为常数。

(2)f=2Ωsin(y/a)，且ρ为常数，其中 a 为地球半径。

26 利用图示资料计算 O 点(φ=40°N)的地转风涡度,各点距离 O 点都是 500 千米，所列数据以位势什米为单位。



26题图

27 证明不可压缩大气 f 平面近似下的地转风满足 Taylor-Proudman 定理；而β平面近似下的地转风不满足 Taylor-Proudman 定理。

28 试证下列三种情形中哪一种的等水平风速线为同心园。(1)纯辐散 (2)纯旋转 (3)纯变形。

29 设有一海风环流，水平方向从海岸线深入海洋和大陆各 20 千米，垂直方向从地面直到 200 米的高度。若地面上的气压为 1000 百帕，200 米高度上的气压为 980

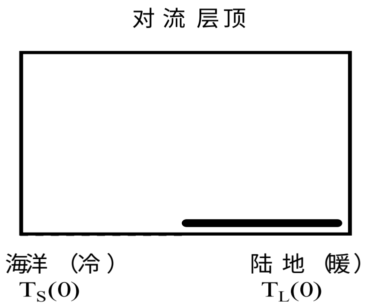
百帕，陆地和海洋的平均温差为 6℃，假定初始没有环流，求温差出现一小时后环流回路上的平均风速。

30　有一理想化的海岸地区，上下界均为刚壁，海面的气温为T_s（0）=12℃，陆地的气温T_L(0)=27℃，海、陆地区的气压近于相等，其值为p(0)=1000 百帕，并且两种地区的气温随高度的递减率均为dT/dz=-6.5℃/千米。

(1)试求两种地区上空 10 千米处的气压；

(2)从质量连续的角度考虑，试指出闭合回路上环流的方向。

(3)如果陆地晚上的气温降温剧烈以致于比海上空气更冷，则环流会发生什么变化?



30题图

31　对于水平运动，略去垂直力管，试证明

(1)在纬度φ围绕地轴的西风环流(u 为常数)对地轴的绝对角动量守恒。

(2)在纬度φ围绕局地垂直轴的环流(取园周运动的切线速度为常数)对垂直轴的绝对角动量守恒。

32　一个空气环向位于 20° N 处的飓风中心辐合。此空气环原来位于离中心 500 千米的地方，当时它并无围绕风暴的净气旋性环流。试根据角动量守恒定律，计算当该空气环流的辐合半径缩小成 100 千米时的切向风速。

33　最初位于赤道上的一空气块在移向 30° N 的过程中，保持角动量不变。试问当它到达 30° N 时，其纬向速度是多少?

34　在 60° N 有一气柱，起始时ζ=0，从地面一直伸展到固定为 10 千米高的对流层顶。假如这气柱移到 45° N 越过一高为 2.5 千米的山岳，问当其越过山顶时，绝

对涡度和相对涡度各为多少?

35　有一均质不可压流体(取密度为1)，厚度为h(x，y，t)，下边界为刚壁，上界为自由表面。设水平速度场不依赖于高度，科氏参数 f 为常数，试列出(不必推导)其动力学方程组，并推导出位涡度守恒方程。

36　45°N处一西风纬向气流绝热地爬越一南北向山脉，山前西风向南以 $10m\cdot s^{-1}$/1000 千米的变率性增大，此山峰位于 800 百帕，在对流层顶(300 百帕)，大气未被强迫上升的气流扰动，另外，山脉西边的地面气压为 1000 百帕。

(1)试求初始时空气的相对涡度。

(2)如果气流在上升过程中向南偏转 5 个纬度，试求气流到达山顶时的相对涡度。

(3)设气流上升至山顶的过程中保持 20 米· 秒$^{-1}$的匀速，试求山顶处流线的曲率半径。

37　45°N某地 500 百帕等压面上相对涡度的局地变化为 3×10^{-6}秒$^{-1}$/3 小时，风为 20 米·秒$^{-1}$的西南风，相对涡度向东北以 4×10^{-6}秒$^{-1}$/100 千米的变率减小，试利用准地转涡度方程计算该地β平面上的水平散度。

38　有如下线性化准地转涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+u\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-f_0\nabla\cdot\vec{V}$$

其中Ψ=Φ/f。　设水平散度场为 $\nabla\cdot\vec{V}$ =Acos［k(x-ct)］，其中 A 为常数。试求相应的相对涡度场。涡度场和散度场的位相关系如何?当 c 取何值时涡度场变成无穷大?

39　已知位势场的分布为

$$\Phi=\Phi_0(p)+cf_0y\,[\cos(\pi p/p_0)-1]+k^{-1}\sin k(x-ct)$$

其中Φ仅是p的函数，c是常波速，k是纬向波数，p_0=1000 百帕。

(1)利用准地转涡度方程求与此Φ场相应的水平散度场(设 df/dy=0)

(2)设 $\omega(p_0)=0$，利用连续方程积分法求 ω(x，y，p，t)。

(3)画出 750 百帕和 250 百帕的位势场，指出最大辐合、辐散区和正、负涡度平流区。

40　利用上题给定的位势分布，试利用绝热的热力学能量方程导出ω的另一种表达式，设σ是常数。当k取何值时这种ω的表达式与上题的ω表达式一致?

41　已知位势场的分布为

$\Phi=\Phi_0(p)+f_0[-Uy+k^{-1}V\cos(\pi p/p_0)\sin k(x-ct)]$，其中U，V和c均是常值速度，试用准地转涡度方程计算ω并确定此题计算的ω与上题一致的c值。

42　对于上题所给的条件利用ω方程计算垂直速度ω，并与前两题作比较，最后分析250百帕和750百帕上Φ和ω的位相关系。若$\beta=2\times10^{-11}$米$^{-1}$•秒$^{-1}$,U=25米•秒$^{-1}$，V=8米•秒$^{-1}$，$k=2\pi/(10^{-4}$千米)，$f=10^{-4}$秒$^{-1}$，$\sigma=10^{-4}$帕$^{-2}$•米•秒$^{-2}$，p_0=1000百帕，问ω的振幅多大?

43　设位势场的水平分布为

$$\Phi=cf_0[-y+k^{-1}\sin(kx-\pi p/p_0)]$$

其中$f_0=10^{-4}$秒$^{-1}$，p_0=1000百帕，$k=2\times10^{-6}$米$^{-1}$，c=10米•秒$^{-1}$。试分下列两种情况计算500百帕上的位势倾向：

(1) $df/dy=0$

(2) $df/dy=\beta=2\times10^{-11}$米$^{-1}$•秒$^{-1}$

并解释这两种结果的差异。此种扰动的振幅随时间变化吗?

44　若上题中的位势场分布为

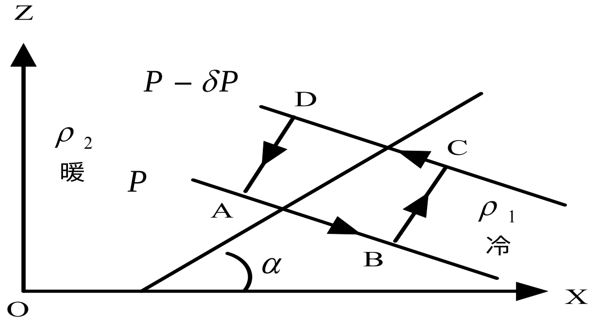
$$\Phi=cf_0[-2y(1-p/p_0)+k^{-1}\sin k(x-ct)]$$

则结果又如何?

45　有一理想锋面，其在东西垂直平面(即X-Z平面)的剖面如图所示。若取两条等压线和两条垂直线组成闭合回路ABCD，回路上下界的南北速度分别为v_2和v_1，试利用相对环流定理证明在无环流加速度时锋面坡度公式为

$$tg\alpha=\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\rho_1\rho_2 f(v_2-v_1)}{\overline{\rho}g(\rho_1-\rho_2)}$$

式中$\overline{\rho}$为平均密度。



45题图

46　设 850 百帕层的温度直减率为 4K·千米$^{-1}$，如果温度的局地变化为 2K·小时$^{-1}$；风为 10 米·秒$^{-1}$的西风气流，温度以 5K/100 千米向西减小，试利用绝热法计算 850 百帕层的垂直速度。

47　证明 P 坐标系涡度方程

(1) 可以变为下列形式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\nabla \cdot[(\zeta+f)\vec{V}+\omega \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \times \vec{k}]$$

(2) 进一步证明对于全球大气，涡度是守恒的，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{m} \zeta d m)=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{g} \int_{\sigma} \int_{0}^{p} \zeta p d \sigma)=0$$

（设海平面气压为p_0，且不考虑地形）。

七、自由大气中的平衡运动

思考题

(一)名词解释

1　地转平衡 2　地转风 3　白贝罗(Buys-Bullot)定律 4　热成风 5　自由大气 6　正压大气 7　斜压大气 8　空气微团唯压性 9　自动正压大气 10　相当正压大气 11 自然坐标系 12　轨迹 13　流线 14　梯度平衡 15　梯度风 16　异常反气旋 17　旋转平衡 18　旋衡风 19　惯性平衡 20　惯性风 21　惯性园　22　惯性半径 23　惯性周期 24　气流的动力稳定性 25　超地转风 26　次地转风 27　超梯度风 28　次梯度风 29　地转风转向高度

(二)解释、回答问题

1　在赤道上，不能出现地转风。

2　为什么经常可以看到有很强的低压发展(如台风)，而高压发展不能很强?

3　地转风时，气压梯度力作功否?梯度风时又会怎样?

4　在相当正压大气中，并无水平温度平流。

5　把地面风向与高空云层的移动方向作比较，就常能区别所出现的是冷平流还是暖平流。

6　能否给热成风下这样一个定义：不计摩擦的空气沿平均等温线的运动。

7　等压面上的等温线若恒与等高线平行，有没有热成风?

8　在台风附近的强风，通常是高度次地转的。

9　在同一水平气压梯度的情况下，气压脊处的实际风速比槽处大。

10　围绕台风的气流总是气旋式的，而在尘卷中，气旋可按任一方向旋转。

习 题

1　假定地转风速为 10 米·秒^{1}，g=9.8 米·秒$^{-2}$，试求 45° N处等压面的坡度，并说明结果的物理意义。

2　沿经圈由 57.5° N 到 52.5° N，气压升高 1%，若平均温度为 7℃，求平均地转风的大小和方向。

3　如果考虑了地球曲率的影响，根据地转风的定义，写出球坐标系的地转风方程。

4　试求等熵面上的地转风公式，并证明地转风的流线即蒙哥马利流函数的等值线。

5　在靠近 40° N 的一个局部区域内，500 百帕等压面上等位势高度线呈现东西走向，相邻等位势高度线(位势高度相差 60 米)的间隔是 300 千米，同时等位势高度值是向北减小的，试求地转风的方向和大小。

6　假定起始高度水平温度梯度的方向与水平气压梯度方向相反，而且平均温度及平均温度水平梯度的大小和方向都不随高度改变，证明此时到一定高度(称为地转风转向高度)，地转风的方向已与起始高度上的地转风方向相反，而且转向高度为

$$z = z_0 + \frac{T}{g\rho z_0}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{z_0} \Big/ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{z_0}$$

7　假定静力平衡满足，证明在正压大气中梯度风也不随高度改变。

8　有一强台风，位于 20° N，在离强台风中心 50 千米的一个区域内，观测到径向气压梯度为每 100 千米是 50 百帕，试计算该处的地转风速和梯度风速。

9　对同一气压梯度，试确定正常反气旋中的梯度风速与地转风速的最大可能比值。

10　当气压梯度趋于零时，求证明：对于正常反气旋，梯度风将化为地转风；而对于异常反气旋，则化为惯性园。

11　750 百帕间气层的平均温度向东每 100 千米降低 3℃，令f=10^{-4}秒$^{-1}$，如果 750 百帕地转风为东南风 20 米·秒$^{-1}$，求 500 百帕上的地转风速和风向。

12　上题中 750－500 百帕气层内的平均地转温度平流是多少?

13　已知 1.5 千米到 2.5 千米气层中风向逆时针偏转 20°，2 千米高度上的风速为 7 米·秒$^{-1}$，温度为-23℃，试求 40°N处 2 千米高度上的地转温度平流。

14　证明梯度风方程可改写为

(1) $\dfrac{V_G^2}{V_C^2}+\dfrac{V_G}{V_g}=1$

(2) $V_G^2=V_i(V_G-V_g)$

其中V_g，V_G，V_i，V_C依次为地转风、梯度风、惯性风和旋衡风。

15　一定常的水平涡旋运动，当r＜R时，空气以常值角速度ω旋转，当r＞R时，空气的速度V_h与r成反比，设空气运动满足梯度风关系并且风场是连续的，试求通过涡旋中心，高度为z_0的等压面方程。

16　一陆龙卷以等角速度ω旋转，证明中心的气压由下式决定

$$p=p_0\exp[-\omega^2T^2/(2RT)]$$

式中p_0是离中心距离r_0处的气压，T是温度(假定为常数)，若温度为 288K，离中心 100 米处气压为 1000 百帕，风速为 100 米·秒$^{-1}$，求中心气压为多少?

17　假定在气旋性风暴中，某气象站观测到等压线的曲率半径为 800 千米，而该站风向以每小时 10°的变率顺转，若风速为 20 米·秒$^{-1}$，对一经过该站上空的气块，试求其轨迹的曲率半径。

18　在某些热带扰动中，观测到风速的切向分量的分布为$V=V_0(r_0/r)^2$ (r＞r_0)，若V_0=50 米·秒$^{-1}$，r_0=50 千米，求无穷远处(r→∞)和$r=r_0$之间的总位势差，假定扰动处于梯度风平衡，并设$f_0=5\times10^{-5}$秒$^{-1}$，又问在离扰动中心多远处，科氏力与离心力相等?

19　700 百帕等压面上的风速为 9 米·秒$^{-1}$，风向为 270°，而 500 百帕等压面上的风速、风向分别为 15 米·秒$^{-1}$和 300°，试决定 60°N处 600 百帕高度上的地转温度平流。

20　(1)若气压梯度为 1hPa/100km，问 Φ=30°N 处的地转风速为多少?

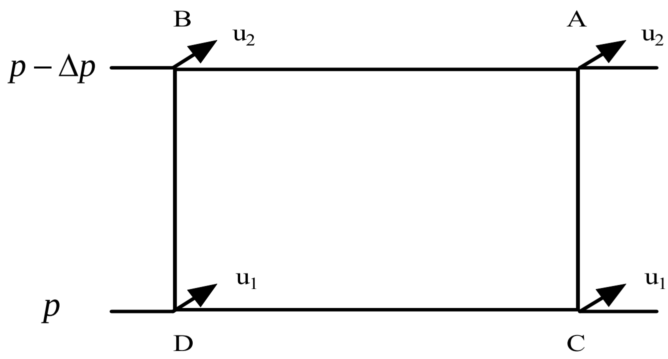
(2)若曲率半径为600km，在(1)的条件下气旋性和反气旋性梯度风速各为多少?

21　在下列条件下，求急流的风速：

(1)夏季，纬度ϕ=45° N，250hPa(10km)处，已知$dT/d\phi$=-0.5K/度；

(2)冬季，纬度ϕ=30° N，200hPa(12km)处，已知$dT/d\phi$=-1K/度，并且在两种情况下，600hPa层的纬向风均为$10m\cdot s^{-1}$的西风。

22　利用热成风的关系推导锋面坡度公式，假定经过锋区的温度差值为10℃，地转风改变值为30米·秒$^{-1}$，大气平均标高为8千米。试计算43° N处地转风场中定常锋区的锋面坡度。



23题图

23　考虑南北铅直平面上的闭合回路ABDCA(如图)，AB、CD为二等压线，近于跟地面平行，长为△y；AC、BD为二垂直线，长为△z，且各有平均温度$T_{bm}^{(1)},T_{bm}^{(2)}$，又设回路上下界西风风速的分布分别为$u_2$、$u_1$，试求回路的环流为定常状态时，($u_2-u_1$)与平均温度$T_{bm}^{(1)},T_{bm}^{(2)}$的关系，并求△y→0时风速的垂直切变和南北温度梯度的关系式。

附录 A 有用的常数

（国际单位制即 SI 制或 M・Kg・S 制）

引力常数	$G=6.673\times10^{-11}$牛顿・米^{2}・千克$^{-2}$
海平面处的重力加速度	$g_0=9.81$ 米・秒$^{-2}$
平均地球半径	$a=6.371\times10^{6}$米
地球自转角速度	$\Omega=7.292\times10^{-5}$(弧度)秒$^{-1}$
地球的质量	$M=5.988\times10^{24}$千克
通用气体常数	$R^{*}=8.314\times10^{3}$焦耳・开尔文$^{-1}$・千摩尔$^{-1}$
干空气的比气体常数	$R=287$ 焦尔・开尔文$^{-1}$・千克$^{-1}$
干空气的定压比热	$C_p=1004$ 焦尔・开尔文$^{-1}$・千克$^{-1}$
干空气的定容比热	$C_v=717$ 焦尔・开尔文$^{-1}$・千克$^{-1}$
比热的比率(Poisson数)	$\kappa=C_p/C_v=1.4$
水的分子量	$v=18.016$ 千克・千摩尔$^{-1}$
0℃时的凝结潜热	$L_c=2.5\times10^{6}$焦耳・千克$^{-1}$
标准的海平面气压	$p_0=101.325$ 千帕斯卡
标准的海平面气温	$T_0=288.15$ 开尔文
标准的海平面密度	$\rho_0=1.225$ 千克・米$^{-3}$
太阳常数	$J_0=1367$ 瓦特・米$^{-2}$(1.96 卡・厘米$^{-2}$・分$^{-1}$)

附录 B 常用单位的换算

1. 长度

米(m)	千米(km)	里	纬距
1000	1	0.539611	0.008997
千米(km)	米(m)	分米(dm)	厘米(cm)
1	10^3	10^4	10^5

2. 速度

米·秒$^{-1}$	千米·小时$^{-1}$	里·小时$^{-1}$	纬距·天$^{-1}$
1	3.600	1.944	0.777

3. 温度

K(开尔文)=℃(摄氏度)+273.15

4. 气压

毫巴(mb)	毫米汞柱高	达因·厘米$^{-2}$	牛顿·米$^{-2}$(N·m^{-2})
1	0.75006	1000	100

注：1 毫巴(mb)=1 百帕(hPa)=0.1 千帕(kPa)，1 帕(Pa)=1 牛顿·米$^{-2}$(N·m^{-2})

5. 能量

尔格	焦尔(J)	瓦特·小时(W·h_r)	卡(Cal)
1	10^{-7}	2.78×10^{-11}	2.39×10^{-8}

注：1 达因=1 克·厘米·秒$^{-2}$,1 牛顿=1 千克·米·秒$^{-2}$,1 尔格=1 克·厘米^2·秒$^{-2}$，

1 焦耳=1 千克·米^2·秒$^{-2}$,1 瓦特=1 焦耳·秒$^{-1}$

6. 各种基本物理量的标准单位

长度	质量	时间	速度	温度	力	气压	能量	功率
米 (m)	千克 (kg)	秒 (s)	米·秒$^{-1}$ (m·s^{-1})	开尔文 (K)	牛顿 (N)	帕 (Pa)	焦耳 (J)	瓦特 (W)

7. 位势高度和气压的换算关系(标准大气)

气压(百帕)	1000	900	850	700	600	500	400	300	200	100	50	30	10
z(km)	0.111	0.988	1.457	3.012	4.206	5.574	7.185	9.164	11.784	16.180	20.576	23.849	31.055

附录C 常用的矢量运算公式

1.$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

2.(1)$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

(2)$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\overrightarrow{A\cdot C})-\vec{A}(\overrightarrow{B\cdot C})$

3.$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi$

4.$\nabla\times\nabla\varphi=0$

5.$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

6.$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\varphi$

7.$\nabla\times(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\times\vec{A}+(\nabla\varphi)\times\vec{A}$

8.$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

9.$\nabla(\overrightarrow{A\cdot B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$

10.$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

11.$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

12.$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})-(\vec{A}\times\nabla)\times\vec{B}=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

13.$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

14.$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{B}[\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})]-\vec{A}[\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})]$

15.$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})=[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})]^2$

16.$\dfrac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

17.$\dfrac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

18.*Green*定理：$\oint_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma(\vec{k}\cdot\nabla\times\vec{F})d\sigma$或$\oint_L\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\iint_\sigma(\nabla\cdot\vec{F})d\sigma$

19.*Stokes*定理：$\oint_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}d\sigma$

20.*Gauss*定理：$\iint_\sigma\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=\iiint_\tau(\nabla\cdot\vec{F})d\tau$

21.平面散度定理：$\oint_L(\vec{F}\times\vec{n})\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma(\nabla\cdot\vec{F})d\sigma$