2020 级数值分析第二次作业(非线性方程求根) 参考答案和评分标准

班级		学号		姓名	

一 (20 分)用二分法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间[1.0, 1.5]内的一个实根，且要求有 3 位有效数字。试完成：

(1) 估计需要二分的次数；(8 分)

解：容易知道方程在[1.0, 1.5]有且仅有一个实根。记此实根为 x^*，根据二分法误差估计公式有

$$\left|x_k-x^*\right|\le\frac{(b-a)}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+2}}$$

要使得近似解有 3 位有效数字，只需要有

$$\frac{1}{2^{k+2}}\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

从而可得 $k\ge6$，即满足精度要求的二分次数为 6 次。

(2) 将计算过程中数据填入表 1.(中间过程填写到小数点后面 3 位)(12 分，每个 x_k 得 2 分，其它空不计分)

表 1 题 1 计算过程

k	a_k	b_k	x_k
0	1.0	1.5	1.25
1	1.25	1.5	1.375
2	1.25	1.375	1.316
3	1.313	1.375	1.349
4	1.313	1.344	1.328
5	1.313	1.328	1.320
6	1.320	1.328	1.324

二. (10 分) 为了计算方程 $f(x)=3x-\sin 2x-12=0$ 的根，某同学将 $f(x)=0$ 改写为 $x=4+\frac{1}{3}\sin 2x$，并建立迭代公式 $x_{k+1}=4+\frac{1}{3}\sin 2x_k$。请问此迭代公式在 R 上是否全局收敛的吗？说明理由。

证明：(1) 对任意的 $x\in R$，有 $\varphi(x)=4+\frac{1}{3}\sin 2x\in\left[\frac{11}{3},\frac{13}{3}\right]\subseteq R$；

(2) 对任意的 $x\in R$，有 $\left|\varphi'(x)\right|=\left|\frac{2}{3}\cos 2x\right|\le\frac{2}{3}<1$；

从而可知，迭代格式在 R 上全局收敛。

三. (20 分)设有方程 $f(x)=x^3-x-1=0$，试回答下列问题：

(1) 确定方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 实根的数目；(4 分)

解：由 $f'(x)=3x^2-1$ 可知函数 $f(x)=x^3-x-1$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt3}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt3}{3},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)$。容易知道，$x=\pm\frac{\sqrt3}{3}$ 是函数 $f(x)=x^3-x-1$ 的两个极值点。再根据 $f\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)=-\frac{2\sqrt3}{9}-1<f\left(-\frac{\sqrt3}{3}\right)=\frac{2\sqrt3}{9}-1<0$，

从而可知函数 $f(x)=x^3-x-1$ 只在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 有一个实根。

(2) 迭代公式 $x_{k+1}=\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{3}}$ 在区间[1,2]上是否全局收敛；(10 分)

解：由 $f(x)=x^3-x-1=0$ 可得 $x=(x+1)^{\frac{1}{3}}$，取 $\varphi(x)=\left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}$，可得 $\varphi'(x)=\frac{1}{3}\left(1+x\right)^{-\frac{2}{3}}$。

取迭代格式为 $x_{k+1}=\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{3}}$，k=0,1,2,…..

根据第(1)问，容易知道 $x^3-x-1=0$ 在区间[1, 2]上有且仅有一个实根。

①对任意的 $x\in[1,2]$，有 $\varphi(x)=\left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}\in\left[2^{\frac{1}{3}},3^{\frac{1}{3}}\right]\subseteq[1,2]$；

②对任意的 $x\in[1,2]$，有 $\left|\varphi'(x)\right|=\left|\frac{1}{3}\left(1+x\right)^{-\frac{2}{3}}\right|\le\frac{1}{3}\times 2^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{2}<1$；

从而可知迭代格式在区间[1, 2]全局收敛。(注释：收敛区间也可以是其它区间)

(3) 在表 2 中填写相应的计算数据。(要求填写到小数点后 3 位)(6 分)

表 2 第三题表

k	x_k
0	1.5(初值也可自选)
1	1.357
2	1.330
3	1.326

四. (15 分) 试构造一个能求 $\sqrt[3]{7}$ 的迭代公式，并讨论收敛性。

解：令 $x=\sqrt[3]{7}$，可得 $x^3-7=0$。再令 $f(x)=x^3-7$。容易知道

① $f(1)f(2)<0$；

② $f'(x)=3x^2>0, x\in[1,2]$；

③ $f''(x)=6x>0, x\in[1,2]$。

取 $x_0=2$，可知 $f(x_0)f''(x_0)>0$。从而可知牛顿迭代法在区间[1, 2]上全局收敛，且收敛于方程 $x^3-7=0$ 的唯一实根 $x^*=\sqrt[3]{7}$。取迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-7}{3x_k^2}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{7}{x_k^2}\right), x_0=2$$

五. (15 分) 由一个高为 10m 的圆柱构成的发射井的顶部是一个半球，体积之和是 400m³。试确定发射井底部的半径，精确到小数点后 4 位。取 $\pi\approx 3.1416$ (要求用牛顿法，写出分析过程)

解： 设底部半径为 r，则根据题意可得 $\frac{2}{3}\pi r^3+10\pi r^2=400\Rightarrow\pi r^3+15\pi r^2-600=0$。

令 $f(r)=\pi r^3+15\pi r^2-600$.容易知道:

① $f(3)<0, f(4)>0$； ② $f'(r)=3\pi r^2+30\pi r>0, r\in[3,4]$，即方程

$\pi r^3+15\pi r^2-600=0$ 在[3, 4]上有唯一实根；③ $f''(r)=6\pi r+30\pi>0, r\in[3,4]$.

取初值 $r_0=4$，因为 $f(r_0)f''(r_0)>0$，所以牛顿迭代法在区间[3, 4]上收敛于方程 $\pi r^3+15\pi r^2-600=0$ 的唯一实根。取迭代格式为:

$$r_{k+1}=r_k-\frac{f(r_k)}{f'(r_k)}=r_k-\frac{\pi r_k^3+15\pi r_k^2-600}{3\pi r_k^2+30\pi r_k}, r_0=4$$

迭代过程如下：(写到小数点后 4，5 位也可以)

$r_1=3.327295$, $|r_1-r_0|=0.672705>0.5\times10^{-4}$；

$r_2=3.237737$, $|r_2-r_1|=0.089558>0.5\times10^{-4}$；

$r_3=3.236184$, $|r_3-r_2|=0.001556>0.5\times10^{-4}$；

$r_4=3.236184$, $|r_4-r_3|=0<0.5\times10^{-4}$

取 $r_4\approx3.2362\approx r^*$，即发射井的底部半径约为 3.2362m.

六. (5 分) 用割线法计算第五题中的半径.(精度要求与第五题相同)

解：分析如第五题，取迭代格式为:

$$r_{k+1}=r_k-\frac{f(r_k)}{\dfrac{f(r_k)-f(r_{k-1})}{r_k-r_{k-1}}}$$，其中 $r_0=3, r_1=4, f(r_k)=\pi r_k^3+15\pi r_k^2-600$，

迭代过程如下：(初值不一定选 $r_0=3, r_1=4$，也可以是其它)

$r_2=3.20412, r_3=3.23195, r_4=3.23621, r_5=3.23618$

因为 $|r_5-r_4|=|3.23618-3.23621|=0.0003<0.00005$，所以取 $r_5=3.2362\approx r^*$，即发射井的底部半径约为 3.2362m.

七. (选做) 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 $m(\geq2)$ 重根,即 $f(x)$ 具有形式 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$.

证明:

(1) 用牛顿迭代法时,迭代函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{m}$.(此时,只能是线性收敛)

(2) 若将迭代函数改进为 $\varphi(x)=x-\frac{mf(x)}{f'(x)}$,那么证明改进后的方法至少是平方收敛的.

(提示: (1) x^* 是 $f(x)=0$)的重根时,$\varphi'(x)$ 的表达式中可以约分).

(2) 只需证明 $\varphi'(x^*)=0$.)

证明:

(1) 在牛顿迭代法中,迭代函数 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$,那么容易得到

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

因为 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$,所以

$$f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x)$$
$$f''(x)=m(m-1)(x-x^*)^{m-2}g(x)+m(x-x^*)^{m-1}g'(x)$$
$$+m(x-x^*)^{m-1}g'(x)+(x-x^*)^m g''(x)$$

将 $f(x), f'(x), f''(x)$ 代入 $\varphi'(x)$ 中,可得(分子分母同时约去 $(x-x^*)^{2(m-1)}$)

$$\varphi'(x)=\frac{g(x)[m(m-1)g(x)+2m(x-x^*)g'(x)+(x-x^*)^2g''(x)]}{[mg(x)+(x-x^*)g'(x)]^2}$$

因此,有

$$\varphi'(x^*) = \frac{g(x^*)[m(m-1)g(x^*)]}{[mg(x^*)]^2} = 1 - \frac{1}{m}\ (\because g(x^*) \neq 0)$$

(2) 若$\varphi(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$，那么显然有

$$\varphi'(x) = 1 - m\left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)}\right]$$

从而,根据第(1)问中的证明,可得

$$\varphi'(x^*) = 1 - m\left[1 - \frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)f'(x^*)}\right] = 1 - m\left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right] = 0$$

所以,改进后的方法至少是平方收敛的.

八. (15 分)证明迭代公式$x_{\mathrm{k+1}} = \frac{x_k\left(x_k^2+3a\right)}{3x_k^2+a}$是计算$\sqrt{a}(a>0)$的三阶方法.

证明:容易知道迭代函数为

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$$

因为$\varphi\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$,所以$x^* = \sqrt{a}$是方程$\varphi(x) = x$的不动点.

容易求得

$$\varphi'\left(\sqrt{a}\right) = \varphi''\left(\sqrt{a}\right) = 0, \varphi'''\left(\sqrt{a}\right) = \frac{3}{2a} \neq 0$$

因此，此迭代方法三阶收敛。