三维变换与投影

计算机图形学

总结

■显示

- 直线段的扫描转换
- 圆的扫描转换
- 椭圆的扫描转换
- 多边形填充

■变换

- 二维图形几何变换

■先平移，再旋转

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

■先旋转，再平移

$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & n & 1\end{bmatrix}$$

本章主要内容：

本章学习目标:

- 熟练掌握三维基本几何变换矩阵
- 掌握正交投影
- 掌握斜投影
- 熟练掌握透视投影

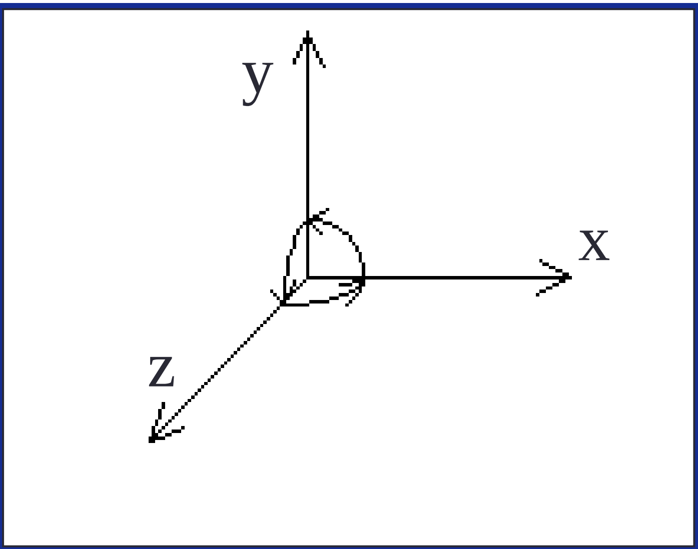
6.1 三维图形几何变换

■现实世界是三维的，而光栅扫描显示器是二维的，因此要在计算机屏幕上输出三维场景就要通过投影变换来降低维数。

- 正交投影（Othogonal Projection)
- 斜投影（Oblique Projection)
- 透视投影（Perspective Projection)

6.1 三维图形几何变换

- 三维坐标，右手坐标系
  - 旋转轴 正的旋转方向
  - x y->z
  - y z->x
  - z x->y



- 三维齐次坐标

(x, y, z) 点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, z_h, h)

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

  - 标准齐次坐标(x,y,z,1)

6.1.2三维几何变换形式

■图形变换前的顶点集合的规范化齐次坐标矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix}$$

■变换后的顶点集合的规范化齐次坐标矩阵为：

$$P^{'}=\begin{bmatrix} x_1^{'} & y_1^{'} & z_1^{'} & 1 \\ x_2^{'} & y_2^{'} & z_2^{'} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{'} & y_n^{'} & z_n^{'} & 1 \end{bmatrix}$$

6.1.2三维几何变换形式

- 变换矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

- 则三维图形基本几何变换有 $P' = P \cdot T$

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n' & y_n' & z_n' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

6.2 三维图形基本几何变换矩阵

- 三维基本几何变换是指将 $P(x,y,z)$ 点从一个坐标位置变换到另一个坐标位置 $P'(x,y,z)$ 的过程。

- 三维基本几何变换和二维基本几何变换一样是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换，包括平移、比例、旋转、反射和错切5种变换。因为三维变换矩阵的推导过程和二维变换矩阵的推导过程类似。

6.1.1三维几何变换矩阵

-

- $$T_1=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ 对图形进行比例、旋转、错切、反射变换。

- $$T_2=\begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}$$

- 对图形进行平移变换。

6.1.1三维几何变换矩阵

-
- $$T_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$ 对图形进行投影变换。
-
- $$T_4 = [s]$$ 对图形进行整体比例变换。

平移变换

- 平移变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z \end{cases}$$

- 因此，三维平移变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

T_x, T_y, T_z是平移参数。

比例（缩放）变换

- 比例变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = xS_x \\ y' = yS_y \\ z' = zS_z \end{cases}$$

- 因此，三维比例变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S_x, S_y, S_z是比例系数。

旋转变换

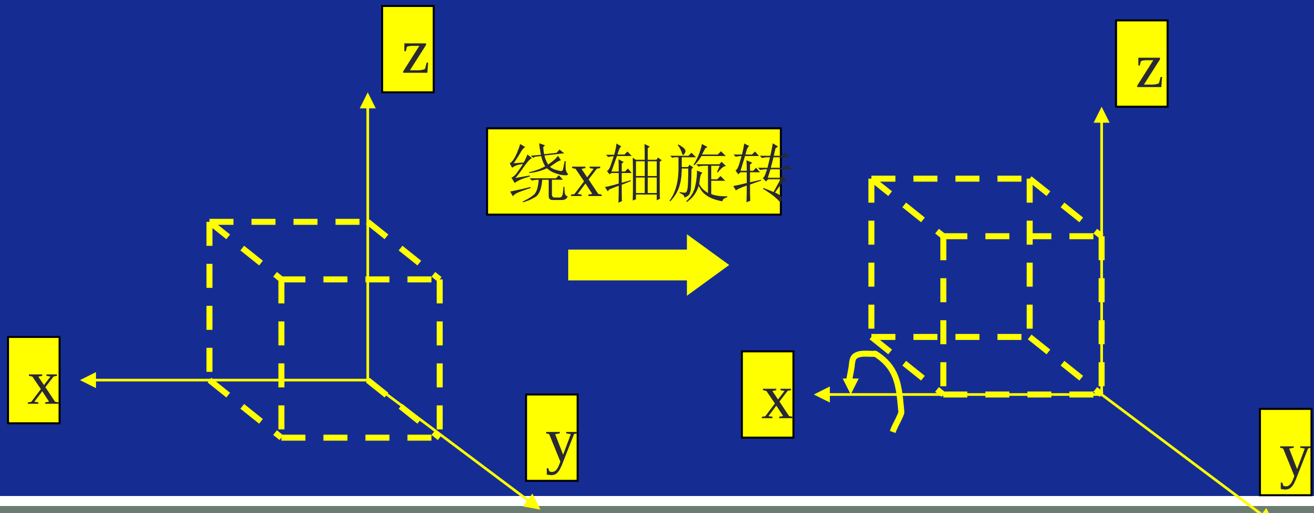
- 三维旋转一般看作是二维旋转变换的组合
- 可以分为：绕x轴的旋转，绕y轴的旋转，绕z轴的旋转。
- 转角的正向满足右手定则：大拇指指向旋转轴，四指的转向为正向。

绕x轴旋转

■绕x轴旋转变换的坐标表示和变换阵分别为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\beta - z\sin\beta \\ z' = y\sin\beta + z\cos\beta \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

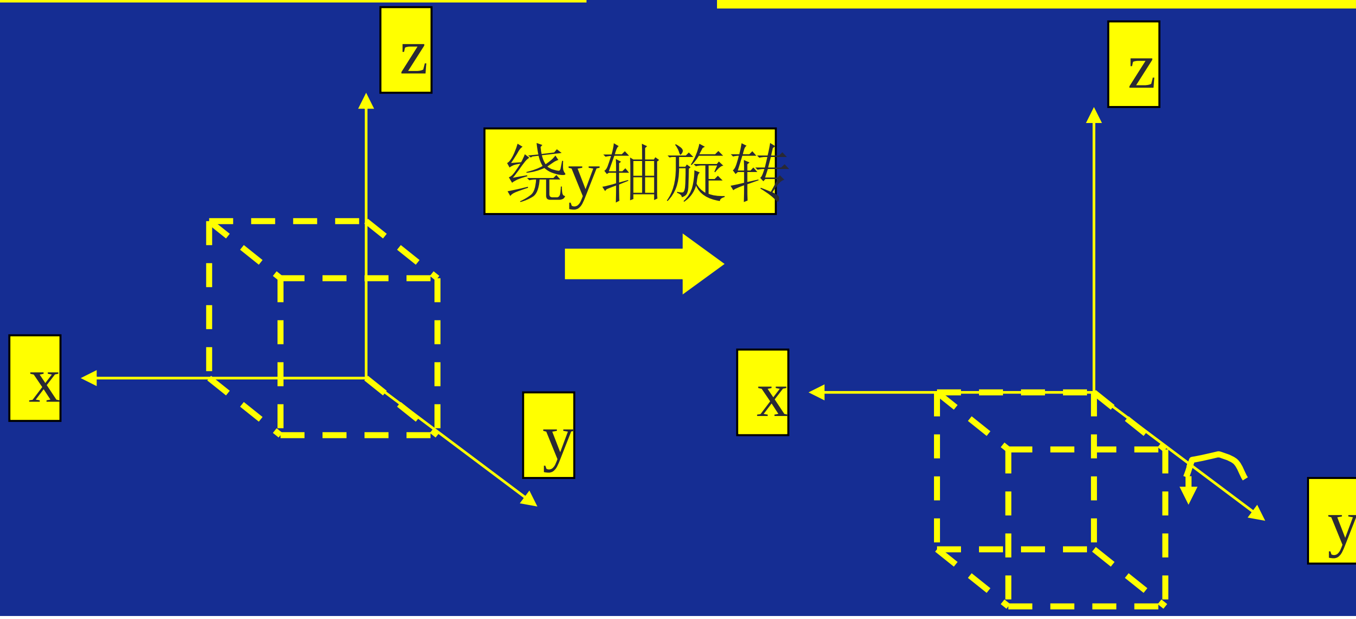


绕y轴旋转

- 绕y轴旋转变换的坐标表示和变换阵分别为

$$\begin{cases} x' = z\sin\beta + x\cos\beta \\ y' = y \\ z' = z\cos\beta - x\sin\beta \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

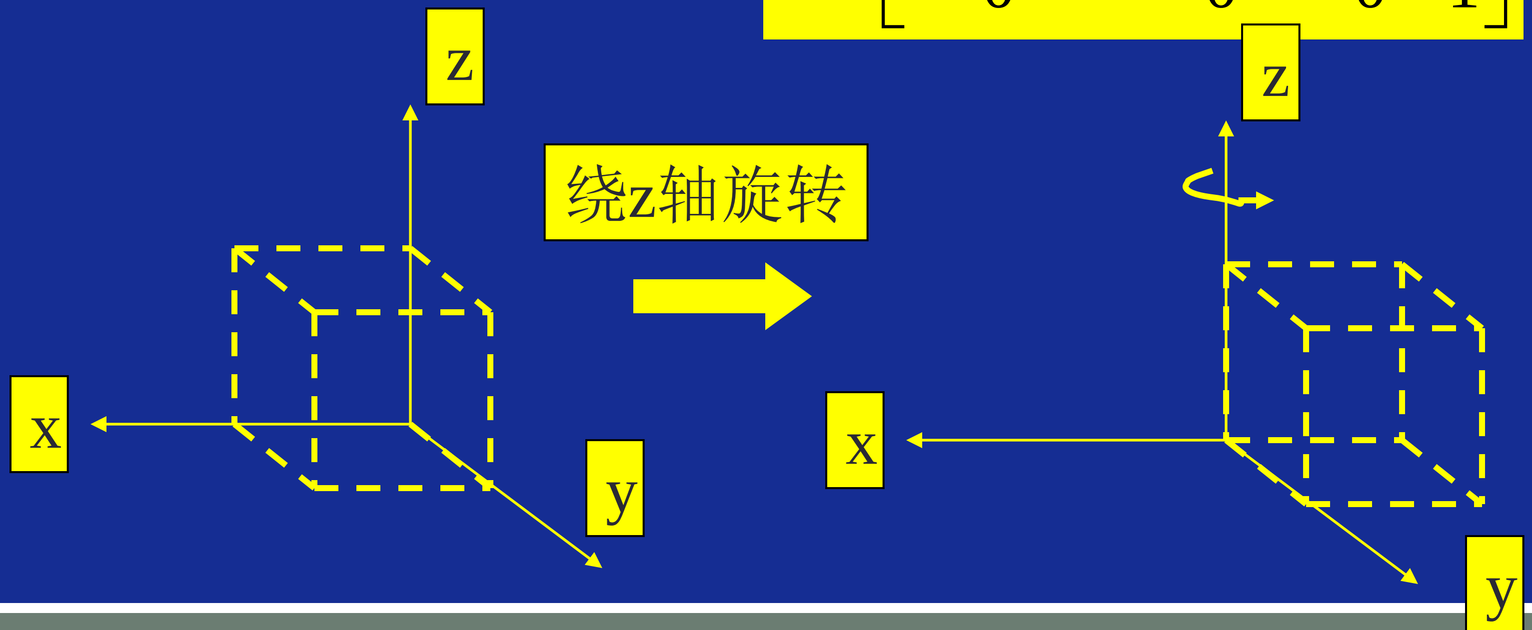


绕z轴旋转

■绕z轴旋转变换的坐标表示和变换阵分别为

$$\begin{cases} x' = x\cos\beta - y\sin\beta \\ y' = x\sin\beta + y\cos\beta \\ z' = z \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



反射（对称）变换

■三维反射分为两类：

◆关于坐标轴的反射

◆关于坐标平面的反射

■ 关于x轴的反射

坐标表示为 $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$

变换矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

反射（对称）变换

■关于y轴的反射

坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

反射（对称）变换

关于z轴的反射

坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

反射（对称）变换

■关于xoy轴的反射

坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

反射（对称）变换

■关于yoz轴的反射

坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

反射（对称）变换

■关于zox轴的反射

坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

错切变换

- 三维错切变换中，一个坐标的变化受另外两个坐标变化的影响。
- 如果变换矩阵第一列中元素d和g不为0，产生沿x轴方向的错切；
- 第二列中元素b和h不为0，产生沿y轴方向的错切
- 第三列中元素c和f不为0，产生沿z轴方向的错切

变换矩阵为$T=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 坐标表示为 $\begin{cases}x'=x+dy+gz\\ y'=bx+y+hz\\ z'=cx+fy+z\end{cases}$

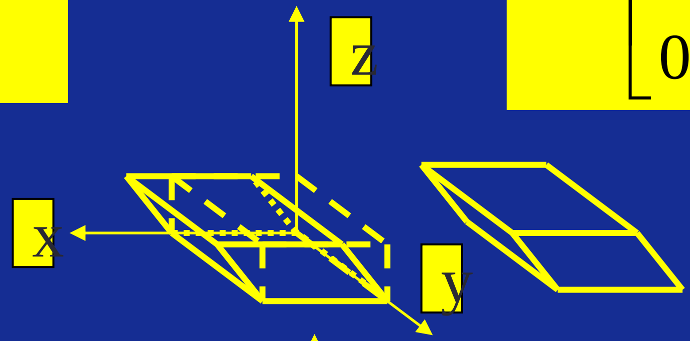
沿x方向错切

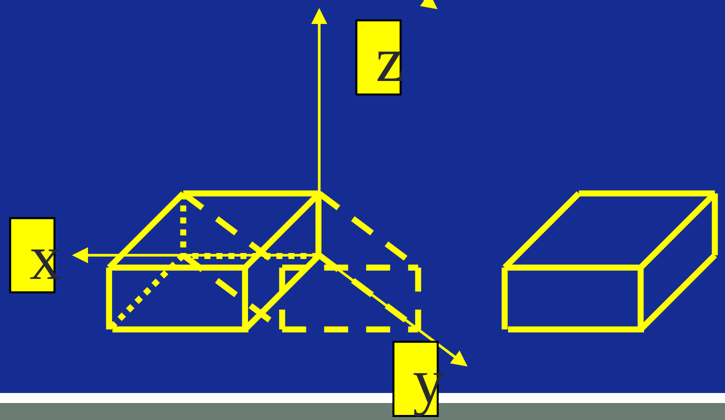
- b＝0，h＝0，c＝0，f＝0

坐标表示为
$$\begin{cases} x' = x + dy + gz \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

变换矩阵为
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ g & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d＝0时，错切平面离开z轴，沿x方向移动gz距离；
- g＝0时，错切平面离开y轴，沿x方向移动dy距离。



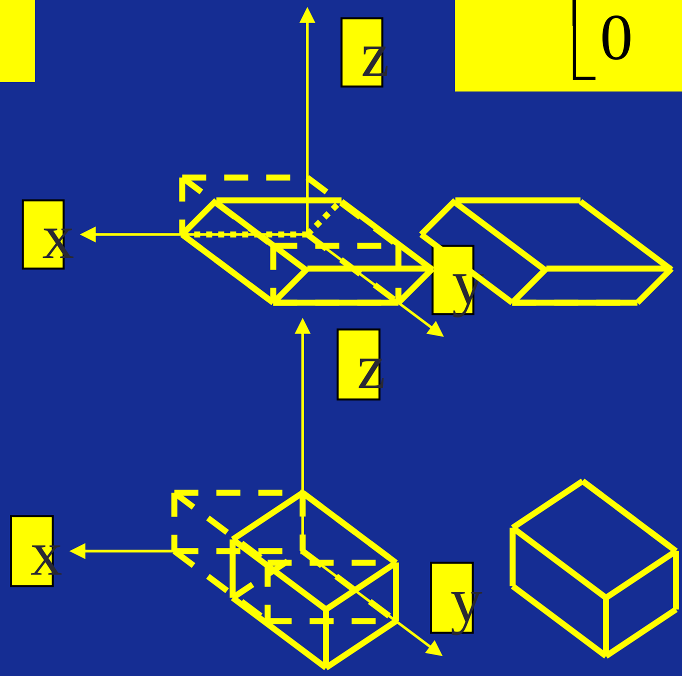


沿y方向错切

- b＝0，g＝0，c＝0，f＝0。

坐标表示为 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + bx + hz \\ z' = z \end{cases}$ 变换矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- b = 0时，错切平面离开z轴，沿y方向移动hz距离；
- h = 0时，错切平面离开x轴，沿y方向移动bx距离。

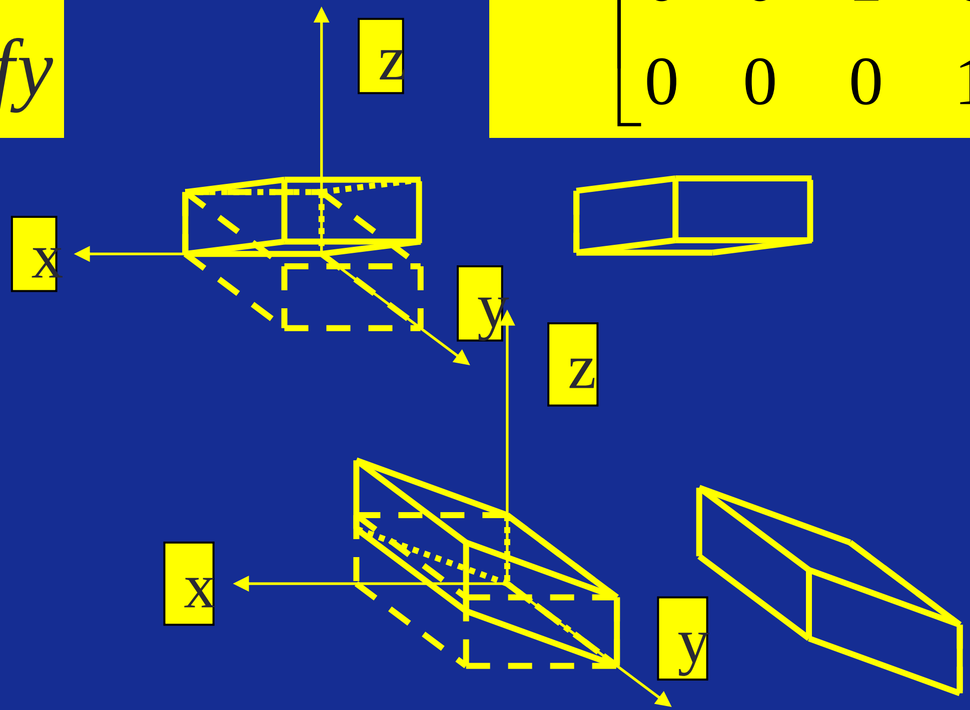


沿z方向错切

- d＝0，g＝0，b＝0，h＝0

坐标表示为 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + cx + fy \end{cases}$ 变换矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- c＝0时，错切平面离开y轴，沿z方向移动fy距离；
- f＝0时，错切平面离开x轴，沿z方向移动cx距离。



6.3 三维图形复合变换

- 基本几何变换是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换
- 相对于任意点和任意方向的几何变换通过三维复合变换来实现
- 对三维图形按顺序进行多个基本变换，即可完成三维复合变换，复合变换矩阵是每一步变换矩阵相乘的结果

6.3.1 相对于任意参考点的 三维几何变换

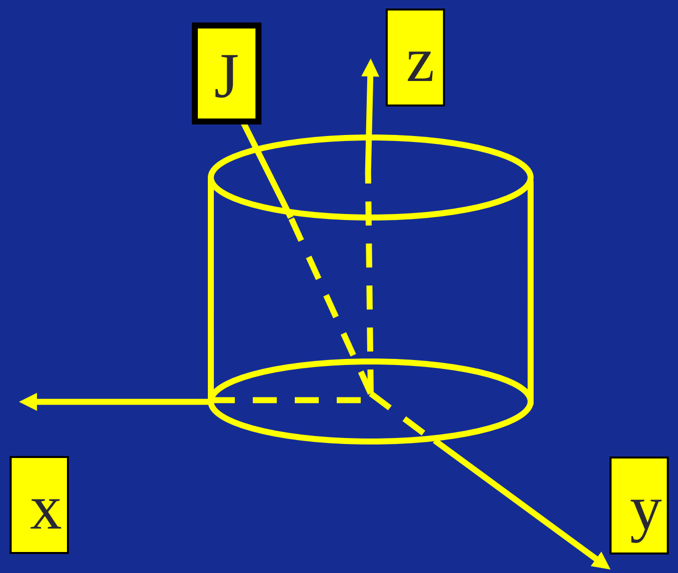
- 首先将参考点平移到坐标原点，相对于坐标原点作比例变换或旋转变换
- 然后再进行反平移将参考点平移回到原位置
- 参考相对于任意参考点的二维几何变换

6.3.2 相对于任意方向的 三维几何变换

- 首先将任意方向做旋转变换，使得变换方向与某个坐标轴重合
- 然后对该坐标轴进行三维基本几何变换
- 最后做反向旋转变换，将任意方向还原到原来的方向
- 注：需要进行两次旋转变换，才能使任意方向与某个坐标轴重合。一般做法是先将任意方向旋转到某个坐标平面内，然后再旋转到与该坐标平面内的某个坐标轴重合

两次旋转变换

- 使三维图形绕J轴旋转θ角
- 思路：将J轴重合Z轴之后，使立体旋转θ角，然后返回



两次旋转变换

■步骤：

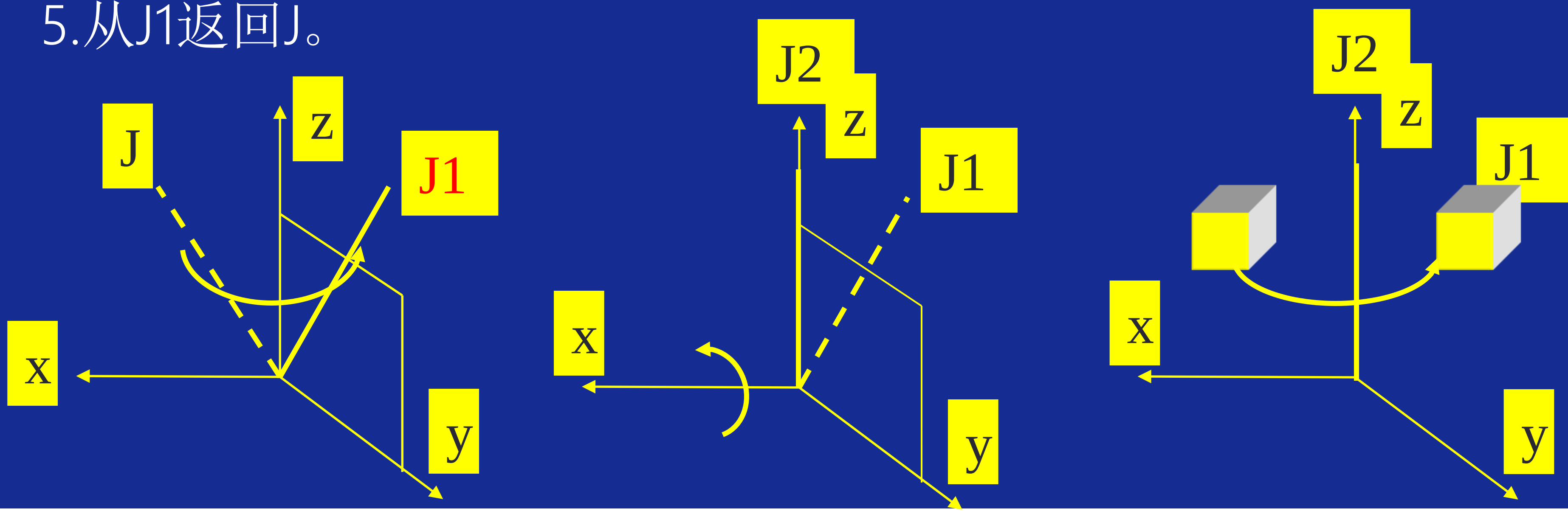
1.J轴绕Z轴转φ角至yOz平面，成为J1。

2.J1轴绕X轴转γ角后与z轴平行，成为J2。

3.立体绕J2轴转θ角

4.从J2返回J1。

5.从J1返回J。

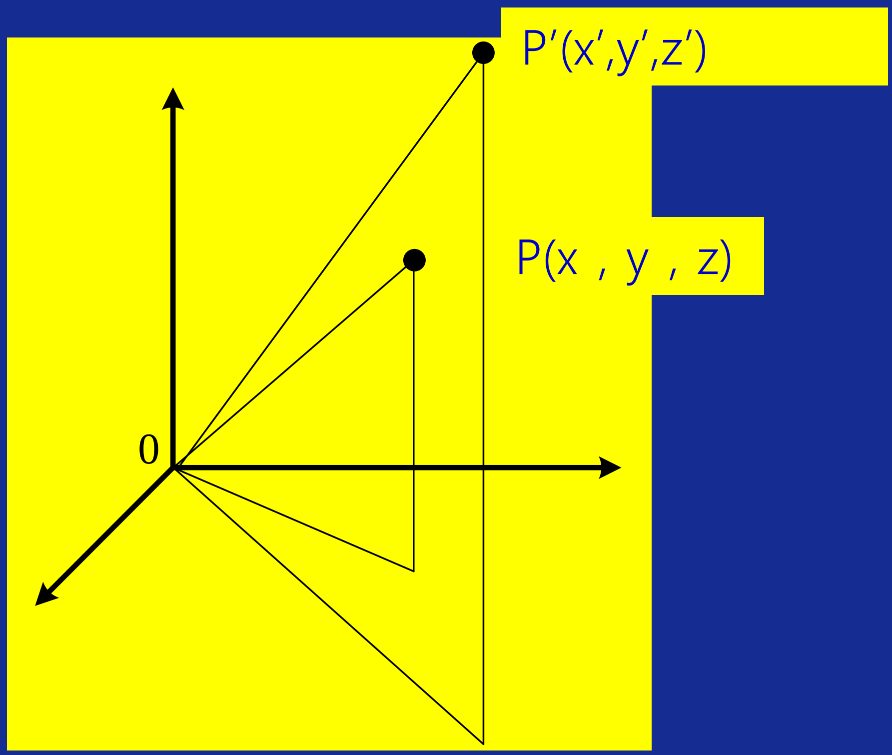


6.4 坐标系变换

- 前面讲的变换都是点变换。
- 在实际应用中，需要将物体的描述从一个坐标系变换到另一个坐标系。如在进行三维观察时，需要将物体的描述从世界坐标系变换到观察坐标系，然后通过旋转视点可以观察物体的全貌。
- 同一种变换，既可以看作是点变换也可以看作是坐标系变换。
  - **点变换是物体上点的位置发生改变，但坐标系位置固定不动；**
  - **坐标系变换是建立新坐标系描述旧坐标系内的顶点，坐标系位置发生改变，但物体顶点位置固定不动。**

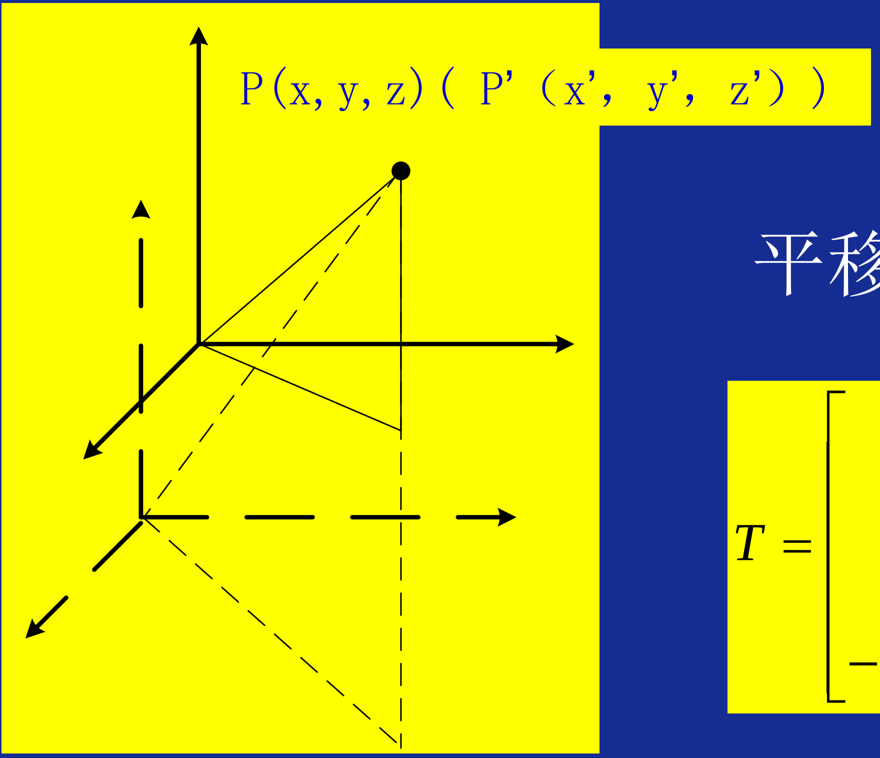
6.4.2 三维坐标系变换

- 对于点变换，在{O；x,y,z}坐标系中，设平移参数为T_x, T_y, T_z，则P点变换到P′点，如下图所示。



6.4.2 三维坐标系变换

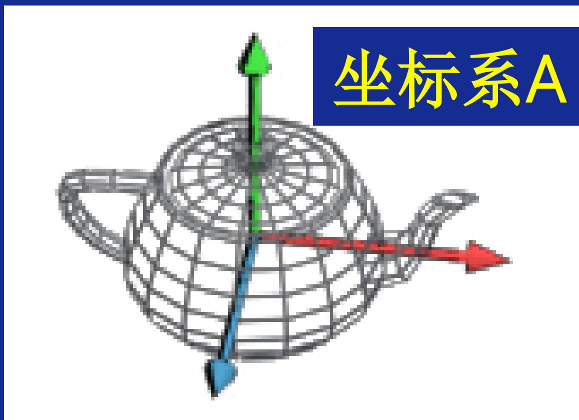
■对于坐标变换，则是P点不动，将{O；x, y, z}坐标系的原点从O点平移到 {O′;x', y', z'}坐标系的原点O′，坐标系平移参数为$-T_x$, $-T_y$, $-T_z$，，如下图所示。

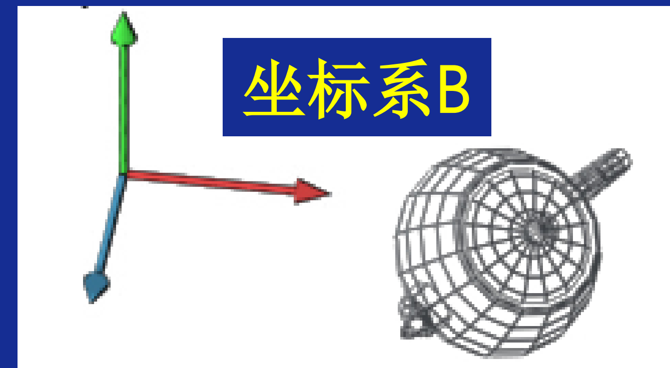


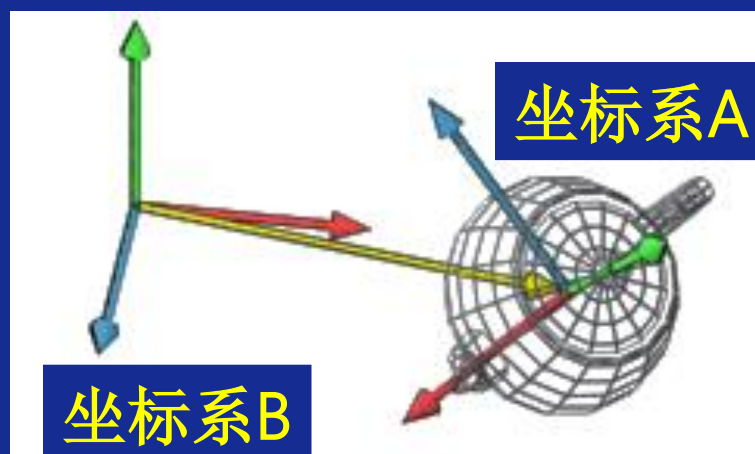
平移变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

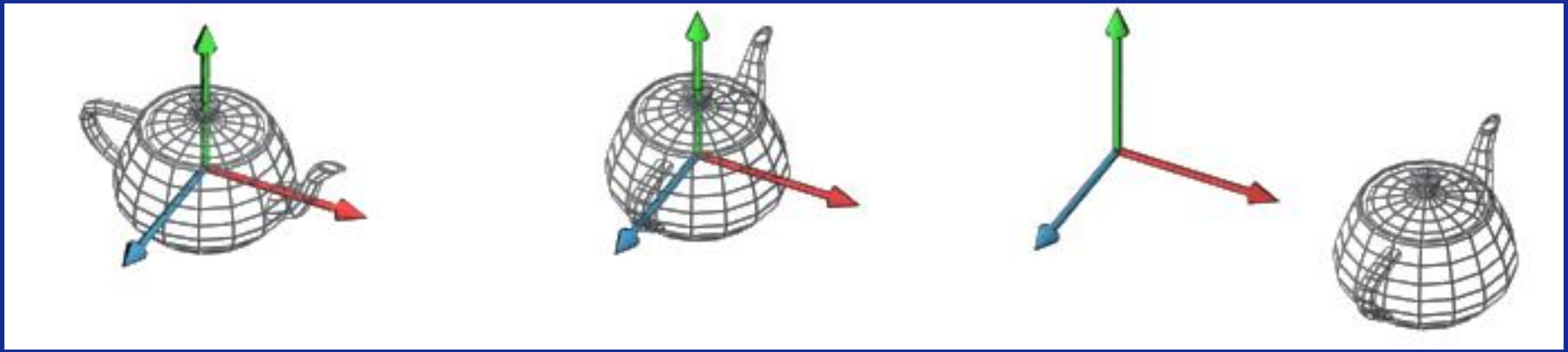
坐标系变换

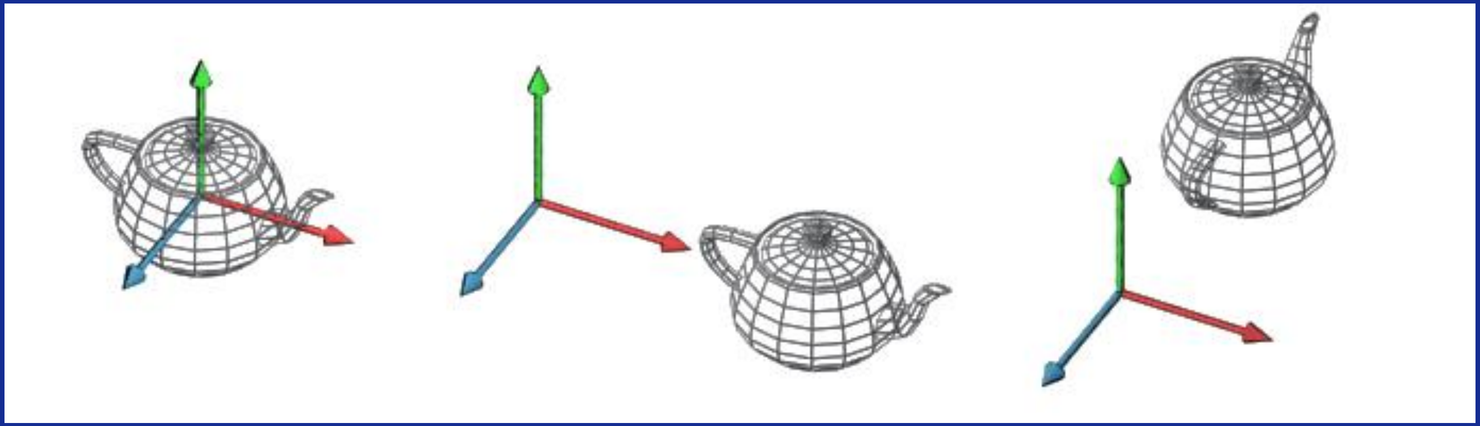






复合变换





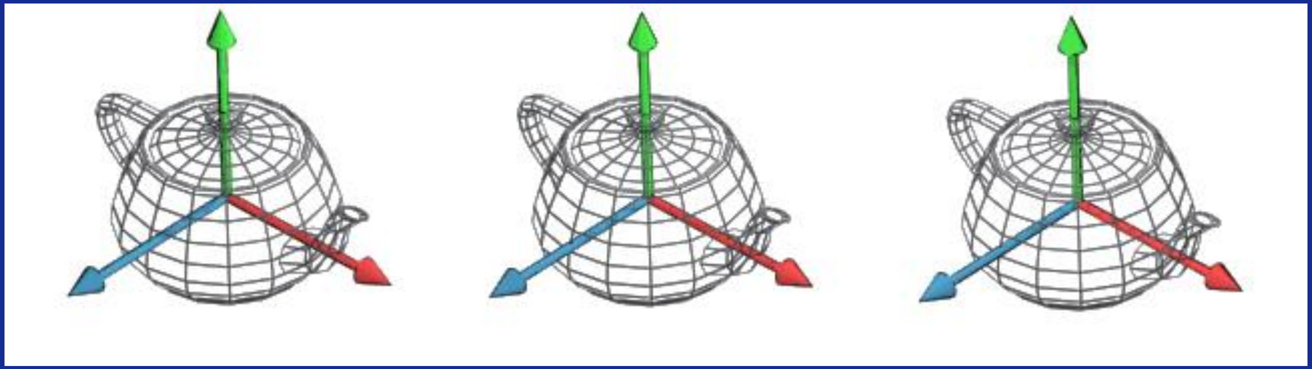
投影变换

- 显示器只能用二维图形表示三维物体，因此三维物体就要靠投影来降低维数得到二维平面图形。
- 投影就是从投影中心发出射线，经过三维物体上的每一点后，与投影面相交所形成的交点集合。
- 把三维物体转变为二维图形的过程称为投影变换

三维物体投影到二维平面的过程

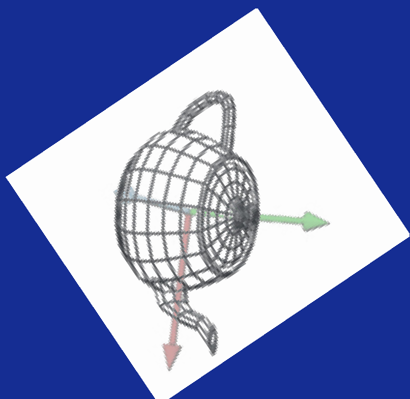
每个物体都有自己的局部坐标系（用户坐标系）

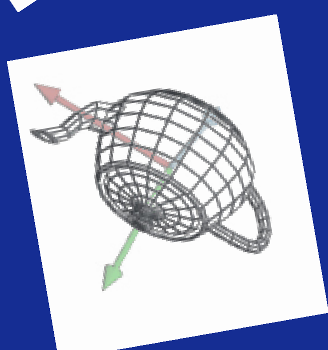
用户坐标系1 用户坐标系2 用户坐标系3



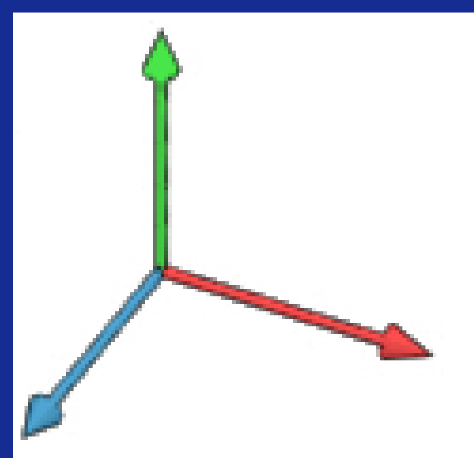
三维物体投影到二维平面的过程

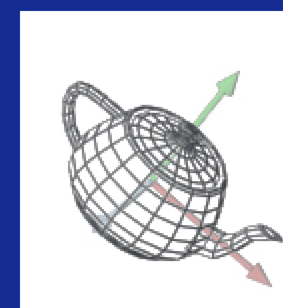
将每个物体每个物体放置同一空间（世界坐标系）





世界坐标系



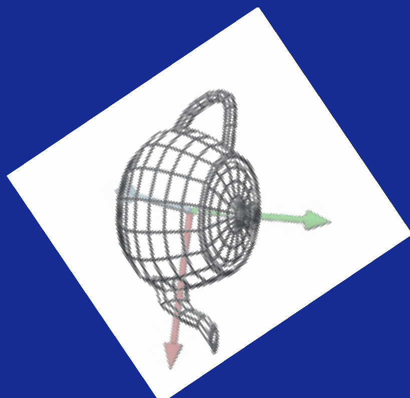


三维物体投影到二维平面的过程

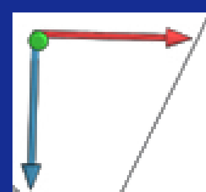
要将三维物体投影到二维屏幕上进行显示：

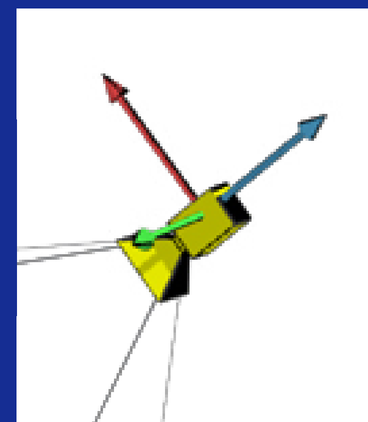
1、将所有物体（对象）移动到观察空间坐标系下；

2、使用投影矩阵进行投影；

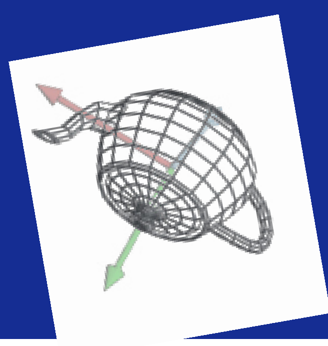


世界坐标系



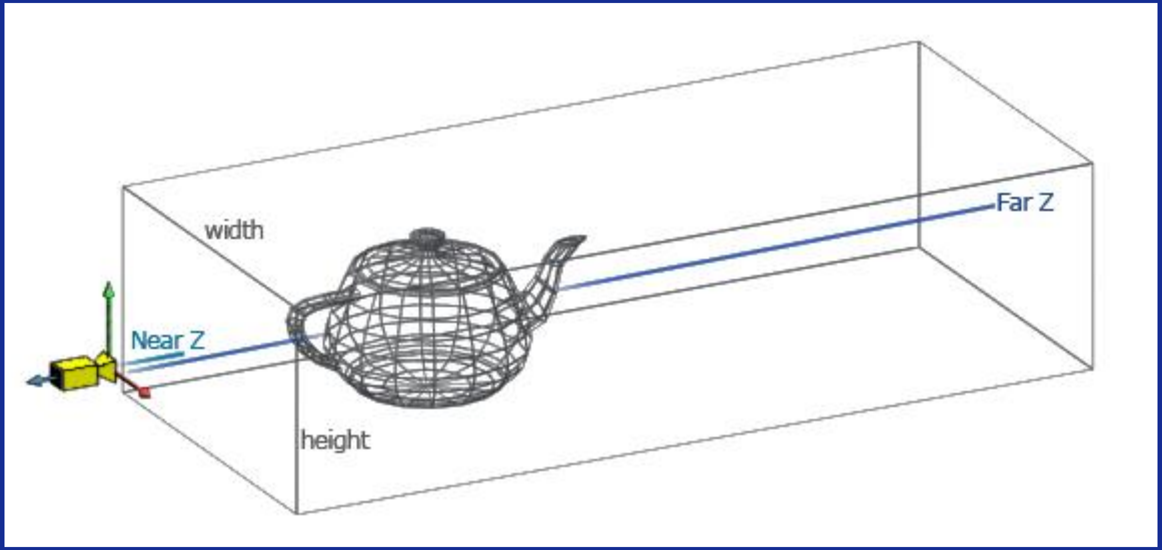


观察坐标系

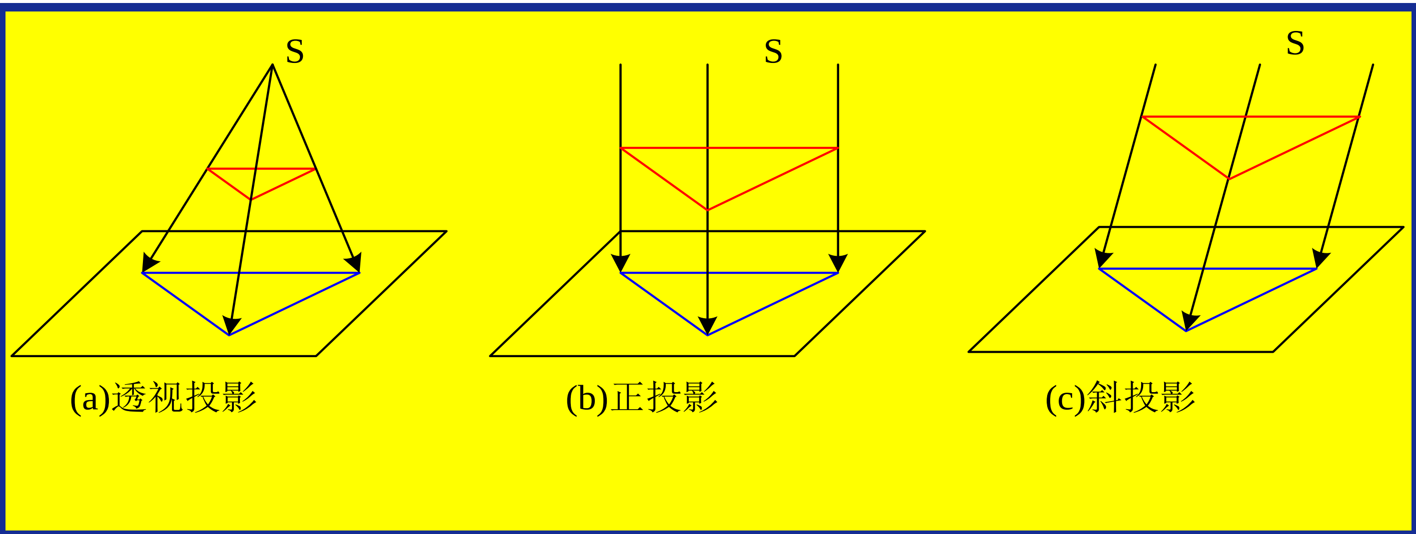


三维物体投影到二维平面的过程

三维物体转为二维的过程



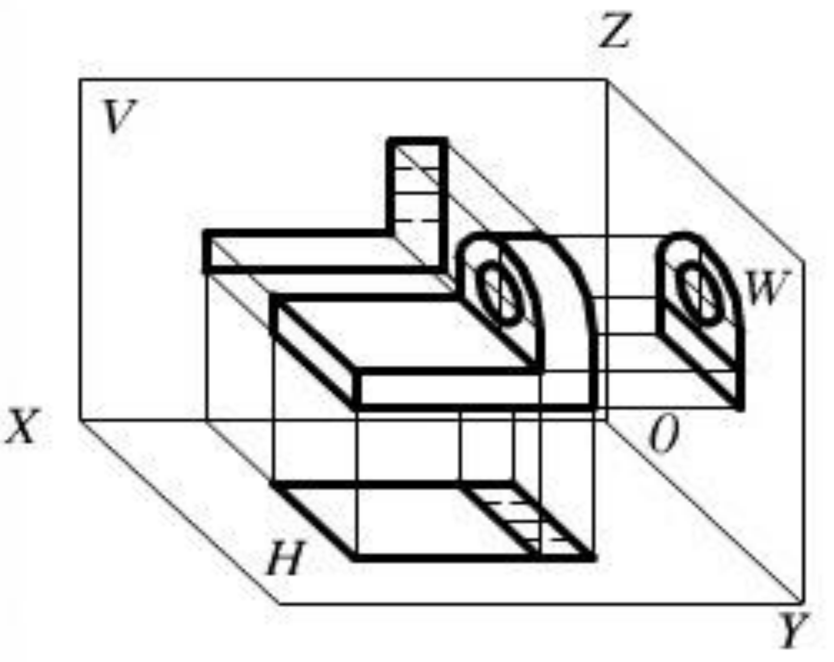
投影变换



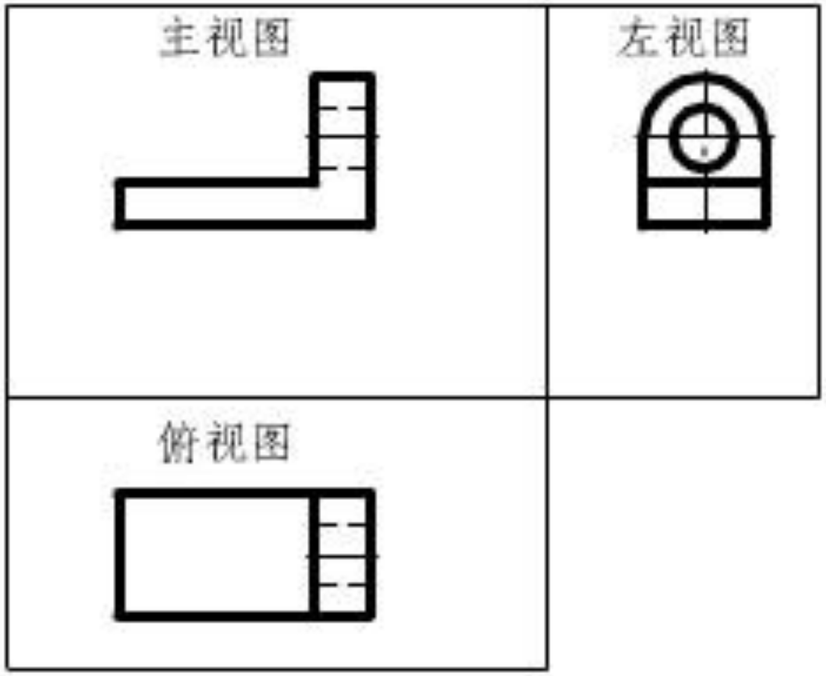
投影变换可分为两大类：

- 透视投影的投影中心到投影面之间的距离是有限的；
- 平行投影的投影中心到投影面之间的距离是无限的；
- 平行投影的最大特点是无论物体距离视点多远，投影后的物体尺寸保持不变。
- 平行投影可分成两类：正投影和斜投影。

6.5.2 三视图



(a) 空间投影图

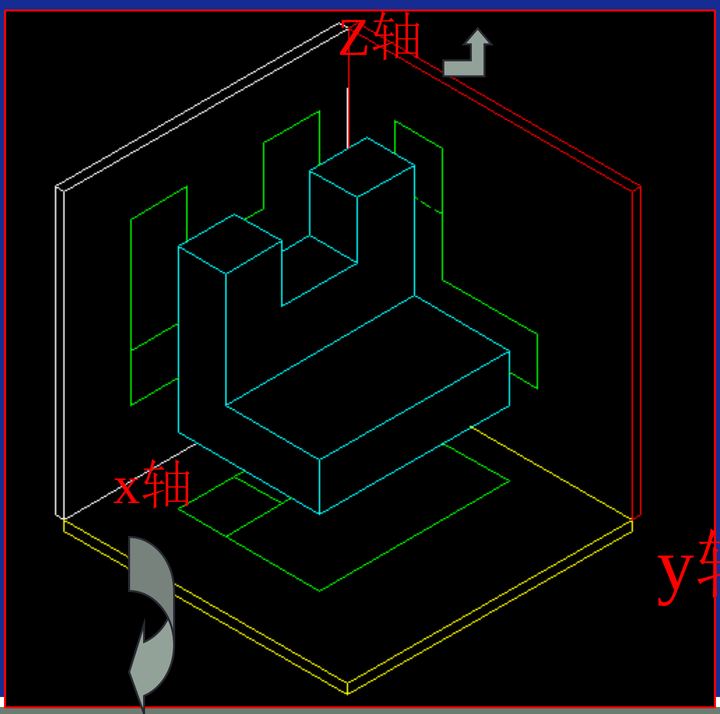


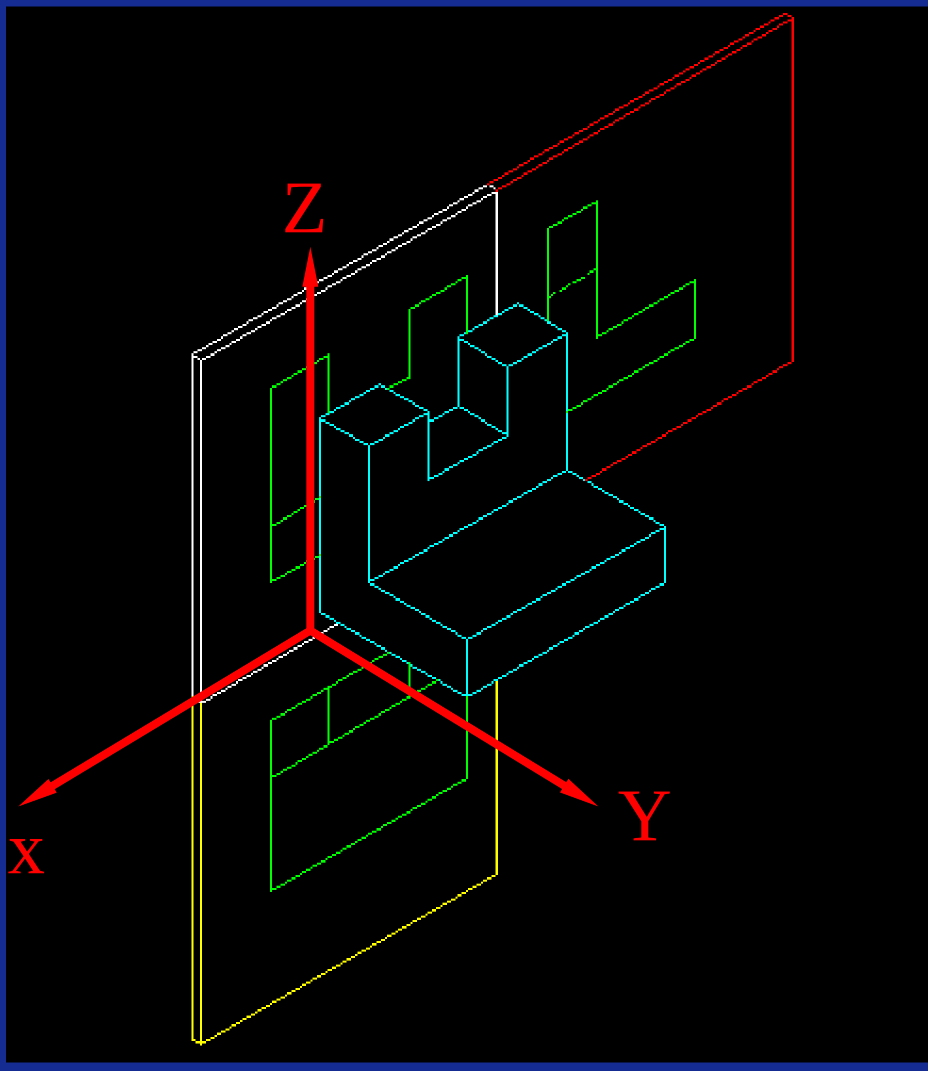
(b) 三视图的展开

三视图

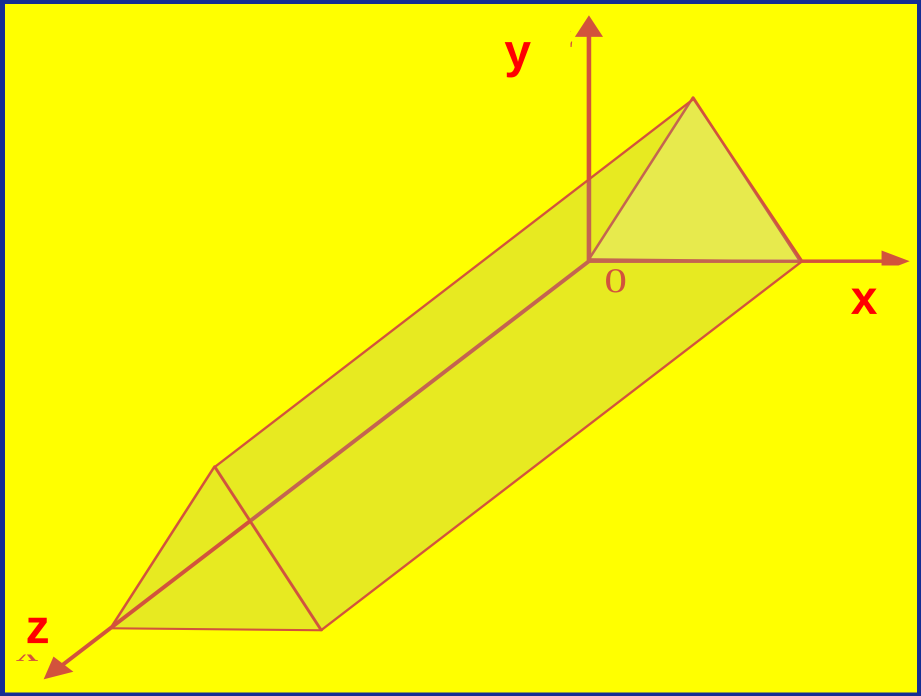
- 将视线规定为平行投影线，正对着物体看过去，将可见物体的边界用正投影绘制出来的图称为视图。
- 三视图包括主视图、俯视图和侧视图，是正投影视图
- 投影面分别与y轴、 z轴和x轴垂直
- 将三维物体分别对正面、水平面和侧平面做正投影得到三个基本视图

- 主视图的形成：
- 直接向V面（XOZ坐标面）投影；
- 俯视图的形成：
- 绕X轴向下旋转90度，平移 N 距离；
- 侧(左)视图的形成：
- 绕Z轴向后旋转90度，平移 L 距离。

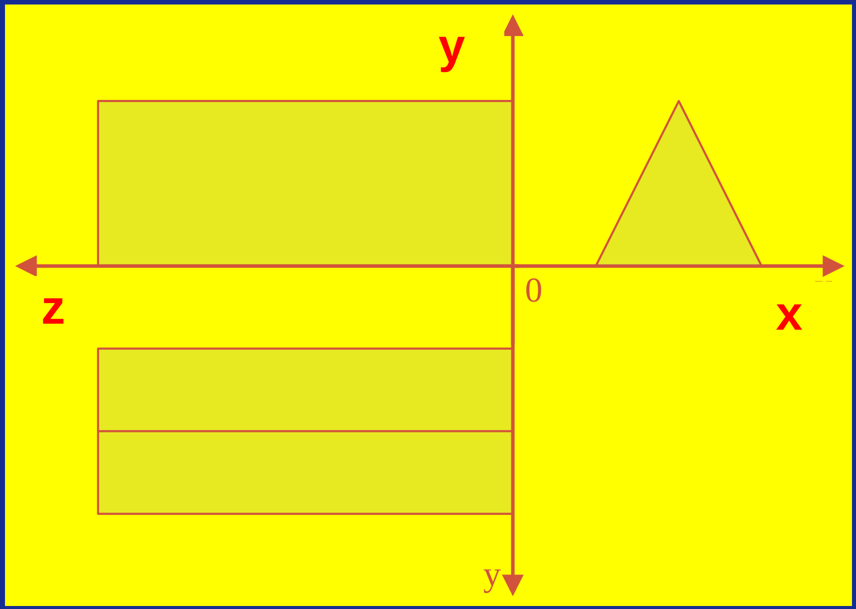




三视图



正三棱柱的立体图



正三棱柱的三视图

(1)主视图

- 将三棱柱向yoz面作平行投影，得到主视图。
  设三棱柱上任一点坐标用P(x，y，z)表示
  它在yoz面上投影后坐标为P’(x’，y’，z’)
  坐标关系 **x’=0，y’=y**，z’=z

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

主视图投影变换矩阵为：
$$T_V = T_{xoz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)俯视图

- 将三棱柱向xoz面作平行投影，得到俯视图。
  设三棱柱上任一点坐标用P(x，y，z)表示
  它在xoz面上投影后坐标为P’(x’，y’，z’)
  坐标关系 x’=x，**y’=0**，**z’=z**，

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

俯视图投影变换矩阵为：

$$T_{xoy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)俯视图

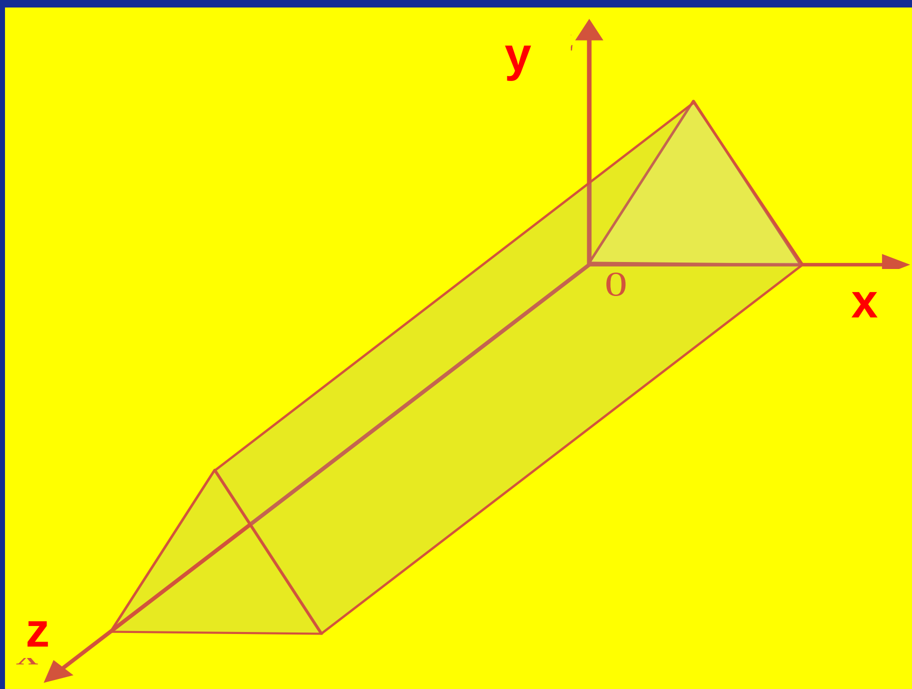
- 为了使俯视图和主视图在一个平面上，使xoz面绕z轴顺时针旋转90°，旋转矩阵为：

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 & 0\\ -\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

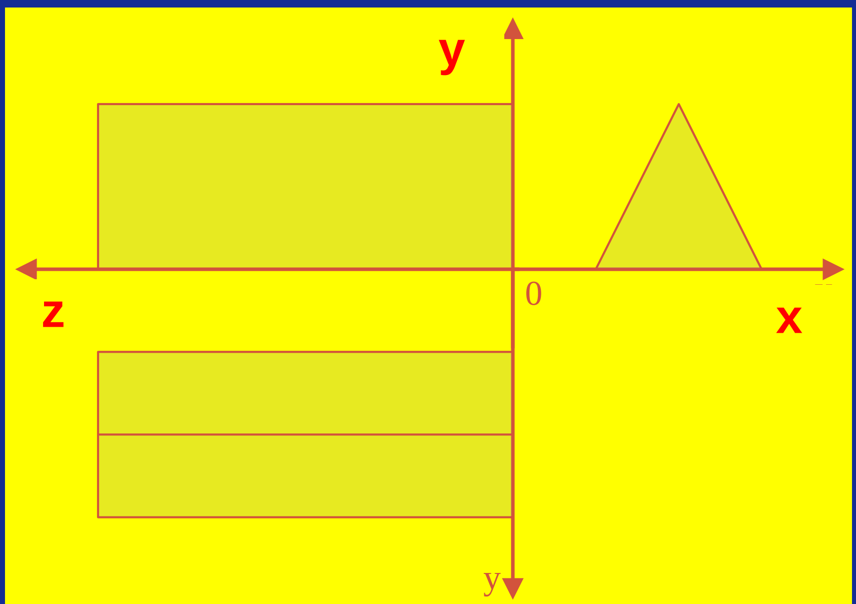
- 为了使俯视图和主视图有一定的间距，

$$T_{Tz}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -tx & tz & 1\end{bmatrix}$$

三视图



正三棱柱的立体图



正三棱柱的三视图

(3)侧视图

- 将三维形体向xoy面作平行投影，得到侧视图。
  设三维形体上任一点坐标用P(x，y，z)表示
  它在xoy面上投影后坐标为P’(x’，y’，z’)
  坐标关系 **x’=x，y’=y，z’=0**

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xoy面投影变换矩阵为：

$$T_{yoz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)侧视图

- 为了在xoy平面内表示侧视图，需要将xoy面绕y轴逆时针旋转90°，旋转矩阵为：

$$T_{Rz}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & 0 & -\sin\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 为了使侧视图和主视图有一定的间距，
- 还要使x0y面平移一段距离

$$T_{Tx}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & t_y & t_z & 1\end{bmatrix}$$

三视图

- 从三视图的变换矩阵可以看出，三个视图中的y坐标始终为0，表明三个视图均落在xoz平面上，即三维物体用二维视图来表示。
- 三视图是工程上常用的图样，由于三视图中物体的投影面平行于坐标平面，其投影能真实地反映物体的实际尺寸，三个视图具有长对正、高平齐、宽相等的特点，因此，机械工程中常用三视图来测量形体间的距离、角度等尺寸。
- 但是三视图缺乏立体感，只有将主视图、俯视图和侧视图结合在一起加以抽象，才能获得物体的空间结构。

思考题

5、(20 分) 假设有两张同一城市某一部分的前后相隔 25 年从同一座建筑物顶上拍摄得到的数字图像，你希望通过两幅图像的投影重叠来显示其变化。你发现一个建筑的一角在第一张图中位于位置(103，84)，在第二张图中位于 (107，94)；一扇窗户在第一张图中位于位置(433，504)，在第二张图中位于(377，439)。它们是否有 (1) 平移、(2) 旋转 (逆时针为正方向)、(3) 尺度的变化？各变化了多少？写出第一张图和第二张图进行配准所需要的几何变换。假定除了平移、旋转、尺度变化外，没有几何变形发生。1 2 3 4 5

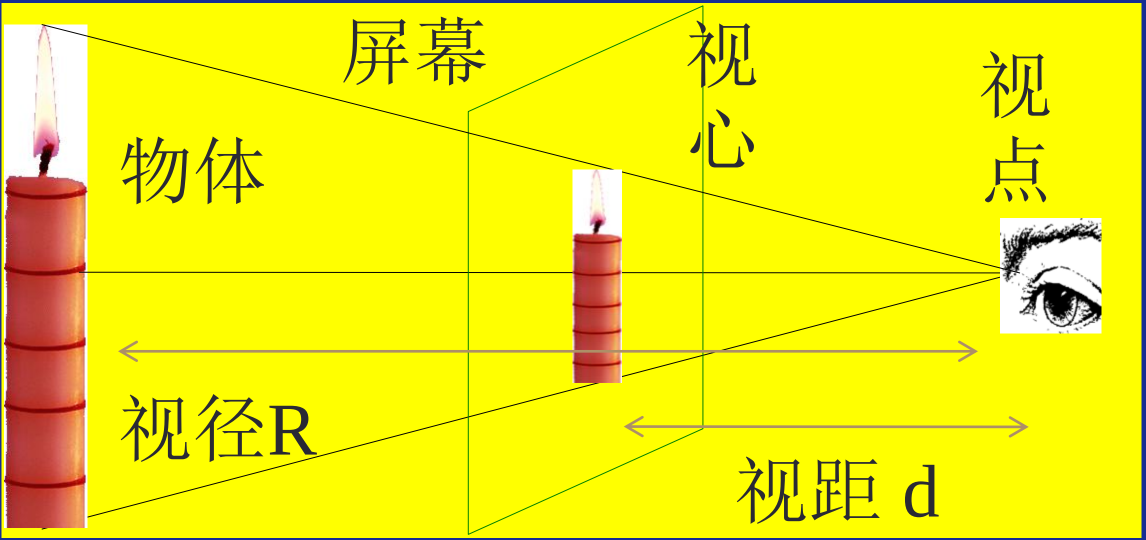
- 透视变换

6.6 透视变换

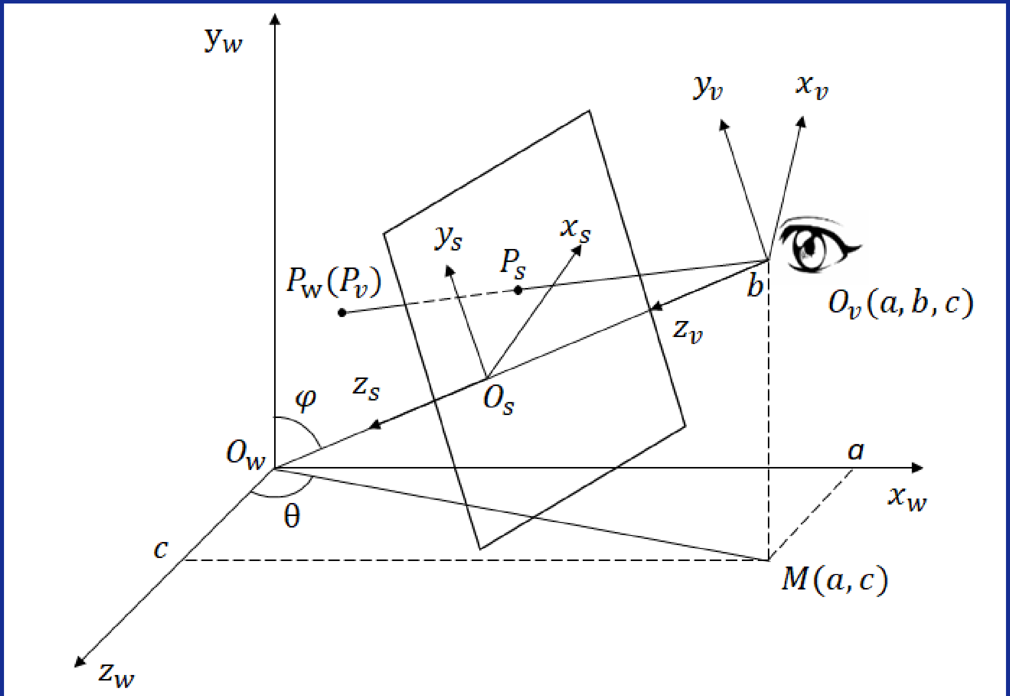
- 与平行投影相比，透视投影的特点是所有的投影线都从空间一点（称为视点或投影中心）投射，离视点近的物体投影大，离视点远的物体投影小，小到极点成为灭点
- 生活中，照相机拍摄的照片，画家的写生画等均是透视投影的例子
- 透视投影模拟了人的眼睛观察物体的过程，符合人类的视觉习惯，所以在真实感图形中得到广泛应用

6.6 透视变换

- 一般将屏幕放在观察者和物体之间
- 投影线与屏幕的交点就是物体上点的透视投影
- 观察者的眼睛位置称为视点
- 视线与屏幕的交点称为视心
- 视点到视心的距离称为视距



6.6.1 透视变换坐标系



视点代表人眼、照相机或摄像机的位置，是观察坐标系的原点$\{O_v;x_v,y_v,z_v\}$；

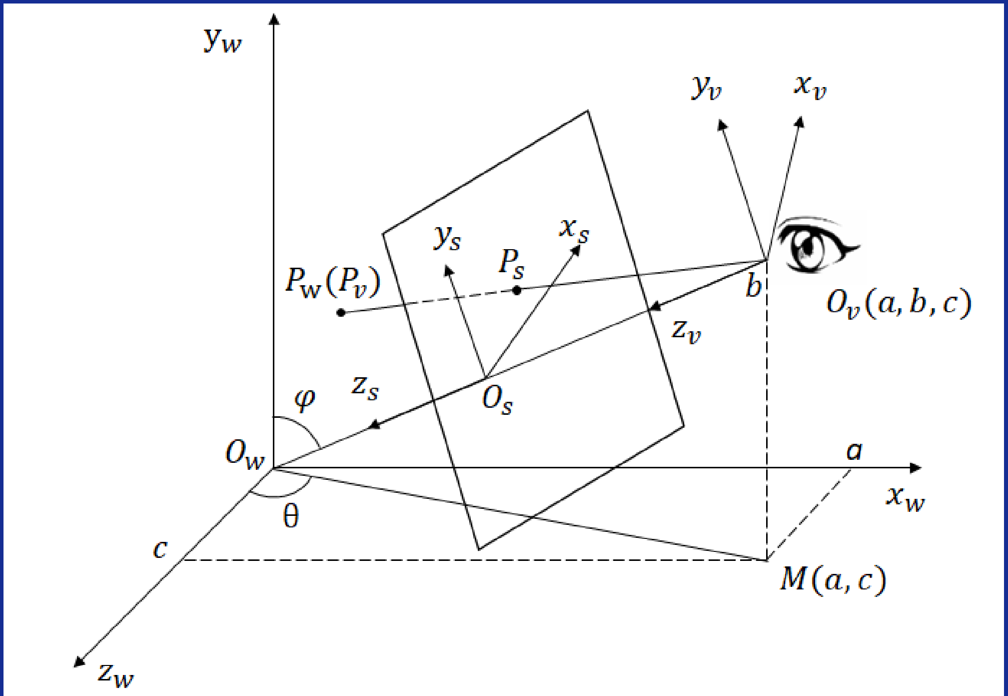
视心是屏幕坐标系的原点$\{O_s;x_s,y_s,z_s\}$；

物体是中心位于用户坐标系(世界坐标系)的原点$\{O_w;x_w,y_w,z_w\}$；

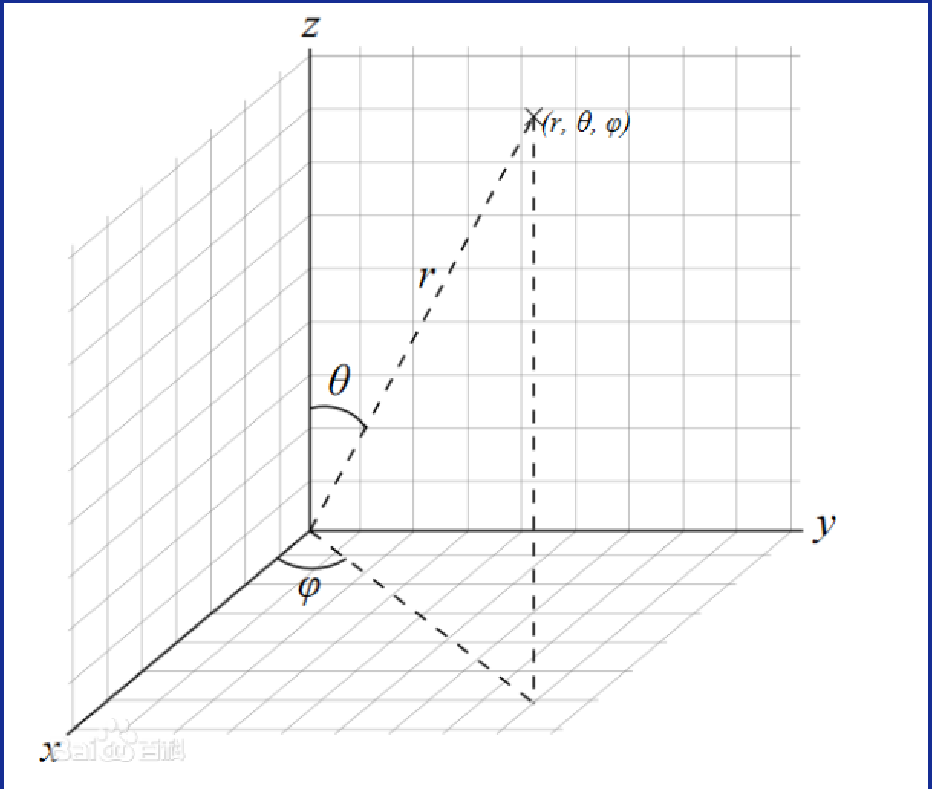
假设，世界坐标系中有一点P_w,在观察坐标系中的表示为P_v，在屏幕坐标系中的透视投影点为P_s

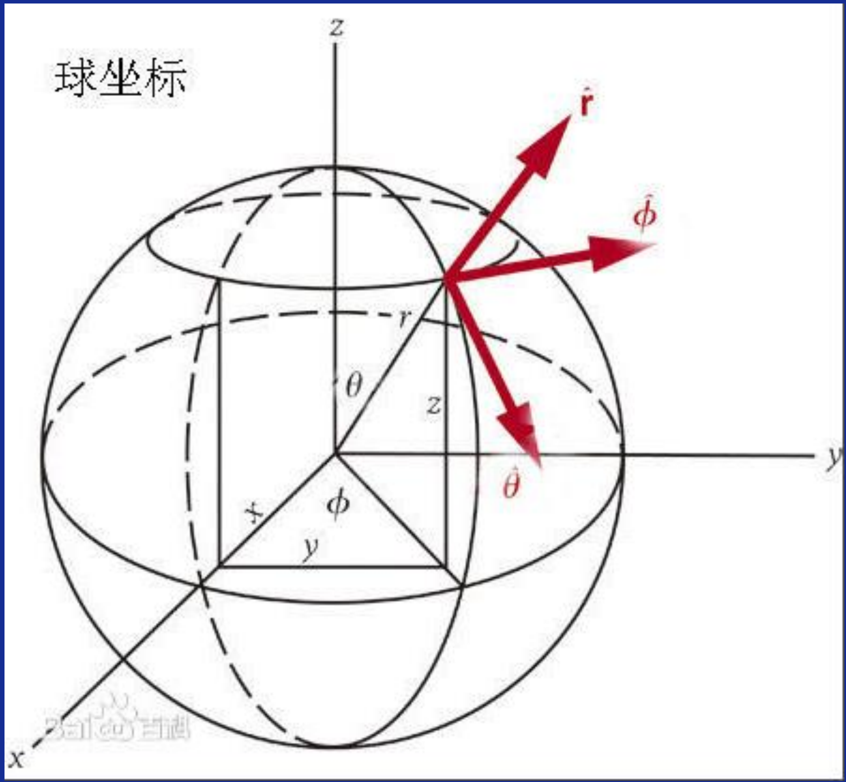
6.6.1 透视变换坐标系

- 将三维世界坐标系中的物体上的一点变换到三维观察坐标系中的三维点；
- 再将该三维点透视投影到屏幕坐标系中得到二维点



球坐标

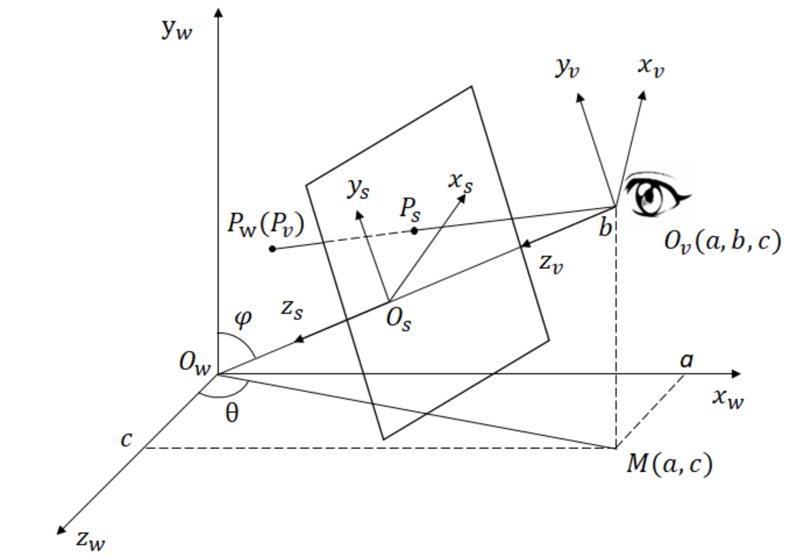




世界坐标系

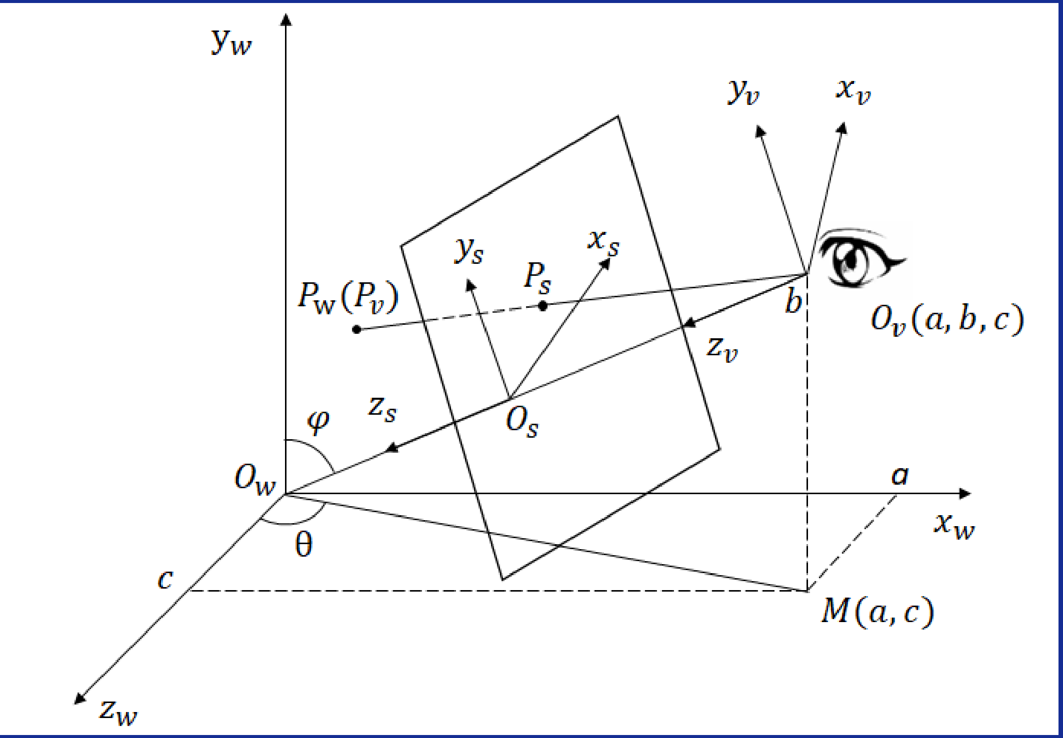
- 世界坐标系{$O_w;x_w,y_w,z_w$} 采用右手坐标系。
- 视点的直角坐标为O_v（a,b,c），$O_w O_v$的长度为视径R，$O_w O_v$和y轴的夹角为φ，O_v点在$X_wO_wZ_w$平面内的投影为M（a,b），O_wM和z_w轴的夹角为θ。
- 视点的球面坐标表示为O_v（R,θ,φ）。
- 视点的球面坐标和直角坐标的关系为：

$$\begin{cases} a = R\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ b = R\cdot\cos\varphi \\ c = R\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta \end{cases}$$



观察坐标系

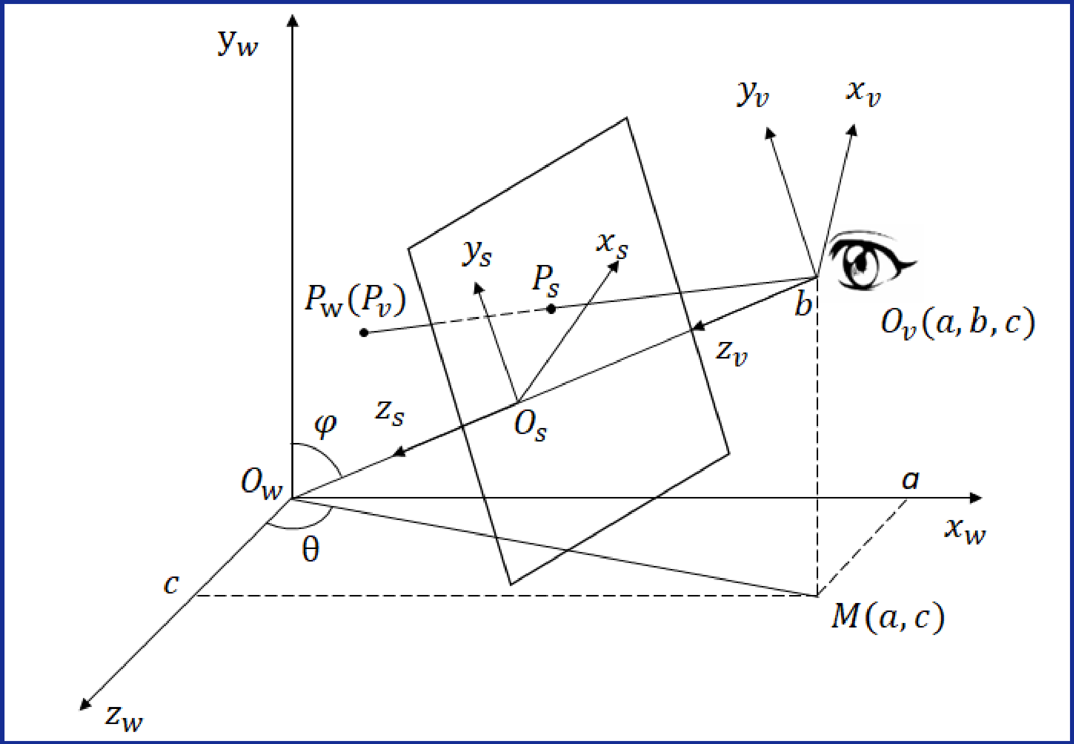
- 观察坐标系为左手系，坐标原点位于视点O_v上。
  z_v轴沿着视线方向$\overrightarrow{O_vO_w}$指向O_w点
  视线的正右方为x_v轴，
  视线的正上方为y_v轴。



屏幕坐标系

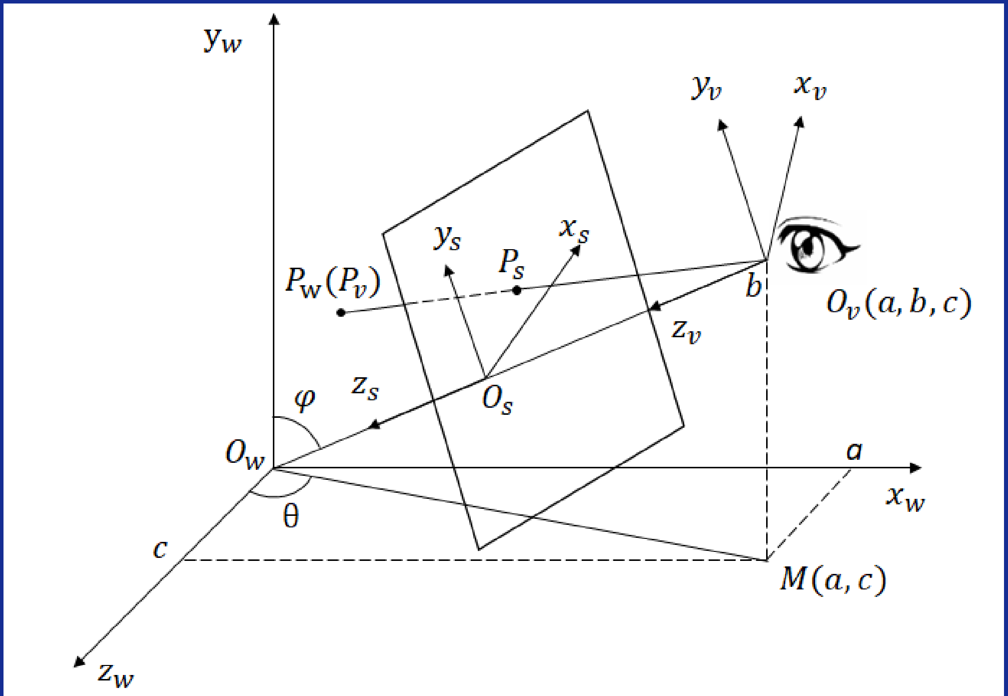
■屏幕坐标系也是左手系，坐标原点O_s位于视心。

屏幕坐标系的x_s和y_s轴与观察坐标系的x_v轴和y_v轴方向一致，也就是说屏幕垂直于中心视线, z_s轴自然与z_v轴重合。



6.6.1 透视变换坐标系

- 将三维世界坐标系中的物体上的一点变换到三维观察坐标系中的三维点；
- 再将该三维点透视投影到屏幕坐标系中得到二维点



三维变换

- **几何变换**：在一个参考坐标系下将物体从一个位置移动到另一个位置
- **坐标变换**：一个物体在不同坐标系之间的坐标变换。如从世界坐标系到观察坐标系的变换，观察坐标系到设备坐标系之间的变换。
- **坐标变换的构造方法**：

与二维的情况相同，为将物体的坐标描述从一个系统到另一个系统，构造一个变换矩阵，它能使两个坐标系重叠。

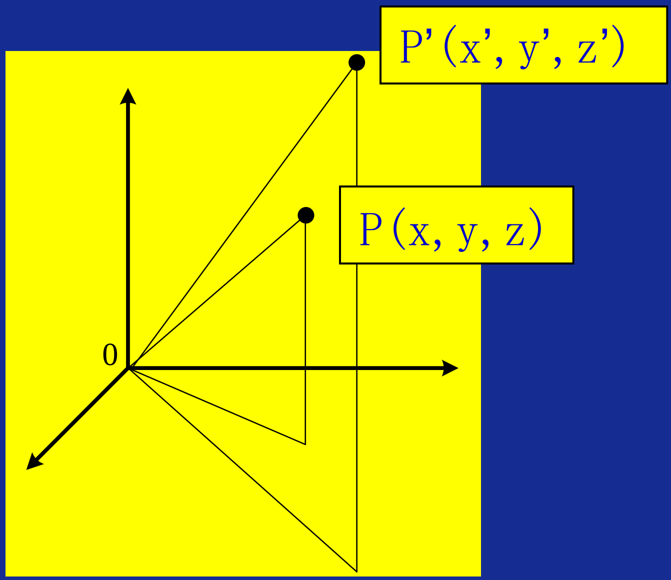
（1）平移坐标系0xyz，使它的坐标原点与新坐标系的原点重合；

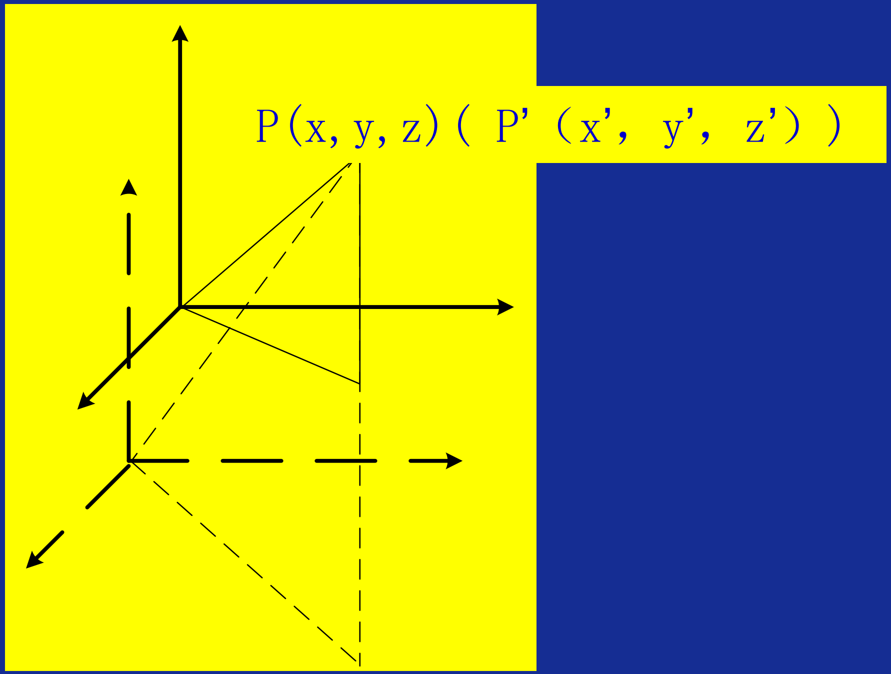
（2）进行一些旋转变换，使两坐标系的的坐标轴重叠。

坐标系变换

- 如果观察坐标系中的视点固定，旋转用户坐标系中的物体，就可以在屏幕上产生该物体各个方向的透视图
- 把用户坐标系中三维物体上的点变换为观察坐标系中的点，等同于点固定，坐标系发生变换。
- 讲解三维基本几何变换矩阵时，坐标系固定，点发生变换。有时需要点固定，坐标系发生变换，二者效果一致。
- 变换参数取反

- 在{O;x,y,z}坐标系中，给定平移参数（Tx,Ty,Tz）
- 将P点变换到P′点，这是点变换（几何变换）；
- 等价于P点固定，坐标系从{O;x,y,z}坐标系的原点O平移到{O′;x′,y′,z′}坐标系的原点O′，平移参数为

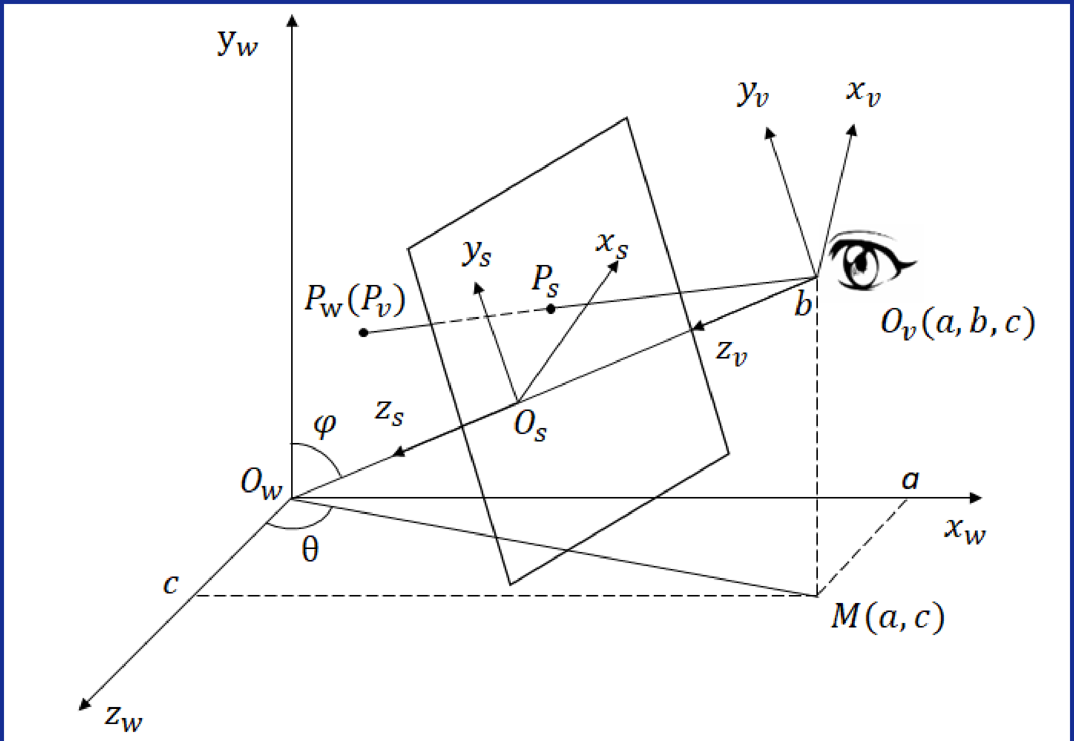




世界坐标系到观察坐标系的变换

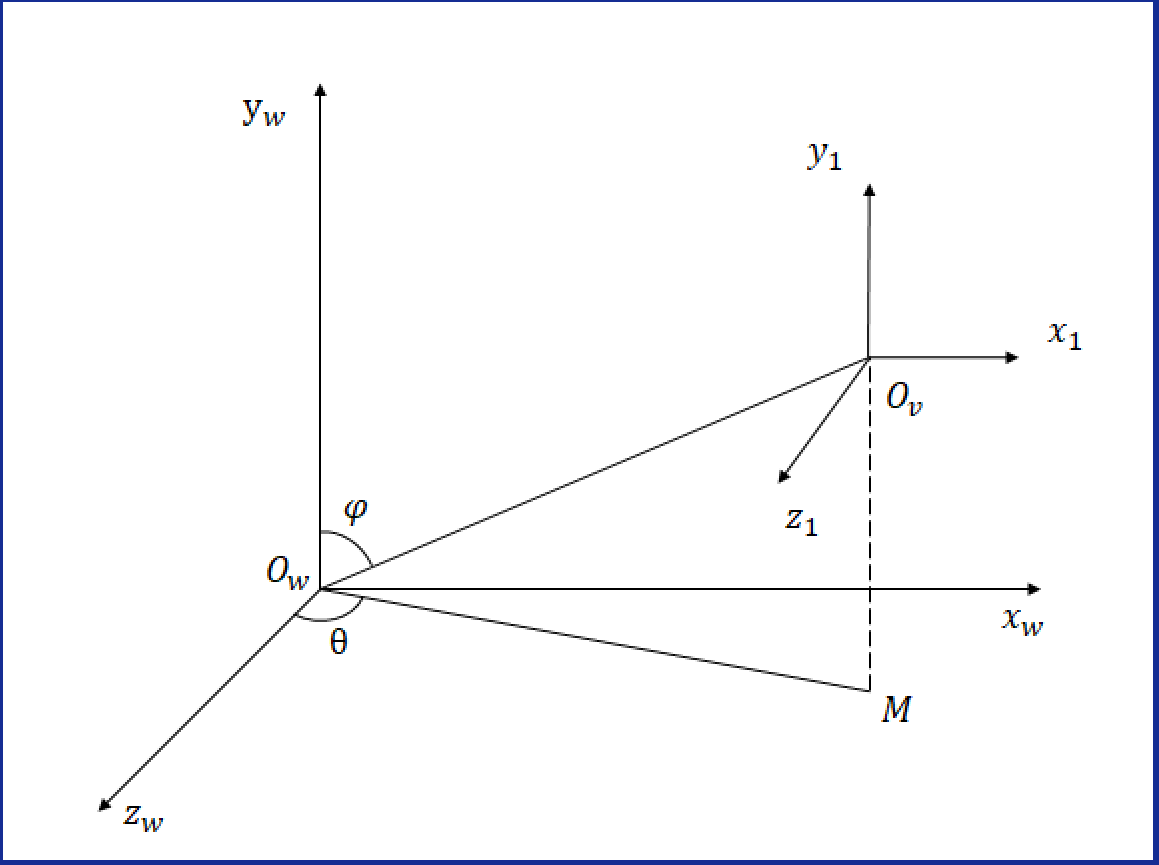
世界坐标系到观察坐标系的变换，通过以下两步实现：

- 1、世界坐标系原点O_w平移到观察坐标系原点O_v
- 2、世界右手坐标系变换为观察左手坐标系



1.原点到视点的平移变换

■平移变换



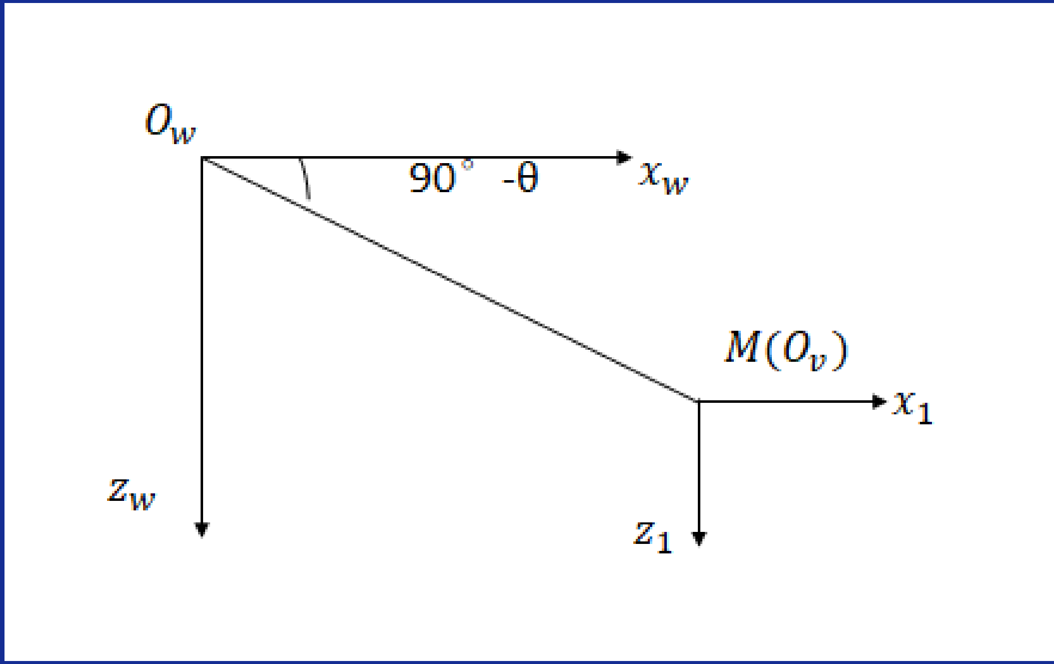
世界坐标系中三维物体上的点变换为观察坐标系中的点，等同于物体固定，坐标系之间发生变换，此时平移矩阵应取为负值

1.原点到视点的平移变换

- 把世界坐标系的原点 O_w 平移到观察坐标系的原点O_v,形成新坐标系$x_1y_1z_1$ ，视点在世界坐标系的直角坐标为$O_v(a,b,c)$

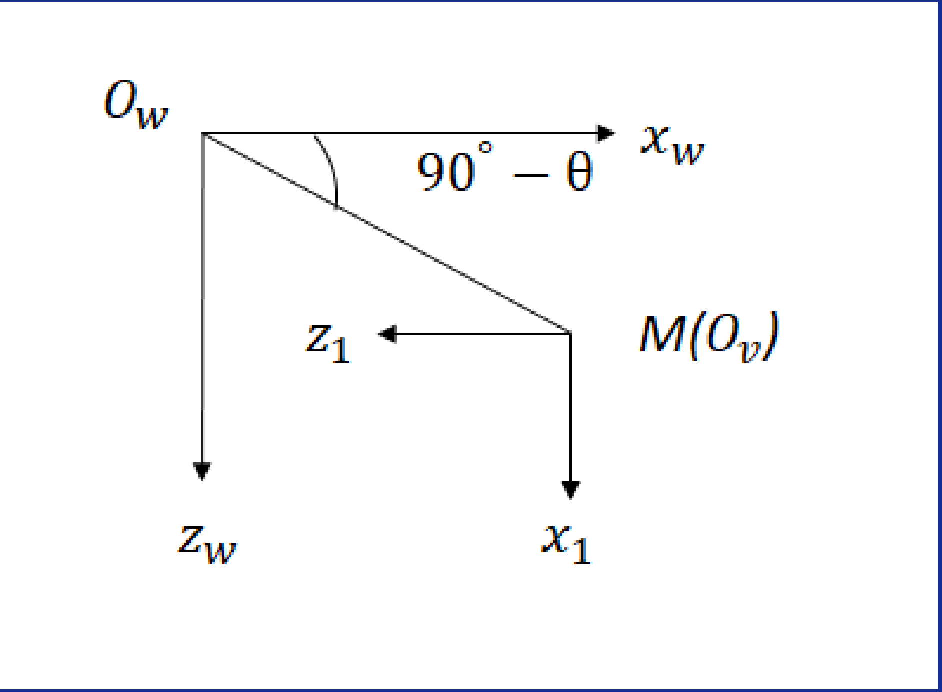
$$T_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-a&-b&-c&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-R\sin\varphi\sin\theta&-R\cos\varphi&-R\sin\varphi\cos\theta&1\end{bmatrix}$$

■$x_wO_wz_w$面投影如图所示



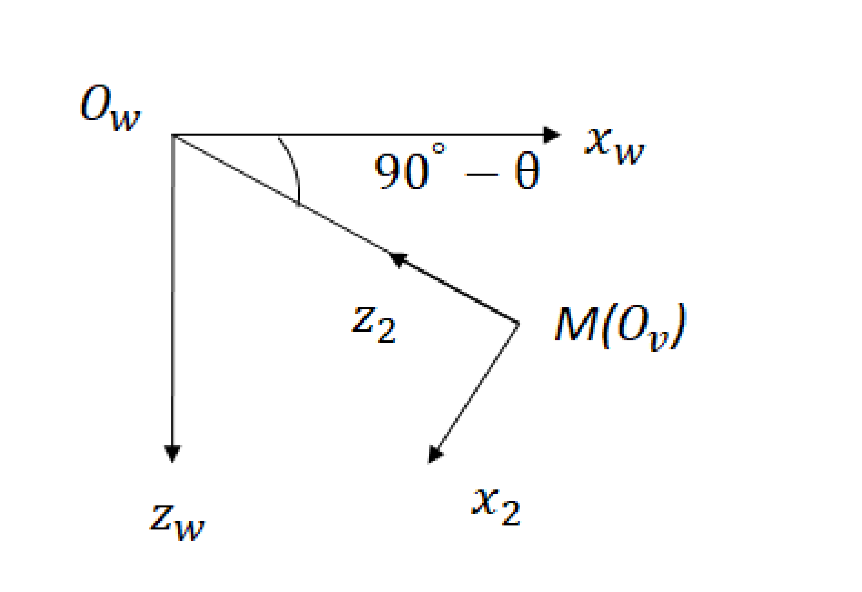
2.绕y1轴的旋转变换

- 将坐标系{O_v ; x_1, y_1, z_1}绕y_1 顺时针旋转90 °，使z_1轴位于$x_wO_w\ y_w$平面内，且x_1轴垂直于$x_wO_w\ y_w$平面指向读者



2.绕y1轴的旋转变换

- 再继续绕y_1 顺时针旋转$90^{\circ}-\theta$，使z_1轴位于O_vMO_w 平面内，形成新坐标系$\{O_v ; x_2, y_2, z_2\}$



-θ

2.绕z1轴的旋转变换

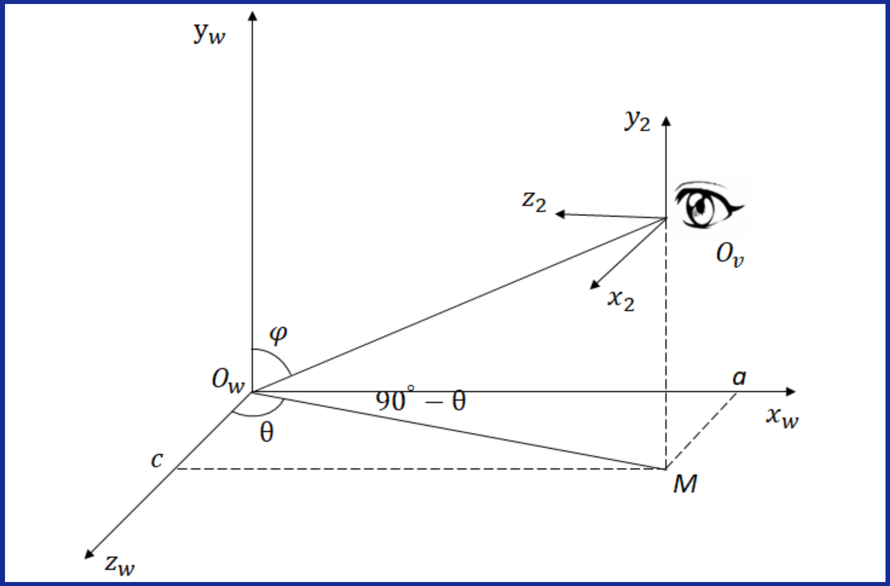
■坐标系{O_v ; x_1, y_1, z_1}绕y_1作顺时针旋转变换矩阵,对应于坐标系变换应当取绕y_1作逆时针旋转变换矩阵

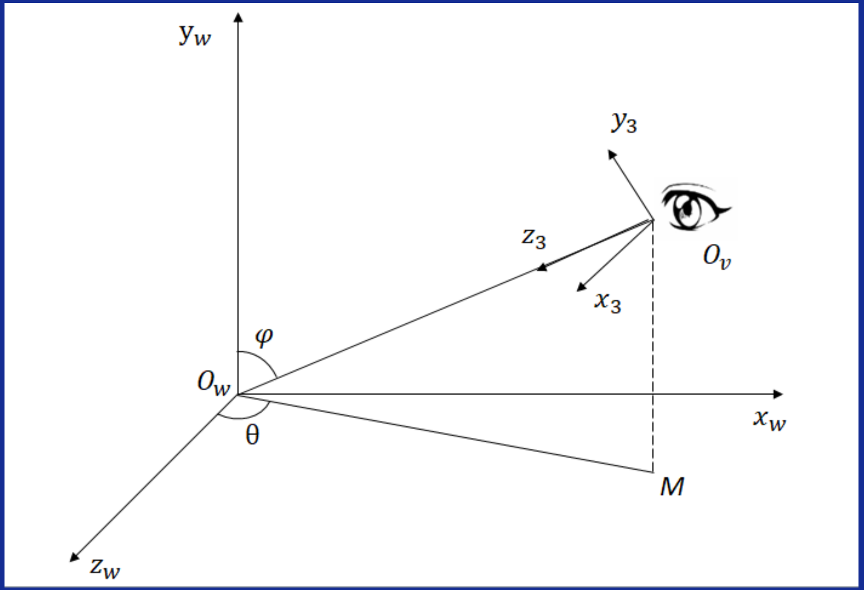
$$T_2=\begin{bmatrix}\cos(\pi-\theta) & 0 & -\sin(\pi-\theta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(\pi-\theta) & 0 & \cos(\pi-\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

这里坐标系旋转变换矩阵取为逆时针变换阵

3.绕x_2轴的旋转变换

■坐标系{O_v ; x_2, y_2, z_2}绕x_2作 $90^\circ - \varphi$ 的逆时针旋转变换使z_2轴沿视线方向，形成新坐标系{O_v ; x_3, y_3, z_3}





3.绕z2轴的旋转变换

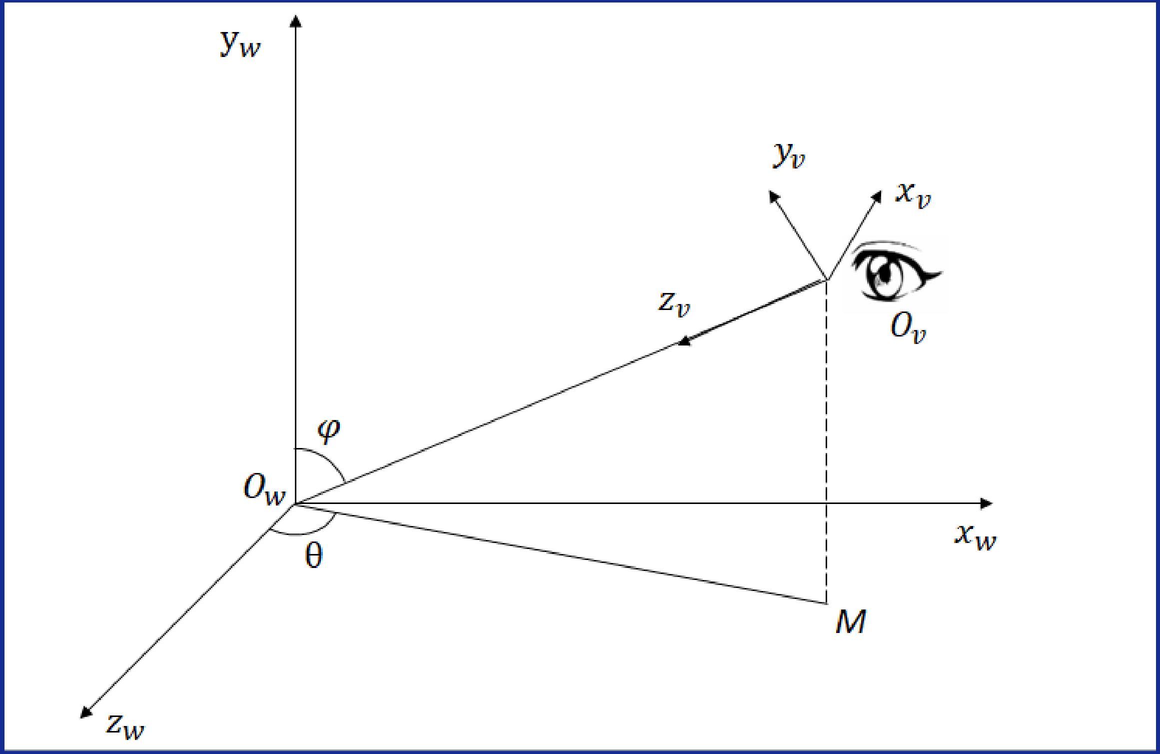
坐标系{O_v ; x_2, y_2, z_2}绕x_2作$90^\circ-\varphi$ 的逆时针旋转变换,对于坐标系变换应当取为绕x_2轴旋转的顺时针变换矩阵

$$T_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) & -\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi) & 0\\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}-\varphi) & \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

这里坐标系旋转变换矩阵取为顺时针变换阵

4.关于$y_3O_vz_3$面反射变换

- 坐标轴x_3关于$y_3O_3z_3$面反射变换，形成新坐标系$\{O_v;x_v,y_v,z_v\}$,这样将右手系$\{O_v; x_3, y_3, z_3\}$变换为左手系$\{O_v;x_v,y_v,z_v\}$
- 物体描述已从世界坐标系为参考变换为以观察坐标系为参考



4.关于y_3O_3z面反射变换

- 坐标轴x_3关于$y_3O_3z_3$面反射变换

$$T_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标系到观察坐标系变换矩阵

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R\sin\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta & -R\cos\phi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标系到观察坐标系变换矩阵

$$T_v = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & R & 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标系到观察坐标系变换

- 矩阵变换公式：

$$[x_v \quad y_v \quad z_v \quad 1] = [x_w \quad y_w \quad z_w \quad 1] \cdot T_v$$

- 写成展开式为：

$$\begin{cases} x_v = -x_w \cos\theta - z_w \sin\theta \\ y_v = -x_w \cos\varphi \sin\theta + y_w \sin\varphi - z_w \cos\varphi \cos\theta \\ z_v = -x_w \sin\varphi \sin\theta - y_w \cos\varphi - z_w \sin\varphi \cos\theta + R \end{cases}$$

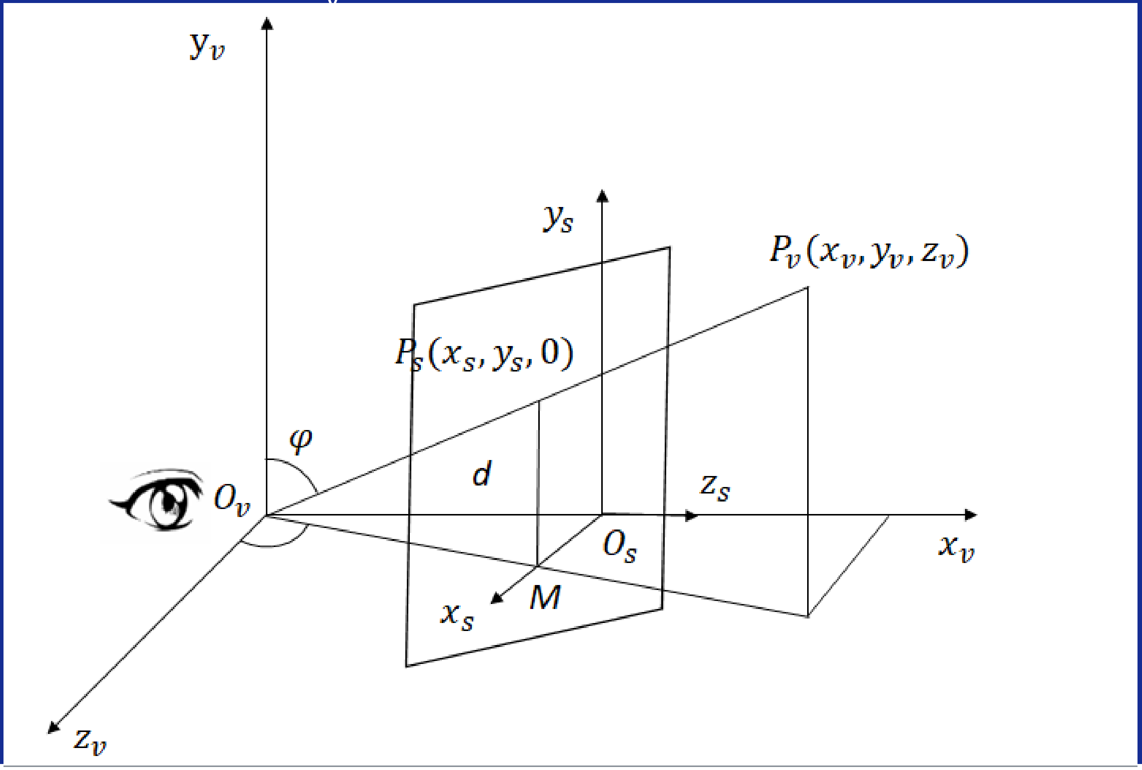
观察坐标系到屏幕坐标系变换

- 将描述物体的参考系从世界坐标系变换到观察坐标系，还不能在屏幕上绘制出物体的透视投影，则需进一步将观察坐标系中的描述的物体投影到平面坐标系，即将观察坐标系中的物体以视点为投影中心向屏幕坐标系作透视投影。
- 观察坐标系和屏幕坐标系同为左手系，而且z轴同向
- 视点O_v和视心O_s的距离为视距d

观察坐标系到屏幕坐标系变换

- 假定观察坐标系中物体上的一点为$P_v(x_v,y_v,z_v)$，视线O_vP_v和屏幕的交点为在观察坐标系中表示为$P_e(x_e,y_e,d)$,其中(x_e,y_e)在屏幕坐标系中表示(x_s,y_s)即$P_e(x_s,y_s,d)$。在屏幕坐标系中

$P_e(x_s,y_s,0)$代表物体上的P_v点在屏幕上的透视投影。



根据相似三角形对应边成比例的关系,有

■根据直角三角形MO_VO_S 与直角三角形NO_VO相似，有

$$\frac{MQ_s}{NQ} = \frac{O_vO_s}{O_vQ}$$

写成坐标形式

$$\frac{x_s}{x_v} = \frac{d}{z_v}$$

$$\frac{O_vM}{O_vN} = \frac{O_vO_s}{O_vQ}$$

根据相似三角形对应边成比例的关系,有

■根据直角三角形$P_SO_V M$与直角三角形P_VO_VN相似，有

$$\frac{P_sM}{P_vN} = \frac{O_vM}{O_vN}$$

$$\frac{O_vM}{O_vN} = \frac{O_vO_s}{O_vQ}$$

得到

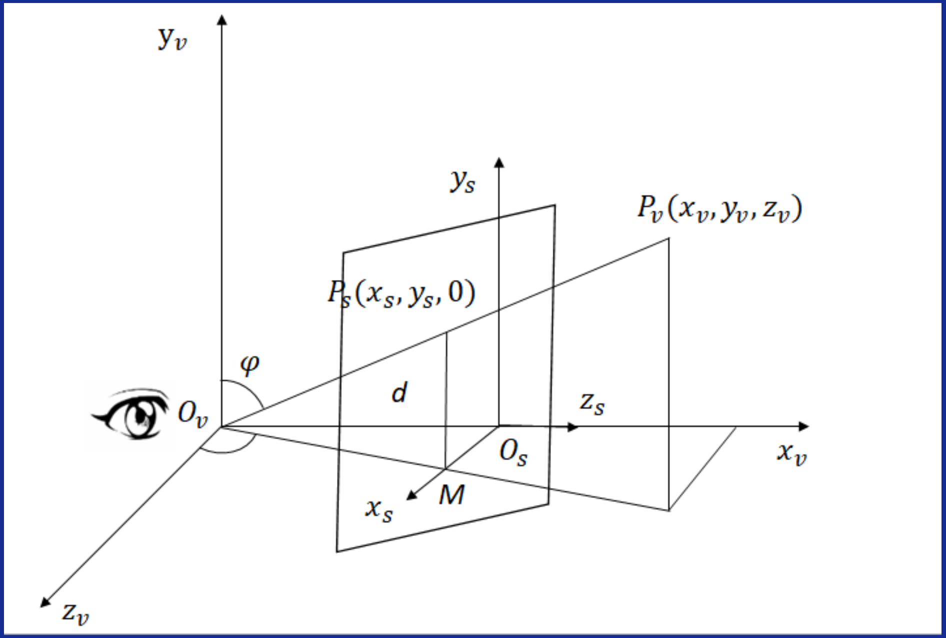
$$\frac{P_sM}{P_vN} = \frac{O_vO_s}{O_vQ}$$

写成坐标形式

$$\frac{y_s}{y_v} = \frac{d}{z_v}$$

根据相似三角形对应边成比例的关系,有

$$\begin{cases} x_s = d\,\dfrac{x_v}{z_v} \\ y_s = d\,\dfrac{y_v}{z_v} \end{cases}$$



矩阵形式为:

$$[x_s \quad y_s \quad z_s \quad 1] = [x_v \quad y_v \quad z_v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{Persp} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{proj}$$

根据相似三角形对应边成比例的关系,有

$$[x_s \quad y_s \quad z_s \quad 1] = [x_v \quad y_v \quad z_v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{Persp} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{proj}$$

$$= \left[x_v \quad y_v \quad 0 \quad \frac{z_v}{d} \right] \Rightarrow \left[d \cdot \frac{x_v}{z_v} \quad d \cdot \frac{y_v}{z_v} \quad 0 \quad 1 \right]$$

透视矩阵

$$T_{Persp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

投影矩阵

$$T_{Proj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

观察坐标系到屏幕坐标系变换

- 透视变换矩阵为

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

进行的是透视投影变换

- 这里 $r = {}^{1}\!/_{d}$
- 如果 $d \to \infty$，则 $r \to 0$，透视变换转化为平行投影变换

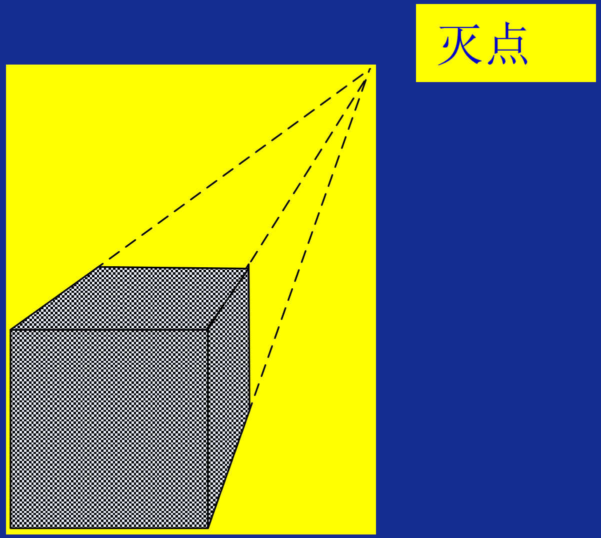
世界坐标系到屏幕坐标系的复合变换矩阵

$$T = T_v \cdot T_s = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & R & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & 0 & \dfrac{-\sin\varphi\cos\theta}{d} \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \dfrac{-\cos\varphi}{d} \\ -\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & 0 & \dfrac{-\sin\varphi\cos\theta}{d} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{R}{d} \end{bmatrix}$$

透视投影分类

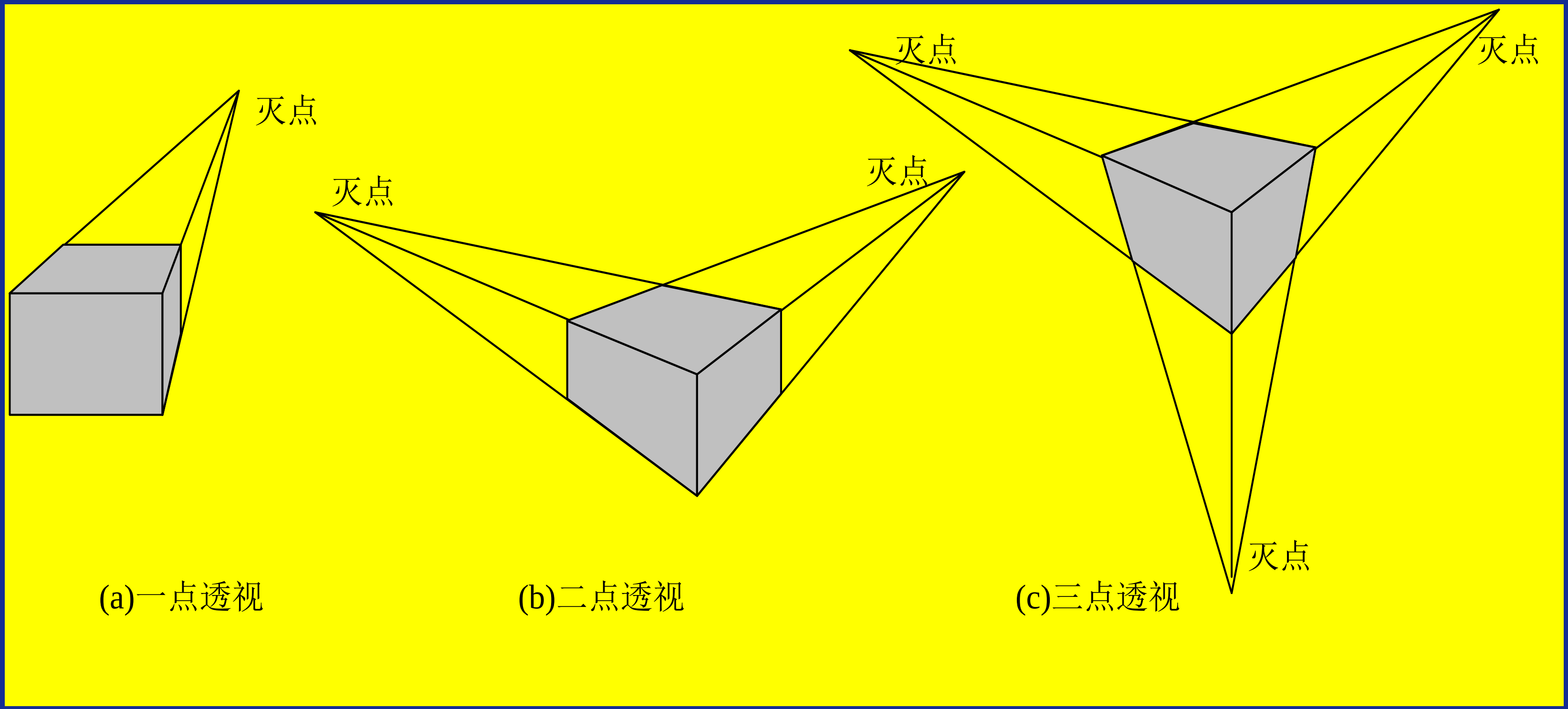
- 透视投影中，与屏幕平行的平行线投影后仍保持平行
- 不与屏幕平行的平行线投影后汇聚为一点，此点称为灭点，灭点是无限远点在屏幕上的投影
- 每一组平行线都有其不同的灭点
- 一般来说，三维物体中有多少组平行线就有多少个灭点



透视投影

- 坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点称作主灭点。
- 三维空间有三个坐标轴，主灭点最多有三个，据此分类：
  - 一点透视有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行
  - 两点透视有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行
  - 三点透视有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交

透视投影

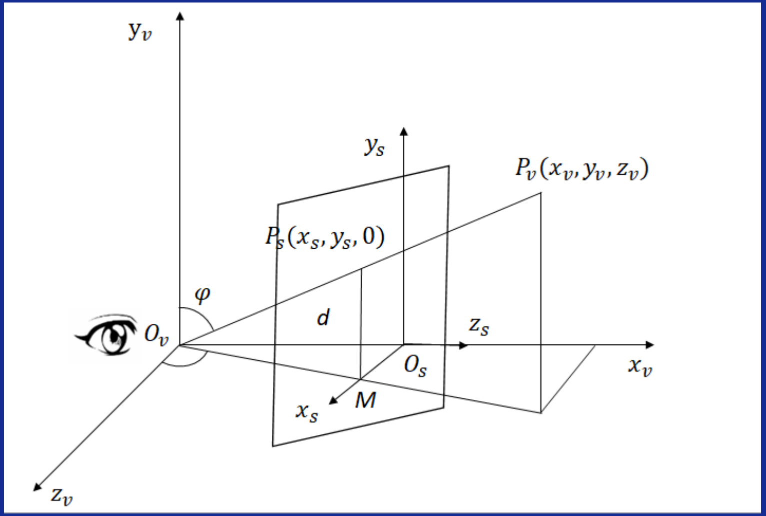


■透视投影中的主灭点数由屏幕切割世界坐标系的坐标轴数量来决定，并据此将透视投影分为一点透视、二点透视和三点透视。

一点透视

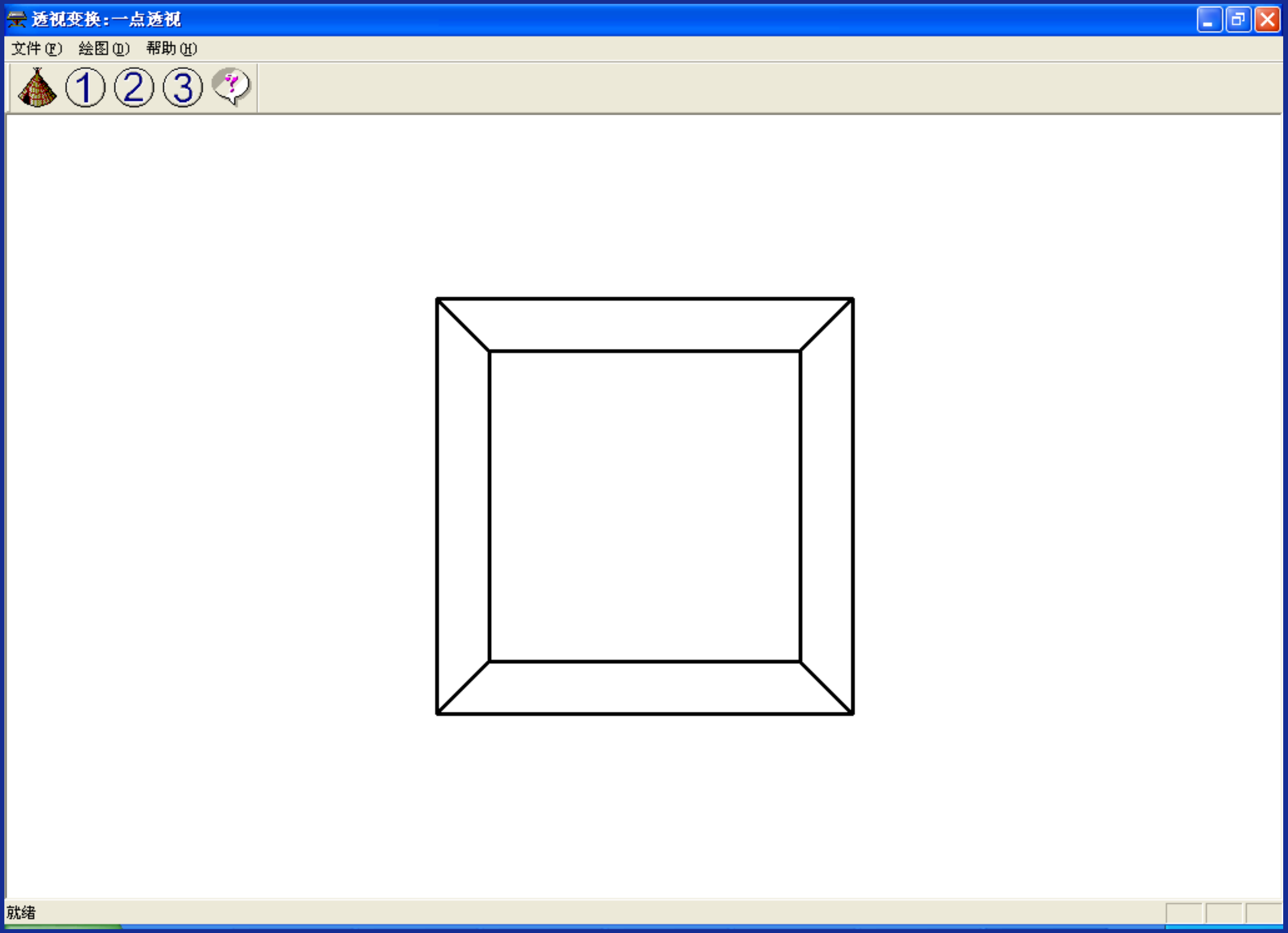
■屏幕仅与一个坐标轴相交

- 当θ = 0°，φ = 90°时，屏幕平行于xoy面
- 一点透视的变换矩阵为：



$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{R}{d} \end{bmatrix}$$

立方体的一点透视图

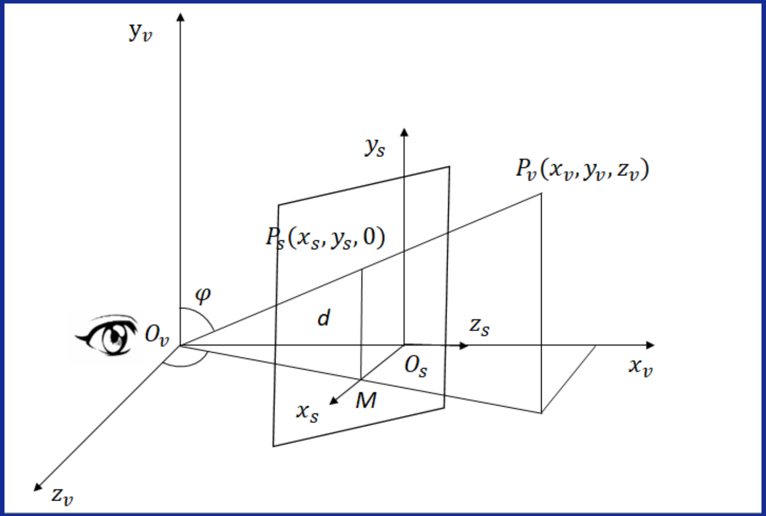


二点透视

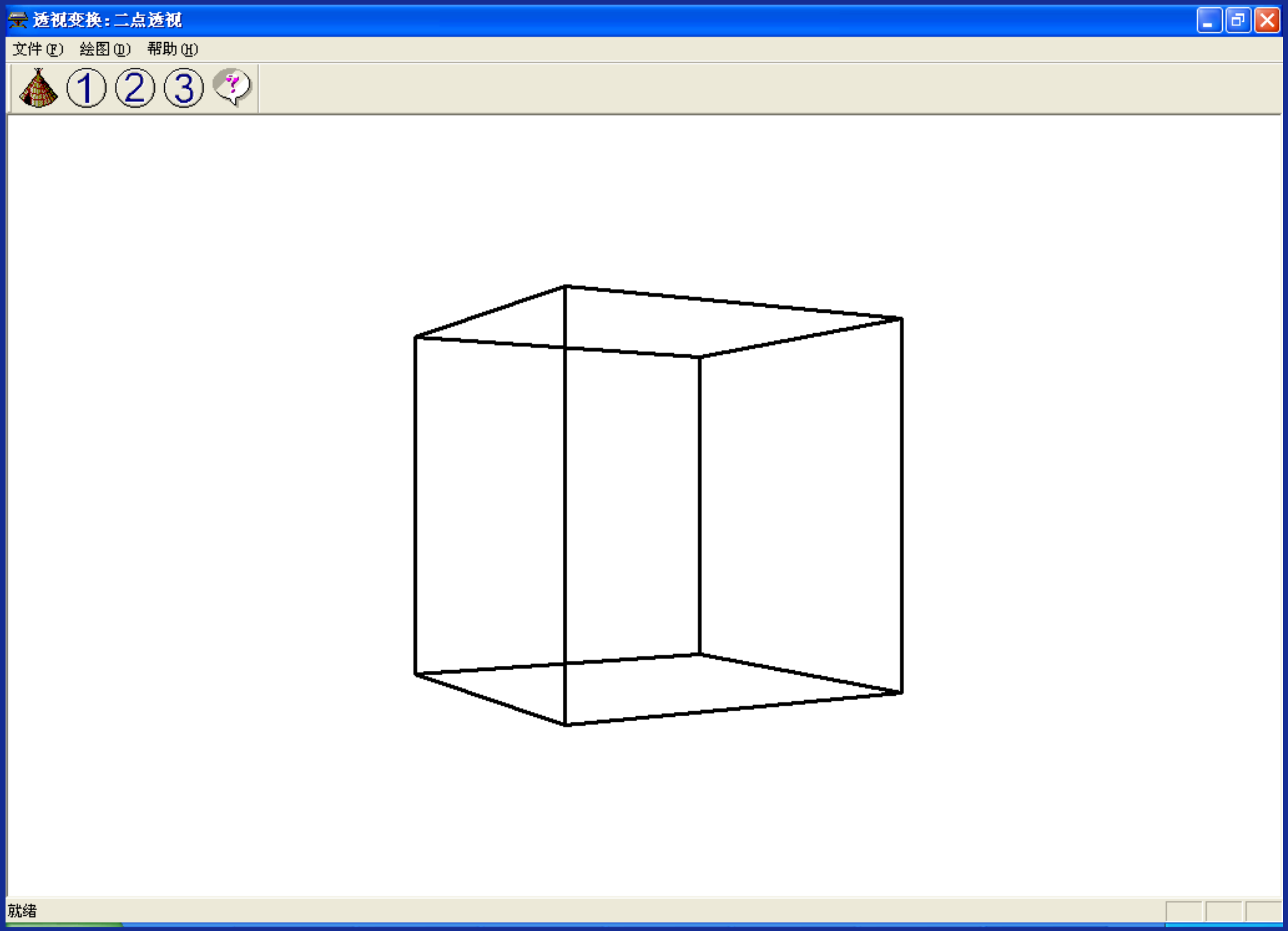
■屏幕仅与两个坐标轴相交

- 当0° < θ < 90°，φ = 90°时，屏幕与x轴和z轴相交，平行于y轴，
- θ=45 °

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2d} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R}{d} \end{bmatrix}$$



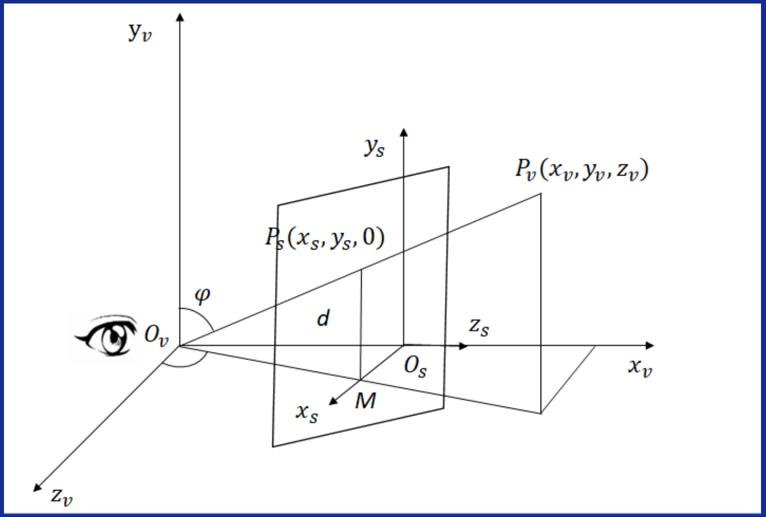
立方体的两点透视图



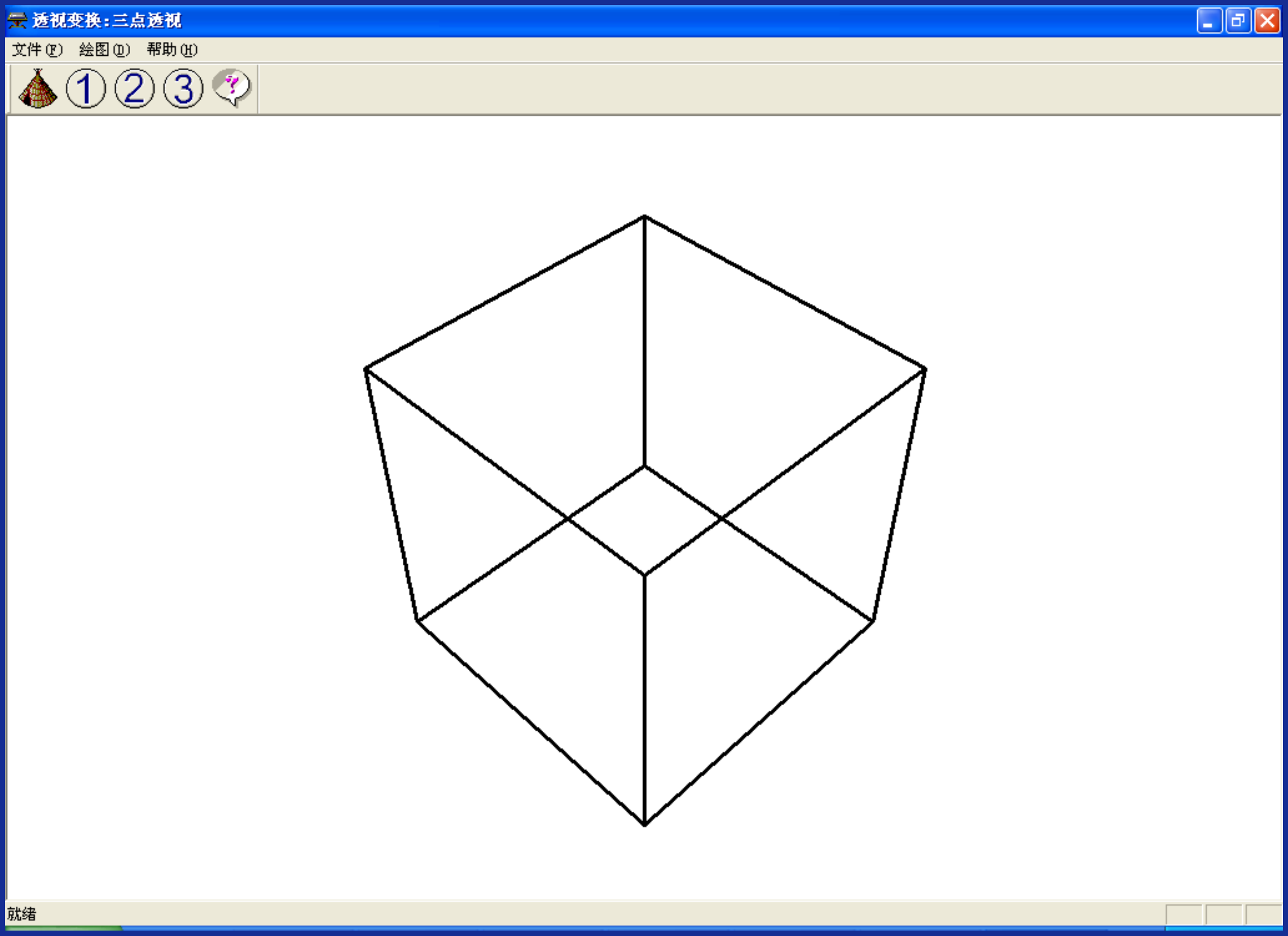
三点透视

- 屏幕与三个坐标轴都相交
- 当 $\varphi \neq 0°$、$90°$、$180°$ 且 $\theta \neq 0°$、$90°$、$180°$、$270°$ 时，屏幕与x轴、y轴和z轴相交
- θ=45 °, φ=45 °

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2d} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2d} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2d} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R}{d} \end{bmatrix}$$



立方体的三点透视图

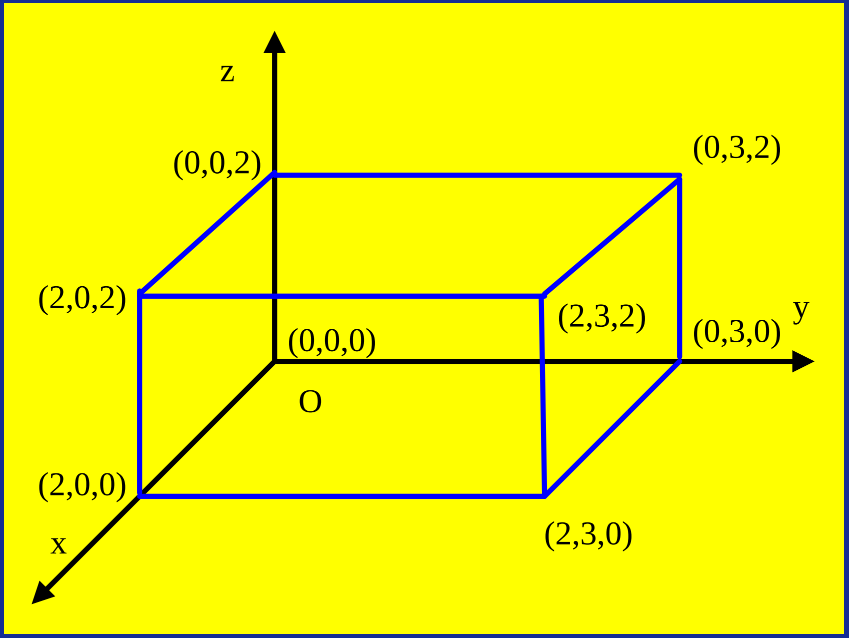


6.7 本章小结

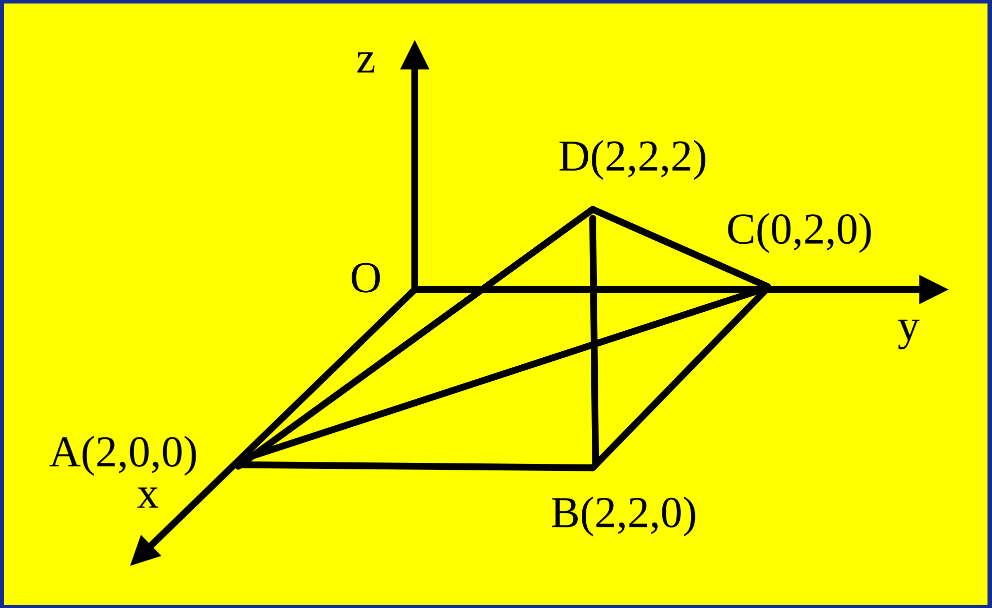
- 三维基本几何变换、变换矩阵
- 三维复合变换
- 投影变换
  - 平行投影:三视图及其变换矩阵
  - 透视投影变换矩阵

习题

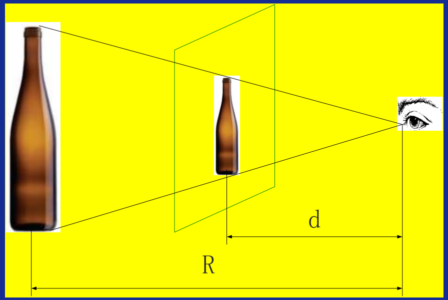
1、长方体如图所示，八个坐标分别为（0，0，0），（2，0，0），（2，3，0），（0，3，0），（0，0，2），（2，0，2），（2，3，2），（0，3，2）。试对长方体进行$S_x=1/2$，$S_y=1/3$，$S_z=1/2$的比例变换，求变换后的长方体各顶点坐标。

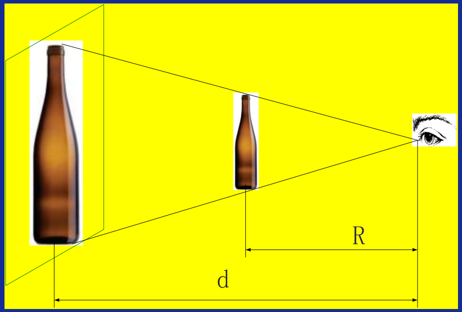


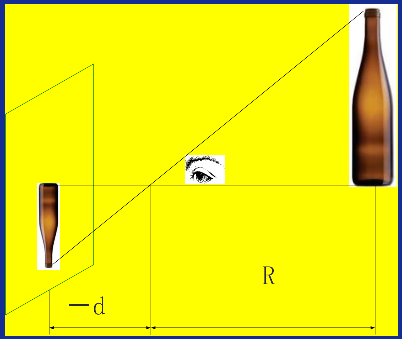
2、空间四面体的顶点坐标为A（2，0，0），B（2，2，0），C（0，2，0），D（2，2，2），如图所示，求解：（1）关于点P（2，-2，2）整体放大2倍的变换矩阵。（2）变换后的空间四面体顶点坐标。



6、视点、屏幕和物体的位置关系有三种。屏幕位于物体和视点之间，如图（a）所示；物体位于屏幕和视点之间，如图（b）所示；视点位于屏幕和物体之间，如图（c）所示。设用户坐标系建在物体上，视径为R，视距为d，请分析这3种情形下像和物之间的关系。







（a）屏幕位于物体和视点之间　（b）物体位于屏幕和视点之间　（c）视点位于屏幕和物体之间

(2)俯视图

- 俯视图的投影变换矩阵为上述三个变换矩阵的乘积：

$$T_H = T_{xoy} \cdot T_{Rx} \cdot T_{Tz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

俯视图总投影变换矩阵为：

$$\mathrm{T_H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)侧视图

- 侧视图的投影变换矩阵为上述三个变换矩阵的乘积：

$$T_W = T_{yoz} \cdot T_{Rz} \cdot T_{Tx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

侧视图总投影变换矩阵为：

$$\mathrm{T_w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$