2020 级数值分析第四次作业参考答案

班级		学号		姓名	

一、(40 分)已知线性方程组如下

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

(1) 用列主元高斯消元法进行第一次消元时，所使用的主元是______-18___________；(5 分)

(2) 用列主元高斯消元法解此线性方程组;(20 分)

解：

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{31}=1/18]{m_{21}=2/3} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 7/3 & 5 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \\ 0 & -1 & 7/3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=6/7} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \\ 0 & 0 & 22/7 & 66/7 \end{bmatrix}$$

等价的三角方程组为

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ \dfrac{7}{6}x_2 + \dfrac{17}{18}x_3 = \dfrac{31}{6} \\ \dfrac{22}{7}x_3 = \dfrac{66}{7} \end{cases}$$，回代得 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1.$

(3) 并求出系数矩阵 A 的行列式(即 detA)值;(5 分)

解：detA$= -18 \times \dfrac{7}{6} \times \dfrac{22}{7} = -66$

(4) 在将系数矩阵化为上三角矩阵的过程中，共使用了____11_____次乘除法; (5 分)
(不考虑常数项部分的运算量,将乘法和除法看成相同的运算)

(5) 回代求解的过程中，共使用了______6(注：5 也算正确答案)_____________次乘除法. (5 分)

二、(30 分)设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

(1) 能否对系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

进行直接 LU 分解(10 分)；

解：因为此矩阵的 2 阶顺序主子式$\Delta_2 = |1 \times 4 - 2 \times 2| = 0$,所以不能进行直接 LU 分解。

(2) 用 LU 分解法解题中的线性方程组。(20 分)

解：**本题 LU 分解方法不唯一。只要方程组的解正确即可。**

将线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

中的方程 1 和方程 3 交换位置(交换方程 1 和方程 2 或者交换方程 2 和方程 3 导致不同的 LU 分解)，即将线性方程组变化为

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

后再使用 LU 分解法。

设此时的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

由 A=LU,即

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$，再根据待定系数法可以求出

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解两个方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{且} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{且} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$。即原方程组的解为：$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

三、(10 分) 已知有形如$Ax = b_1, Ax = b_2, \cdots, Ax = b_m$的 m 个线性方程组。在求解这 m 个线

性方程组的过程中，可以采用下面两种方法之一：

(1) 对每个线性方程组$Ax=b_i$使用高斯消元法求解；

(2) 先将矩阵 A 进行 LU 分解，再将$Ax=b_i$变换为$\begin{cases}Ly=b_i\\Ux=y\end{cases}$求解.

请问：上面哪种解法更好?说明理由.(只考虑乘除法的运算次数,且乘除法看作相同的运算)

解：根据教材分析，用高斯消元法解线性方程组时，在消元和回代阶段需要的乘除法次数分别为

$$\mathrm{N}_{消}=\frac{\mathrm{n}}{3}(n^2-1)+\frac{1}{2}n(n-1),\mathrm{N}_{回}=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$$

即，总的乘除法次数为

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{n}^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$$

若采用(1)中的方法，则需要的总乘除法次数为

$$\mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{n}^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}\right)$$

当采用(2)中的方法时，LU 分解需要的计算量(只考虑乘除法)等于高斯消元法中消元所需要的计算量.由于 L 和 U 都是三角矩阵，因此，解两个线性方程组$\mathrm{Ly}=\mathrm{b_i}$和 $\mathrm{Ux}=\mathrm{y}$只需要回代计算，需要的计算量为$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$.所以(2)中方法需要的总计算量为

$$\mathrm{N}_{消}+2\mathrm{mN}_{回}=\frac{\mathrm{n}}{3}(n^2-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\mathrm{mn}(\mathrm{n}+1)$$

综上，当$\mathrm{m}\geq 2$时,(2)中的方法更好.

四、(20 分) 已知线性方程组$Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\\frac{13}{12}\\\frac{47}{60}\end{pmatrix}$$

的精确解为$x=(1,1,1)^T$.

在用计算机求解上述线性方程组时,假设系数矩阵 A 和常数项 b 在计算机中分别被近似为

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1.00&0.500&0.333\\0.500&0.333&0.250\\0.333&0.250&0.200\end{pmatrix}和\tilde{b}=\begin{pmatrix}1.83\\1.08\\0.783\end{pmatrix}。$$

求方程组 $\tilde{A}y=\tilde{b}$ 的近似解y，并计算$\frac{\|y-x\|_\infty}{\|x\|_\infty},\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$.(最终结果保留 3 位有效数字)

解：用计算机解线性方程组 $\tilde{A}y=\tilde{b}$，得解为

$$y\approx(1.0895,0.488,1.491)^T\ (或者(1.09,0.488,1.49)^{\mathrm{T}})。$$

则有$\frac{\|y-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}\approx 0.512=51.2\%,\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}\approx 18.2\%$.(注：此例说明由于计算机的舍入误差，用计算机求出的解与方程组的精确解可能相差甚远。在解线性方程组时，要注意这个问题)