第七章 自由曲线与曲面

计算机图形学

本章主要内容：

本章学习目标:

- 熟练掌握三次Bezier曲线
- 掌握双三次Bezier曲面
- 熟练掌握三次B样条曲线
- 掌握双三次B样条曲面

绘制真实感图形

- 在计算机中进行场景造型。用数学方法建立所需三维场景的几何描述，并将其输入至计算机。这部分工作由三维立体造型或曲面造型系统完成。
- 进行消隐处理。确定场景中的所有可见的面。
- 进行透视变换。将三维几何描述转为二维图形。
- 进行裁剪和扫描转换。确定显示内容和光栅化。
- 进行真实感图形绘制。根据光学物理的光照明模型计算机可见面投影到观察者眼中的光亮度大小和色彩组成，并转为适合图形设备的颜色值。

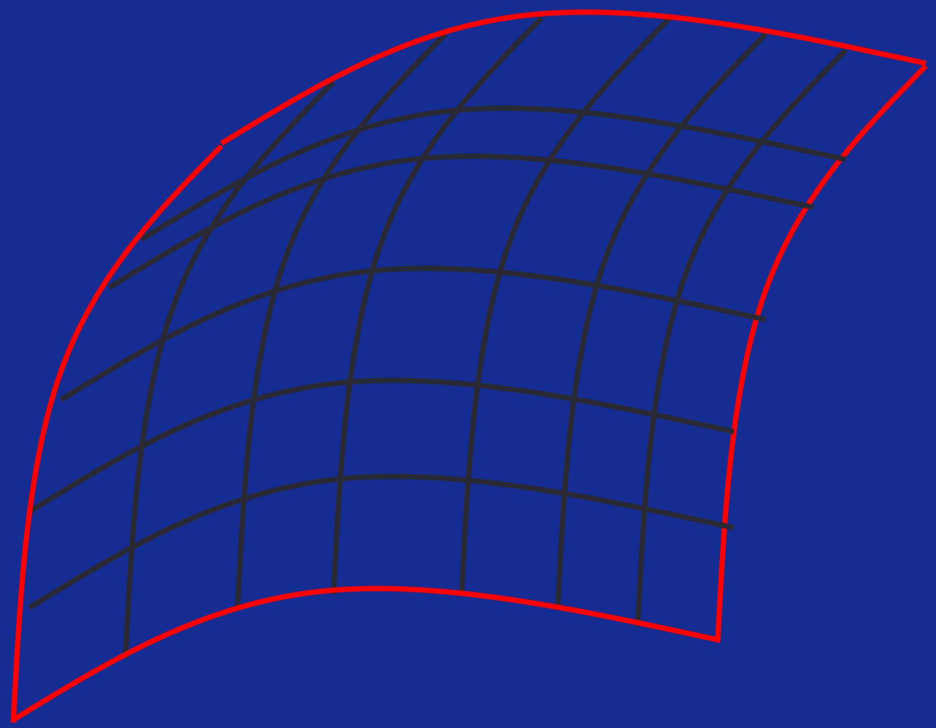
7.1 基本概念

曲线曲面分类

- **规则**曲线曲面：可以用**标准方程**描述的曲线曲面。如圆、椭圆、抛物线、双曲线、渐开线、摆线、圆柱面，圆锥面，球面等
- **自由**曲线曲面：**无法用标准方程**描述的曲线曲面，通常由一系列**实测数据点**确定。如汽车的外形曲线曲面、等高线等。

- 在汽车制造厂里，传统上采用样条绘制曲线的形状。
- 绘图员弯曲样条（如弹性细木条）通过各实测点，其它地方自然过渡，然后沿样条画下曲线，即得到样条曲线（Spline Curve)。
- 在计算机图形学中，样条曲线是指由多项式曲线段（可为规则/自由曲线段）连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续性条件；而样条曲面则可用两组正交样条曲线来描述。

■样条曲面片可以看成由两组相互正交的样条曲线集组成



7.1.1 曲线与曲面的表示形式

- 曲线与曲面 有非参数表示与参数表示两种形式，非参数表示中又有显示表示与隐式表示。
- 以直线为例：已知直线的起点坐标P1（x1，y1）和终点坐标P2（x2，y2）,直线的显式方程表示为：

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

7.1.1 曲线与曲面的表示形式

- 直线的隐函数方程表示为：

$$f(x)=y-y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)=0$$

- 直线的参数方程表示为：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}，\quad t\in[0,1]$$

圆弧的三种表示形式

- 在第一象限内的单位圆弧的显式表示：

$$y=\sqrt{1-x} \quad 0\le x\le 1$$

- 在第一象限内的单位圆弧的隐式表示：

$$f(x,y)=x^2+y^2-1=0 \quad 0\le x\le 1$$

- 在第一象限内的单位圆弧的参数方程表示：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

参数方程表示曲线曲面的优点

- 1）用参数表示的曲线形状本质与坐标系的选取无关，具有几何不变性。
- 对于在不同测量坐标系测得的同一组数据点进行拟合，用同样的数学方法得到的拟合曲线形状不变。
- 2）参数方程将自变量与因变量分开，突出了参数变化对应变量的影响。
- 3）容易实现各种线性变换运算。

参数方程表示曲线曲面的优点

- 4）曲线的端点、导数等计算简单，避免了无穷大斜率的问题。
- 5）便于曲线的分段描述；
- 6）易于处理多值问题
- 7）参数的变化约定为[0,1]。自然规定了曲线是有界的。

参数方程表示曲线曲面的优点

- 通常用三次参数方程描述空间一条自由曲线：

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

- 其中，t为参数，且0<=t<=1时，t=0对应曲线段的起点，t=1时，对应曲线段的终点。
- 用三次参数方程来表示自由曲线的原因：既要使曲线段的端点通过特定的点，又使曲线段在连接处保持位置和斜率的连续性，三次参数方程是能表示这种曲线的最低阶次的方程。

参数方程表示曲线曲面的优点

■空间自由曲线的矢量表示：

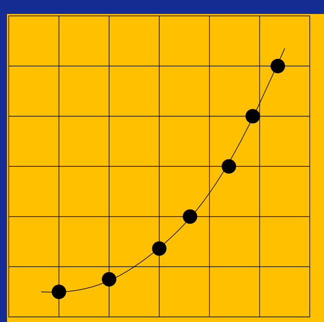
$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad , \ t \in [0,1]$$

■空间自由曲线的矩阵表示：

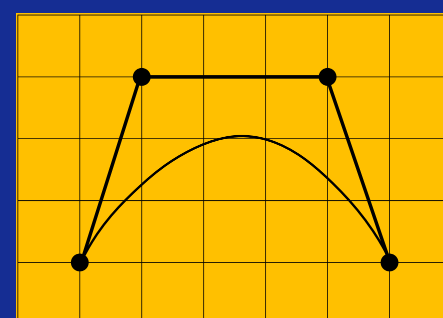
$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad , \ t \in [0,1]$$

7.1.2 插值与逼近

- 插值（Interpolation）：当用一组数据点来指定曲线的形状时曲线精确地通过给定的数据点且形成光滑的曲线，称为曲线的插值。
- 逼近(Approximation)：当用一组控制点来指定曲线的形状时，曲线被每个控制点所吸引，但实际上并不经过这些控制点，称为曲线的逼近 。



插值曲线



逼近曲线

7.1.2 插值与逼近

■型值点

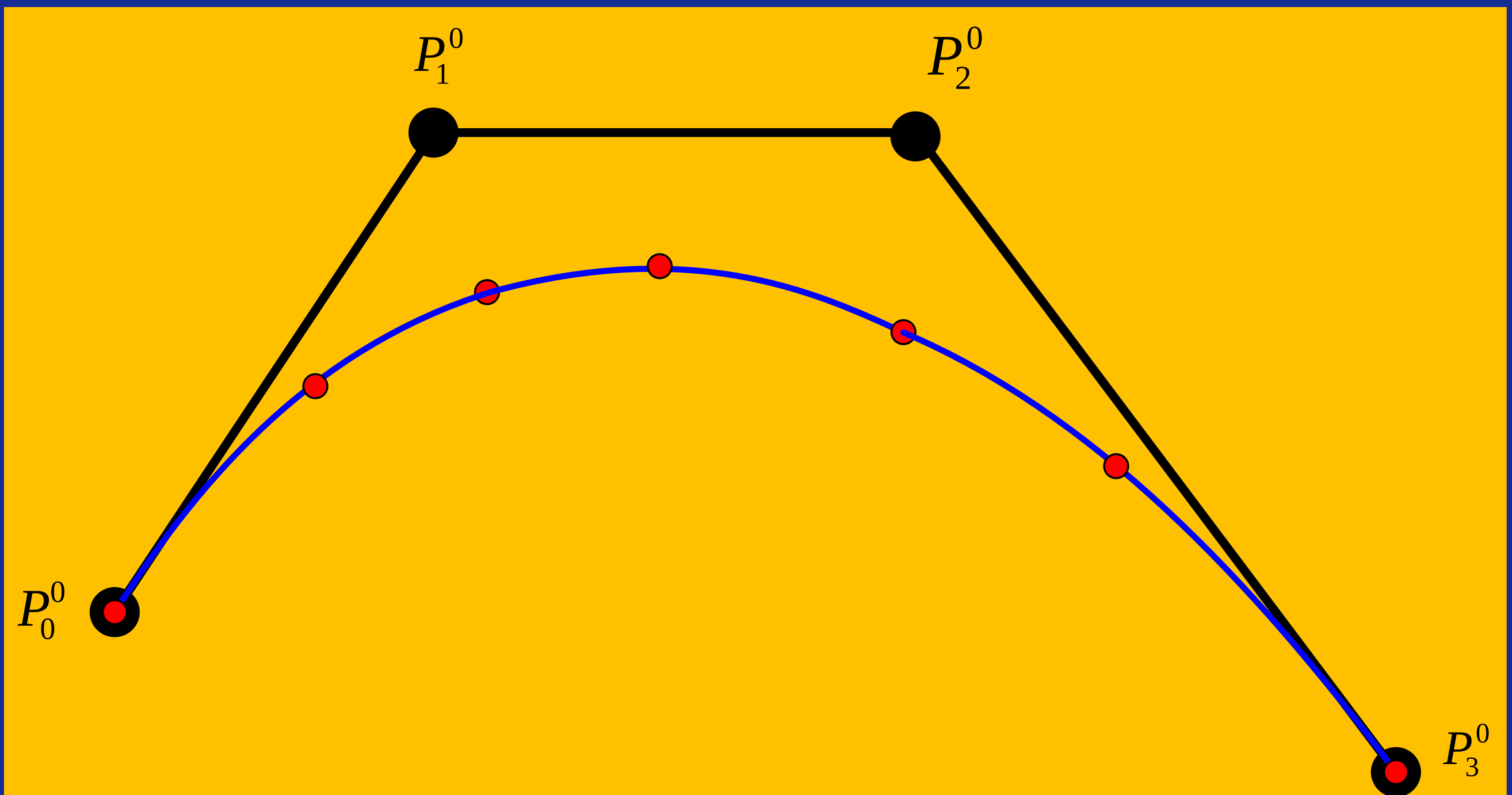
指通过测量或计算得到的曲线或曲面上少量描述曲线或曲面几何形状的数据点。

■控制点

用来控制或调整曲线(面）形状的特殊点（不一定在曲线上）

■插值点

- 求给定型值点之间曲线（面）上的点
- 要求建立的曲线与曲面数学模型，严格通过已知的每一个型值点。
- 在曲线、曲面中最常用的是线性插值和抛物线插值。



P_0^n

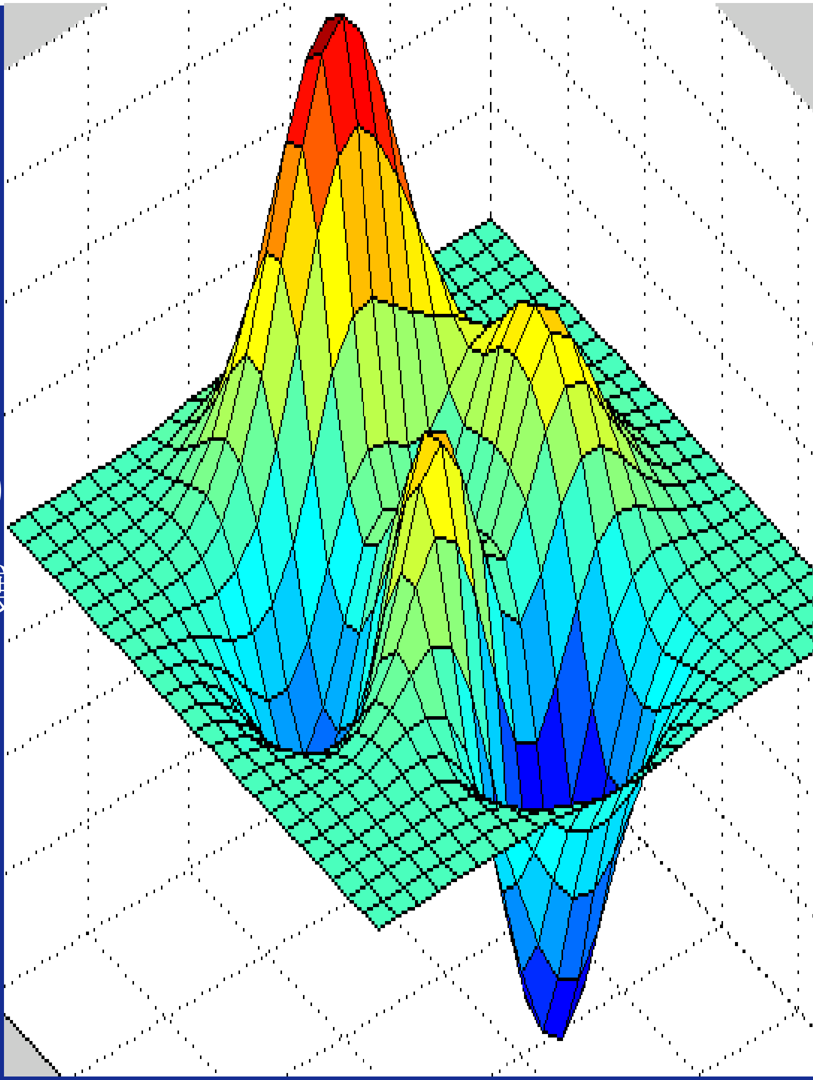
7.1.3 连续性条件

■构造复杂曲线和曲面时，可以首先构造一些简单的自由曲线和曲面片,然后将这些简单曲线段连接成复杂曲线，或将一些曲面片拼接成复杂曲面。

拼接条件：首先必须有连接点（连接边界）其次必须在连接点（连接边界）处平滑过渡即需要满足连续性条件。

连续性条件有两种：

参数连续性和几何连续性。

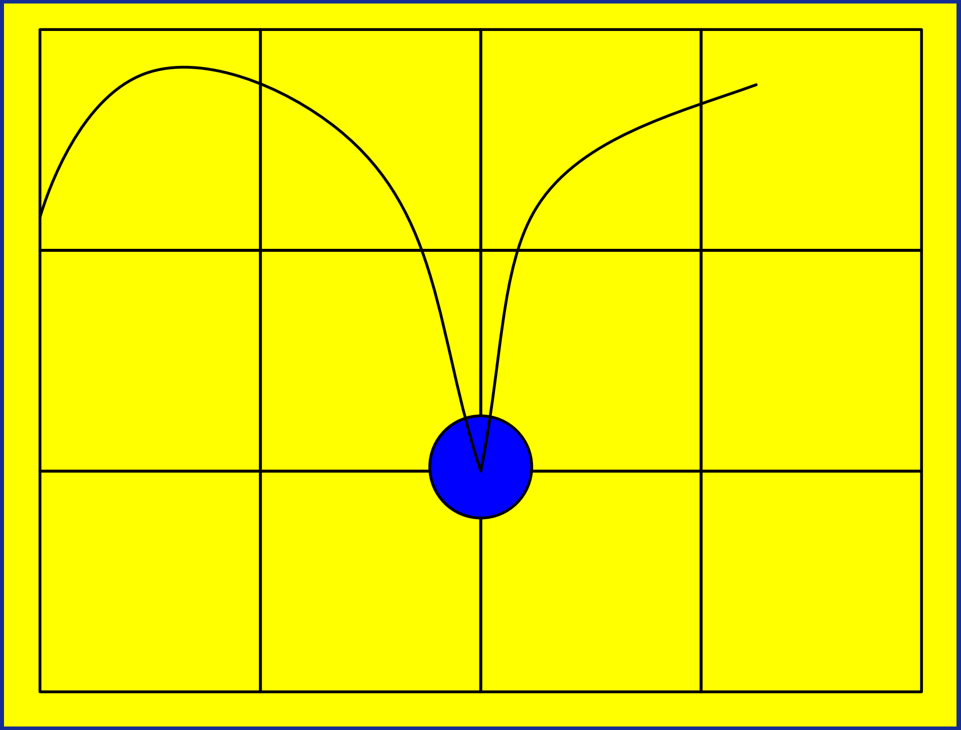


连续性条件

- 参数连续性
  - 传统意义上的、严格的连续
- 几何连续性
  - 只需限定两个曲线段在交点处的参数导数成比例，不必完全相等，是一种更直观、易于交互控制的连续性。

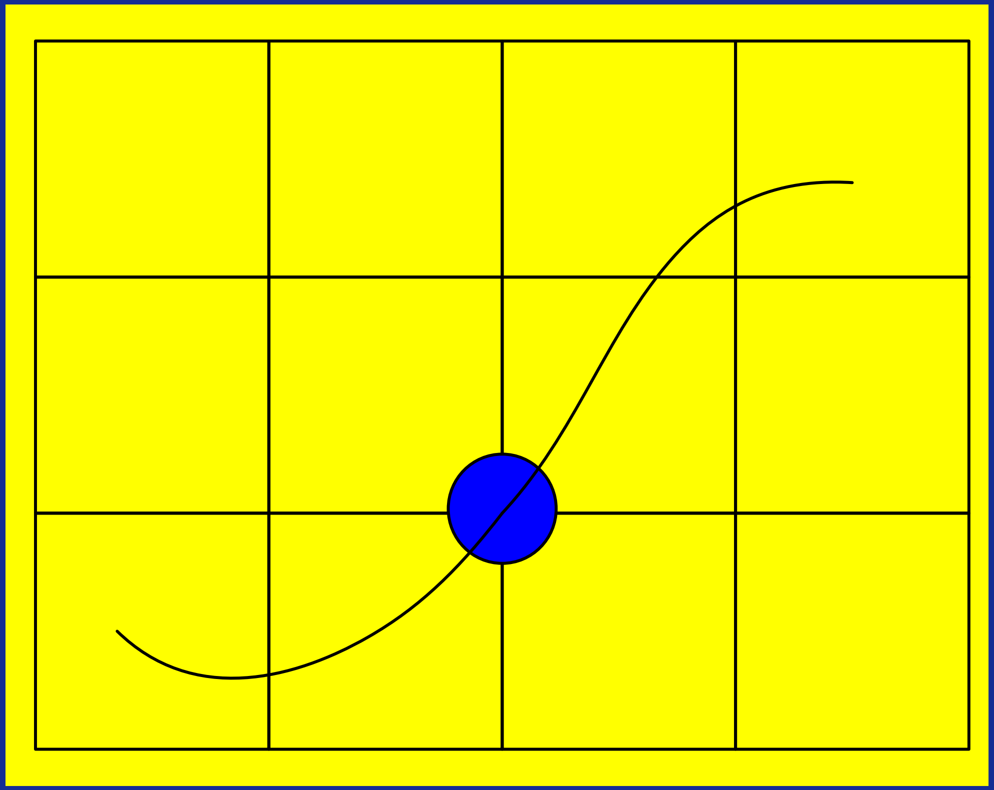
7.1.3 参数连续性

- 零阶参数连续性，记作C^0，指相邻两个曲线段在交点处具有相同的坐标。



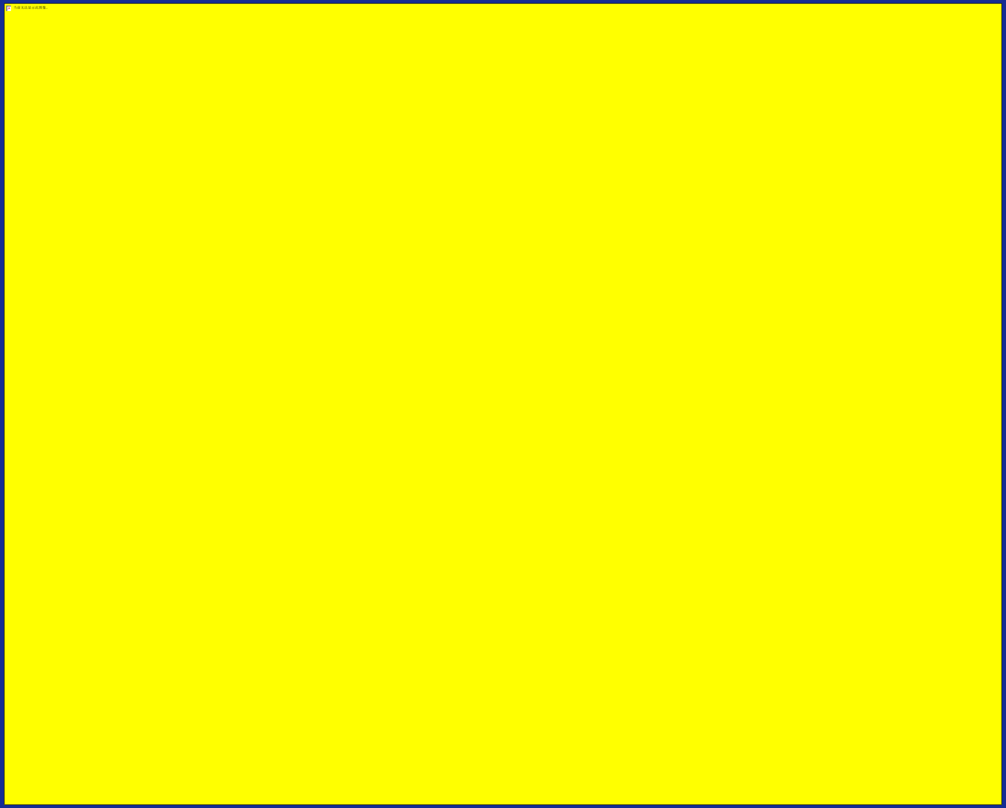
7.1.3参数连续性

- 一阶参数连续性，记作C^1，指相邻两个曲线段在交点处具有相同的一阶导数。



7.1.3 参数连续性

- 二阶参数连续性，记作C^2，指相邻两个曲线段在交点处具有相同的一阶和二阶导数。



7.1.3 几何连续性

与参数连续性的区别，几何连续性只要求导数成比例，而不是相等。

- 零阶几何连续性，记作 G^0 ，与零阶参数连续性相同即相邻两个曲线段在交点处有相同的坐标。
- 一阶几何连续性，记作 G^1，指相邻两个曲线段在交点处的一阶导数成比例，但大小不一定相等。
- 二阶几何连续性，记作 G^2 ，指相邻两个曲线段在交点处的一阶和二阶导数成比例，即曲率一致。

7.1.3 连续性条件

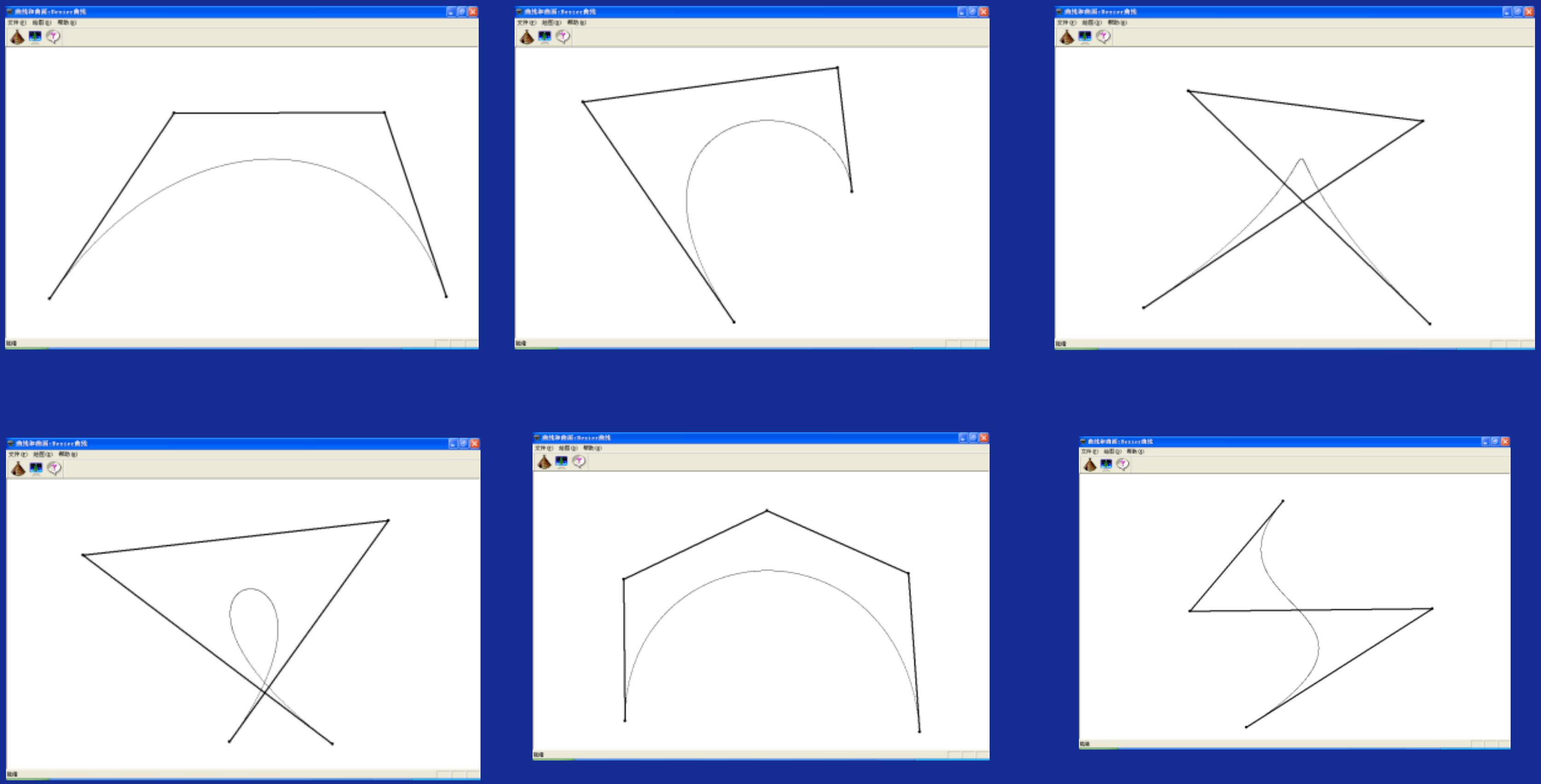
- 在曲线和曲面造型中，一般只使用C^1 C^2 G^1 G^2连续，以一阶导数反映了曲线对参数t的变化速度，二阶导数反映了曲线对参数t变换的加速度。
- 通常C连续性能保证G连续性，反之不一定成立。

7.2 Bezier 曲线与曲面

De Casteljau

Bezier

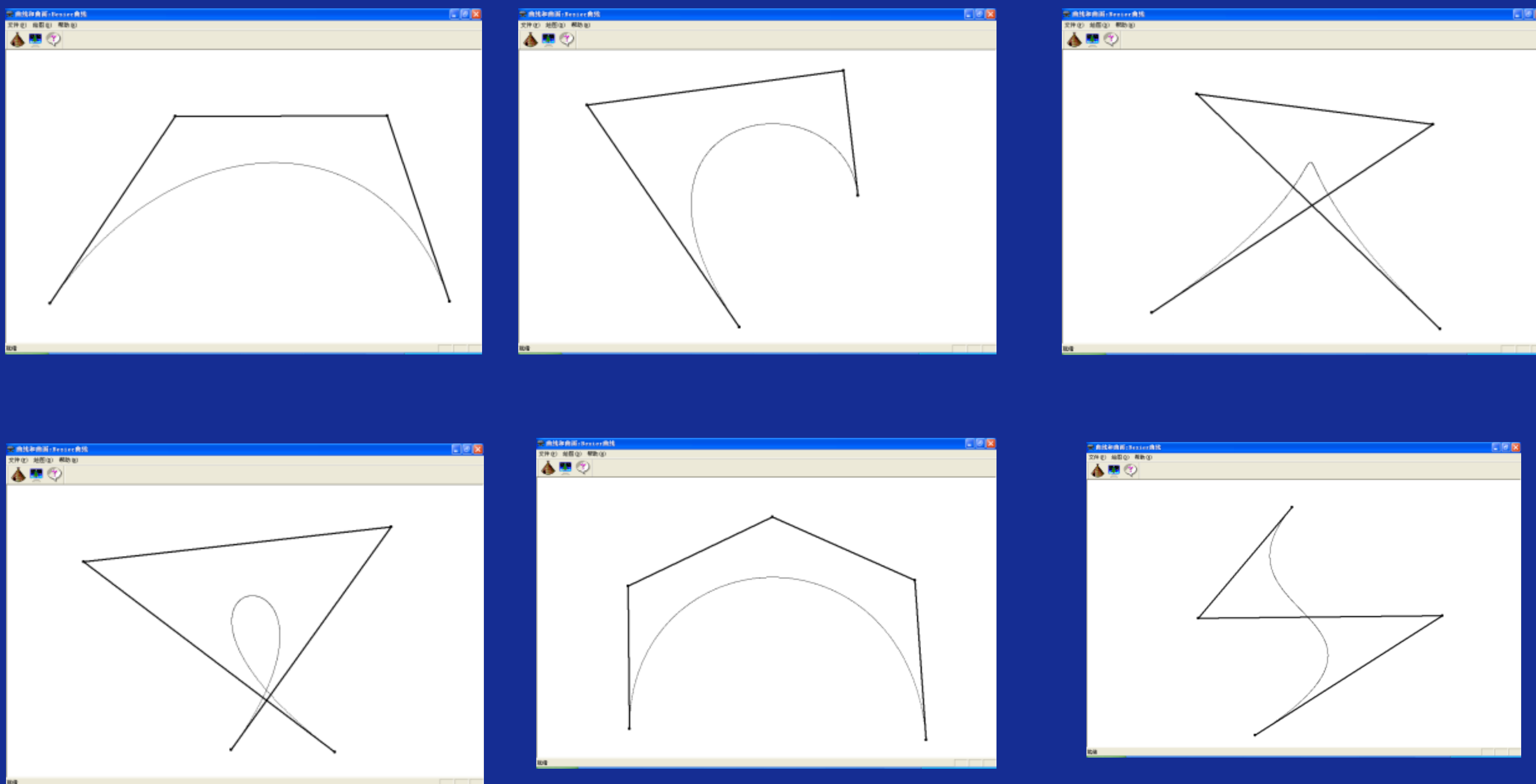
Bezier曲线由法国雪铁龙（Citroen）汽车公司的de Casteljau于1959年发明，后来又由法国雷诺（Renault）汽车公司的工程师Bezier于1962年独立发明。



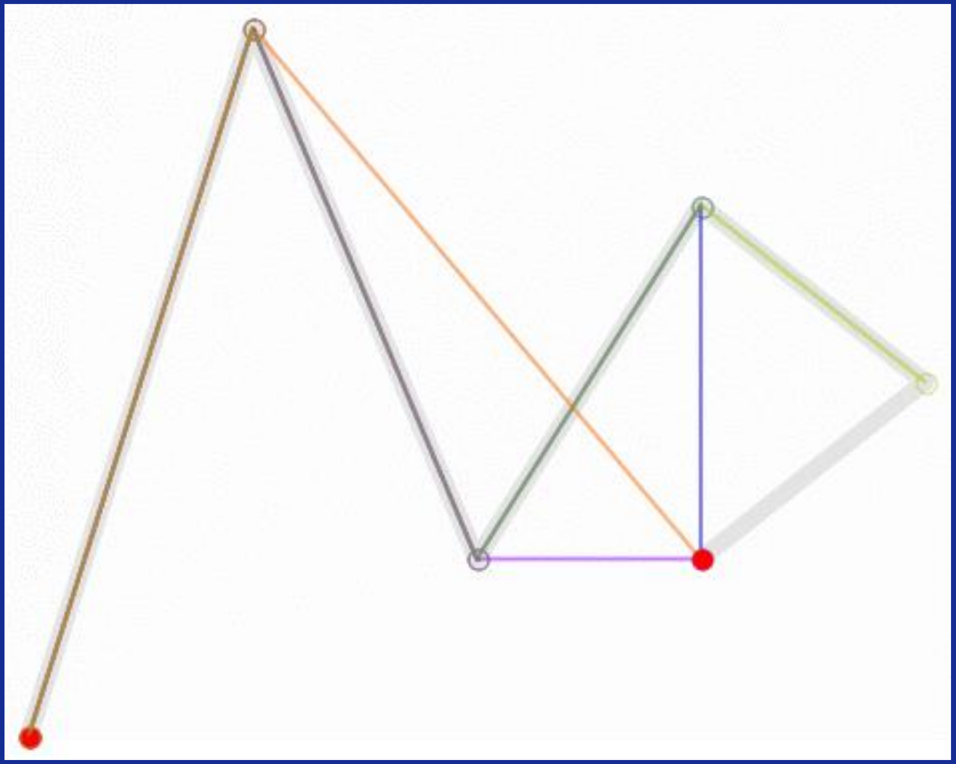
几种典型的Bezier曲线

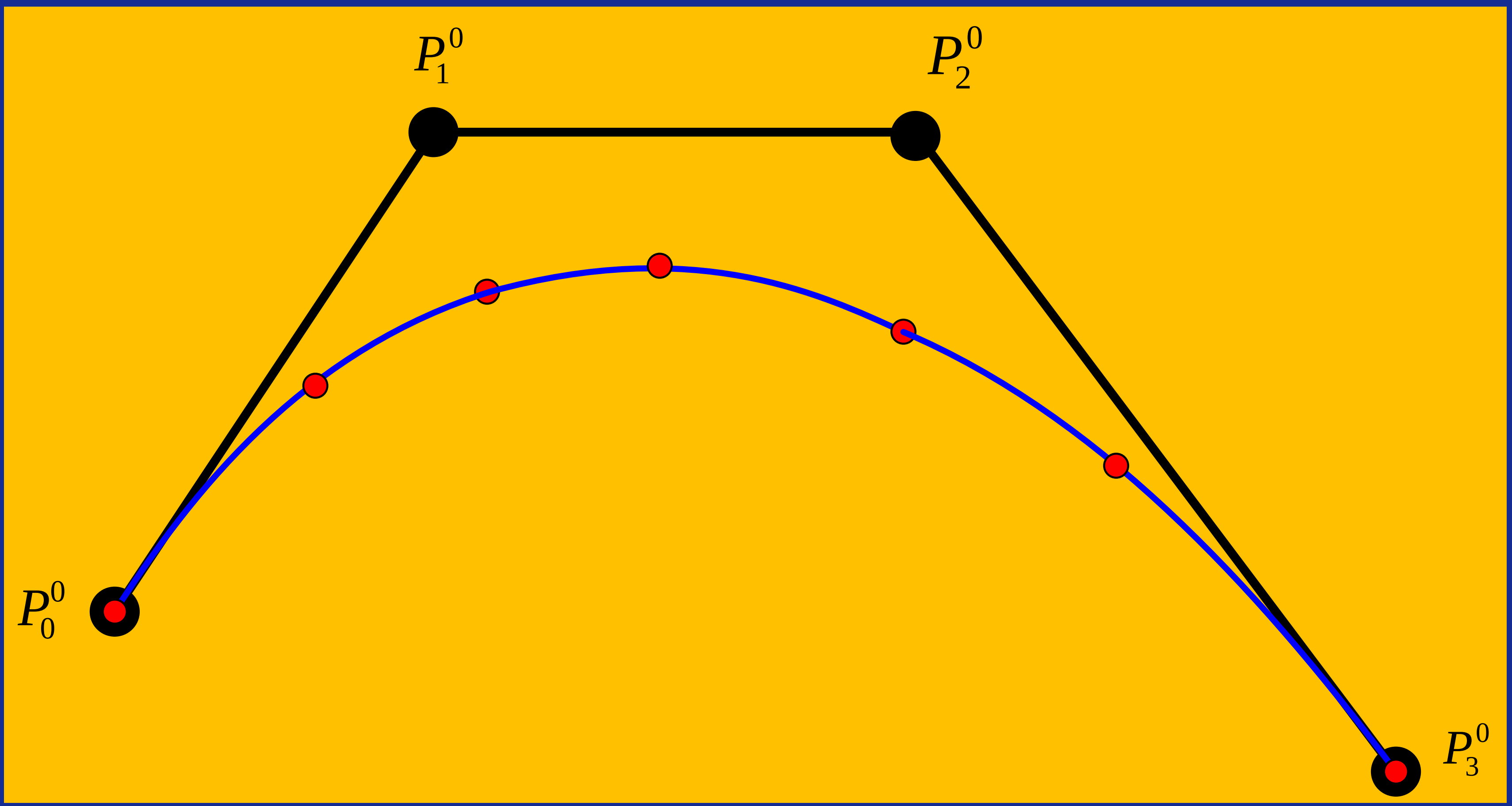
- Bezier的想法面向几何而不是面向代数
- Bezier曲线由控制多边形惟一定义
- Bezier曲线只有第一个顶点和最后一个顶点落在控制多边形上，
- 控制多边形的第一条和最后一条边表示了曲线在起点和终点的切矢量方向，
- 其它顶点则用于定义曲线的导数、阶次和形状

- 曲线的形状趋近于控制多边形的形状，改变控制多边形的顶点位置就会改变曲线的形状
- 绘制Bezier曲线的直观交互性使得对设计对象的控制达到了直接的几何化程度，使用方便



几种典型的Bezier曲线





P_0^n

Bezier 曲线的定义

给定n+1个控制点P_i（i＝0，1，2......n），称为n次Bezier曲线。

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$$

t∈〔0，1〕

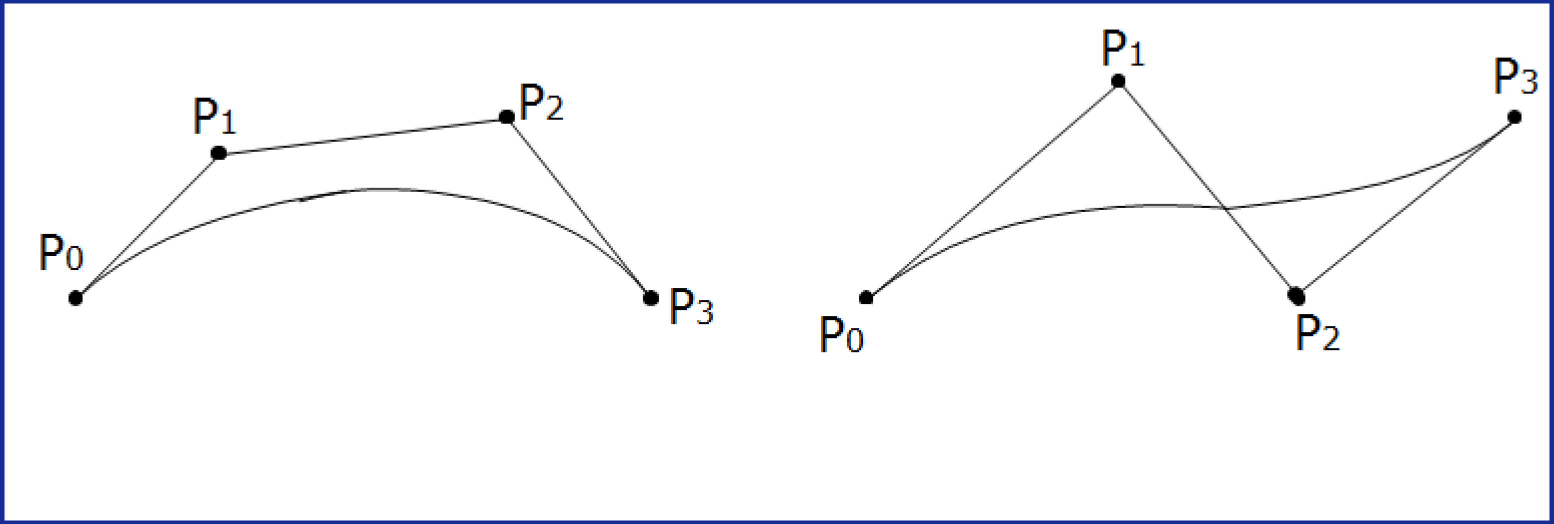
P_i（i＝0，1，2......n）是控制多边形的n+1个控制点，控制多边形是连接n条边构成的多边形。

$B_{i,n}(t)$ 是n次Bernstein基函数，其表达式为：

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}$$

在实际应用中，最常用的是三次Bezier曲线，其次是二次Bezier曲线，高次Bezier曲线一般很少使用。

- P0,P1,P2,P3被称为**控制点**



一次Bezier 曲线

当n＝1时，Bezier曲线的控制多边形有二个控制点P_0和P_1，Bezier曲线是一次多项式。

$$p(t)=\sum_{i=0}^{1}P_iB_{i,1}(t)=P_0\cdot B_{0,1}(t)+P_1\cdot B_{1,1}(t)$$

$$=(1-t)\cdot P_0+t\cdot P_1 \qquad i=0,1 \quad n=1$$

Bernstein基函数为

$$B_{0,1}(t)=1-t \qquad B_{1,1}(t)=t$$

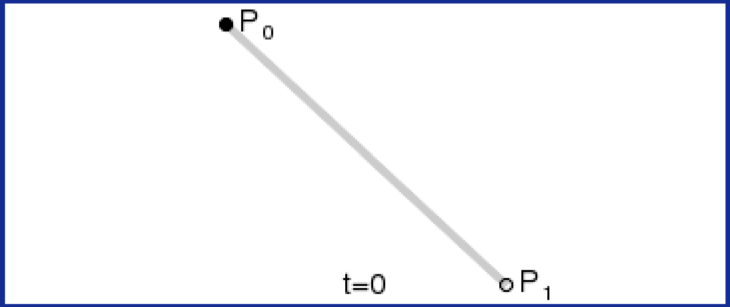
一次Bezier 曲线

■写成矩阵形式为

$$P(t)=[t \quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\end{bmatrix}$$

t∈〔0，1〕

■一次Bezier曲线是一段直线。



二次Bezier 曲线

当n＝2时，Bezier曲线的控制多边形有三个控制点P_0、P_1和P_2，Bezier曲线是二次多项式。

$$p(t)=\sum_{i=0}^{2}P_iB_{i,2}(t)=\mathrm{P}_0\cdot B_{0,2}+P_1\cdot B_{1,2}+\mathrm{P}_2\cdot \mathrm{B}_{2,2}$$

$$=(1-\mathrm{t})^2\cdot \mathrm{P}_0+2t(1-t)\cdot P_1+\mathrm{t}^2\cdot \mathrm{P}_2$$

Bernstein基函数为

$$B_{0,2}(t)=(1-t)^2$$ $$B_{1,2}(t)=2t(1-t)$$ $$B_{2,2}(t)=t^2$$

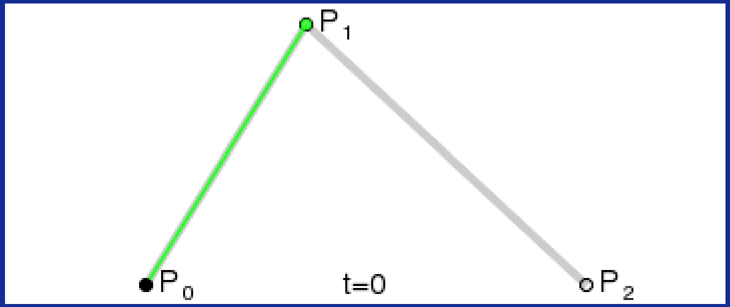
二次Bezier 曲线

■写成矩阵形式为

$$P(t)=[t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

t∈〔0，1〕

■二次Bezier曲线是一段抛物线。



三次Bezier 曲线

当n＝3时，Bezier曲线的控制多边形有四个控制点P_0、P_1、P_2和P_3，Bezier曲线是三次多项式。

$$p(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=P_0\cdot B_{0,3}+P_1\cdot B_{1,3}+P_2\cdot B_{2,3}+P_3\cdot B_{3,3}$$

$$=(1-t)^3\cdot P_0+3t(1-t)^2\cdot P_1+3t^2(1-t)\cdot P_2+t^3\cdot P_3$$

$$=(-t^3+3t^2-3t+1)P_0+(3t^3-6t^2+3t)P_1+(-3t^3+3t^2)P_2+t^3P_3$$

三次Bezier曲线是段自由曲线。

三次Bezier 曲线

- 写成矩阵形式为

$$p(t)=\begin{bmatrix}B_{0,3} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\3 & -6 & 3 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}$$

t∈〔0，1〕

三次Bezier 曲线的Bernstein基函数

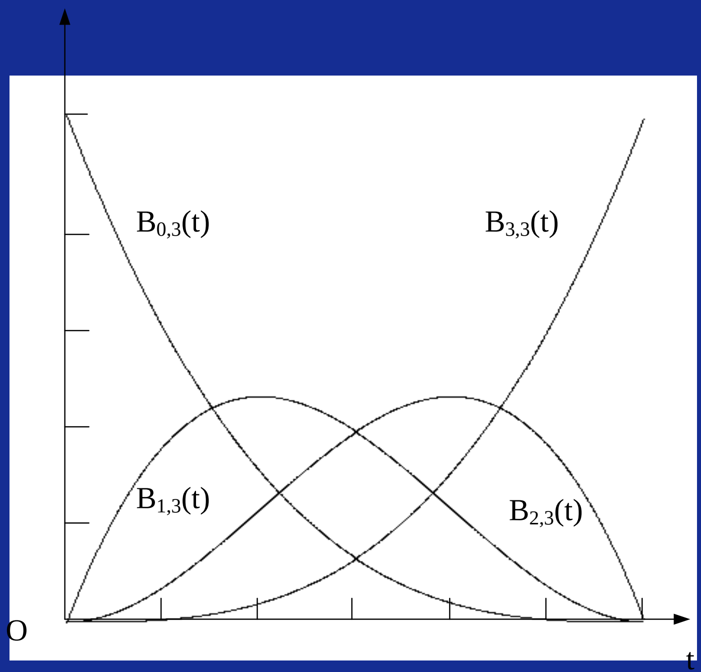
$$B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = -3t^3 + 3t^2 = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

在区间[0,1]范围内，每个基函数均不为零，说明不能使用控制多边形对曲线的形状进行局部调整，如果要改变某一控制点位置，整条曲线都将受到影响。



Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

1.非负性

$$B_{i,n}(t) \ge 0$$

t∈［0，1］（i＝0，1，2……n）

2.端点性质

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1, i = 0 \\ 0, i \ne 0 \end{cases}$$

$$B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1, i = n \\ 0, i \ne n \end{cases}$$

这里用到：$0^0 = 1$，$0! = 1$

Bernstein基函数的性质

3.权性

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = [t+(1-t)]^n \equiv 1$$

4.对称性

$$B_{n-i,n}(1-t) = C_n^{n-i}(1-t)^{n-i}(1-(1-t))^{n-(n-i)}$$

$$C_n^i = C_n^{n-i}$$

$$B_{n-i,n}(1-t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t)$$

5.导函数

$$B_{i,n}'(t) == n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]$$

Bernstein基函数的性质

6.递推性

$$B_{i,n}(u)=(1-u)B_{i,n-1}(u)+uB_{i-1,n-1}(u),\quad i=0,1,\ldots,n$$

即高一次的Bernstein基函数可由两个低一次的Bernstein基函数线性组合而成

Bezier 曲线的性质

■**Bernstein基函数的性质决定了Bezier曲线的性质**

1.端点性质　　当$t=0$时，$p(0)=P_0$；当$t=1$时，$p(1)=P_n$。

Bezier曲线的起点和终点与控制多边形的起点和终点吻合

Bezier 曲线的性质

■Bernstein基函数的性质决定了Bezier曲线的性质

2.端点切矢量（一阶导数）

$$p'(t) = n\sum_{i=0}^{n-1} P_i(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))$$

在起始点t= 0, $B_{0,n-1}(0)$= 1，其余项均为0，故有

$$p'(0) = n(P_1 - P_0)$$

在终止点t= 1, $B_{n-1,n-1}(1)$= 1，其余项均为0，故有

$$p'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

Bezier曲线的起点和终点的切线方向与控制多边形的第一条边和最后一条边走向一致

3.二阶导数

$$p''(t) = n(n-1)\sum_{i=2}^{n}(P_i - 2P_{i\text{-}1} + P_{i\text{-}2})B_{i\text{-}2,n-2}(t)$$

当t= 0时

$$p''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0) = n(n-1)((P_2 - P_1) - (P_1 - P_0))$$

当t= 1时

$$p''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) = n(n-1)((P_n - P_{n-1}) - (P_{n-1} - P_{n-2}))$$

起始点和终止点的二阶导数分别取决于最开始的3个控制点和最后的3个控制点。

- 4.对称性
- 由控制点 $P_i^* = P_{n-i}$ ，（i=0，1，2.....n），构造出的新Bezier曲线与原Bezier曲线形状相同，但走向相反。

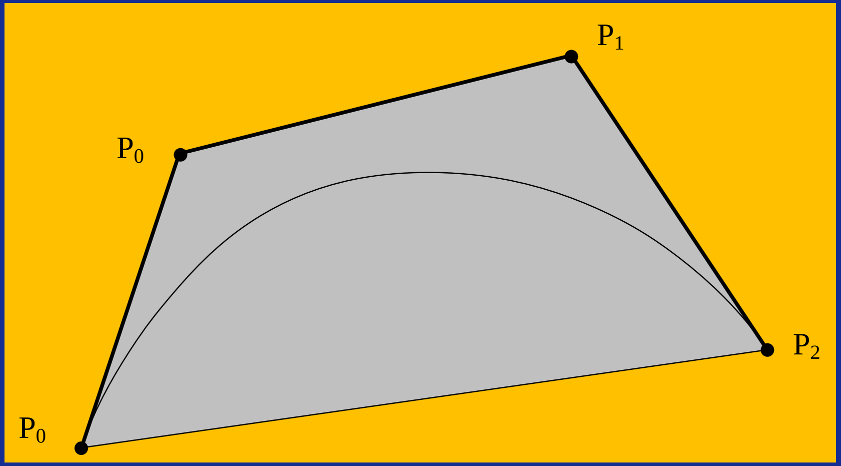
$$p^*(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i^* B_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n} P_{n-i} B_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n} P_{n-i} B_{n-i,n}(1-t)$$

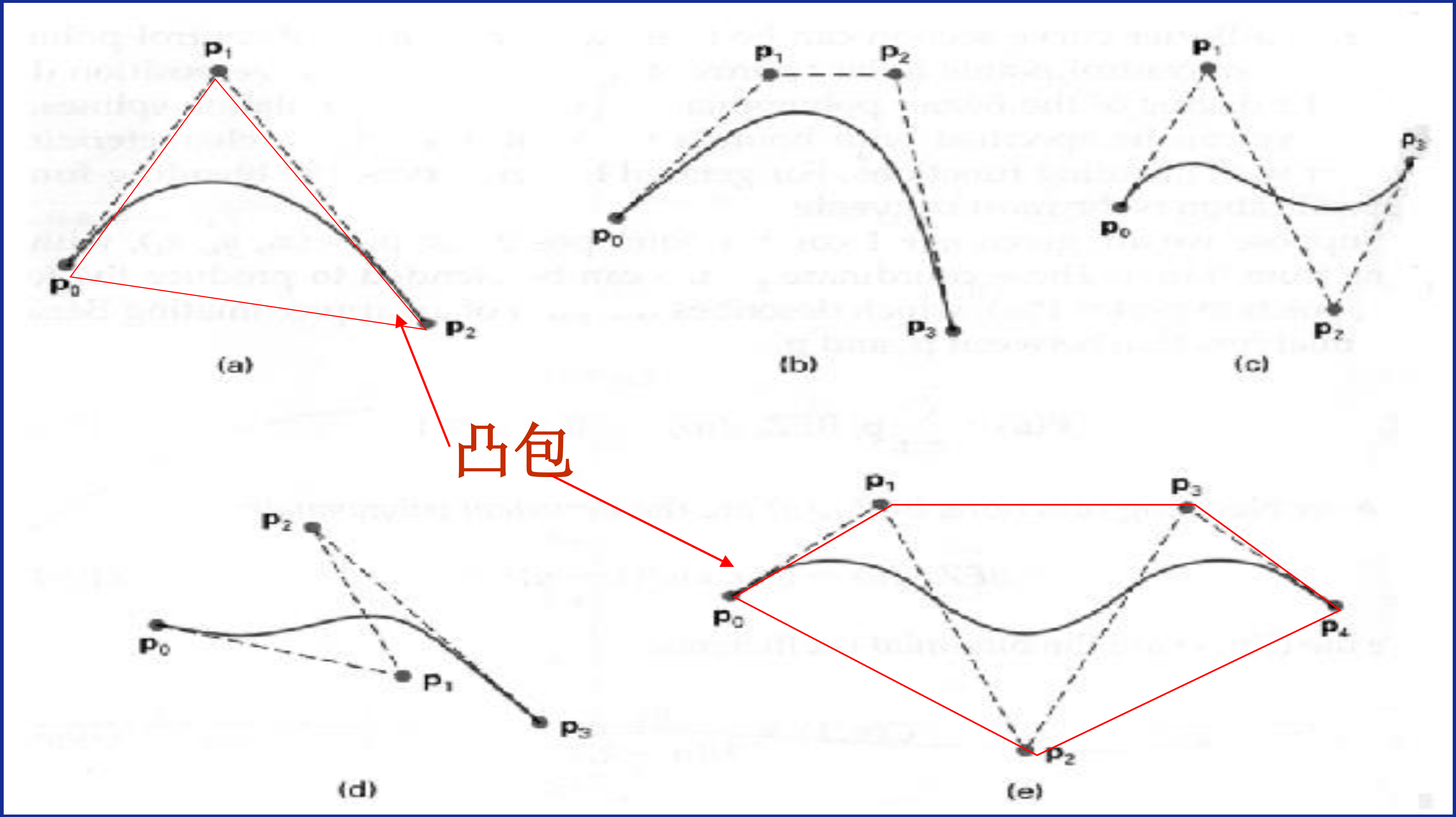
$$=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(1-t)=p(1-t)$$

这个性质说明Bezier曲线在控制多边形的起点和终点具有相同的性质。

- 5.凸包性
- 由Bernstein基函数的正性和权性可知，在闭区间[0，1]内，$B_{i,n}(t) \geq 0$ 且 $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \equiv 1$

这说明Bezier曲线的各点位于控制多边形构成的凸包之内，而且永远不会超出凸包的范围。




P1
P0
P2
(a)
P1
P2
P0
P3
(b)
P1
P3
P0
P2
(c)
凸包
P2
P0
P1
P3
(d)
P1
P3
P0
P4
P2
(e)

- 根据以上性质知道，Bezier曲线是拟合曲线，在控制多边形的第一个顶点和最后一个顶点处进行插值，其形状直接受其余控制点的影响。

- （1）Bezier曲线只有第一个顶点和最后一个顶点落在控制多边形上，且多边形的第一条边和最后一条边表示了曲线在起点和终点的切矢量方法，其他顶点则用于定义曲线的导数、阶次和形状，曲线的形状趋近于控制多边形的形状，改变控制多边形的顶点位置就会改变曲线的形状；

- （2）曲线起始点处的一阶导数是通过第一个控制点和第二个控制点之间的矢量来定义曲线终止点处的一阶导数是通过最后一个控制点和倒数第二个控制点之间的矢量来定义。
- （3）曲线在起始点的二阶导数依赖于起始的3个控制点；曲线在终止点的二阶导数依赖于最后的3个控制点。

Bezier 曲线的性质

- Bezier曲线上的点，可以使用Bezier曲线方程直接计算，但使用de Casteljau递推算法则要简单的多。

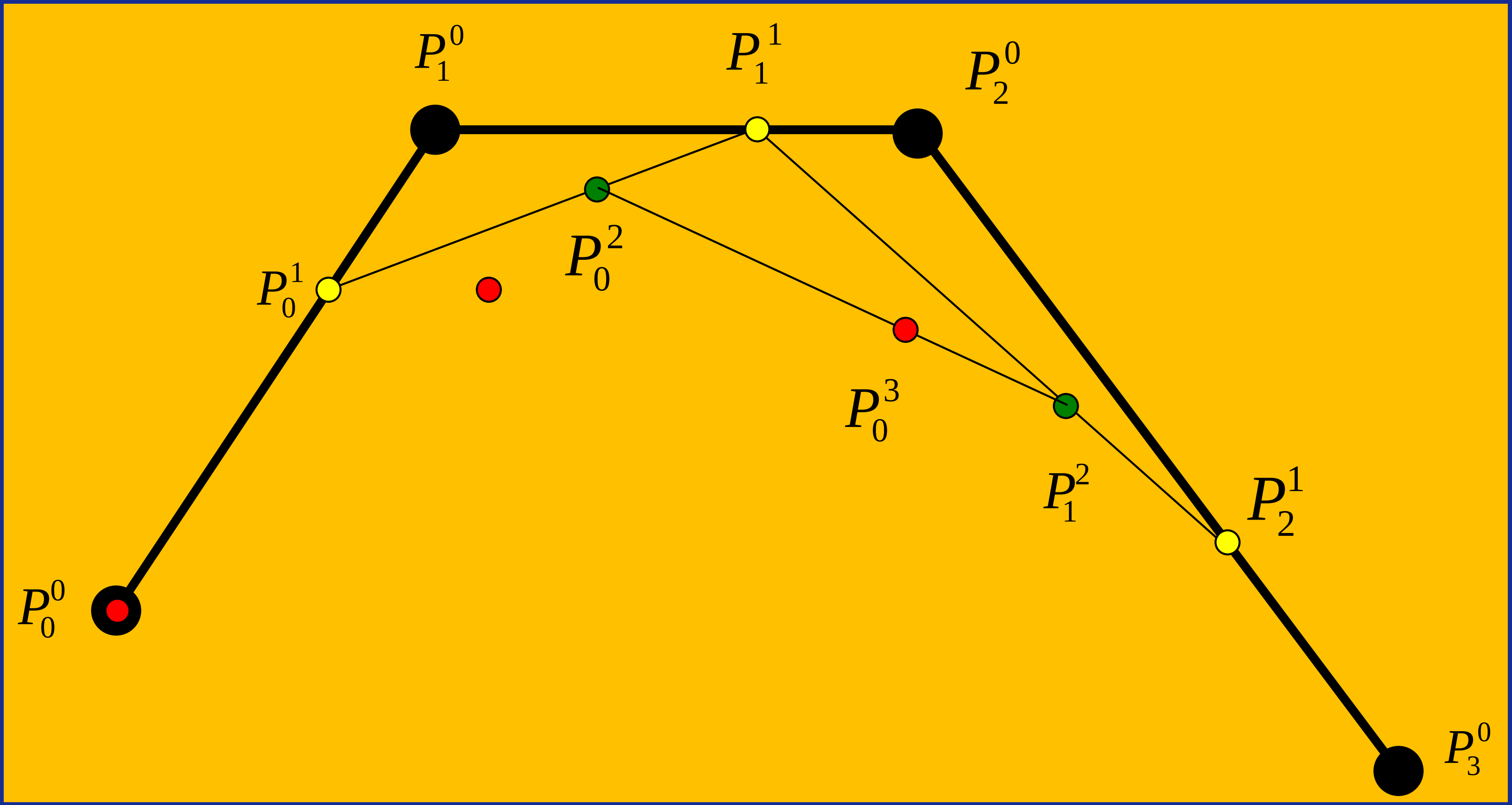
给定空间n+1个控制点Pi（i=0，1， 2...n）及参数t，de Casteljau递推算法表述为

$$P_i^r(t)=(1-t)\cdot P_i^{r-1}(t)+t\cdot P_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$r=1,2,\ldots n;\quad i=0,1,\ldots n-r;\quad t\in[0,1]$$

$$P_i^0(t)=P_i$$

$P_i^r(t)$ 是Bezier曲线上参数为t的点



P_0^n

Bezier 曲线的性质

- 例如当n=3时,有

$$\begin{cases} r=1, i=0,1,2 \\ r=2, i=0,1 \\ r=3, i=0 \end{cases}$$

- 三次 Bezier曲线递推如下：

第一级递推

$$\begin{cases} P_0^1(t)=(1-t)\cdot P_0^0(t)+t\cdot P_1^0(t) \\ P_1^1(t)=(1-t)\cdot P_1^0(t)+t\cdot P_2^0(t) \\ P_2^1(t)=(1-t)\cdot P_2^0(t)+t\cdot P_3^0(t) \end{cases}$$

三次Bezier曲线递推如下

第二级递推

$$\begin{cases} P_0^2(t) = (1-t)\cdot P_0^1(t) + t\cdot P_1^1(t) \\ P_1^2(t) = (1-t)\cdot P_1^1(t) + t\cdot P_2^1(t) \end{cases}$$

第三级递推

$$P_0^3(t) = (1-t)\cdot P_0^2(t) + t\cdot P_1^2(t)$$

其中，规定 $P_i^0(t) = P_i$

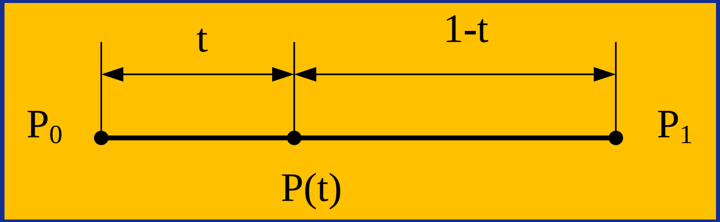
定义Bezier曲线的控制点编号为 P_i^r ，其中，r为递推次数。

de Casteljau已经证明，当r=n时， P_0^n 表示曲线上的点。

几何作图法

- de Casteljau算法的基础是在线段P_0P_1上选择一个点P(t)，使得P(t)点划分P_0P_1为 t:（1-t）两段，如图7-17所示。给定点P_0、P_1的坐标以及t的值，点P(t)的坐标为

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1$$

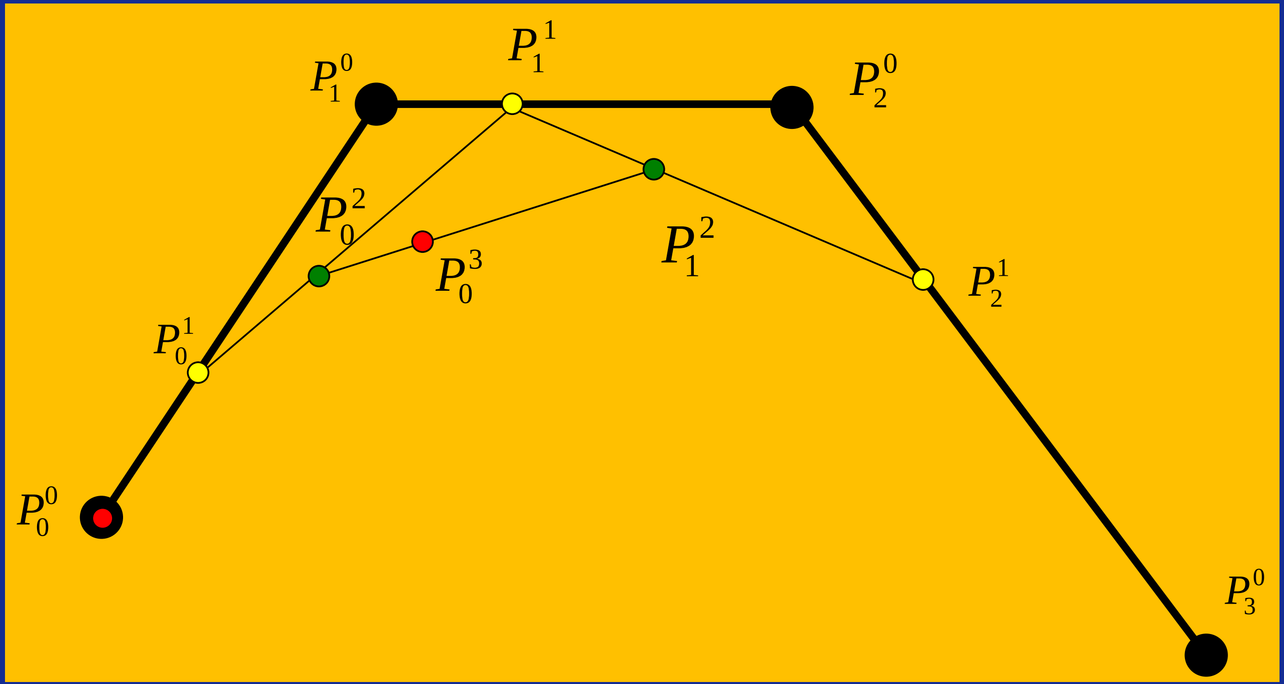


de Casteljau算法基础

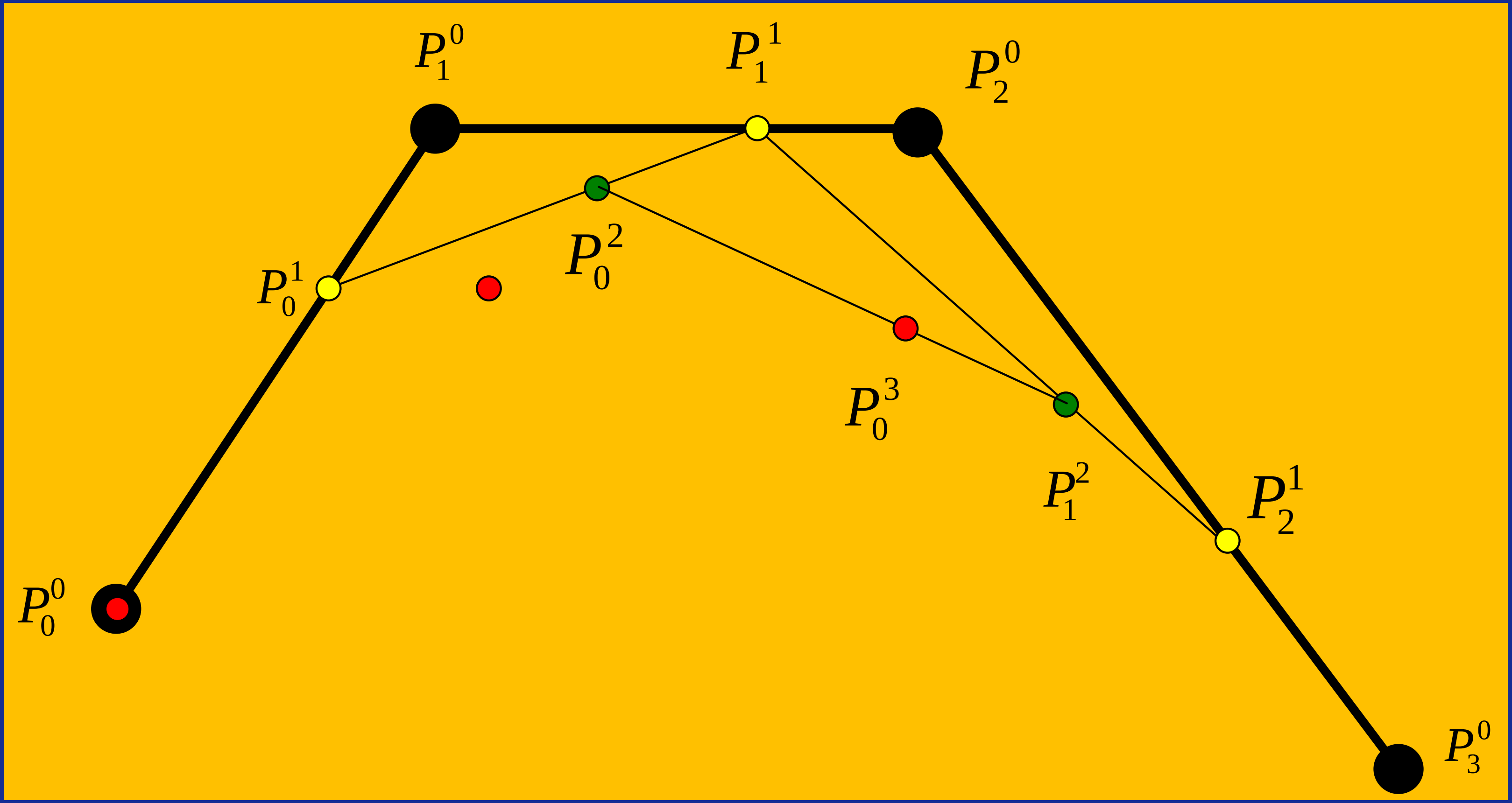
- 依次对原始控制多边形的每一边执行同样的定比分割，所得的分点就是第一级递推生成的中间顶点
- （i = 0,1,… ，n-1），重复进行下去，直到r = n，得到一个中间顶点 P_0^n = 0,1,… ，n-2）。

该点的轨迹即为Bezier曲线上的点P(t)。

- 以n = 3的三次Bezier曲线为例，讲解de Casteljau算法的几何作图分法。取t=0，t = 1/3，t = 2/3，t=1，作图绘制
- **绘制t=1/3的点**



绘制t=2/3的点

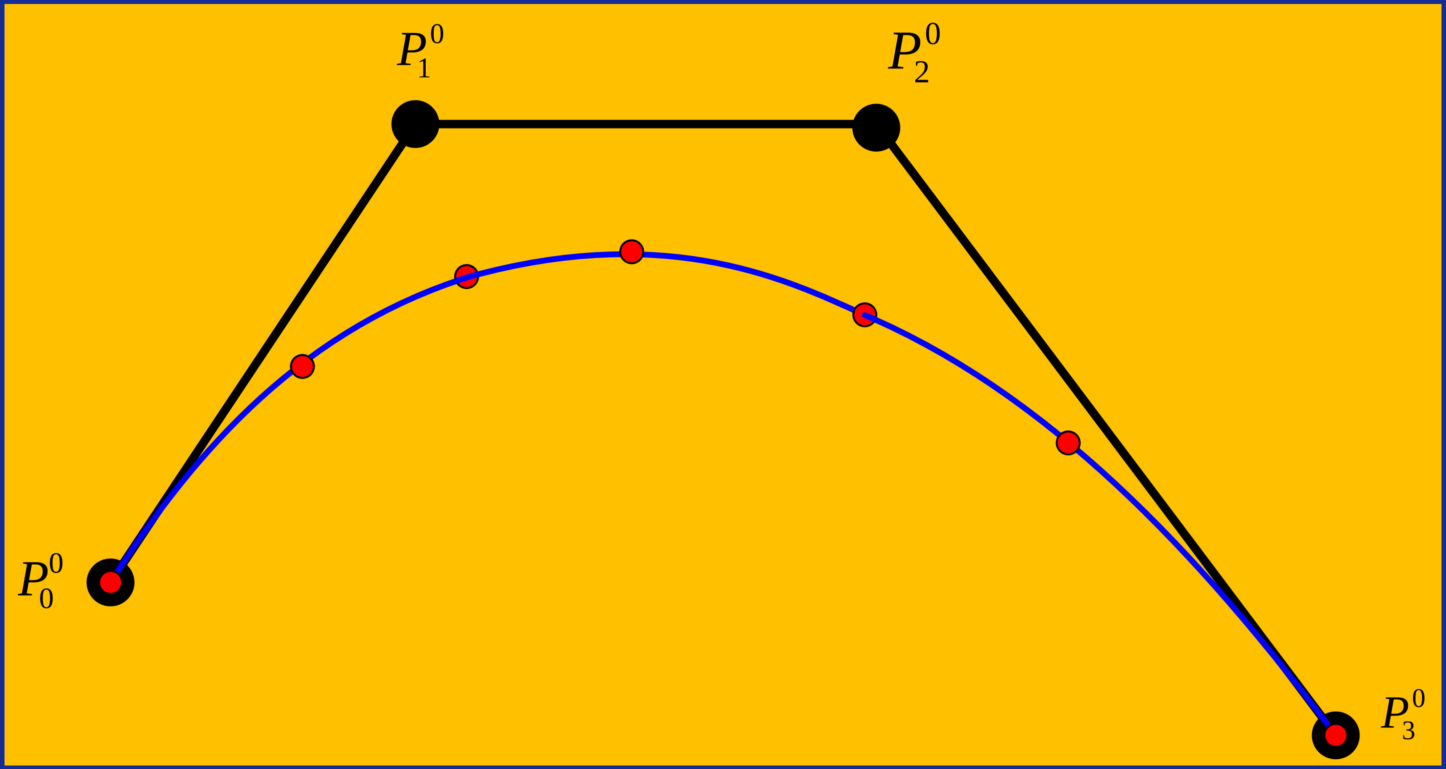


P_0^n

- 当t在[0,1]区间内连续变化时，使用直线段连接控制多边形凸包内所有红色的 P_0^3 点，可以绘制出三次Bezier曲线。

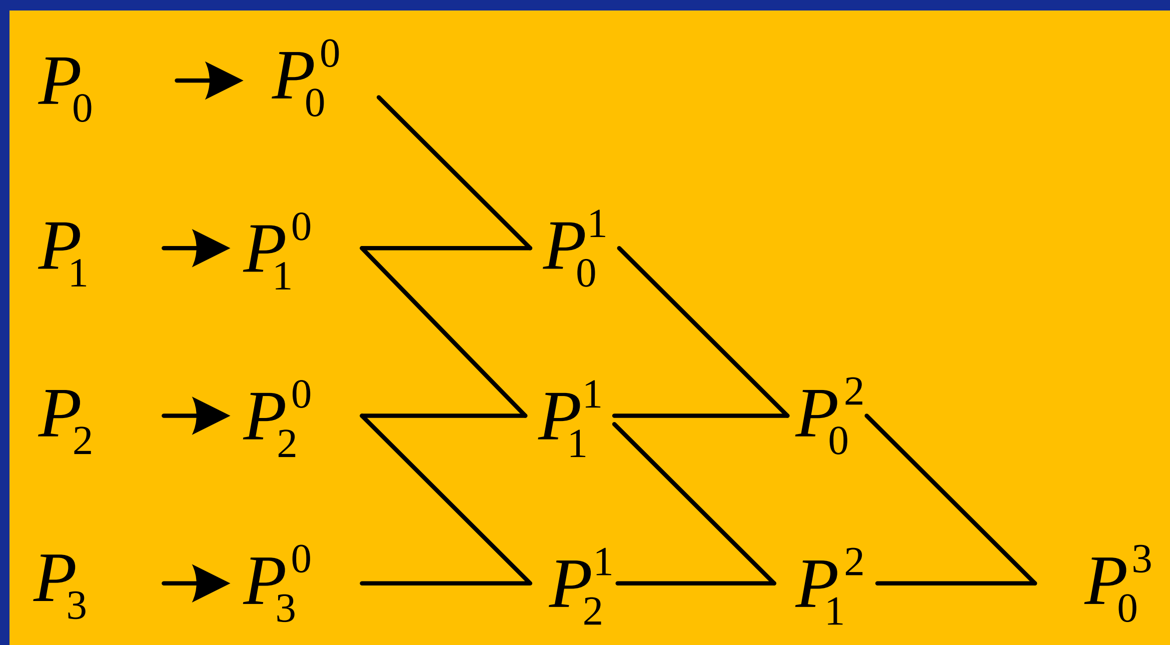
P_0^n

- P_0^3点的运动轨迹
- P_0^3 是Bezier曲线上的点



P_0^n

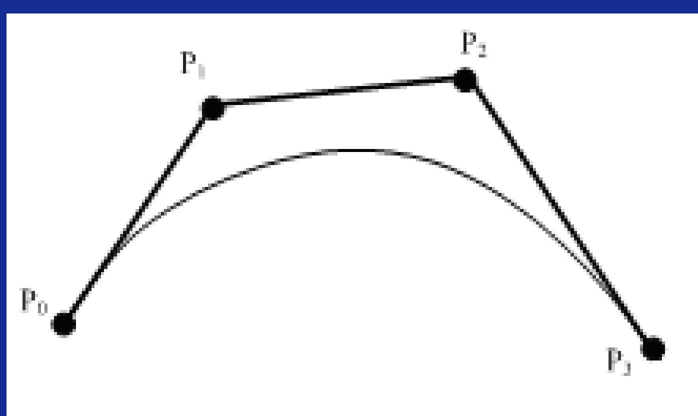
当n = 3 ，t=1/2时 ，de Casteljau递推算法绘制Bezier曲线的过程如上图所示。de Casteljau算法递推出的 P_i^r 呈直角三角形，如下图所示 。



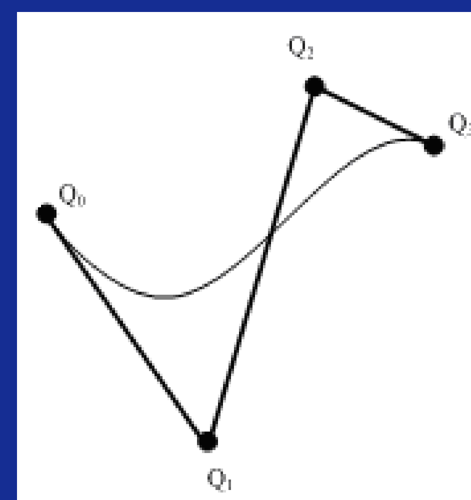
Bezier曲线的拼接

- 一条Bezier曲线往往难以描述复杂的曲面形状。这是由于增加控制多边形的顶点数，会引起Bezier曲线次数的提高，而高次Bezier曲线会带来计算上的困难。工程中经常使用的是二次或三次Bezier曲线的拼接，要求在结合处满足一定的连续性条件。

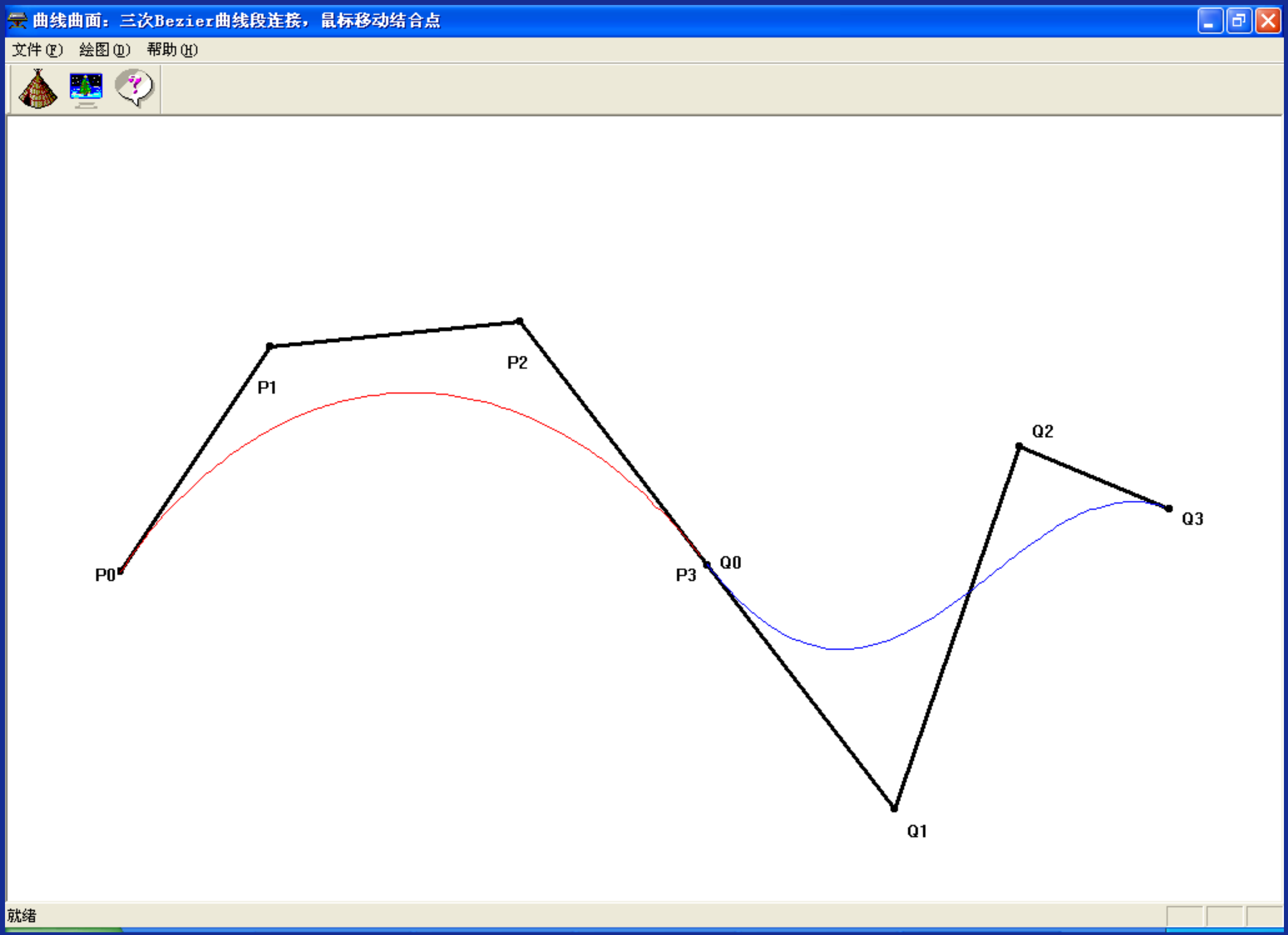
假设两段三次Bezier曲线分别为



$p(t)$



$q(t)$


曲线曲面：三次Bezier曲线段连接，鼠标移动结合点
文件(F) 绘图(D) 帮助(H)
P0
P1
P2
P3
Q0
Q1
Q2
Q3
就绪

- 两段三次Bezier曲线达到G^0连续性的条件是：$P_3 = Q_0$。达到G^1连续性的条件是：P_2、P_3（Q_0）和Q_1三点共线，且P_2和Q_1位于P_3（Q_0）的两侧。

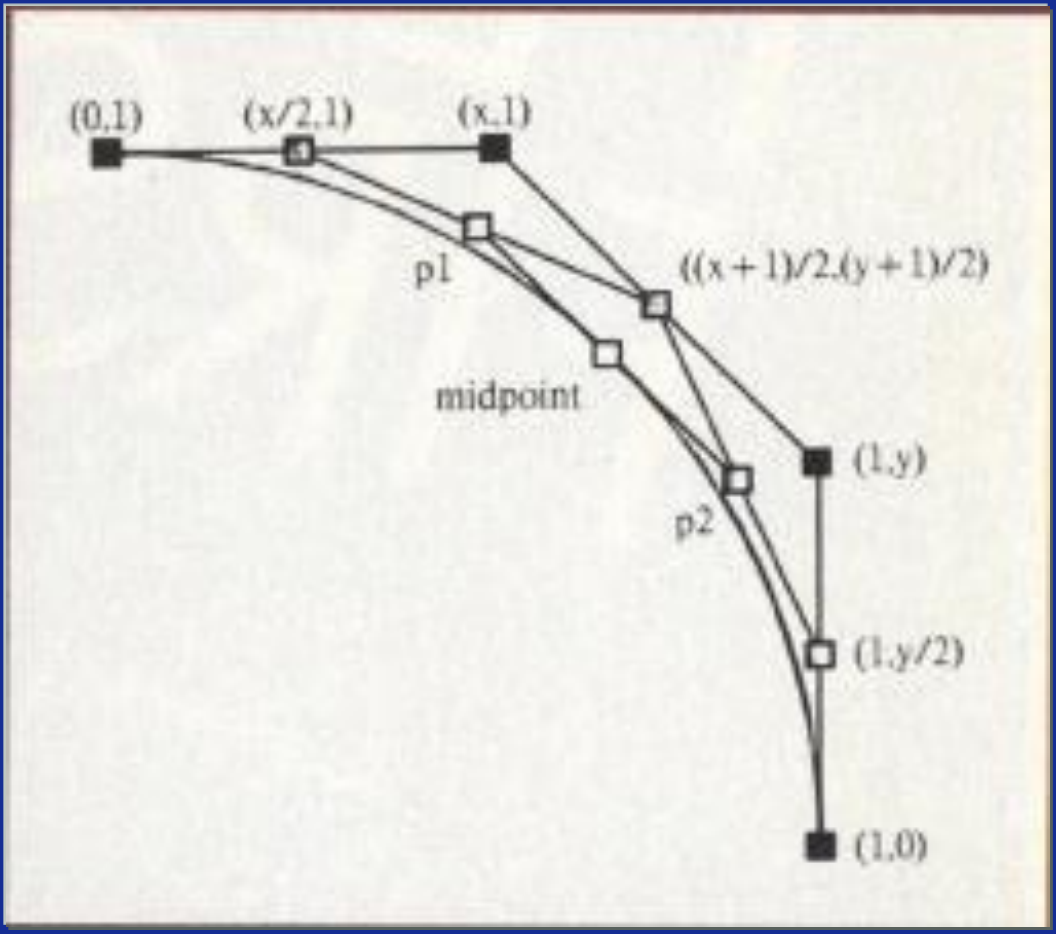
$$p'(1) = 3(P_3 - P_2)$$

$$q'(0) = 3(Q_1 - Q_0)$$

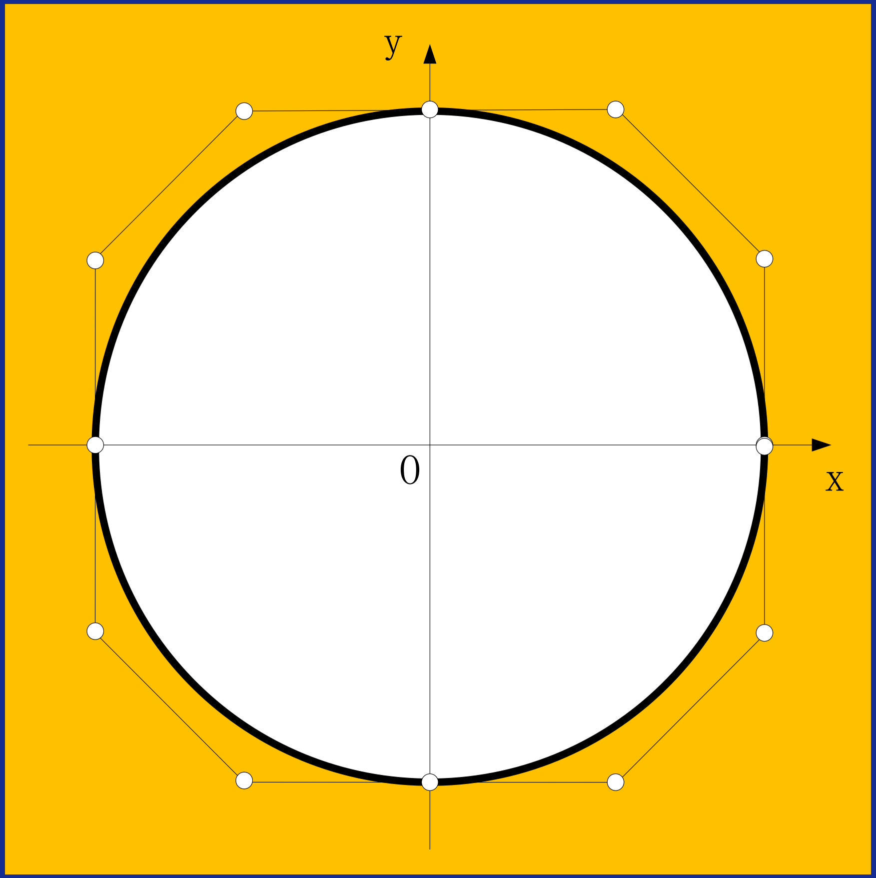
达到G1连续性，有 $$p'(1) = \alpha q'(0)$$

有 $$(P_3 - P_2) = \alpha(Q_1 - Q_0)$$

由于：P3 = Q0，有 $$Q_0 = \frac{P_2 + \alpha Q_1}{1+\alpha}$$



一段三次Bezier曲线模拟1/4圆



圆及其控制多边形
拼接四段三次Bezier曲线绘制圆

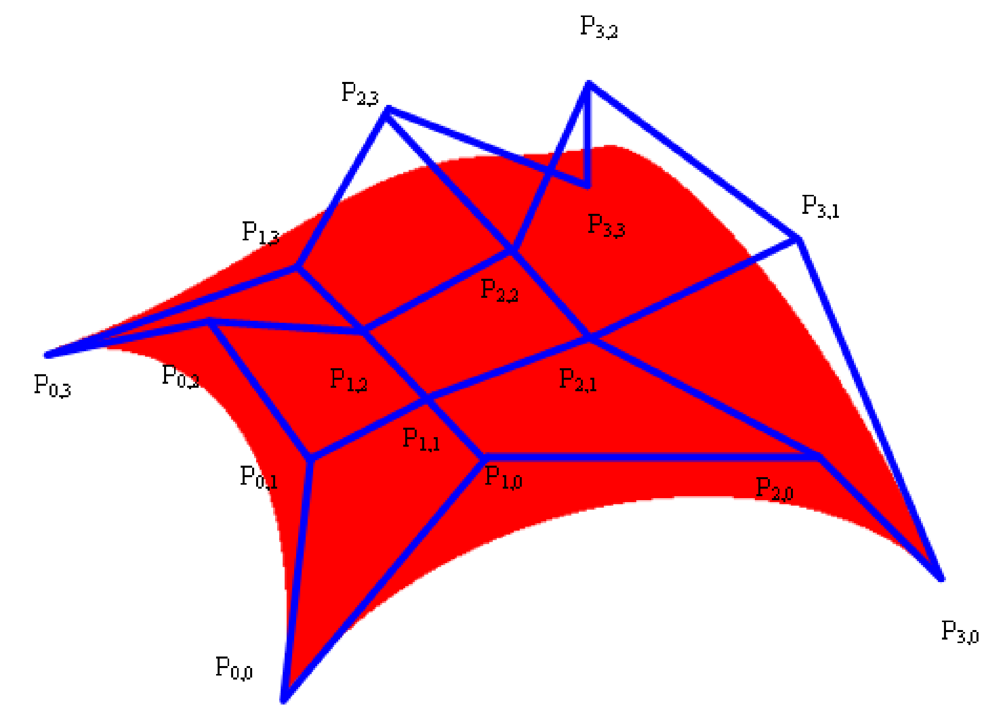
Bezier曲面

- Bezier曲面是由Bezier曲线拓广而来，以两组正交的Bezier曲线控制点构造空间网格来生成曲面。
- m×n次Bezier曲面的定义如下：

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

$(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$

■依次用线段连接点列Pi,j（i＝0，1，…，m；j＝0，1，…，n）中相邻两点所形成的空间网格称为控制网格，当m＝3，n＝3时由4×4＝16个控制点构成控制网格，如图所示，其相应的曲面称为双三次Bezier曲面。



双三次Bezier曲面

- 双三次Bezier曲面定义如下：

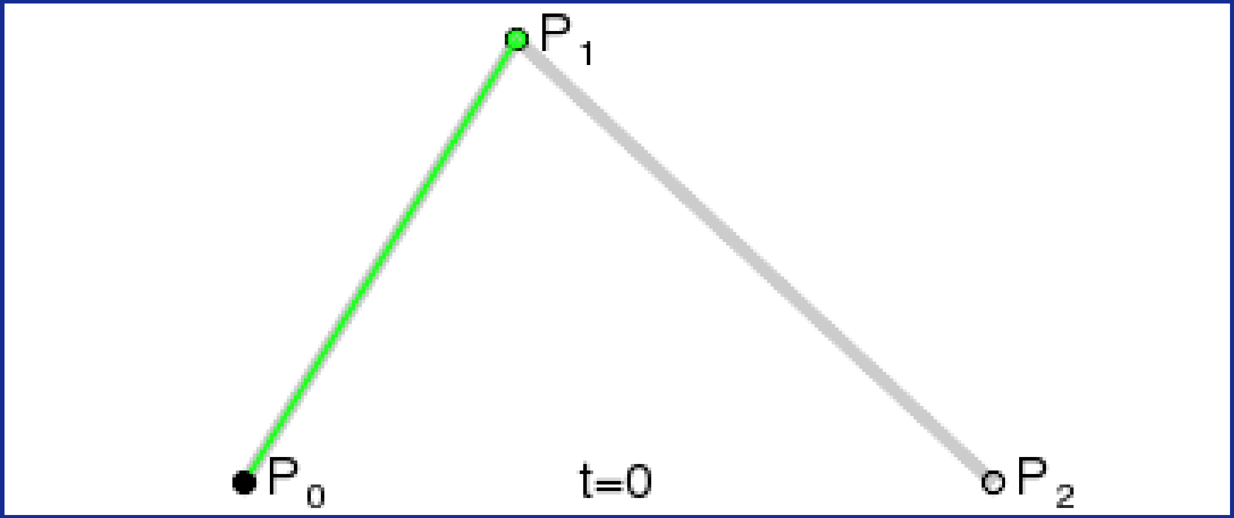
$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}P_{i,j}B_{i,3}(u)B_{j,3}(v)$$

- （u，v）∈〔0，1〕×〔0，1〕

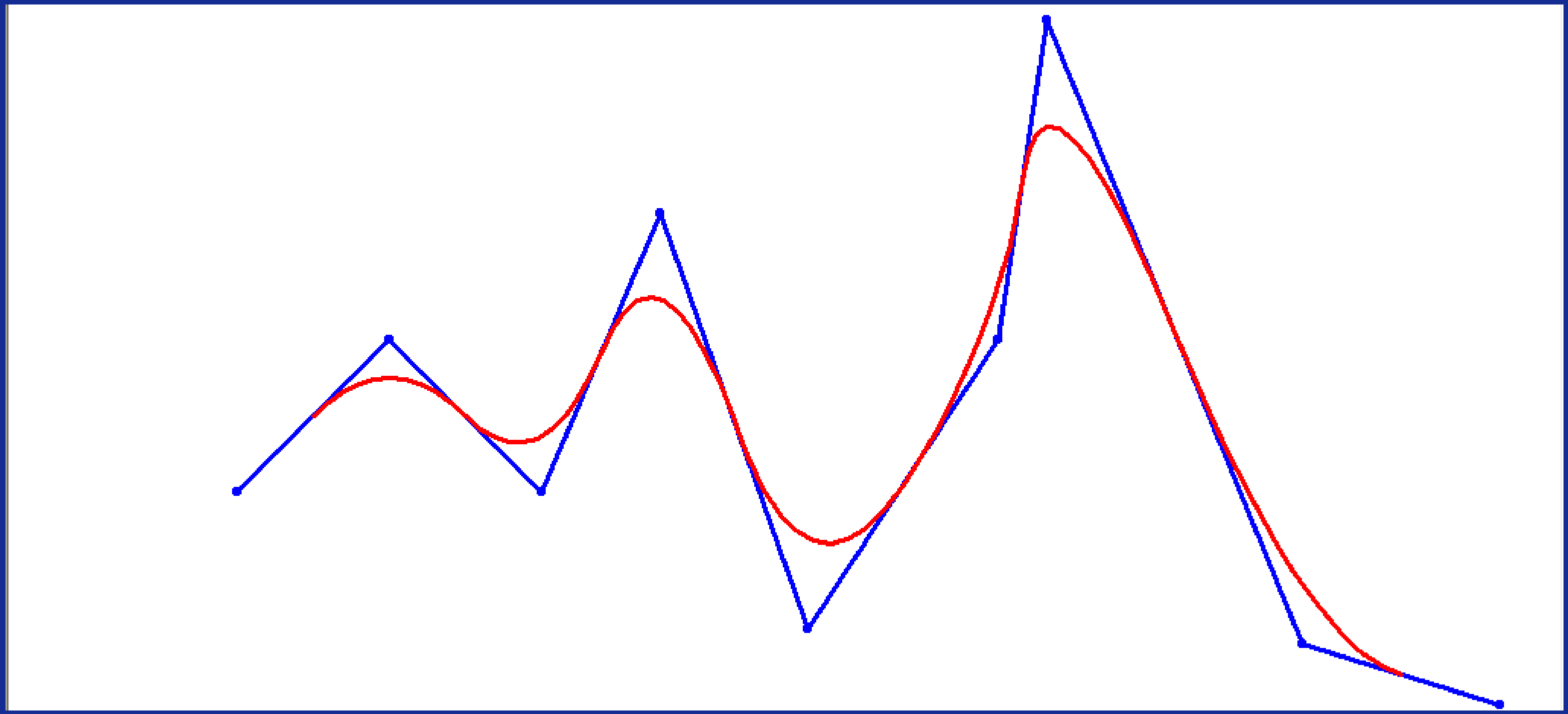
- Bezier曲线虽然有许多优点，但也存在不足：
  - 控制点个数(n+1)决定曲线的次数（n次）；
  - 曲线不能局部修改，修改某一控制点将影响到整条曲线，原因是Bernstein基函数在整个开区间（0，1）内均不为零，所以曲线在开区间内任何一点的值都将受到全部顶点的影响，改变其中某一顶点的位置，将会引起整条曲线的改变。
  - 控制多边形与曲线的逼近程度较差，次数越高，逼进程度越差；

- 为了克服上述问题，Gordon和Riesenfeld于1974年用B样条基函数代替了Bernstein基函数，构造了B样条曲线。
- B样条曲线的次数可根据需要指定，不像Bezier曲线的次数是由控制点的个数来确定
- B样条曲线的突出优点是增加了对曲线的局部修改功能
- B样条曲线比Bezier曲线更贴近控制多边形，曲线更光滑（很容易产生C2连续性）

■二次Bezier曲线是一段抛物线。

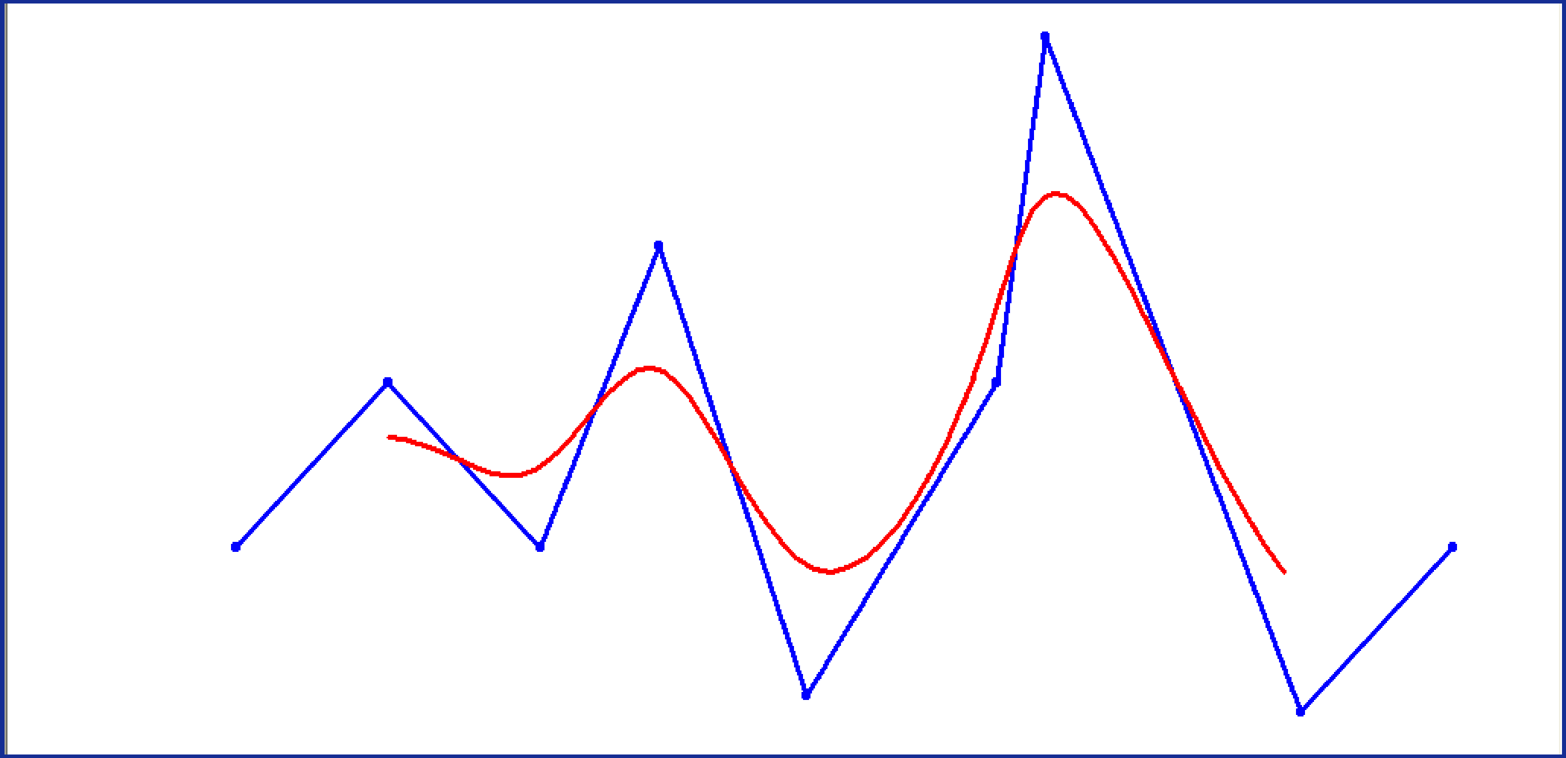


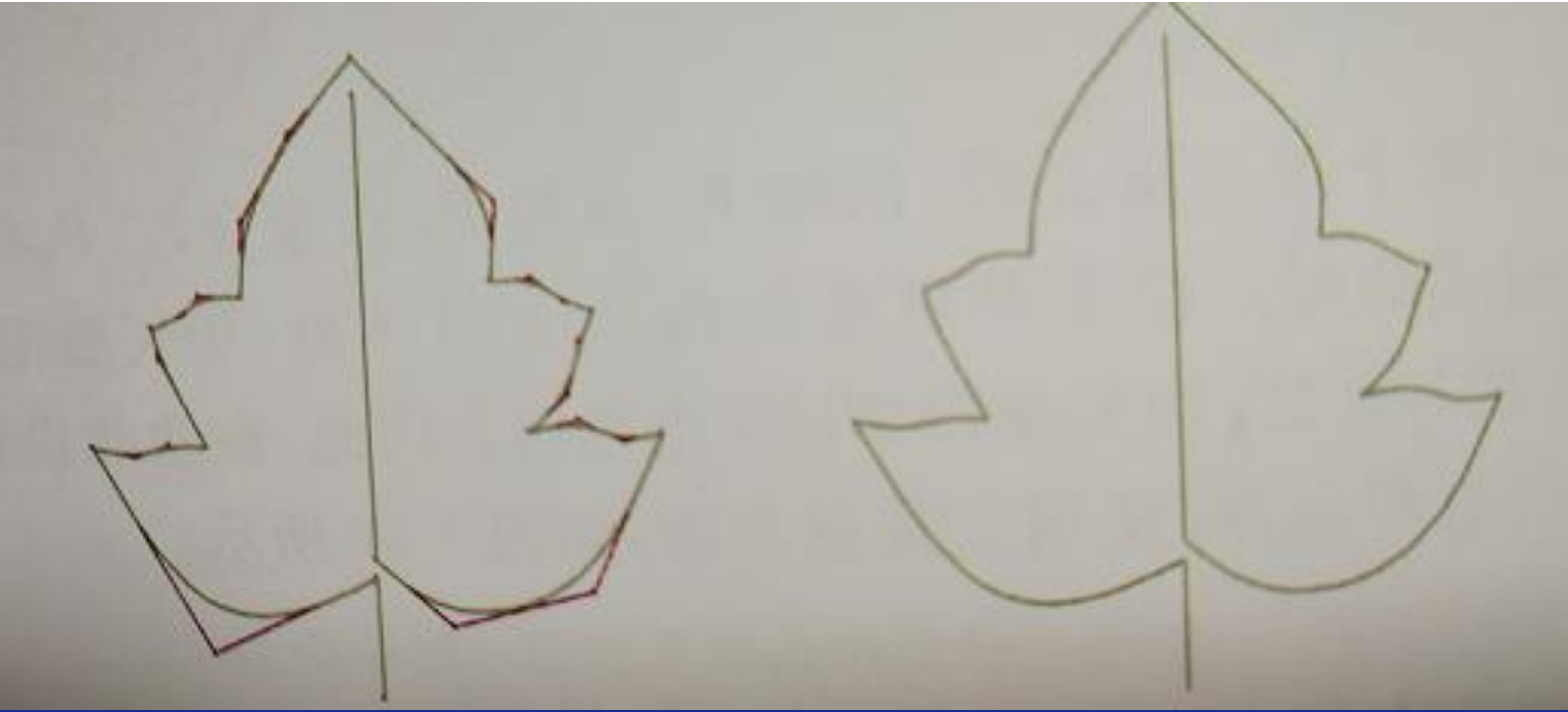
■图示二次（n=2）B样条曲线，由7段曲线组成，需要9个控制点；



同样的控制点

- 图示三次（n＝3）B样条曲线，由6段组成，需要9个控制点。





控制多边形和三次B样条曲线

三次B样条曲线

B样条曲线

- B样条曲线优于Bezier曲线之处：
  - 与控制多边形的外形更接近
  - 局部修改能力
  - 任意形状，包括尖点、直线的曲线
  - 易于拼接
  - 阶次低，与型值点数目无关，计算简便

B样条曲线

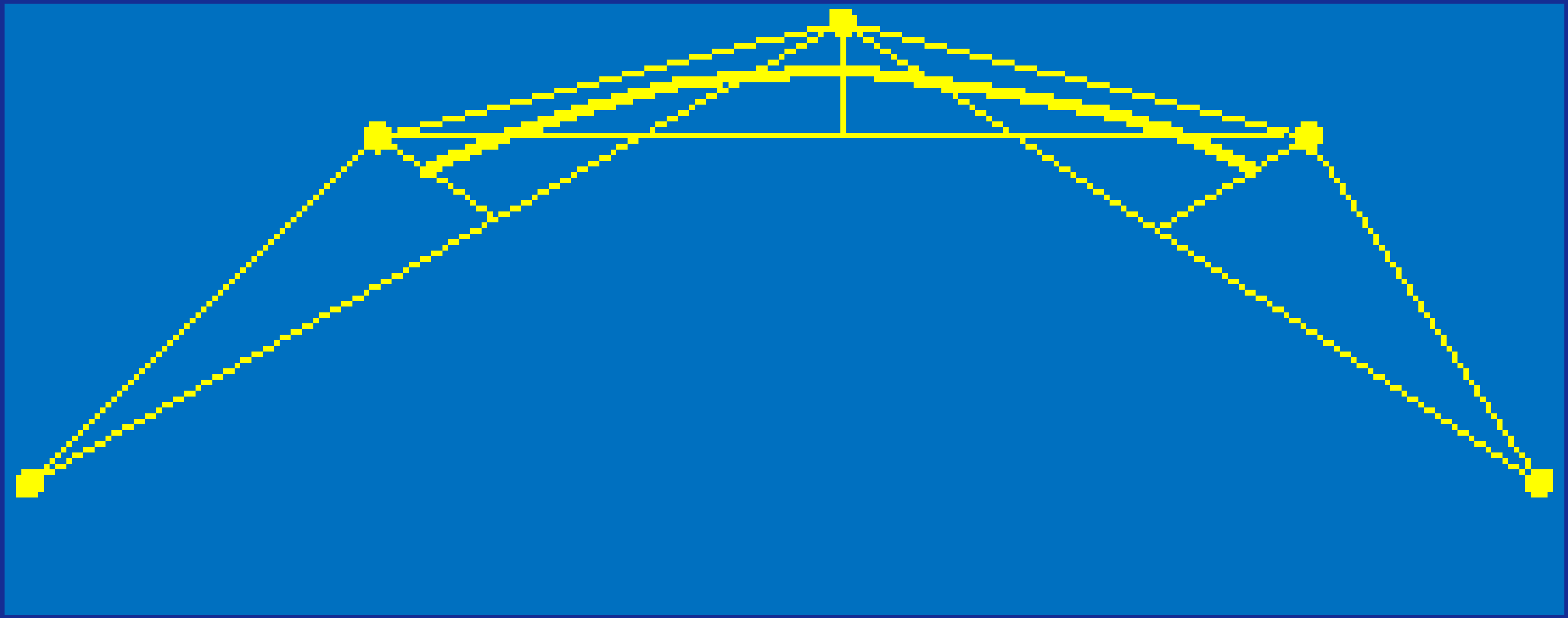
- 若给定m+n+1个控制点，可以构造一条n次B样条曲线，它是由m+1段n次曲线首尾相接而成，而每段曲线则由n+1个顶点所构造。
- n次B样条曲线可以达到n-1阶连续性

B样条曲线

- 矩阵表示B样条曲线是分段构成，所以控制多边形的顶点对曲线的控制灵活而直观，修改某一控制点只引起与控制点相邻近的曲线形状发生变化，远处的曲线形状不受影响

B样条曲线

■均匀B样条曲线



7.4.1B样条曲线定义

■ 给定m+n+1个控制点P_h（h＝0，1，2，…，m+n），n次B样条曲线的第i段曲线（i＝0，1，2，…，m），的参数表达式为：

$$p_{i,n}(t)=\sum_{k=0}^{n}P_{i+k}F_{k,n}(t)$$

$F_{k,n}(t)$ 称为n次B样条基函数，形式为

$$F_{k,n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j C_{n+1}^{j}(t+n-k-j)^n$$

7.4.2二次B样条曲线

- 二次B样条曲线的n＝2，k＝0，1，2，控制多边形有三个控制点P0、P1和P2 ，B样条曲线是二次多项式。

$$F_{k,n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j C_{n+1}^j (t+n-k-j)^n$$

$$F_{0,2}(t)=\frac{1}{2}\left(t^2-2t+1\right)$$

$$F_{1,2}(t)=\frac{1}{2}\left(-2t^2+2t+1\right)$$

$$F_{2,2}(t)=\frac{1}{2}t^2$$

P_0^n

■二次B样条曲线的分段参数表达式为

$$p_{i,2}(t)=\sum_{k=0}^{2}P_{i+k}F_{k,2}(t)=P_i\cdot F_{0,2}(t)+P_{i+1}\cdot F_{1,2}(t)+P_{i+2}\cdot F_{2,2}(t)$$

P_0^n

■当i=0段曲线的矩阵形式

$$p(t)=\frac{1}{2}(t^2 \quad t \quad 1)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

几何性质

■一阶导数

$$p^{'}(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\end{bmatrix}$$

几何性质

- 将t=0、t=1、t=1/2代入前面两式

$$p(0)=\frac{1}{2}\left(P_0+P_1\right)$$

$$p(1)=\frac{1}{2}\left(P_1+P_2\right)$$

$$p^{'}(0)=\left(P_1-P_0\right)$$

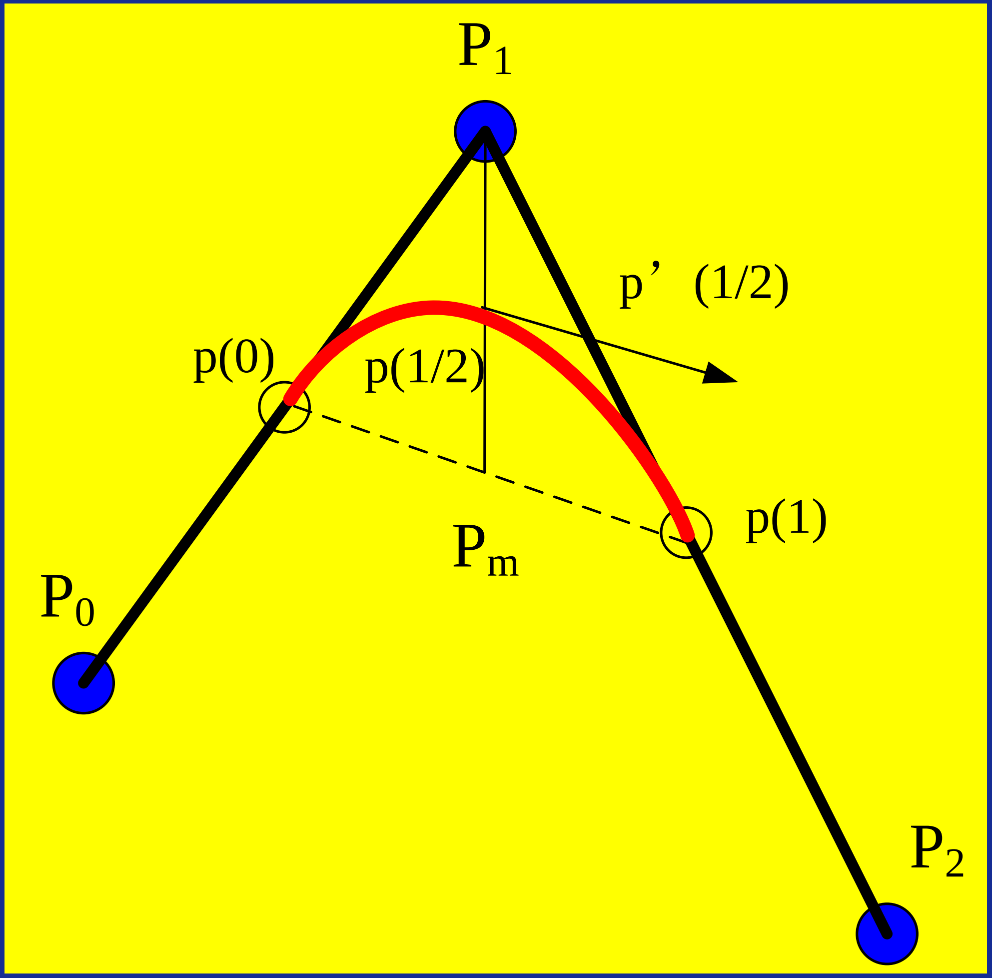
$$p^{'}(1)=\left(P_2-P_1\right)$$

几何性质

■将t=0、t=1、t=1/2代入前面两式

$$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}P_0 + \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{8}P_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[p(0) + p(1)\right] + P_1\right\}$$

$$p^{'}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(P_2 - P_0\right) = p(1) - p(0)$$



P_1
p’ (1/2)
p(0)
p(1/2)
p(1)
P_m
P_0
P_2

几何性质

- 二次B样条曲线的起点p(0)位于P0P1边的中点处，且其切矢量P1－P0沿P0P1边的走向；
- 终点p(1)位于P1P2边的中点处，且其切矢量P2－P1沿P1P2边的走向；
- P(1/2)正是P(0)、P1、P(1)这三点所构成的三角形的中线P1Pm的中点，而且p(1/2)处的切线平行于两个端点的连线p(0) p(1)
- 这样，三个顶点P0P1P2确定一段二次B样条曲线，该段曲线是一段抛物线
- 一般情况下，B样条曲线不经过控制点，曲线起点只与前二个控制点有关，终点只与后二个控制点有关

7.4.3 三次B样条曲线

- 三次B样条曲线的n = 3，k = 0，1，2，3控制多边形有四个控制点P0、P1、P2 、P3，B样条曲线是二次多项式。

$$F_{k,n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j C_{n+1}^j (t+n-k-j)^n$$

$$F_{0,3}(t)=\frac{1}{6}\left(-t^3+3t^2-3t+1\right)$$

$$F_{1,3}(t)=\frac{1}{6}\left(t^3-6t^2+4\right)$$

$$F_{2,3}(t)=\frac{1}{2}\left(-t^3+3t^2+3t+1\right)$$

$$F_{3,3}(t)=\frac{1}{6}t^3$$

P_0^n

■三次B样条曲线的分段参数表达式为

$$p_{i,3}(t)=\sum_{k=0}^{3}P_{i+k}F_{k,3}(t)=P_i g F_{0,3}(t)+P_{i+1}g F_{1,3}(t)$$
$$+P_{i+2}g F_{2,3}(t)+P_{i+2}g F_{3,3}(t)$$

P_0^n

■当i=0段曲线的矩阵形式

$$p(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

几何性质

■一阶导数

$$p'(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^3 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -3 & 1\\ 2 & -4 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}$$

几何性质

■二阶导数

$$p''(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

几何性质

- 令

$$P_m = \frac{1}{2}\left(P_0 + P_1\right)$$

$$P_n = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_3\right)$$

将t=0、t=1代入前面两式

$$p(0) = \frac{1}{3}P_m + \frac{2}{3}P_1$$

$$p(1) = \frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}P_2$$

几何性质

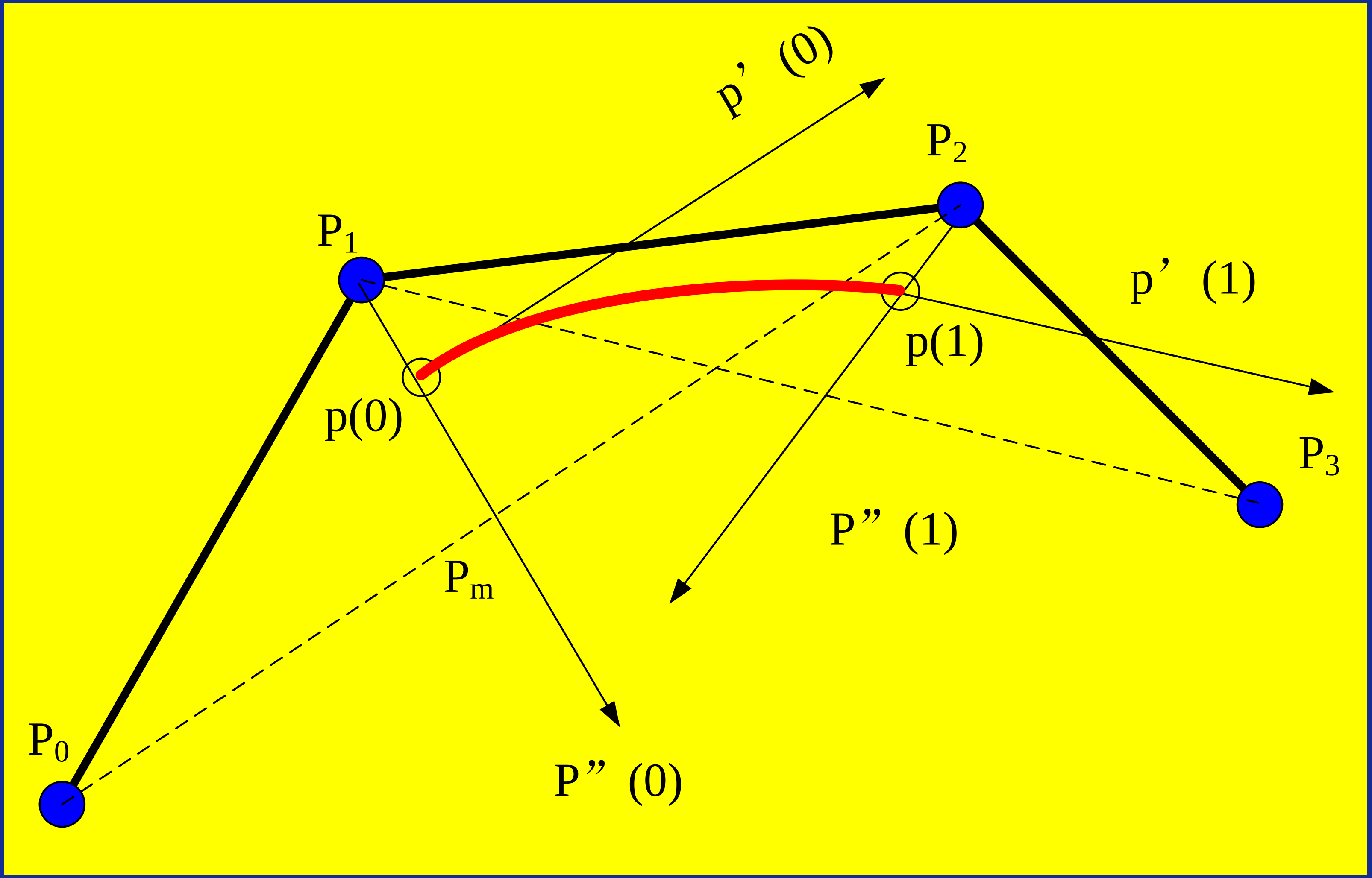
$$p'(0)=\frac{1}{2}\left(P_2-P_0\right)$$

$$p'(1)=\frac{1}{2}\left(P_3-P_1\right)$$

$$p''(0)=2\left(P_m-P_1\right)$$

$$p''(1)=2\left(P_n-P_2\right)$$

三次B样条曲线



三次B样条曲线几何性质

- 曲线起点p(0)位于△ P0P1P2底边P0P2的中线上，且距P1点三分之一处
  - 该点处的切矢量p'(0)平行于△P0P1P2的底边P0P2，且长度为其二分之一。
  - 该点处的二阶导数p"(0) 沿着中线P1Pm方向，长度等于中线的两倍。
- 曲线终点p(1)位于△ P1P2P3底边P1P3的中线上，且距P2点三分之一处
  - 该点处的切矢量p'(1)平行于△P1P2P3的底边P1P3，且长度为其二分之一。
  - 该点处的二阶导数p"(1)沿着中线方向，长度等于中线的两倍。

三次B样条曲线几何性质

- 这样，四个顶点P0,P1,P2 ,P3确定一段三次B样条曲线
- 一般情况下，B样条曲线不经过控制点，曲线起点只与前三个控制点有关，终点只与后三个控制点有关
- 实际上，B样条曲线都具有这种控制点的邻近影响性，这正是B样条曲线局部可调整性好的原因
- 。

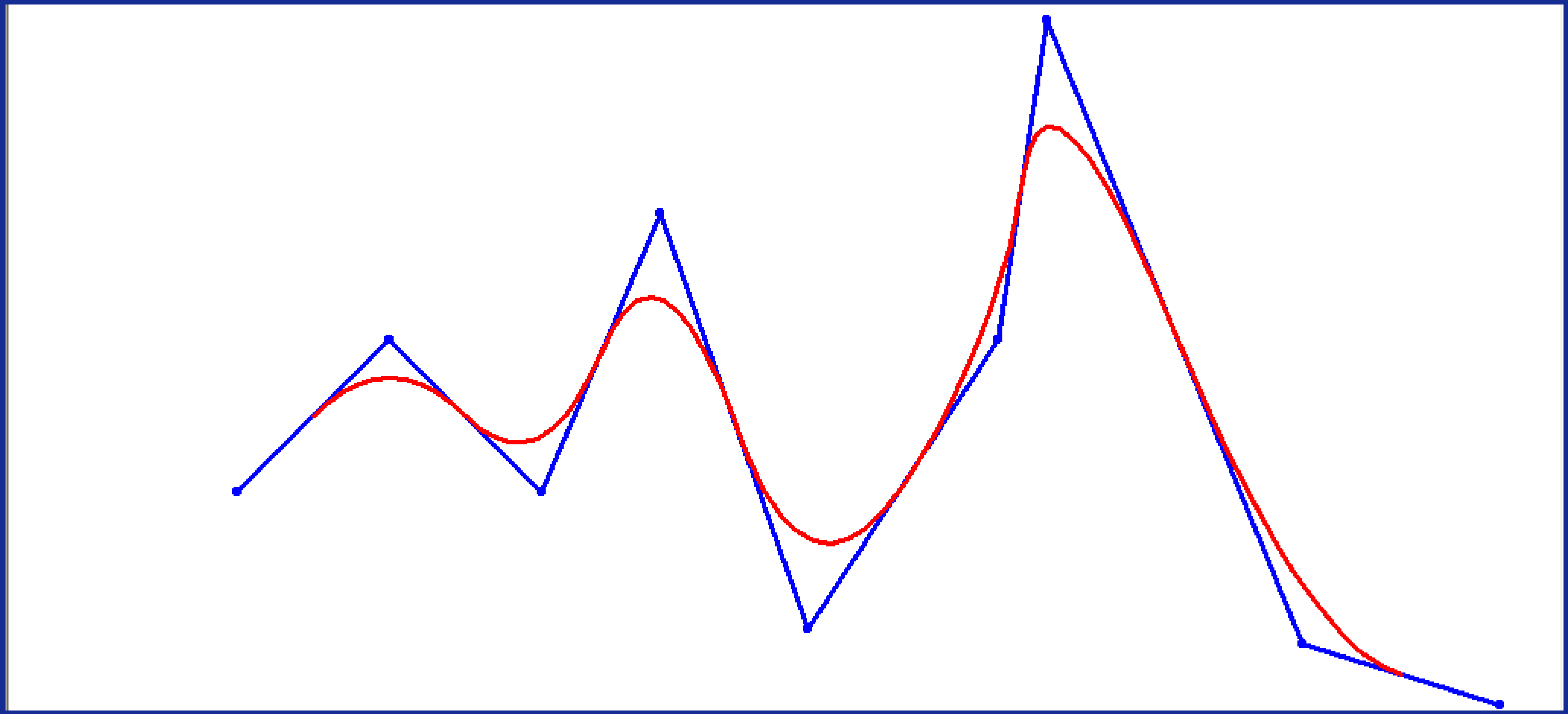
B样条曲线的性质

■连续性

- B样条曲线不同于Bezier曲线整体生成，它是分段生成的，B样条曲线各段之间自然连接

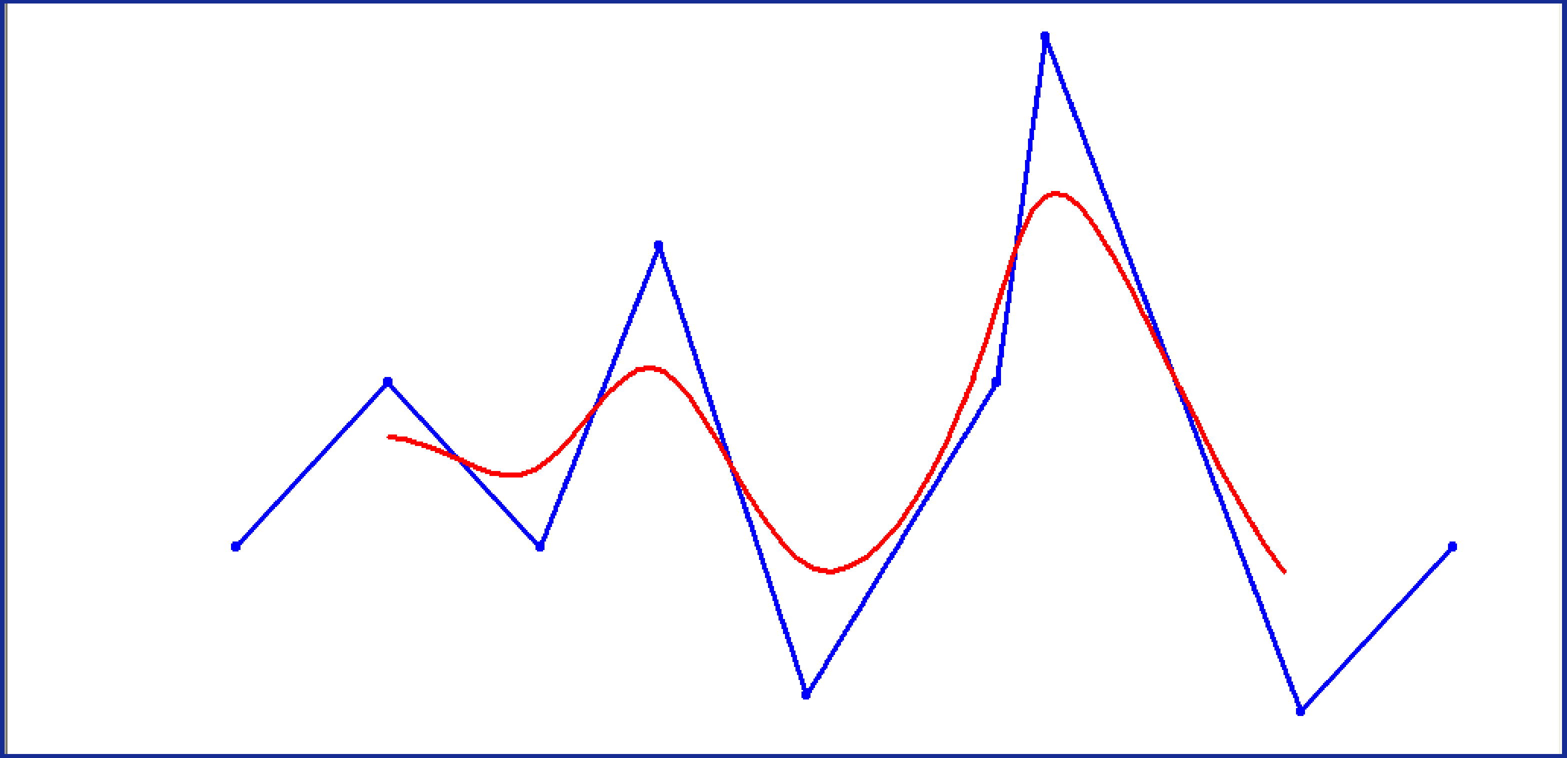
连续性

- 图示二次（n＝2）B样条曲线，由7段曲线组成，需要9个控制点；

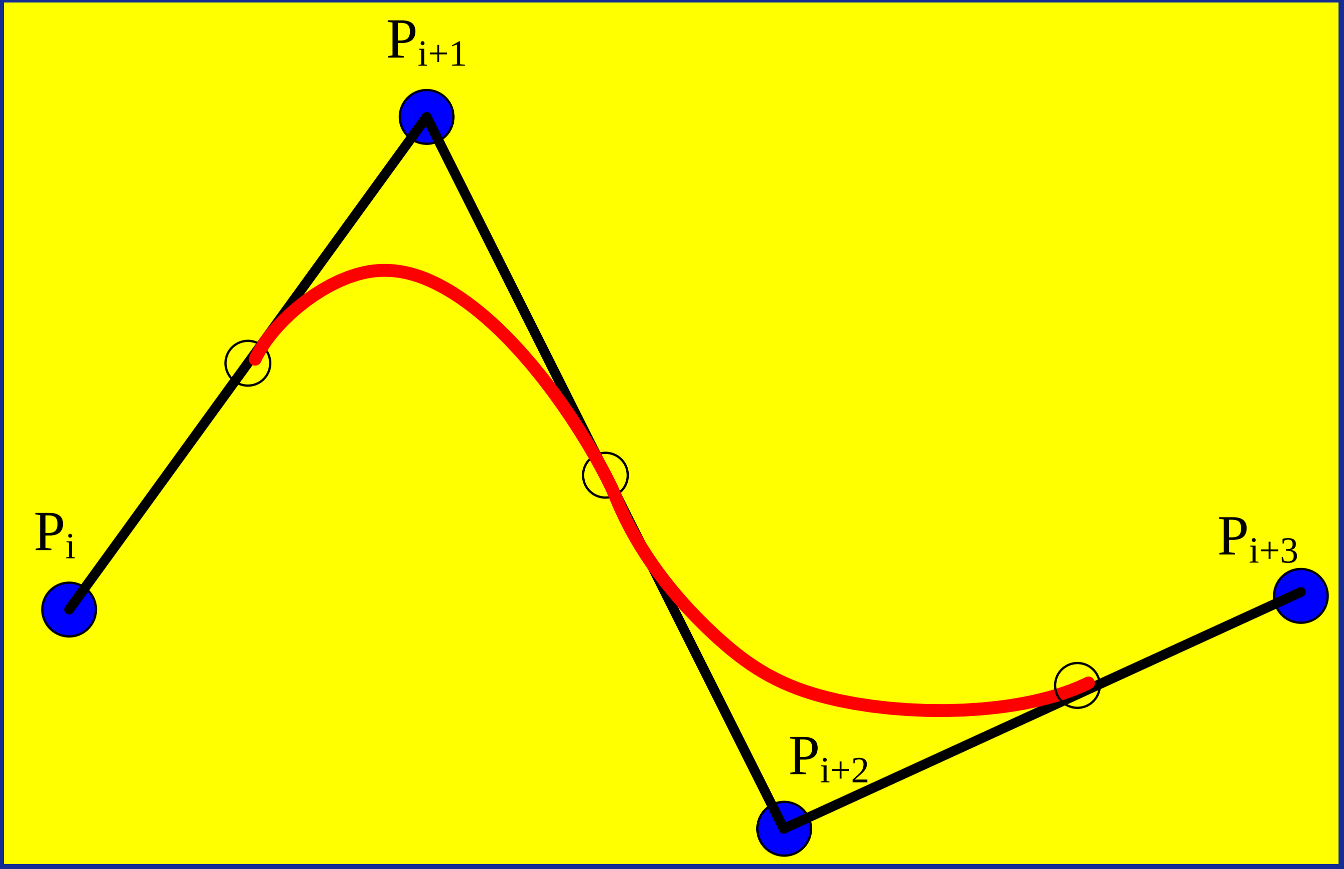


连续性

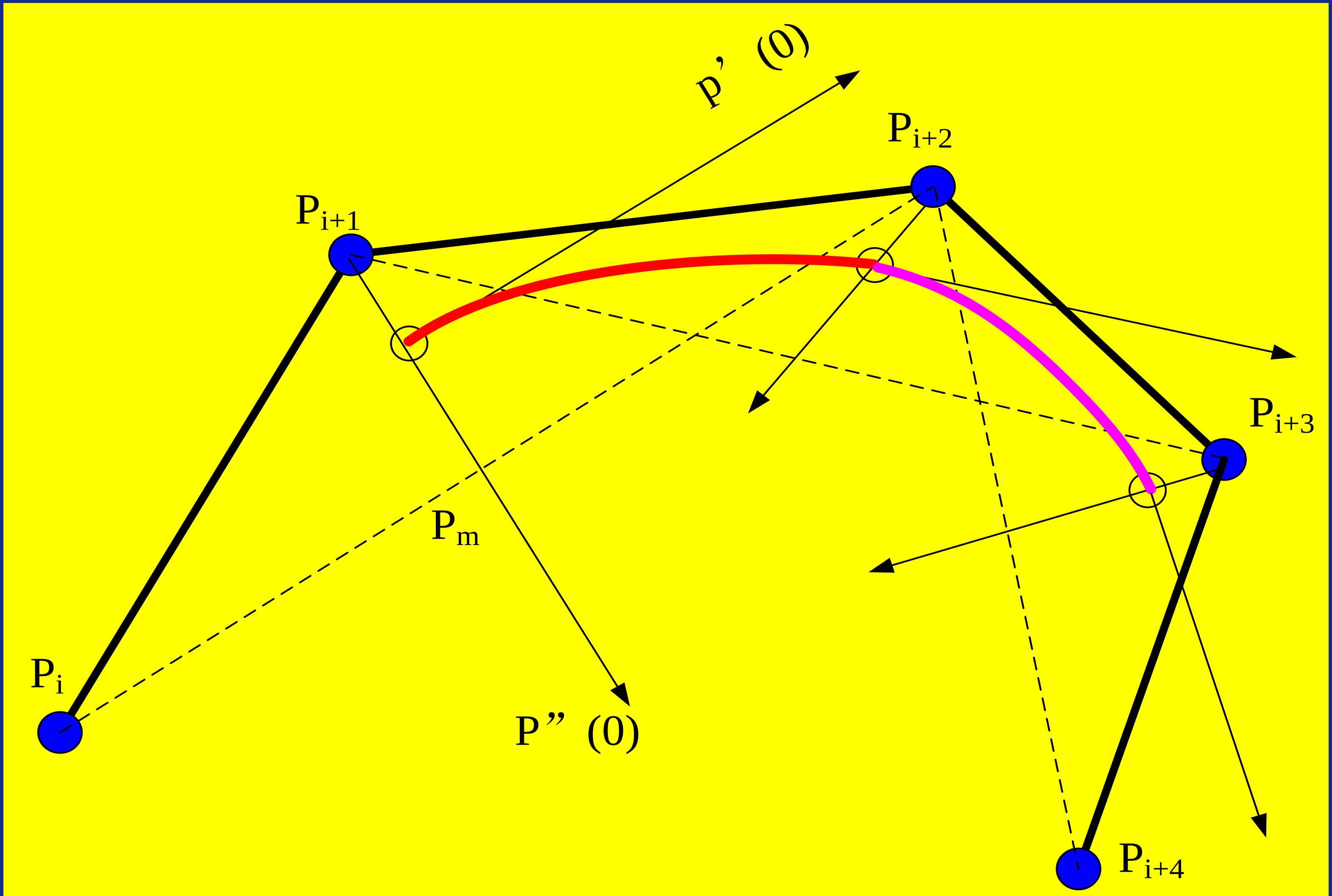
- 图示三次（n＝3）B样条曲线，由6段组成，需要9个控制点。



二次B样条曲线的连续性



三次B样条曲线的连续性

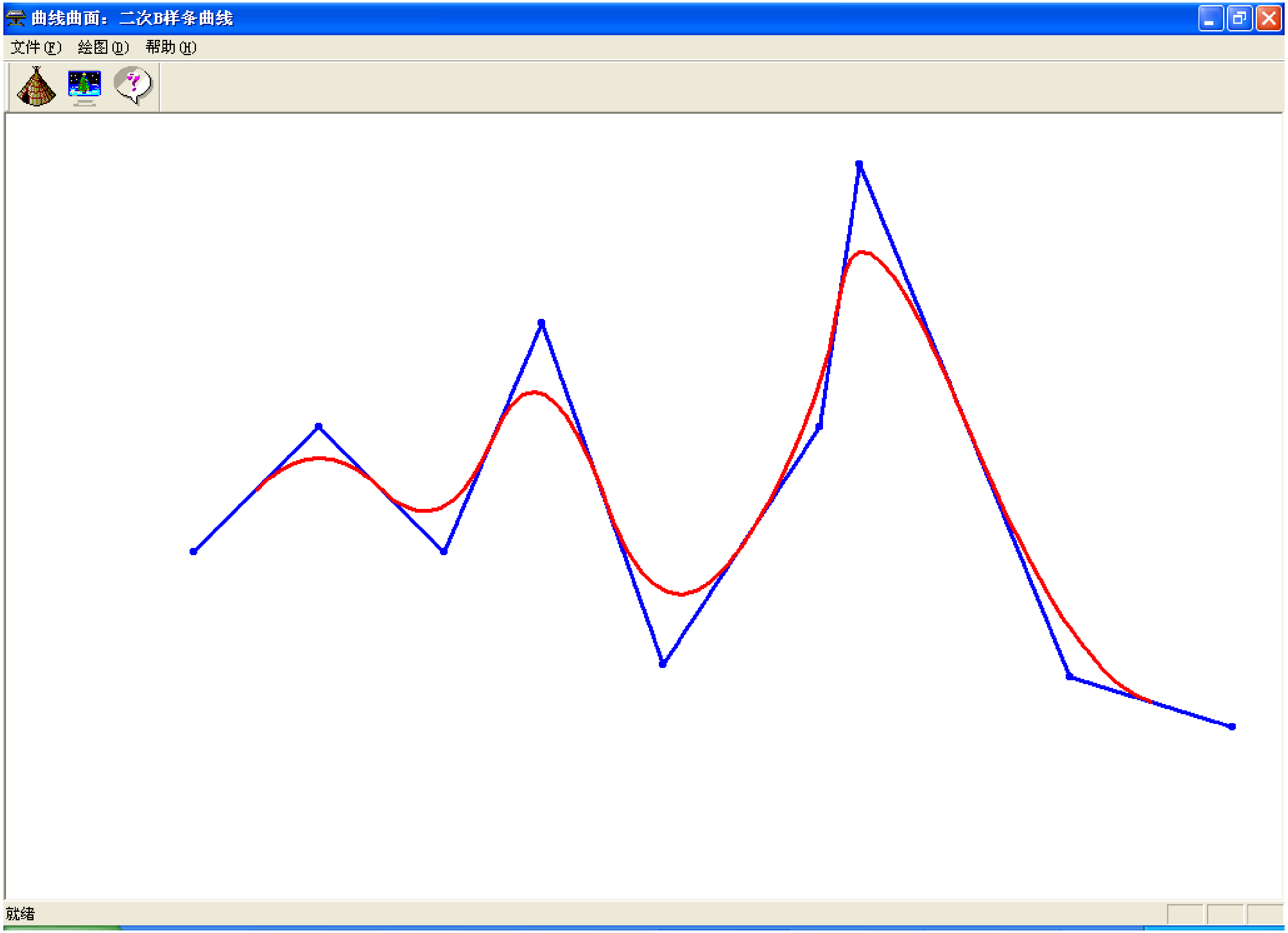


B样条曲线的性质

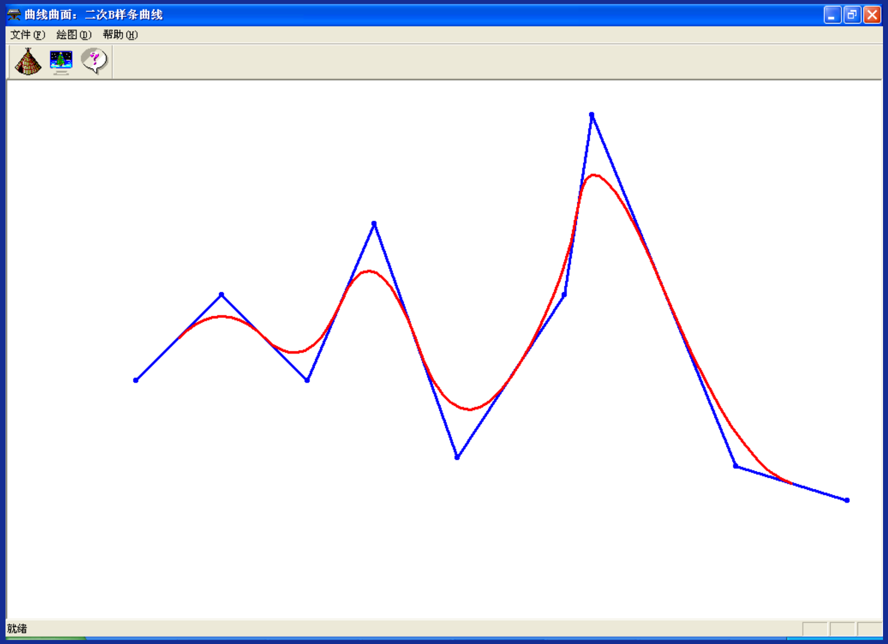
■局部性质

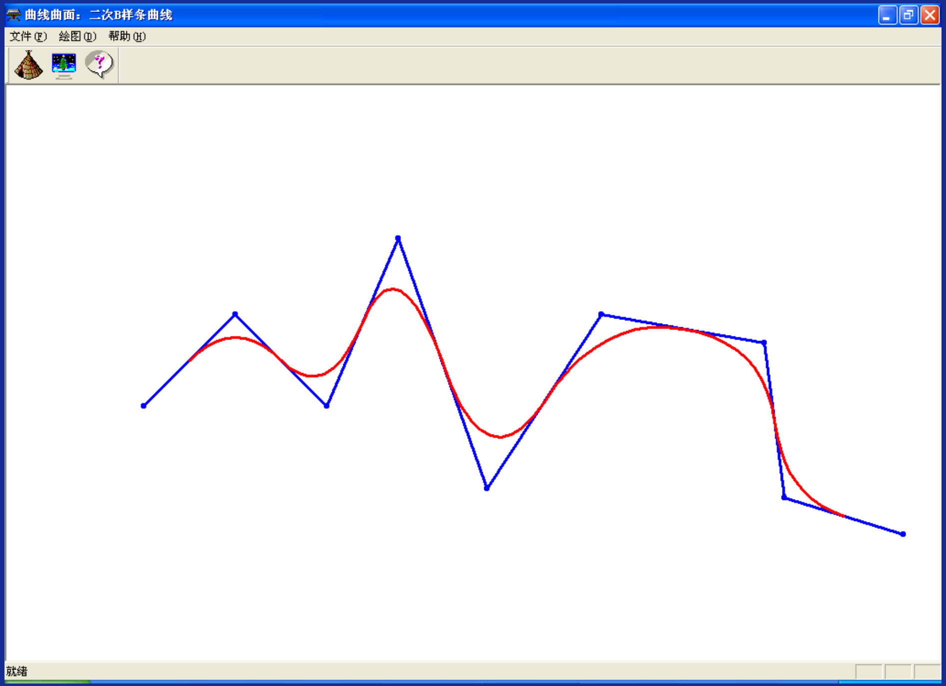
- 在B样条曲线中，每段B样条曲线受n+1个控制点影响，改变一个控制点的位置，最多影响n+1个曲线段，其它部分曲线形状保持不变。
- 在工程设计中经常需要对曲线进行局部修改，B样条曲线能很好地满足这一要求，这就是B样条曲线受欢迎的原因之一。

二次B样条曲线局部修改顶点



二次B样条曲线局部修改顶点





B样条曲面的定义

- B样条曲面是B样条曲线的二维推广，给定(m + 1)×(n+1)个控制点Pij(i=0,1,…,m；j=0,1,…,n)，m×n次B样条曲面其表达式为：

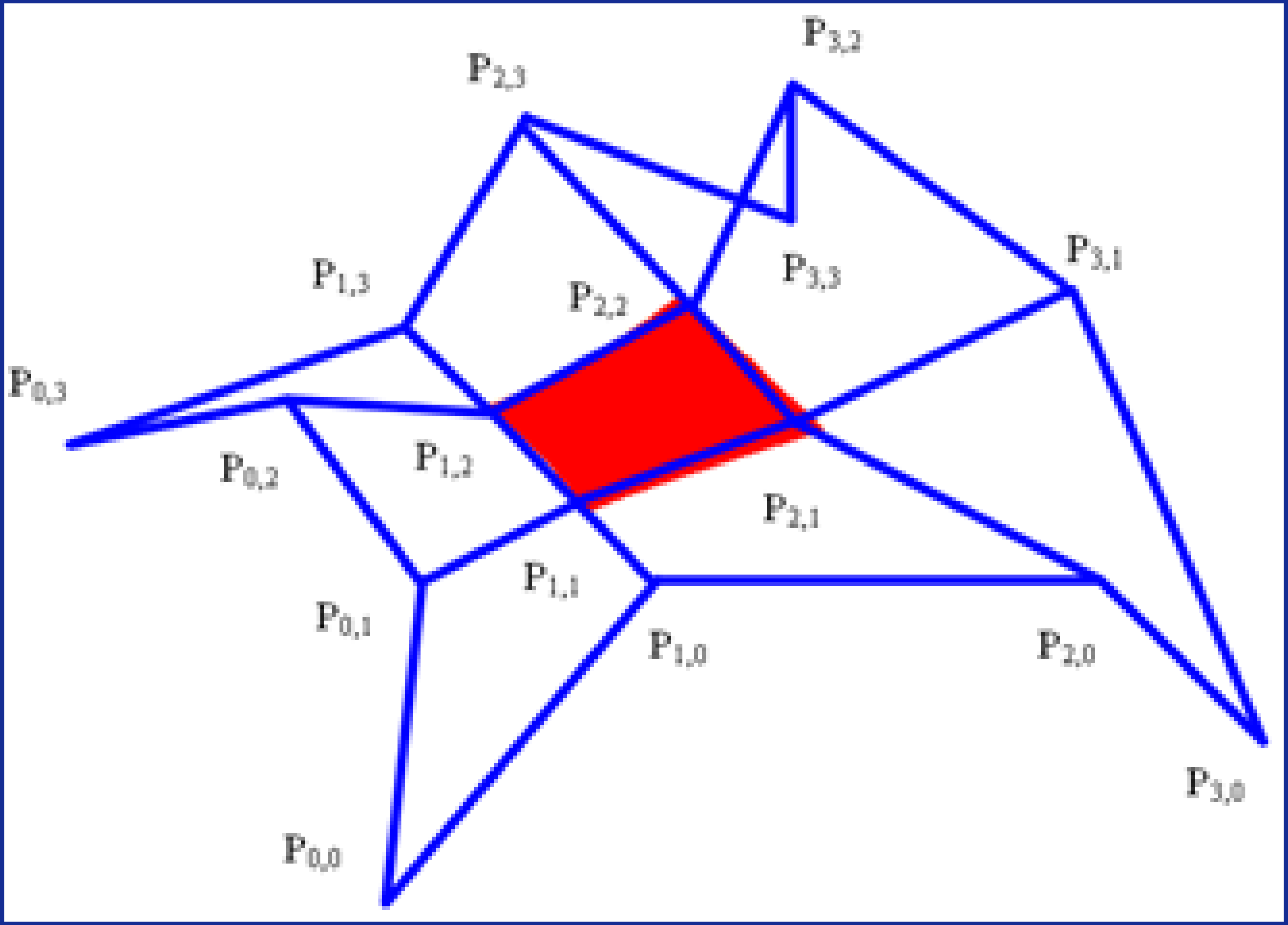
$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}F_{i,m}(u)F_{j,n}(v)$$

双三次B样条曲面的定义

■展开式

$$p(u,v)=\begin{bmatrix}F_{0,3}(u) & F_{1,3}(u) & F_{2,3}(u) & F_{3,3}(u)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03}\\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{0,3}(v)\\ F_{1,3}(v)\\ F_{2,3}(v)\\ F_{3,3}(v)\end{bmatrix}$$

- 双三次B样条曲面是由三次B样条曲线交织而成
- 曲面生成时可以通过固定u, 变化v得到一簇三次B样条曲线；固定v，变化u得到另一簇三次B样条曲线。
- 与三次B样条曲线相似，双三次B样条曲面一般情况下不通过控制网格的任何一个顶点


$P_{3,2}$
$P_{2,3}$
$P_{3,1}$
$P_{1,3}$
$P_{3,3}$
$P_{2,2}$
$P_{0,3}$
$P_{0,2}$
$P_{1,2}$
$P_{2,1}$
$P_{1,1}$
$P_{0,1}$
$P_{1,0}$
$P_{2,0}$
$P_{3,0}$
$P_{0,0}$

双三次B样条曲面的连续性

- 双三次B样条曲面的优点是极为自然地解决了曲面片之间地连接问题

- 例如，只要将控制网格沿某一个方向延伸一排，就可以决定另一个曲面片，此时曲面片理所当然地保证二者之间达到了C2连续性。

B样条曲线和Bezier曲线的区别

- 局部控制：Bernstein基函数是一个整体函数，而B样条基函数一个分段函数，所以B样条曲线可以进行局部控制点调整
- 连续性：
  - Bezier曲线曲面的阶次与控制多边形的顶点数有关, 如果控制多边形顶点数超过四个时，两段三次Bezier曲线之间连接时就存在拼接的问题
  - 而B样条曲线曲面可以自由地扩展到多个顶点，始终保持阶次不变，分段曲线或曲面实现了自然连接
- 端点

本章小结

- 曲线曲面的数学描述，采用参数方程表示曲线曲面的优势
- 自由曲线的一般参数方程表示、矢量表示、矩阵形式
- Bezier曲线定义、性质、绘图方法
  - 根据控制顶点求型值点；
- B样条曲线、曲面定义、几何性质

作业

- 给出三次Bezier曲线的定义和矩阵表达式和二次B样条曲线的定义、矩阵表达式和几何性质，并给出两类曲线的特点