第一章：行列式

P1 1.1 二阶三阶行列式

二阶行列式：2 行 2 列 4 个元素.

如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$；$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，其中 a_{ij}，i 为行标，j 为列标. 从左上角到右下角的线叫主对角线，从右上角到左下角的线叫次对角线.

例 1. $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2\times1$.

例 2. $\begin{vmatrix} 爱 & 辈 \\ 子 & 你 \end{vmatrix} = 爱你-辈子$.

例 3. $\begin{vmatrix} 宋 & 帅 \\ 哥 & 浩 \end{vmatrix} = 宋浩-帅哥$.

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 4\times8\times3 - 3\times5\times7 - 2\times4\times9 - 1\times6\times8.$$

（Ps：在三阶行列式的计算过程中，可将第一列与第二列写在右边，这样便是三个主对角减去三个次对角.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 4\times8\times3 - 3\times5\times7 - 2\times4\times9 - 1\times6\times8.）$$

例 1. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\times\lambda\times1 + 1\times1\times0 + 1\times0\times0 - 0\times\lambda\times0 - 1\times1\times1 - 1\times0\times\lambda$.

排列：由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组叫 n 级排列.

如：123 132 213 231 312 321 为 3 级排列；3145 不是排列，因为没有 2，排列的中间不能缺数.

n 级排列：$n(n-1)\cdots3\times2\times1 = n!$

逆序：大数排在小数前面.
逆序数：逆序的总数. 如果逆序数

如：$N\left(4213\right)=3+1=4$.

如果逆序数是偶数叫偶排列；如果逆序数是奇数叫奇排列.

例 1. $N\left(123\cdots n\right)=0$ 称为标准排列（或自然排列）.

例 2. $N\left(n\left(n-1\right)\cdots 321\right)=n-1+n-2+\cdots+2+1=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$.

例 3. $N\left(54123\right)=4+3+0+0=7$.

数逆序数：
①从第一个开始，数后面有几个比它小的；
②切记顺序不能乱来.

对换：交换一个排列中的两个数.

如：将例 3 中的 12 进行交换，$N\left(54213\right)=4+3+1+0=8$.

我们发现将一个奇排列做一次对换会变成偶排列，同理原来是偶排列做一次对换会变成奇排列. 因此做一次对换，奇偶性改变；做偶数次对换，奇偶性不变.

定理：在 n 级排列中，奇排列和偶排列各占 $\dfrac{n!}{2}$.

P2 1.1 n阶行列式

n阶行列式：第 1 种定义（按行展开）
以三阶行列式为例，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

行标取标准排列，列标$123\ \ 231\ \ 312\ \ 321\ \ 213\ \ 132$取排列的所有可能，其逆序数分别为$0\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 1$，从不同行不同列取出 3 个元素相乘，符号由列标排列的奇偶性决定，偶排列符号为正，奇排列符号为负.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$ 共有 $n!$ 项.

$D = |a_{ij}|$，主对角线与次对角线同二阶行列式. 特别地：一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$，如：

$|8| = 8$，$|-1| = -1$，注意行列式与绝对值的区别.

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1234)} 1\times1\times0\times9 + (-1)^{N(1243)} 1\times1\times5\times0$

$+(-1)^{N(1324)} 1\times0\times2\times9\cdots = 1\times1\times0\times9 - 1\times1\times5\times0 - 1\times0\times2\times9\cdots.$

例 2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(2341)} 2\times3\times4\times1 = -24$，有 0 的地方结果为零.

下三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，结果为主对角线元素相乘.

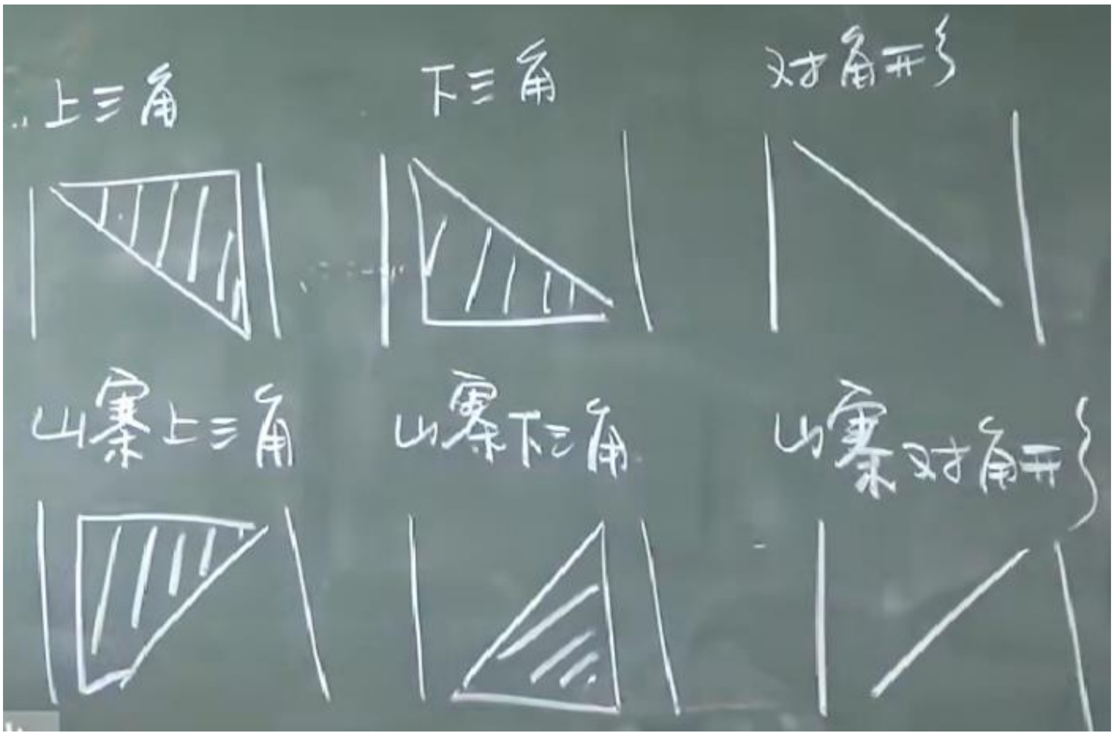
上三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，结果与上三角行列式一样.

对角线行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，空白区域为零.

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 321)} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

小结：正宗的是主对角线相乘，山寨的是次对角线相乘且符号为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.



n阶行列式:第 2 种定义(按列展开):列标取自然排列,行标取排列的所有可能,从不同行不同列取出n个元素相乘,符号由行标排列的奇偶性决定,偶排列符号为正,奇排列符号为负.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

(极少考到)n阶行列式:第 3 种定义(既不按行也不按列):

$$\sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

例 1. 讨论$\sum (-1)^{N(i21m)+N(1k32)} a_{i1} a_{2k} a_{13} a_{m2}$的符号.

解:当$k=4, i=3, m=4$时,$N(3214)+N(1432)=6$为正;

当$k=4, i=4, m=3$时,$N(4213)+N(1432)=7$为负.

因为进行了一次对换,结果肯定为一正一负.

P3 1.2 行列式的性质

转置：把原来的行作成列，记作 D^T.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\8&8&8\end{vmatrix},\quad D^T=\begin{vmatrix}1&1&8\\2&1&8\\3&1&8\end{vmatrix},\quad \left(D^T\right)^T=D.$$

性质①：$D^T=D$，对行成立的性质，对列也成立.（可根据 n 阶行列式的前两种定义发现，一个取行标，一个取列标，转置后值不变）

如：$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&6\\2&8&8&8\\9&9&9&3\end{vmatrix}$，$D^T=\begin{vmatrix}1&1&2&9\\2&1&8&9\\3&1&8&9\\4&6&8&3\end{vmatrix}$.

性质②：两行互换，行列式的值变号.（两行互换相当于每一项做了一次对换，符号改变）

如：$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix}9&10&11&12\\5&6&7&8\\1&2&3&4\\13&14&15&16\end{vmatrix}=-D$.

推论（性质③）：两行（列）相等，$D=0$.

如：$D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&0&0&0\\2&3&4&5\\8&8&8&1\end{vmatrix}$，交换第一、三行发现行列式不变，得 $D=-D$，$D=0$.

性质④：某一行都乘以 k，等于用 k 乘以 D.

如：$\begin{vmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$.

推论：行列式某一行有公因子 k，k 可以提到外面去；行列式所有元素均有公因子 k，k 往外提 n 次.

如：$\begin{vmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

性质⑤：行列式两行对应成比例，则 $D=0$.

如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

推论：如果行列式某一行全为 0，则 $D=0$.

例 1. 判断对错：若 $D=0$，则必可知“两行相等”“两行对应成比例”“某一行全为 0”这三条件之一成立.（×）

性质⑥：行列式某一行的所有元素是两项之和，则该行列式可以表示成两个行列式相加.（是和的那一项分开，其余行保持不变）

如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7+8 & 2+3 & 9+10 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

★★★性质⑦：行列式中，某一行乘以一个数，加到另一行上去，行列式的值不变.

如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ 第一行乘以 5 加到第二行得：

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+5 & 1+10 & 0+15 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ 后面这个行列式第一、二行对应成比例结果为 0.

例 1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\2&3&10&0\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}$ 的值.

解：一般凑成上三角行列式.

$\times(-2)$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\2&3&10&0\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&3&5&18\\0&0&15&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\0&0&15&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\0&0&0&-\dfrac{43}{7}\end{vmatrix}$$

$=215$.

计算行列式的一般步骤（凑上三角行列式，以四阶行列式为例）：

①先处理第 1 列，根据 a_{11} 把 a_{21} , a_{31} , a_{41} 消成 0；

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

②再处理第 2 列，根据 a_{22} 把 a_{32} , a_{42} 消成 0；

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

③最后处理第 3 列，根据 a_{33} 把 a_{43} 消成 0；

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{vmatrix}$$

④结果即为主对角线相乘.

P4 1.3 行列式按行展开

余子式（剩余、子集、行列式）：元素所在这一行这一列不要，剩余的部分位置不变形成的行列式，记作 M_{ij}.

如：$D=\begin{vmatrix}1&1&0&3\\1&1&1&1\\2&2&3&4\\5&5&6&6\end{vmatrix}$，$M_{32}=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$，$M_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&3\\5&5&6\end{vmatrix}$.

代数余子式：记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

如：$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$.

定理（按行（列）展开）：$D=\sum$某行元素$\times$自己的代数余子式.

按某行展开：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，其中 a_{i1} 表示某一行的元素，A_{i1} 表示该元素的代数余子式.

按某列展开：$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$，其中 a_{1j} 表示某一列的元素，A_{1j} 表示该元素的代数余子式.

如：$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}$按第一行展开得：

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&5\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}.$$

按第二行展开得：$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}$.

我们发现，将行列式按行（列）展开后，阶数降低并且尽可能找 0 多的行（列）计算会比较方便.

定理（异乘变零）：某行元素与另一行的代数余子式乘积之和$=0$（类似于原行列式有两行元素相同，故结果为 0）

如：$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$按第一行展开得：

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 9\times A_{11} + 9\times A_{12} + 9\times A_{13} + 10\times A_{14} = 0$$（见性质③）.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$该行列式的第四行元素与第一行的代数余子式乘积之和即为上面行列式按第一行展开，故异乘变零.

拉普拉斯展开定理：在n阶行列式中，取定k行，由k行元素组成的所有k阶子式与其代数余子式乘积之和$=D$.

k阶子式

如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$，相交部分的$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$称为二阶子式；$\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$称为余子式；

$(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$称为代数余子式，次数第一行+第二行+第一列+第二列.

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

取定前两行，任取两列只有第一、二列不为零.

（同阶）行列式相乘：

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. 第一行各元素与第一列各元素分别相乘再相加放

在 a_{11}（第一行第一列），第一行各元素与第二列各元素分别相乘再相加放在 a_{12}（第一行第二列）…以此类推.

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

如果有不同阶的行列式相乘，可将两个行列式的结果分别计算出来，再相乘.

P5 1.4 行列式的计算（一）

（1）计算纯数字的行列式，一般化成上三角行列式.

例 1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

例 2. 计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解：a_{11}是 0 时：

方法①第一行与第二行交换，前面加负号$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

方法②第二行加到第一行上去，$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 11 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

例 3. 计算行列式$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解：a_{11}数字较大时，与数字小的那一行进行交换$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

（2）将原行列式转化为一个新的行列式.

例 4. 已知行列式$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，求$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

解：余子式化成代数余子式并利用按行展开定理的逆运算.

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=(-1)(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}$$

$$=(-1)A_{41}+A_{42}+(-1)A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\3&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\3&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\times(12-20+0)=-56.$$

（3）每一行元素相同，但是排列顺序不同.

例 5. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解：可以通过制造行和：①将除第一列以外的其他列，都加到第一列上；②提取第一列的公因子；③将第一列乘以 $(-a)$ 加到其他列上去，构成了下三角行列式.

$$\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\overset{①}{=}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\overset{②}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\overset{③}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x-a&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$\times(-a)$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

P6 1.4 行列式的计算(二)

(4)加边法:加一行,加一列.(为什么可以使用加边法?因为加边之后的行列式按第一列展开,与原行列式的值相同.)

例 6. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_i \neq 0$.

解:①加在第一行,所有元素都是 1,剩下空的列用 0 补充,行列式从 n 阶变成了 $(n+1)$ 阶;②第一行乘以 (-1) 加到其他行上去,变成三叉型(爪型)行列式;③第二列乘以 $\frac{1}{a_1}$ 加到第一列上,第三列乘以 $\frac{1}{a_2}$ 加到第一列上…依此类推,变成上三角行列式.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$\overset{②}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{③}{=} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

加边法注意事项:

①加边不能改变原行列式的值;

②三叉型(爪型)行列式如何消?上述步骤③;

③行列式中有字母并且字母在分母时,注意题干有没有说其不等于 0.

（5）范德蒙德行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i - x_j\right)$.

（简单来说就是只看第二行，用列数高的减去列数低的，累计相乘.）

例 1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix} = \left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_1\right)\left(x_4 - x_1\right)\left(x_5 - x_1\right)$

$\left(x_3 - x_2\right)\left(x_4 - x_2\right)\left(x_5 - x_2\right)\ \left(x_4 - x_3\right)\left(x_5 - x_3\right)\ \left(x_5 - x_4\right)$.

例 2. 计算范德蒙德行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 9 & -5 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 9 & -5 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \end{vmatrix} = \left(-1-2\right)\left(3-2\right)\left(6-2\right)\left(9-2\right)\left(-5-2\right)$

$\left(3+1\right)\left(6+1\right)\left(9+1\right)\left(-5+1\right)\ \left(6-3\right)\left(9-3\right)\left(-5-3\right)\ \left(9-6\right)\left(-5-6\right)\ \left(-5-9\right)$.

例 3. 计算范德蒙德行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

证明过程（数学归纳法）：$\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$显然成立；

假设$(n-1)$阶的范德蒙德行列式成立；

对n阶的范德蒙德行列式进行整理：①第一行乘以$(-x_1)$加到第二行，第二行乘以$(-x_1)$加到第三行⋯第$n-1$行乘以$(-x_1)$加到第n行；②加边法逆过程，可以去掉第一行和第一列；③发现第一列有公因子(x_2-x_1)，第二列有公因子(x_3-x_1)⋯第n列有公因子(x_n-x_1)，提取公因子；

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-3}&x_3^{n-2}-x_1x_3^{n-3}&\cdots&x_n^{n-2}-x_1x_n^{n-3}\\0&x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}&x_3^{n-1}-x_1x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-3}&x_3^{n-2}-x_1x_3^{n-3}&\cdots&x_n^{n-2}-x_1x_n^{n-3}\\x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}&x_3^{n-1}-x_1x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix};$$

由假设可得，$(n-1)$阶的范德蒙德行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$成立，

故$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j \right)$证毕.

例 4. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

例 5. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$.

范德蒙德行列式有时会隐藏起来，所以多注意第一行和第一列的元素是否都相同.

（6）反对称行列式：①主对角线为轴，且元素都为0；②上下位置对应成相反数，记作$a_{ij} = -a_{ji}$.

如：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 6 \\ -2 & 5 & 0 & -8 \\ -3 & -6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

性质：奇数阶的反对称行列式，行列式的值为零，即$D = 0$.

如：每一行都提取公因子(-1)得：$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$.

相当于进行了一次转置，即$D = -D$，故$D = 0$.

对于偶数阶得反对称行列式，等号右边会是(-1)的偶数次，故无区别.

（7）对称行列式：①主对角线为轴，元素无要求；②上下位置对应相等，记作 $a_{ij}=a_{ji}$.

如：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

P7 1.5 克莱姆(Cramer)法则.

克莱姆(Cramer)法则:方程个数等于未知量个数且系数行列式的值不为零,则 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$. 其中 D 为系数行列式,D_j 为把方程组等号右边的数替换 D 中的第 j 列,其它列不动,所形成的行列式.

如:方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+5x_3=6 \\ -x_1+x_2+6x_3=9 \end{cases}$,各未知量系数组成的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 称为系数行列式, 即 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. 则 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$,$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$,

$x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$, $x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

(此法则计算量较大,一般不用.)

若方程组等号右边都为零,我们称该方程组为齐次方程组.

如:$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+5x_3=0 \\ -x_1+x_2+6x_3=0 \end{cases}$,故齐次方程组至少有零解,即 $x_1=x_2=x_3=0$.

$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}=0$,$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0$,$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$.

定理:对于齐次方程组,如果方程个数等于未知量个数且 $D\neq0$,则该方程组只有零解($x_i=0$).

因此,齐次方程组有非零解的充要条件是 $D=0$.

P8 2.1 矩阵概念

矩阵（Matrix）：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 由这些元素所组成的数表，称为 $m\times n$ 的矩阵，记作 $A_{m\times n}$（也可用 BCE 表示，D 一般为行列式）. 其中 m 为行数，n 为列数.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为 2×3 的矩阵，记作 $A_{2\times 3}$.

行列式与矩阵的区别：
本质上：行列式是一个数；矩阵是一个数表.

符号上：行列式是$|\ |$；矩阵是$(\ )[\ ]$，大括号不用.

形状上：行列式的行数一定等于列数，都是“正方形”；矩阵的行数和列数无要求.

实矩阵：所有元素都是实数的矩阵.
复矩阵：元素中含有复数的矩阵.

行矩阵：只有一行的矩阵. 如：(111)，记作 $A_{1\times 3}$.

列矩阵：只有一列的矩阵. 如：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，记作 $A_{3\times 1}$.

零矩阵：所有元素都是 0 的矩阵，记作 O.
负矩阵：把一个矩阵 A 中的所有元素都取相反数，变为 $-A$.

n 阶方阵：行数等于列数，记作 A_n.

单位阵：一个矩阵主对角线都是 1，其余位置为 0，记作 E，I. 如：$E_3=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

单位阵都是方阵.

只有一个元素的矩阵等于这个数的本身. 如：$(5)=5$.

同型矩阵：两个矩阵的行数和列数对应相等. 如：$A_{3\times 5}$ 与 $B_{3\times 5}$.

如果同型矩阵 A 与 B 的对应元素都相等，就称两个矩阵相等，记作 $A=B$.
两个矩阵相等的前提是同型矩阵.

问：两个零矩阵是否一定相等？不一定. 如：$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

方阵中的主对角线与次对角线的概念和行列式一样，不是方阵的没有主对角线和次对角线.

P9 2.2 矩阵运算（一）

（1）矩阵的加法：对应位置的元素相加.（只有同型矩阵才能）

如：$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&3\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&2\end{pmatrix}$.

矩阵的减法：对应位置的元素相减.

如：$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\4&4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\3&3&2\\4&4&4\end{pmatrix}$.

$A+B=B+A$；$(A+B)+C=A+(B+C)$；$A+O=A$；$A+(-A)=O$；

$A+B=C\Leftrightarrow A=C-B$.

（2）矩阵的数乘：一个数乘以一个矩阵，结果为这个数乘以矩阵的所有元素.

如：$k\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&2k&3k\\4k&5k&6k\\7k&8k&9k\end{pmatrix}$.

矩阵提公因子：矩阵所有元素均有公因子，这个公因子往外提一次.
行列式提公因子：一行提一次，所有元素均有公因子，这个公因子往外提 n 次.

$k(A+B)=kA+kB$；$(k+l)A=kA+lA$；$k(lA)=(kl)A$.

（3）★矩阵的乘法：第一个矩阵第一行与第二个矩阵第一列对应元素相乘再相加放在 a_{11}，第一个矩阵第一行与第二个矩阵第二列对应元素相乘再相加放在 a_{12}…依此类推.

如：$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&2\end{pmatrix}$

矩阵相乘的前提条件：第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.
相乘后的结果矩阵：行数等于第一个矩阵的行数，列数等于第二个矩阵的列数.
（宋氏七字诀：$A_{3\times4}B_{4\times5}$ 看下标，中间相等取两头. 中间相等才能相乘，结果矩阵的行数和列数取两头.）

例 1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

解：$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 33\\ 10 & -10\end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 7\\ 8 & 6 & -4\\ 27 & 15 & -27\end{pmatrix}$.

①我们发现 $AB\neq BA$，且 AB 有意义时，BA 不一定有意义. 如：$A_{5\times2}B_{2\times3}$.

若 $AB=BA$，我们说 A,B 是可交换的.（需要 A,B 为同型矩阵且为方阵）

其中 AB，称 A 为左乘，B 为右乘.

例 2. 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，求 AB 和 AC.

解：$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$AC=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$AB=AC$

②我们发现 $AB=0$ 推不出 $A=0$ 或 $B=0$；

③ $AB=AC$ 且 $A\neq0$ 推不出 $B=C$.

（4）与零矩阵相乘：$A_{4\times3}O_{3\times2}=O_{4\times2}$.

（5）与单位阵 E 相乘：$AE=A$，$EB=B$.

如：$\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 5 & 9 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 5 & 9 & 9\end{pmatrix}$.

（6）乘法运算规律：（矩阵的左右顺序不会变）

①结合：$(AB)C=A(BC)$；

②分配：$(A+B)C=AC+BC$，$C(A+B)=CA+CB$；

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

例 3. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解：设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，因为可交换，所以 $AB=BA$，

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix},$$

故 $\begin{cases}a=a+b\\b=b\\a+c=c+d\\b+d=d\end{cases}\Rightarrow b=0$，$a=d$，$B=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$，其中 a,c 为任意常数.

我们发现原矩阵与它的可交换矩阵一定是同阶方阵，但是同阶方阵不一定都可交换. 如：上述结果矩阵 B 中的 $a_{12}\neq0$ 形成的矩阵.

（7）变量间的线性替换：

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2+2z_3\\y_2=z_1-2z_2+z_2\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}z_1=u_1+u_2\\z_2=u_1\\z_3=-u_1+u_2\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.$$

所以，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&1\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1=2u_1+u_2\\x_2=-2u_1+5u_2\end{cases}$.

P10 2.2 矩阵运算（二）

幂运算：$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$，特别地 $A^0=E$.（A 为方阵）

① $A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$；

$A^{k_1}A^{k_2}=\underbrace{A\cdots A}_{k_1个}\underbrace{A\cdots A}_{k_2个}=A^{k_1+k_2}$.

② $\left(A^{k_1}\right)^{k_2}=A^{k_1k_2}$；

$\left(A^{k_1}\right)^{k_2}=\underbrace{A^{k_1}\cdots A^{k_1}}_{k_2个}=\underbrace{\underbrace{A\cdots A}_{k_1个}\cdots\underbrace{A\cdots A}_{k_1个}}_{k_2个}=A^{k_1k_2}$.

因为矩阵运算不满足交换律，所以一般情况下，$(AB)^k\neq A^kB^k$.（A 为方阵）

如：$(AB)^2\neq A^2B^2\Rightarrow ABAB\neq AABB$，两边都是 A 和 B，中间的 $BA\neq AB$.

$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2\Rightarrow(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$

$=A^2+BA+AB+B^2\neq A^2+2AB+B^2$.

$(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$.

$(A+E)^2=A^2+2AE+E^2$，$(A-E)^2=A^2-2AE+E^2$，E 为单位阵，$AE=EA=A$.

例 1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$，求 $(AB)^2$，$(AB)^{10}$.

解：$BA=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6$，$AB=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，

$(AB)^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12&18\\6&12&18\\6&12&18\end{pmatrix}$，

$\because BA=6$，$(AB)^2=ABAB=6AB$，

$$(AB)^{10}=ABABABABABABABABABAB=6^9AB=6^9\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

一般求矩阵相乘的高次幂时，把它们分开再去消.

矩阵的转置：定义同行列式的转置，$A_{m\times n}$，$\left(A^T\right)_{n\times m}$.

如：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$A^T=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$，$\left(A^T\right)^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

转置的性质：

★①$\left(A^T\right)^T=A$；

②$(A+B)^T=A^T+B^T$；

③$(kA)^T=kA^T$；

★④$(AB)^T=B^TA^T$，假设 $A_{3\times2}B_{2\times5}$，那么$\left(A^T\right)_{2\times3}$，$\left(B^T\right)_{5\times2}$，$A^TB^T$ 无法相乘.

推广：$\left(A_1A_2A_3A_4\right)^T=A_4^TA_3^TA_2^TA_1^T$.

P11 2.3 特殊矩阵（都是方阵）

（1）数量矩阵：主对角线的元素都是a，其余元素都是0.

如：$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} = aE$

零矩阵和单位阵都是特殊的数量矩阵（此零矩阵为方阵）.
数与数量矩阵相乘以及数量矩阵的和、差、积仍然是数量矩阵.

数量矩阵与另外的矩阵相乘：$(aE)B = B(aE) = aB$.

（$AE = EA = A$，这里等号左右两边的单位阵E是否相等？不相等. 如$A_{2\times 3}$，那么等号左边是E_3，等号右边是E_2）

（2）对角形矩阵：主对角线的元素可以不相等，其余元素都是0.

如：$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} = diag(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$

数量矩阵是一种特殊的对角形矩阵.
数与对角形矩阵相乘以及对角形矩阵的和、差、积仍然是对角形矩阵，其和、差积是其主对角线对应元素相加减乘所得到的对角形矩阵.

例 1. 已知 $A = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$，求$AB$和$BA$.

解：$AB = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 2k_1 & 3k_1 \\ 2k_2 & 2k_2 & 2k_2 \\ 8k_3 & 8k_3 & 8k_3 \end{pmatrix}$，左乘，用$k$乘每一行，

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 2k_2 & 3k_3 \\ 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ 8k_1 & 8k_2 & 8k_3 \end{pmatrix}$，右乘，用$k$乘每一列.

（3）三角形矩阵

上三角形矩阵：主对角线以下的元素都是0.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

下三角形矩阵：主对角线以上的元素都是0.

如：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

显然，对角形矩阵既是上三角形矩阵也是下三角形矩阵.

数和上（下）三角形矩阵的乘积以及上（下）三角形矩阵的和、差、积仍是上（下）三角形矩阵.

（4）对称与反对称

对称矩阵：以主对角线为轴，主对角线元素无要求，上下位置的元素对应相等，记作$a_{ij}=a_{ji}$.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

★对称矩阵的题，一般都会用到：$A^T=A$.

显然，两个同阶对称矩阵的和、差、数乘仍是对称的，但是它们的积一般不是对称的.

如：若存在A，B两个同阶对称矩阵，显然$A^T=A$，$B^T=B$.

（1）$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，故两个同阶对称矩阵的和是对称的；

（2）$(A-B)^T=A^T-B^T=A-B$，故两个同阶对称矩阵的差是对称的；

（3）$(kA)^T=kA^T=kA$，故数与对称矩阵相乘仍是对称的；

（4）$(AB)^T=B^TA^T=BA$，除了可交换，$BA\neq AB$，故两个同阶对称矩阵的积一般不是对称的.

定理 1：若存在A，B两个同阶对称矩阵，且AB也是对称矩阵$\Leftrightarrow$ A，B可交换.

例 1. 已知矩阵 $A_{m\times n}$，证明 AA^T 与 A^TA 都是对称的.

证明：$\left(AA^T\right)^T=\left(A^T\right)^T A^T=AA^T$, $\left(A^TA\right)^T=A^T\left(A^T\right)^T=A^TA$，得证.

例 2. 设 A， B 均为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，求证： B^TAB 也是对称矩阵.

证明：$\because A^T=A$，$\therefore \left(B^TAB\right)^T=B^TA^T\left(B^T\right)^T=B^TAB$，得证.

反对称矩阵：以主对角线为轴且主对角线元素都为 0，上下位置对应成相反数，记作 $a_{ij}=-a_{ji}$，即 $A^T=-A$.

如：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

两个同阶反对称矩阵的和、差、数乘仍为反对称矩阵，但其乘积一般不再是反对称矩阵.

P12 2.4 逆矩阵（一）

由$2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2=1$进行思考，在矩阵的运算中，是否存在另一个矩阵$B$，使得$AB=BA=E$.

永远不要把矩阵放在分母上，典型错误$A\times\frac{1}{A}=\frac{1}{A}\times A=E$.

方阵的行列式：设方阵A，将其所有元素按原来位置排列所构成的行列式，称为方阵A的行列式，记作$|A|$.

如：$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$|A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\3&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}$.

矩阵的属性：特征值、特征向量、行列式等等. 所以方阵的行列式使其诸多属性中的一种.

方阵行列式的性质：

①$\left|A^T\right|=|A|$；行列式转置后值不变.

★②$|kA|=k^n|A|$；行列式提公因子，一行有就提一次，所以n阶的要提n次.

③设A，B为同阶方阵，$|AB|=|A||B|\Rightarrow|ABC|=|A||B||C|$.

例 1. 设A为5阶方阵，$|A|=3$，求$|-A|$，$\left|2A^T\right|$与$\left||A|A\right|$，$\left|\left|\left||A|A\right|A\right|A\right|$.

解：$|-A|=(-1)^5|A|=-3$，$\left|2A^T\right|=2^5\left|A^T\right|=2^5|A|$，

$\left||A|A\right|=|3A|=3^5|A|=3^6$，

$\left|\left|\left||A|A\right|A\right|A\right|=\left|\left|3^6A\right|A\right|=\left|3^{30}|A|A\right|=\left|3^{31}A\right|=3^{155}|A|=3^{156}$.

伴随矩阵（按行求按列放）：①求所有元素的代数余子式；②按行求的代数余子式按列放构成的矩阵，称为伴随矩阵，记作A^*. 只有方阵才有伴随矩阵.

如：$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$.

例 1. 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解：$A_{11}=1$，$A_{12}=-5$，$A_{13}=1$，

$A_{21}=-3$，$A_{22}=3$，$A_{23}=0$，

$A_{31}=2$，$A_{32}=-1$，$A_{33}=-1$，得 $A^*=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-5&3&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

定理 1：对**任意**方阵 A，有 $AA^*=A^*A=|A|E$.

证明：由行列式按行展开定理和异乘变零定理可得：

$$AA^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&&&\\&|A|&&\\&&\ddots&\\&&&|A|\end{pmatrix}=|A|E.$$

同理，由行列式按列展开定理和异乘变零定理可得：$A^*A=|A|E$.

推论：若 n 阶方阵满足 $|A|\neq 0$，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

如：由 $AA^*=|A|E$ 可得，$|AA^*|=||A|E|\Rightarrow|A||A^*|=|A|^n$，$|E|=1$，故 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

但是以后可以证明，当 $|A|=0$ 时，$|A^*|=|A|^{n-1}$ 该等式也成立.

P13 2.4 逆矩阵（二）

任何方阵都有伴随矩阵，若 $A=(5)$，则 $A^*=(1)$.

证：由 $AA^*=|A|E$ 可知，$(5)A^*=5(1)$，得 $A^*=(1)$.

逆矩阵：设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}，并称 A 为可逆矩阵.

①未必所有方阵均可逆；如：零矩阵 O，$OB=BO=O\neq E$.

②若方阵可逆，则逆矩阵唯一；如：假设 A 的逆矩阵是 B_1 和 B_2，

$AB_1=B_1A=E$，$AB_2=B_2A=E$，那么 $B_1=B_1E=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=EB_2=B_2$，所以逆矩阵唯一.

思考：如何判断方阵可逆？$A^{-1}=$？

若方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$，则称 A 为非奇异（非退化或满秩）矩阵，否则称 A 为奇异（退化或降秩）矩阵.

定理：方阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，其逆矩阵为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

证明：充分：$|A|\neq 0$，$AA^*=A^*A=|A|E$，两边除以 $|A|$，$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=|A|E$，

故方阵 A 可逆，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

必要：若方阵 A 可逆，则 $AA^{-1}=E$，两边取行列式 $|AA^{-1}|=|E|\Rightarrow|A||A^{-1}|=1$，故 $|A|\neq 0$.（条件推结论为充分性，结论推条件为必要性.）

推论：设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=E$ 或 $BA=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.（和逆矩阵定义相比，只需验证一个等式即可）

证明：$AB=E$，两边取行列式 $|A||B|=1$，$|A|\neq 0$，故 A 可逆.

$AB=E$，两边同时左乘 A^{-1}，$A^{-1}AB=A^{-1}E\Rightarrow B=A^{-1}$.

①求 A^{-1}，伴随矩阵法：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

②初等变换法：（常用）

例 1. 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

由第 31 页的例 1 可知，需要求 9 个代数余子式，再得 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，比较麻烦.

例 2. 已知 n 阶方阵 A，B 满足 $A+B=AB$，（1）证明：$A-E$ 可逆；（2）若 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

（1）即证 $(A-E)(?)=E$. $AB-A-B=O\Rightarrow AB-A-B+E=E\Rightarrow$

$AB-A-EB+E=E\Rightarrow(A-E)B-(A-E)=E\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$，故 $A-E$ 可逆.

（2）由（1）可知，$A-E=(B-E)^{-1}\Rightarrow A=(B-E)^{-1}+E$，

$B-E=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A_{11}=0, A_{12}=-2, A_{13}=0$，

$A_{21}=3, A_{22}=A_{23}=0$，$A_{31}=A_{32}=0, A_{33}=6$，

$(B-E)^*=\begin{pmatrix}0&3&0\\-2&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, $|B-E|=\begin{vmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-3)A_{12}=6$，

$$(B-E)^{-1}=\frac{1}{|B-E|}(B-E)^*=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&3&0\\-2&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\left(B-E\right)^{-1}+E=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

矩阵方程：

例 1. 解矩阵方程 $AX=A+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

解：$AX=A+2X\Rightarrow AX=A+2EX\Rightarrow\left(A-2E\right)X=A$

$\Rightarrow\left(A-2E\right)^{-1}\left(A-2E\right)X=\left(A-2E\right)^{-1}A\Rightarrow X=\left(A-2E\right)^{-1}A$.（注意左右顺序）

$A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\left|A-2E\right|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=1\times A_{21}+\left(-1\right)\times A_{22}=4-5=-1\neq0$，

$A-2E$ 可逆.

注意事项总结：

①提矩阵时，注意左右顺序；

②不能写 $A-2$，写成 $A-2E$；

③矩阵不能相除，$\dfrac{A}{A-2E}$ 不行；

④先判断方阵 A 可逆，后面得步骤才可以出现 A^{-1}.

⑤待定法：$\left(A-2E\right)X=A$，设 $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$，9 个方程 9 个未知数，计算量较大不建议使用；

⑥尽可能使用初等变换法.

逆矩阵的性质：

①若方阵 A 可逆，则其逆矩阵 A^{-1} 也可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$；

②若方阵 A，B 均可逆，则 AB 也可逆，且 $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

证明：$\left(AB\right)B^{-1}A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$，故 $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

推论：$(ABCD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.（与转置很像）

③若方阵 A 可逆，则其转置矩阵 A^T 也可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$；若 $k\neq0$，则数乘矩阵 kA 也可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

证明：（证明两个矩阵可逆，让这两个矩阵相乘，看等不等于 E）

$A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$；$kA\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=E$.

④若方阵 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

证明：$AA^{-1}=E\Rightarrow\left|AA^{-1}\right|=|E|\Rightarrow|A|\left|A^{-1}\right|=1\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$.

⑤若方阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^* 也可逆，且 $\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

证明：$AA^*=|A|E$，两边同时除以 $|A|$ 得，$\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=E$，故 $\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

伴随矩阵 A^*：①按行求，按列放；② $AA^*=A^*A=|A|E$；③ $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；④由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 可得，$A^*=|A|A^{-1}$；⑤ $\left(A^*\right)^*=\left|A^*\right|\left(A^*\right)^{-1}=\left|A^*\right|\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$；

⑥ $\left(\left(A^*\right)^*\right)^*=\left|A^*\right|^{n-2}A^*=\left(|A|^{n-1}\right)^{n-2}|A|A^{-1}=|A|^{(n-1)(n-2)+1}A^{-1}$；

⑦ $\left(\left(A^*\right)^*\right)^{-1}=\left(|A|^{n-2}A\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{n-2}}A^{-1}$；

⑧ $\left(\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\right)^{-1}=\left(|A|^{(n-1)(n-2)+1}A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{(n-1)(n-2)+1}}A$.

P14 2.5 分块矩阵

分块矩阵：分块以后的矩阵称为分块矩阵，其中每一块称为原矩阵的子块.

如：$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$

根据实际需要，灵活分块，要求：横线、竖线一划到头

一般按行或者按列分块.

如：$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$，$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}$.

标准形矩阵：从左上角开始的一串 1（不能断），其他为 0，标准形不一定是方的.

如：$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$.

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$都是标准形.（没有 1 也行）

$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$不是标准形.

对标准形矩阵进行分块 $D=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} E_r & O_{(n-r)\times r} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$.

分块矩阵的运算：

①分块矩阵的加法：$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$.

②分块矩阵的数乘：$k\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kA_1 & kA_2 \\ kA_3 & kA_4 \end{pmatrix}$.

③分块矩阵的乘法（与矩阵的乘法类似，且前提是子块 A_{ik} 与 B_{ki} 可乘.）：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

例 1. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，B 是 $n\times s$ 的矩阵，且 $B=\left(B_1,B_2,\cdots,B_t\right)$，按列分成了 t 块，求 AB.

解：$AB=\left(A\right)\left(B_1,B_2,\cdots,B_t\right)=\left(AB_1,AB_2,\cdots,AB_t\right)$.

错误思路：把外面的 A 直接乘进去.

正确思路：把 $\left(A\right)$ 当作分块矩阵，进行分块矩阵的乘法.

对角形分块矩阵：

如：$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$.

对角形分块矩阵的乘法：$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_kB_k \end{pmatrix}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k+B_k \end{pmatrix}.$$

可以证明，同型的对角形分块矩阵、上（下）三角形分块矩阵的和、差、数乘、乘积仍分别是同型的对角形分块矩阵、上（下）三角形分块矩阵.

分块矩阵的转置：
步骤：
①把子块视作元素求转置；
②对每个子块求转置.

如：$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$，$A^T=\begin{pmatrix} A_1^T & A_4^T \\ A_2^T & A_5^T \\ A_3^T & A_6^T \end{pmatrix}$.

例 1. 设分块矩阵 $H=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，其中 A,B 分别为 m 阶与 n 阶的可逆矩阵，证明 H 可逆，并求 H 的逆矩阵.

证明：$|H|=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$（按照拉普拉斯定理展开取后 n 行与后 n 列为子式，并乘其代数余子式，又因为行数与列数相同，故代数余子式符号为正.）

$|H|=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$，故 H 可逆；

设 $H^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{pmatrix}$，其中 X_1 是与 A 同阶的方阵，X_2 是与 B 同阶的方阵，

那么 $HH^{-1}=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_1+CX_4 & AX_3+CX_2 \\ BX_4 & BX_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}=E$，

$$\begin{cases} AX_1+CX_4=E \\ AX_3+CX_2=O \\ BX_4=O \\ BX_2=E \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} BX_2=E\Rightarrow X_2=B^{-1} \\ BX_4=O\Rightarrow B^{-1}BX_4=B^{-1}O\Rightarrow X_4=O \\ AX_1+CX_4=E\Rightarrow X_1=A^{-1} \\ AX_3+CX_2=O\Rightarrow AX_3=-CB^{-1}\Rightarrow A^{-1}AX_3=A^{-1}(-C)B^{-1}\Rightarrow X_3=A^{-1}(-C)B^{-1} \end{cases},$$

得：$H^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.

推论：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

P15 2.6 初等变换（一）

初等变换：$(\ )\to(\ )$，中间用箭头连接，不要用等号，初等变换的本质是对矩阵的变化.

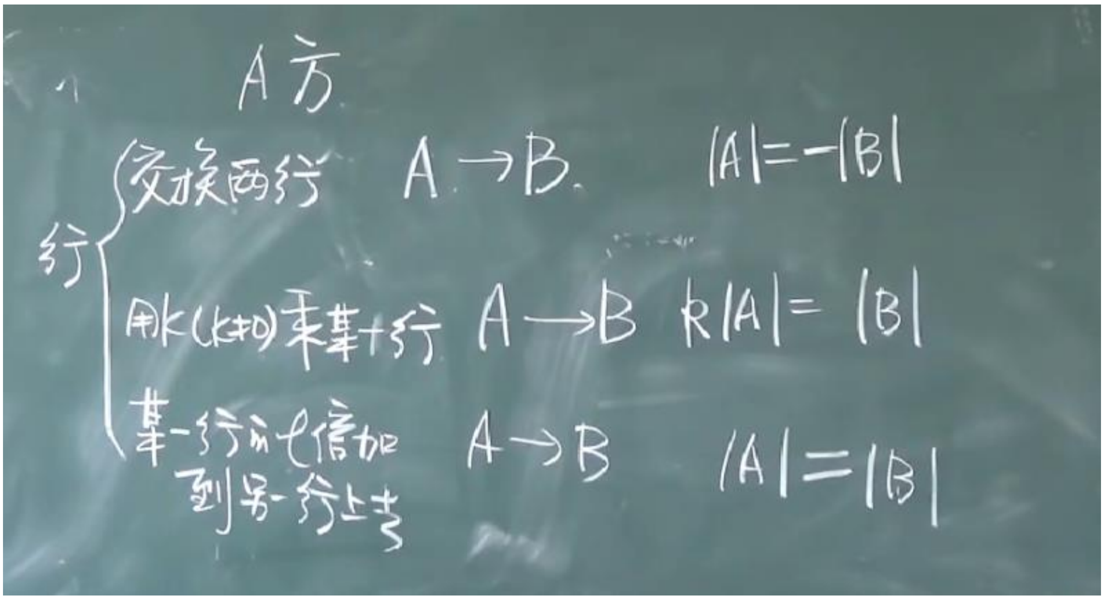
①交换矩阵的两行；如：$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&2&2\\1&1&1&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}$.

②用数 $k(k\neq0)$ 乘矩阵的某一行；如：$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&6&6&6\\1&1&1&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}$.

③某一行的 l 倍加到另一行上去. 如：$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

列与上述同理.（行列式三个性质的描述与上述十分类似，但是与上述没有任何关系）

若 A 为方阵可存在部分关系：



定理：任何矩阵都可以通过初等变换（行变换、列变换都行）化为标准形矩阵.

将矩阵化为标准形步骤：

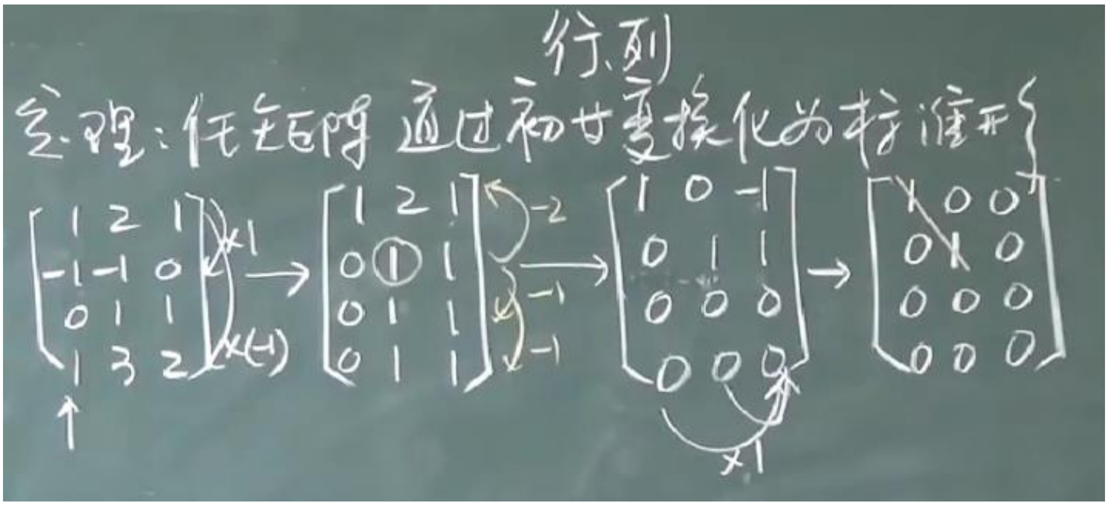
①先处理第一行，把 a_{11} 化为 1；

②通过对第一行乘以某个数加到另一行上去，把第一列其它元素化为 0；

③把 a_{22} 化为 1，并通过它把第二列其它元素化为 0，再用列变换.

例 1. 将$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$化为标准形.

解：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



若矩阵A经过初等变换化为矩阵B，称A与B等价，记作$A \cong B$.
性质：
①反身性：$A \cong A$；
②对称性：若$A \cong B$，则$B \cong A$；
③传递性：若$A \cong B$，$B \cong C$，则$A \cong C$.
由上述定理可知，任何矩阵A都与标准形等价.

矩阵$A_{4\times4}$的标准形有：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

秩：　0　　　1　　　2　　　3　　　4

P16 2.6 初等变换（二）

初等方阵：对单位阵 E 做一次初等变换（行、列）得到的矩阵.

三种初等方阵：
①交换两行：

如：交换一三行 $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}&&1&\\&1&&\\1&&&\\&&&1\end{pmatrix}$，记作 $E(i,j)$，表示第 i 行与第 j 行进行交换（列同理）.

②用 $k(k\neq 0)$ 乘某一行：

如：$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&5&\\&&&1\end{pmatrix}$，记作 $E(i(k))$，表示第 i 行乘以 k（列同理）.

③某行 l 倍加到另一行上去：

如：$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&5&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，记作 $E(i,j(l))$，表示第 j 行乘以 l 加到第 i 行（列同理）.

初等变换与初等方阵的关系：初等变换是矩阵变化的一个过程，$(\ )\to(\ )$；初等方阵就是一个方阵；

三种初等方阵的行列式：

①交换两行，行列式的符号发生改变，$|E(i,j)|=-1$；

②用 $k(k\neq 0)$ 乘某一行，$|E(i(k))|=k$；

③某行 l 倍加到另一行上去，行列式的值不变，$|E(i,j(l))|=1$.

行列式的值不等于 0，故三种初等方阵均可逆，其逆矩阵也是初等方阵，其转置也是初等方阵.

$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$； $E^{-1}(i(k))=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$； $E^{-1}(i,j(l))=E(i,j(-l))$

证明（个人理解）：$E(i,j)=-E \Rightarrow E(i,j)E(i,j)=(-E)(-E)=E$，得

$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$；

$E(i(k))=kE$，$E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)=\frac{1}{k}E$，$E(i(k))E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)=E$，得 $E^{-1}(i(k))=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$；

$E(i,j(l))=E+\begin{pmatrix} 0 & & l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$（假设是第三行乘以 l 加到第一行，其它行同理.）

$E(i,j(-l))=E+\begin{pmatrix} 0 & & -l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，

$$E(i,j(l))E(i,j(-l))=\left(E+\begin{pmatrix} 0 & & l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right)\left(E+\begin{pmatrix} 0 & & -l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$=EE+\begin{pmatrix} 0 & & -l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & -l & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}=E,$$

得 $E^{-1}(i,j(l))=E(i,j(-l))$.

定理：用第 i 种初等方阵左（右）乘 A，相当于对 A 施行第 i 种初等行（列）变换.（左行右列）

如：$E(1,3)=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，$E(2(3))=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，

$E(2(3))A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，左乘，

$$AE(1,3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}$$，右乘.

$$AE(1(4))=\begin{pmatrix}4&2&3\\16&5&6\\28&8&9\end{pmatrix}$$，右乘为列变换，第一列乘以 4，

$$E(1(4))A=\begin{pmatrix}4&8&12\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$，左乘为行变换，第一行乘以 4.

定理：对任意矩阵 A，存在初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 与 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使得

$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t$ 为 A 的标准形矩阵.

任何矩阵都可以通过初等变换（行变换、列变换都行）化为标准形矩阵，如果进行的是行变换就左乘，列变换就右乘，使得 $P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=$标准形.

推论：矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{m\times n}$ 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ=B$.

定理：方阵 A 可逆的充要条件是方阵 A 的标准形为 E.

证明：

必要性：若方阵 A 可逆，设标准形矩阵为 D，那么有

$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=D$，两边取行列式得，$|P_s|\cdots|P_2||P_1||A||Q_1||Q_2|\cdots|Q_t|=|D|$，因为初等方阵均可逆，故 $|D|\neq 0$，所以标准形为单位阵 E.

充分性：$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=E$，两边取行列式得，

$|P_s|\cdots|P_2||P_1||A||Q_1||Q_2|\cdots|Q_t|=|E|=1\neq 0$，因为初等方阵均可逆，故 $|A|\neq 0$，方阵 A 可逆.

定理：方阵 A 可逆的充要条件是 A 可表示为若干初等方阵的乘积，即 $A=P_1\cdots P_s$.

证明：$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=E\Rightarrow A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$，初等方阵的逆矩阵也是初等方阵.

P17 2.6 初等变换（三）

之前学过的求逆矩阵方法，伴随矩阵法：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$（几乎不用）.

初等变换法求逆矩阵：设n阶方阵A可逆，则A^{-1}也可逆，由定理方阵A可逆的充要条件是A可表示为若干初等方阵的乘积可知，设$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t$，其中$Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$都是初等方阵，则有$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t\Rightarrow A^{-1}A=Q_1Q_2\cdots Q_tA=E$，

$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t\Rightarrow A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_tE$.

我们发现对A与E做同样的初等行变换，A变成了E，E变成了A^{-1}（列变换同理，把$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t\Rightarrow AA^{-1}=AQ_1Q_2\cdots Q_t=E$；

$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_t\Rightarrow A^{-1}=EQ_1Q_2\cdots Q_t$，但是做变换，要么全是行变换，要么全是列变换）.

初等行变换法：$(A,E)\xrightarrow{\text{只做初等行变换}}(E,A^{-1})$.

例 1. 用初等行变换法求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

得$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

注意事项：

①先处理第一列，再第二列，第三列；

②对整行进行变换，不要分两边；

③处理第一列时先把 a_{11} 变为 1，再用 a_{11} 处理其它行，处理第二列时先把 a_{22} 变为 1，再用 a_{22} 处理其他行⋯依此类推；

④初等变换中间用 $\rightarrow$ 连接；

⑤只做初等行变换；

例 2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 9\\ 4 & 8 & 18\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 9\\ 4 & 8 & 18\end{vmatrix}=0$，故矩阵 A 不可逆.

⑥不管是否可逆，如果左边化不成 E，说明 A 不可逆.

进行初等变换只有三种情况，不管哪一种都无法改变原行列式的“零性”与“非零性”，即原行列式为零，初等变换后的行列式也为零.

P18 2.7 矩阵的秩（一）

k 阶子式：设 A 是 $m \times n$ 矩阵，从 A 中任取 k 行和 k 列，位于这些行、列相交处的元素按原来位置所构成的行列式称为 A 的一个 k 阶子式.

如：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 即为 A 的二阶子式.

若矩阵 A 的**非零子式的最高阶数**是 r，则称 r 为矩阵 A 的**秩**.

如何理解秩：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，显然矩阵的秩为 1，从结构上可以看到，第二行是第一行的两倍，第三行是第一行的三倍，这三行的信息是有冗余的，只需要第一行就可以表示其他行. 对于矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$，它的秩为 3，这三行的信息缺一不可. 秩类似描述信息与结构的复制程度，反应了矩阵的各行、列之间的关系.

P19 2.7 矩阵的秩（二）

若矩阵 A 的**非零子式的最高阶数**是 r，则称 r 为矩阵 A 的**秩**，记作 $r(A)=r$.

规定：零矩阵的秩为 0.

若矩阵 $A_{m\times n}$，则 $0\le r(A)\le \min\{m,n\}$.

若 $r(A)=m$，说明取了所有行，称为行满秩矩阵；

若 $r(A)=n$，说明取了所有列，称为列满秩矩阵；

行满秩与列满秩统称为满秩， $r(A)=\min\{m,n\}$；

若 $r(A)<\min\{m,n\}$，称为降秩矩阵.

当 A 为方阵时， A 为满秩矩阵 $\Leftrightarrow$ A 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ $|A|\ne 0$.

如何求矩阵的秩？

定理：矩阵 A 的秩 $r(A)=r \Leftrightarrow$ A 有一个 r 阶子式不等于零，而所有 $r+1$ 阶子式（如果存在 $r+1$ 阶子式的话）都等于零.

如：$r(A)=3 \Leftrightarrow$ A 有一个 3 阶子式不等于零，而所有 4 阶子式都等于零.

问题：如果矩阵 $A_{6\times 8}$， $r(A)=3$，可不可能存在有一个 5 阶子式不等于 0？

答：不可能存在. 因为一个 5 阶子式按行展开可以为第一行元素乘以对应的代数余子式，而代数余子式是 4 阶的，所有 4 阶子式都为 0，故 5 阶子式都等于 0，6 阶同理.

例 1. 求矩阵 $D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$ 的秩.

解：显然有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & \\ & 1\end{vmatrix}\ne 0$，而所有三阶子式都为零，故 $r(D)=2$.

★★★阶梯形矩阵：满足

①若有零行（元素全为零的行），零行在非零行的下边；

②自上而下各行中，每一行左起首个非零元素，左边零的个数随行数的增加而严格增加.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，左边零的个数分别为 0，1，3 是严格增加.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，左边零的个数分别为 0，1，3，3 不是严格增加.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，左边零的个数分别为 0，1，3，5 是严格增加.

宋氏阶梯折线法：横线可跨多个数，竖线只跨一个数.

★★★★★行简化阶梯形矩阵：首先是阶梯形矩阵且满足

①非零行的首非零元是 1；

②首非零元所在列的其余元素是 0.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

宋氏三步走：①用折线判断是阶梯形；②用圆圈画出首非零元；③首非零元画竖虚线，竖虚线上只有一个 1 其余都是 0.

阶梯形矩阵求秩有什么帮助？

如：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，取子式时，就取首非零元所在的三行和三列，

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，所以阶梯形矩阵的秩就等于首非零元的个数，也即**阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数.** 标准形矩阵的秩等于其中 1 的个数.

定理：初等变换（行、列）不改变矩阵的秩.

所以求矩阵 A 的秩：$A \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 阶梯形矩阵，计算阶梯形矩阵的非零行的行数.

例 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解：$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

得 $r(A)=3$.

例 2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且 $r(A)=3$，求 k 的值.

解：因为 A 为 4 阶方阵，且 $r(A)=3$，所以其 4 阶子式都为零，也即 $|A|=0$，

$$|A|=\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k+3&1&1&1\\k+3&k&1&1\\k+3&1&k&1\\k+3&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$$，得 $k=1$ 或 $k=-3$.

因为 $k=1$，$r(A)=1$，故舍去.

矩阵的秩的性质：

① $r(A)=r(A^T)$，转置后行列式的值不变，故秩不变；

②任何矩阵乘以可逆矩阵后，其秩不变；

★设矩阵 $A_{m\times n}$，P 为 m 阶可逆方阵，Q 为 n 阶可逆方阵，则有

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

证明：方阵可逆的充要条件是其可表示为若干初等方阵的乘积，即

$P=P_1\cdots P_s$，$Q=Q_1\cdots Q_t$，所以 $PA=P_1\cdots P_sA$ 左乘相当于进行初等行变换，其秩不变，AQ，PAQ 同理.

P20 3.1 n 维向量及其运算

向量 vector

n 维向量：n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的一个有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为一个 n 维向量，记作 α, β, γ，每个数称为向量的分量.

向量的维度等于其分量个数.

有时也把 n 维向量写成 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，按行写的称为 n 维行向量，按列写的称为 n 维列向量.

分量全为零的向量称为零向量，记作 0.（矩阵为大写字母 O，向量为斜体 0，数字 0）

将 α 的每个分量都变号得到的向量，称为 α 的负向量，记作 $-\alpha$.

两个 n 维向量（同维向量），如果它们的对应分量相等，称两个向量相等，记作 $\alpha = \beta$.

设有 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$， $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，实数 k，则

$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n)$；

$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$. 分别称为向量的加减法与向量的数乘.

运算规律：

① $\alpha + \beta = \beta + \alpha$；

② $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；

③ $\alpha + 0 = \alpha$；

④ $\alpha + (-\alpha) = 0$；

⑤ $1 \cdot \alpha = \alpha$；

⑥ $(kl)\alpha = k(l\alpha)$， k, l 为任意实数；

⑦ $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$；

⑧ $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；

⑨ $\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma - \beta$.

★例 1. 证明：$k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0$ 或 $\alpha = 0$.

必要性：若 $k\alpha = 0$，当 $k = 0$ 时显然成立；当 $k \neq 0$ 时，$\frac{1}{k}k\alpha = \frac{1}{k}0 \Rightarrow \alpha = 0$.

充分性：若 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$，显然 $k\alpha = 0$.

P21 3.2 向量间的线性关系（一）

如：存在两个向量$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$，后一个向量是前一个向量的两倍，是线性关系.

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$能用某些向量表示一个向量，也是线性关系.

线性组合：设$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$m$维向量，若存在数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$成立，称$\beta$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的**线性组合**，或称$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$**线性表示**，称$k_1,k_2,\cdots,k_n$为一组**组合系数**（可以全取 0）.

性质：

①零向量可由任意向量组线性表示；如：$0=0\times\alpha_1+0\times\alpha_2+\cdots+0\times\alpha_n$.

②向量组中的任一向量都可由该向量组线性表示；如：$\alpha_3=0\times\alpha_1+0\times\alpha_1+1\times\alpha_3$.

③任一向量可由$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，…，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$线性表示，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$称为$n$维单位向量组.

如：$(1,2,3)=1\times(1,0,0)+2\times(0,1,0)+3\times(0,0,1)$.

例 1. 设$\beta=(-3,2,-4)$，$\alpha_1=(1,0,1)$，$\alpha_2=(2,1,0)$，$\alpha_3=(-1,1,-2)$，判断β是否为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

解：设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，即

$(-3,2,-4)=k_1(1,0,1)+k_2(2,1,0)+k_3(-1,1,-2)$，

$\begin{cases}k_1+2k_2-k_3=-3\\ \qquad k_2+k_3=2\\ k_1\qquad -2k_3=-4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_1=2\\k_2=-1\\k_3=3\end{cases}$，则$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$.

不管给的向量是行或列，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$按列均做出方程组的系数，$\beta$按列做成右

端常数项.

线性组合⇔方程组有解

如：$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$就无法用$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$表示，方程组无解.

向量组的等价：

设有两个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，两个向量组可以相互线性表示，则称两个向量组等价，记作$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$.

向量组的等价性质：

①反身性：任一向量组与它自身等价$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$；

②对称性：若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，则

$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$；

③传递性：若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，

$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\cong\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\}$，则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\cong\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\}$.

P22 3.2 向量间的线性关系（二）

线性相关与线性无关：

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$个$m$维向量，若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$**线性相关**，称$k_1,k_2,\cdots,k_n$为一组**相关系数**；否则，称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$**线性无关**.

如：$2\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=0$，系数分别为$2,3,-1$不全为零，三个向量线性相关. $1\times\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}=0$，系数分别为$1,-2,0$不全为零，三个向量线性相关.

结论：

①向量组中，存在两个向量成比例，那么向量组线性相关；

如：$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\times\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}5\\19\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}-1\\99\end{pmatrix}=0$.

②含有零向量的任一向量组必线性相关；

如：$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+1\times 0=0$.

③一个零向量必线性相关；

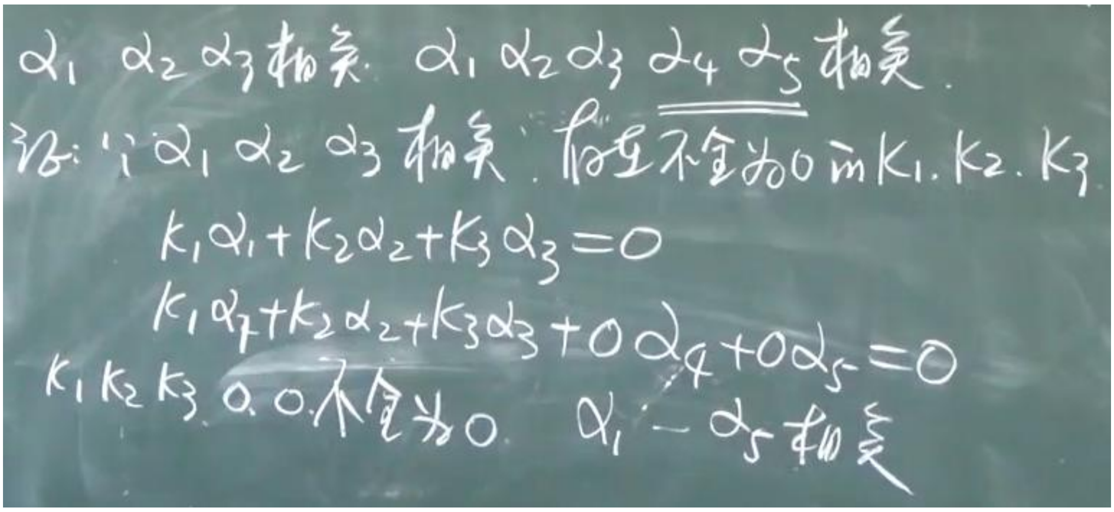
如：$1\times 0=0$.

④一个非零向量必线性无关；

如：当$\alpha\neq 0$，$k\alpha=0$时，则$k=0$.

⑤一个向量α线性相关$\Leftrightarrow\alpha=0$；

⑥若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$必线性相关.



若一个向量组中有部分组线性相关,则整体向量组线性相关;
若一个整体向量组线性无关,则任一部分组均线性无关.

⑦若向量组

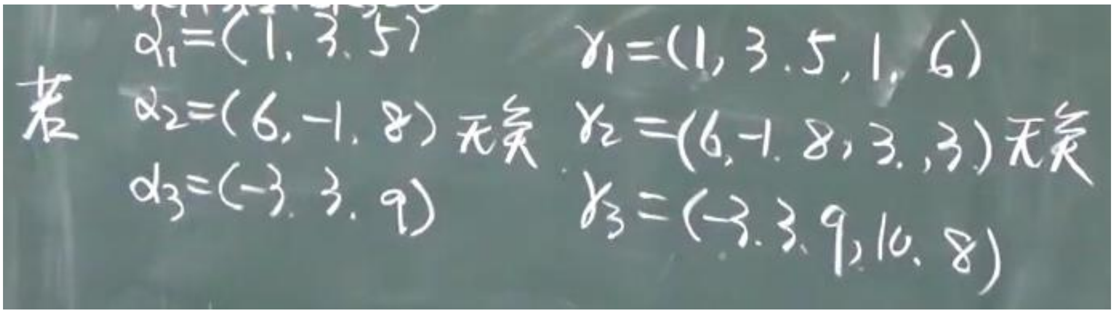
$\alpha_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r})$, $\alpha_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2r})$, …, $\alpha_m=(\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mr})$,

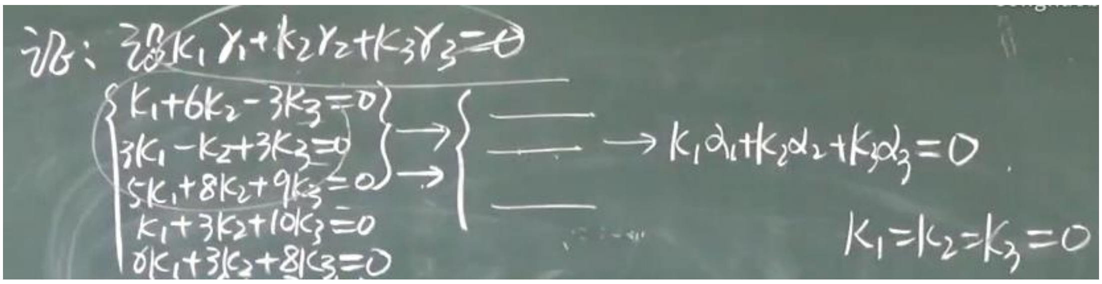
线性无关,则向量组

$r_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r},\alpha_{1r+1},\cdots,\alpha_{1n})$,

$r_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2r},\alpha_{2r+1},\cdots,\alpha_{2n})$, …,

$r_m=(\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mr},\alpha_{mr+1},\cdots,\alpha_{mn})$,也线性无关.





一个线性无关的向量组中的每个向量按相同的位置随意增加一些分量所得到的高维向量组仍线性无关;
一个线性相关的向量组中的每个向量按相同的位置划去一些分量所得到的低维向量组仍线性相关.

（接长与截短的是向量的维度.）

⑧n个n维向量（向量个数=向量维数）构成的行列式$D\neq 0$，则n个向量线性无关.

证明：设n个n维向量线性相关，会构成一个齐次方程组，而对于齐次方程组，如果$D\neq 0$，则该方程组只有零解，故向量组线性无关. 所以我们得到：

$D\neq 0\Leftrightarrow$线性无关；$D=0\Leftrightarrow$线性相关.

如：判断三个向量$(1,0,3)\,(2,1,1)\,(1,1,0)$是否线性相关，$D=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2\neq 0$，线性无关.

⑨n维单位向量组$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，…，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$是线性无关的.

例 1. 判断向量组$\alpha_1=(1,0,-1)$，$\alpha_2=(-1,-1,2)$，$\alpha_3=(2,3,-5)$是否线性相关？

解：设k_1,k_2,k_3满足$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则有

$D=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&-1&2\\2&3&-5\end{vmatrix}=0$，故向量组线性相关，且$\begin{cases}k_1-k_2+2k_3=0\\-k_2+3k_3=0\\-k_1+2k_2-5k_3=0\end{cases}$解得

$\begin{cases}k_1=k_3\\k_2=3k_3\end{cases}$，令$k_3=1$，则$k_1=1$，$k_2=3$.

线性相关⇔齐次方程组有非零解；

线性无关⇔齐次方程组只有零解.

线性组合⇔非齐次方程组有解；

不是线性组合⇔非齐次方程组无解.

⑩若向量组α,β,γ线性无关，则向量组$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\alpha+\gamma$也线性无关.

证明：设k_1,k_2,k_3满足$k_1(\alpha+\beta)++k_2(\beta+\gamma)+k_3(\alpha+\gamma)=0$

$\Rightarrow(k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=0$，因为向量组$\alpha,\beta,\gamma$线性无关，所以有

$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，故向量组$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\alpha+\gamma$线性无关.

P23 3.2 线性相关线性无关

定理：

①向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$至少一个向量可由其余向量表示.

证明:必要性:因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,所以必定存在不全为 0 的$k_1,\cdots,k_s$，

使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，假设$k_1\neq0$，则$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k_1}\alpha_s$；

充分性：如果有一个向量可由其余向量表示，假设$\alpha_1=m_1\alpha_2+\cdots+m_{s-1}\alpha_s$

$\Rightarrow-\alpha_1+m_1\alpha_2+\cdots+m_{s-1}\alpha_s=0$，哪怕$m_1,\cdots,m_{s-1}$都为 0，但$\alpha_1$的系数为$-1$，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

②向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示.

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，所以必定存在不全为 0 的$k_1,\cdots,k_{s+1}$，使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta=0$，

假设$k_{s+1}=0$，则$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，与前提冲突，故$k_{s+1}\neq0$，

所以$\beta=-\frac{k_1}{k_{s+1}}\alpha_1-\cdots-\frac{k_s}{k_{s+1}}\alpha_s$.

证明唯一性：假设β表示不唯一，$\beta=m_1\alpha_1+\cdots+m_s\alpha_s$，$\beta=n_1\alpha_1+\cdots+n_s\alpha_s$，两式相减，得$(m_1-n_1)\alpha_1+\cdots+(m_s-n_s)\alpha_s=0$，因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

所以$\begin{cases}m_1-n_1=0\\ \cdots\\ m_s-n_s=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_1=n_1\\ \cdots\\ m_s=n_s\end{cases}$，与假设冲突，故$\beta$表示具有唯一性.

★③替换定理：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，则$s\leq t$.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，且$s>t$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.（如例子中的小王和小张相关.）

推论：若$m>n$，则m个n维向量线性相关.（向量个数$>$向量维数）.

特别地，$n+1$个n维向量一定线性相关.（写成方程组的形式，方程个数小于未知数的个数，如$\begin{cases}k_1+2k_2+4k_3=0\\k_1+2k_2+5k_3=0\end{cases}$，最终得出的解不唯一且非零.）

推论：两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.（用两次替换定理即可.）

P24 3.3 向量组的秩（一）

极大线性无关组：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的部分组$\alpha_1,\alpha_2$，满足①$\alpha_1,\alpha_2$线性无关；②每个向量均可由$\alpha_1,\alpha_2$表示，称$\alpha_1,\alpha_2$为原来这个向量组的**极大线性无关组**，简称**极大无关组**.

如：$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$只留$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$，尽可能留下少的东西并能反应所有的信息.

α_1,α_2是极大无关组反应了①α_1,α_2线性无关；②原向量组中线性无关的向量组的向量个数最大.

定理①：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的部分组$\alpha_1,\alpha_r$是极大无关组的充要条件是：

①α_1,α_r线性无关；②向量组中任意$r+1$个向量都线性相关.

由定理可得：一个向量组的极大无关组是该向量组的所有线性无关部分组中所含向量个数最多的一个.

定理②：一个向量组的任意两个极大无关组，都含有相同个数的向量.

注：①全是零向量的向量组，只有这种向量组没有极大无关组；
②一个线性无关的向量组，它的极大线性无关组是它本身；
③任何向量组均与其极大无关组等价.

向量组的秩：向量组中极大无关组中所含向量的个数，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

规定：全是零向量的向量组的秩为零.

注：①$0\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le s$；

如：向量组$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\9\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\8\\1\end{pmatrix}$，得$0\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\le 5$，因为由前面学的$n+1$个$n$维向量一定线性相关可知，所以$0\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\le 3$

$\Rightarrow 0\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le \min\{$向量个数，向量维数$\}$.

②向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r = s$；

③向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r < s$.

定理③：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表示，则

$r\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\right) \le r\left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\right)$.

特别地，若两个向量组等价，则$r\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\right) = r\left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\right)$，即等价向量组有相同的秩，反之不一定成立.

P25 3.3 向量组的秩（二）

矩阵的行秩与列秩：一个 $m\times n$ 矩阵 A 的每一行（列）都可以看成一个 n 维（m 维）向量，称为矩阵 A 的行（列）向量，矩阵 A 的全体行（列）向量称为 A 的**行（列）向量组**.

矩阵 A 行向量组的秩称为矩阵 A 的行秩；矩阵 A 列向量组的秩称为矩阵 A 的列秩.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，行向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 1 & 5 & 6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，三个行向量为行向量组；六个列向量为列向量组.

定理：矩阵 A 的行秩=列秩= $r(A)$.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A)=0$.

定理：矩阵乘积的秩不大于每个矩阵的秩，即 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$.

求矩阵的秩：

例 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -13 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$ 的秩.

解：$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -13 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换化成阶梯形}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $r(A)=2$.

$$A=\begin{pmatrix}3&3&3\\2&-1&5\\-5&3&-13\\4&-3&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&5\\-5&3&-13\\4&-3&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&3\\0&8&-8\\0&-7&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

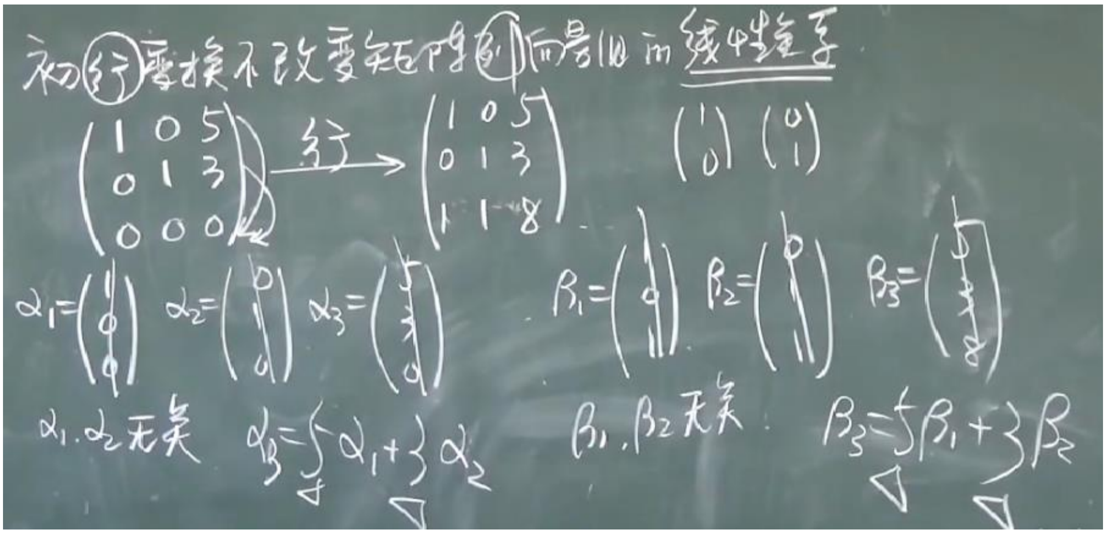
例 2. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2&-4&8&0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2&4&-2&3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3&-6&0&-6\end{pmatrix}$ 的秩，并判断是否线性相关.

解：把四个向量做成矩阵的列，得

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\-2&-4&4&-6\\2&8&-2&0\\-1&0&3&-6\end{pmatrix}$$，那么求向量组的秩就变成了求矩阵 A 的列秩，也即矩阵 A 的秩.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\-2&-4&4&-6\\2&8&-2&0\\-1&0&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{只做初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&2&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$，得 $r(A)=2<4$，极大无关组的个数是 2，向量组的个数是 4，那么向量组线性相关.

定理：初等**行（列）**变换不改变矩阵**列（行）**向量组的线性关系.



原来是线性无关的 α_1,α_2，只经过初等行变换之后的 β_1,β_2 也线性无关；

线性表示时，对应系数仍不变.

★极大无关组的求法：

①不管原向量是行向量还是列向量，均按列构成矩阵；

②只用初等行变换，化成**行简化阶梯形**矩阵；
③首非零元所在列，做极大无关组；
④其余向量表示系数用其它列直接写出来，全是零的行不要.

例 1. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2 & -4 & 8 & 0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组来表示所有其余向量.

解：$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -2 & -4 & 4 & -6\\ 2 & 8 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 3 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{只用初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 6\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

$\beta_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 是极大无关组，$\beta_3=-3\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2$，

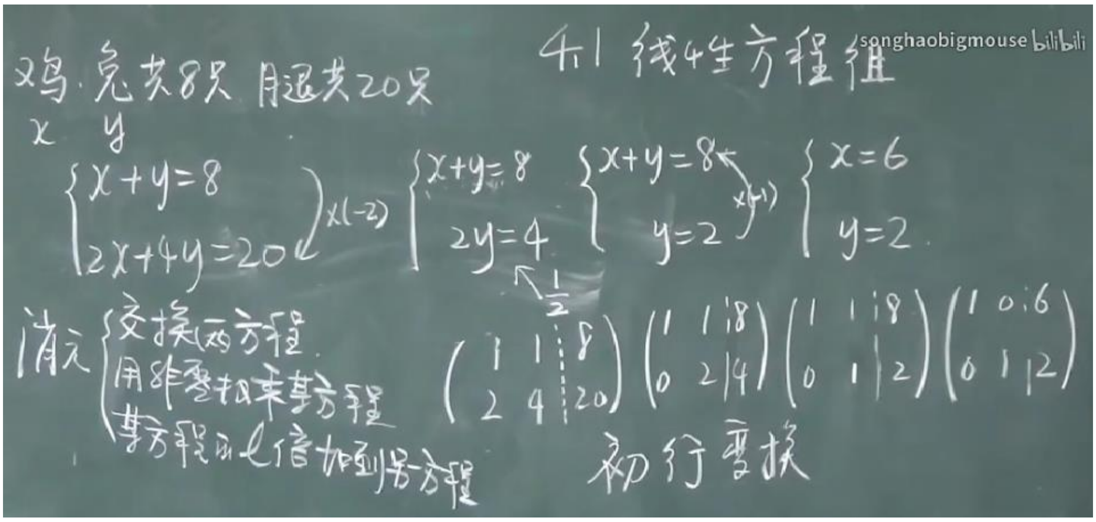
$\beta_4=6\beta_1-\frac{3}{2}\beta_2$，

故，α_1,α_2 是极大无关组，$\alpha_3=-3\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$，$\alpha_4=6\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2$.

例 2. 行简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是极大无关组，$\alpha_3=0\alpha_1+3\alpha_2+0\alpha_4$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4$.

P26 4.1 线性方程组



解释了方程组与矩阵之间的关系.

P27 4.2 线性方程组有解判定

先有方程组，再有行列式.
引例：

方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+9x_2+10x_3=11 \end{cases}$，系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -3 \\ 2 & 9 & 10 & \vdots & 11 \end{pmatrix}$$

向量表示形式：$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

对增广矩阵进行初等行变换，假设为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$，可得$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$，具有唯一解，且$r(A)=r(\overline{A})=3=$未知量的个数；

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，可得$\begin{cases} x_1=5-x_3 \\ x_2=9-x_3 \\ \end{cases}$，有无穷多解，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$；

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$，可得$\begin{cases} x_1+x_3=3 \\ x_2=4 \\ 0=1 \end{cases}$，0 无法等于1，无解，$r(A)=2\neq r(\overline{A})=3$.

结论：

① 当$r(A)=r(\overline{A})$，方程有解，$\begin{cases} r(A)=r(\overline{A})=n\text{，有唯一解} \\ r(A)=r(\overline{A})<n\text{，无穷多解} \end{cases}$；

② 当$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程无解.

方程组中有两个参数比较重要：m是方程的个数，n是未知量个数.

如何判断秩是否相等：

① 写出增广矩阵 $\overline{A}$；

② 只做初等行变换，化为阶梯形矩阵；

③ 看 $r(A)\overset{?}{=}r(\overline{A})$，阶梯形矩阵中虚线左边非零行行数是否等于带虚线右边非零行行数；

相等且等于未知量个数时，有唯一解；
相等且小于未知量个数时，有无穷多解；
不相等，无解.

④ 判断完有解无解后，化为行简化阶梯形矩阵，不管零行，非零行的首非零元 (1) 留在左边，其余变量移到右边，得到一般解.

如：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x_1 = 5 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 2 - x_3 - x_4 \end{cases}$.

例 1.

增广矩阵 $\overline{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$，得 $r(A) \neq r(\overline{A})$，故方程无解.

例 2.

增广矩阵 $\overline{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，得 $r(A) = r(\overline{A}) = n$，故方程有唯一解.

例 3.

增广矩阵 $\overline{A} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，得 $r(A) = r(\overline{A}) < n$。故方程有无穷多解，

（看画折线时，画到虚线时有没有拐弯，拐了无解，直着过去有解.）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$化为了行简化阶梯形，得

一般解$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{7}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$，$x_3, x_4$为自由未知量.

例 4.

已化为行简化阶梯形$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，得$\begin{cases} x_1 = 4 - 3x_4 + 0x_3 \\ x_2 = 1 - x_4 + 0x_3 \end{cases}$，$x_3, x_4$为自由未知量.

例 5. 当λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$有解？并求它的解是多少.

解：增广矩阵$\overline{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \vdots & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & \vdots & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \vdots & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}$，

当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，$r(A) = r(\overline{A}) = 3$，方程组有唯一解，继续化为行简化阶梯形矩阵，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \vdots & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & \vdots & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \vdots & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$，得

唯一解$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} \\ x_3 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{cases}$；

当$\lambda=0$时，由阶梯形可知$r(A)=1\neq r(\overline{A})=2$，故方程组无解；

当$\lambda=-3$时，由阶梯形可知$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，故方程组有无穷多解，即

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & \vdots & -3\\0 & -3 & 3 & \vdots & 6\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & -1\\0 & 1 & -1 & \vdots & -2\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$，得$\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_1=-2+x_3\end{cases}$，$x_3$为自由未知量.

（解题时，参数不能直接放到分母上，需要讨论参数是否等于 0.）

P28 4.3 齐次线性方程组

线性方程组等号右边都为零称为齐次线性方程组.

如：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1 \quad +4x_3=0 \end{cases}$，一定有解，至少有零解，

（秩是非零子式的最高阶数，所以右边多一列零，对非零子式无影响，故 $r(A)=r(\overline{A})$.）

① 当 $r(A)=r(\overline{A})=n$ 时，只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$；

② 有非零解（相当于无穷多解）$\Leftrightarrow r(A)<n$；（只要找到一个非零解，就可以找到无穷多个非零解.）

③ 方程个数 $<$ 未知量个数，有非零解；（由矩阵的秩可知，$r(A)=\min\{m,n\}=m<n$；也可写成向量的形式，会发现向量的个数大于向量的维数，向量组线性相关.）

④ 方程个数 $=$ 未知数个数，有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|=0 \Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow A$ 不可逆；

⑤ 方程个数 $=$ 未知数个数，只有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

例 1. 下面向量组是否线性相关？若线性相关，求一组相关系数.

$\alpha_1=(1,3,0,5)$，$\alpha_2=(1,2,1,4)$，$\alpha_3=(1,1,2,3)$，$\alpha_4=(2,5,1,9)$，

$\alpha_5=(1,-3,6,-1)$.

解：此向量组为 5 个 4 维向量，故该向量组必线性相关，改写成齐次线性方程组为：

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+9x_4-x_5=0 \end{cases}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_5 - x_4 + x_3 \\ x_2 = -6x_5 - x_4 - 2x_3 \end{cases}$，取 $x_3 = x_4 = x_5 = 1$，那么一组相关系数为 $x_1 = 5, x_2 = -9$，$x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

P29 4.4 方程组解的结构（一）

齐次线性方程组解的结构：$Ax = 0$
性质：

① η_1 和 η_2 是 $Ax = 0$ 的解，那么 $\eta_1 + \eta_2$ 也是 $Ax = 0$ 的解；

如：$A(\eta_1 + \eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = 0 + 0 = 0$.

② η 是 $Ax = 0$ 的解，那么 $C\eta$ 也是 $Ax = 0$ 的解；

如：$A(C\eta) = CA\eta = C \times 0 = 0$.（类似微积分中高阶线性微分方程解的结构）

基础解系：如果齐次线性方程组的一组解向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$，满足：

① $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关；

② 齐次线性方程组的每个解可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性表示.

则称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是齐次线性方程组的一个**基础解系**，基础解系就是解向量的一个极大无关组.

例 1. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系.

解：方程个数小于未知量个数，故方程组有无穷多解，

系数矩阵 $A = (\ ) \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可得 $\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 = -\frac{3}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_5 \end{cases}$，

其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得

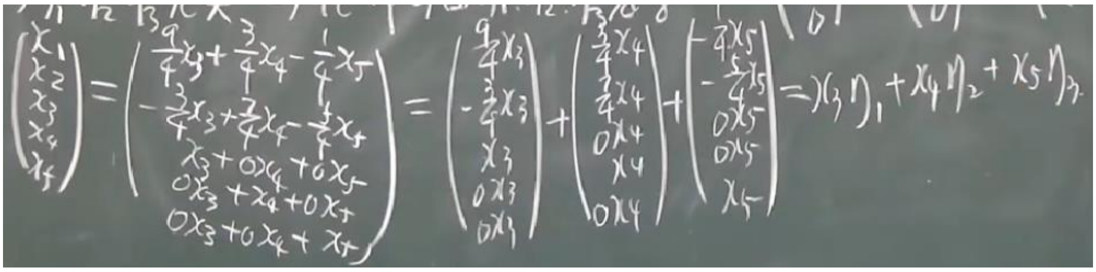
$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，那么 η_1, η_2, η_3 是一个基础解系.

证明：

① η_1, η_2, η_3 线性无关：

线性无关向量组的高维（接长）向量组也无关；

② 任解可由 η_1, η_2, η_3 表示：



常见问题：

① $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 取得是线性无关的，都能构成基础解系；

②若是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，就分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；若是 (x_1)，就取 (1)；

③基础解系中解向量的个数 $=$ 自由未知量的个数 $= n - r(A)$

定理：设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 r，且 $r < n$，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为方程组的一个基础解系，则方程组的所有解可以表示为：$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数，η 称为方程组的通解（或全部解）.

（这里容易混淆极大无关组的解题思路，基础解系是所有解向量的极大无关组，而我们前面求的极大无关组的把一个向量组按列放形成的矩阵，类似于方程组的系数矩阵，所以一个是未知量构成的向量组，一个是系数构成的向量组，区别在此.）

例 2. 求齐次方程组的通解.

解：系数矩阵 $A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = 0x_2 - \frac{5}{7}x_4 \end{cases}$， x_2, x_4 为自由未知数，

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$，那么 η_1, η_2 为一个基础解系，所以方程组的通解 $\eta = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$， c_1, c_2 为任意常数.

例 3. 求齐次方程组的通解.

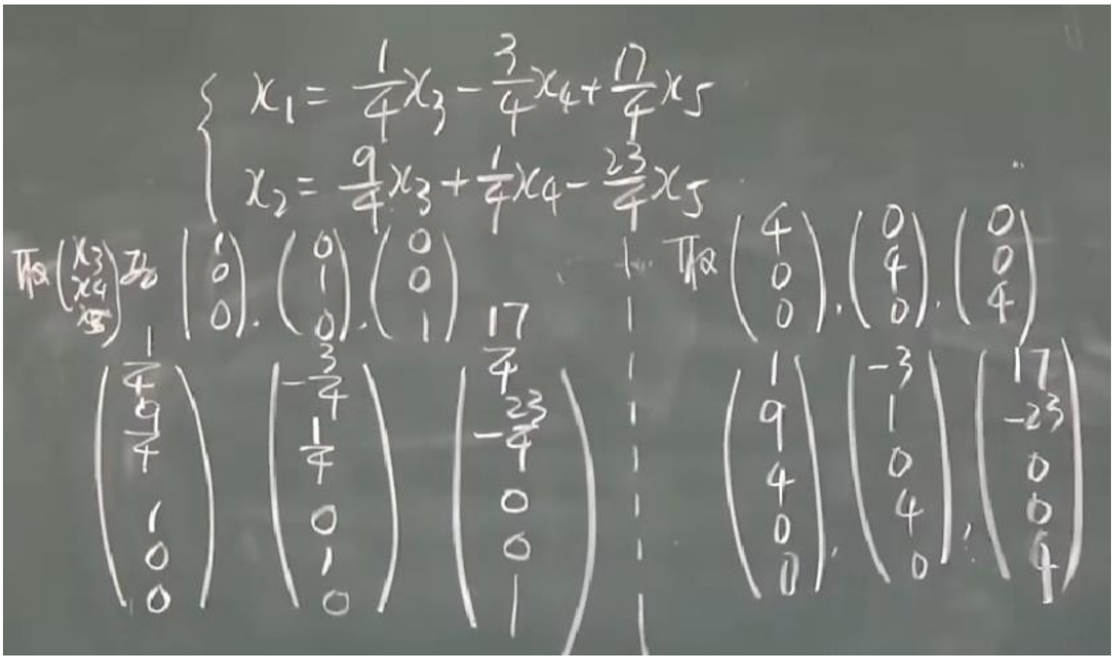
解：系数矩阵 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x_1 = 0x_2 + 0x_4 + 0x_5 - x_6 \\ x_3 = 0x_2 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{cases}$，

x_2, x_4, x_5, x_6 为自由未知数，令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得

$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，那么方程组的通解为

$\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3+c_4\eta_4$， c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

注意事项：
①同解方程组等号右边的都是自由未知量；
②同解方程组等号右边存在共同的分母，注意取值，方便计算.



★★★例 4. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 与矩阵 $B_{n\times s}$ 满足 $AB=O$，求证：$r(A)+r(B)\le n$

证明：对矩阵 B 按列进行分块，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，根据分块矩阵的乘法，

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)=O$，所以 $A\beta_i=0$，其中

$i=1,2,3,\cdots,s$，β_i 就相当于以 A 为系数矩阵构成的齐次线性方程组的解向量，

当 $r(A)=n$ 时，齐次方程组只有零解，说明 $\beta_i=O$，即矩阵 B 的列向量均为零，

矩阵的秩等于其列秩 $r(B)=0$，那么 $r(A)+r(B)\le n$ 成立；

当 $r(A)<n$ 时，齐次方程组有无穷多解，基础解系中有 $n-r(A)$ 个解向量，即所有

解向量的极大无关组中的向量个数为$r(A)-n$，而β_i只有s个解向量不是所有解，

所以$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(B)\le n-r(A)\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.

P30 4.4 方程组解的结构（二）

非齐次线性方程组解的结构：$Ax=b$
若b全部换成零，称齐次线性方程组$Ax=0$是非齐次线性方程组的导出方程组，简称导出组.

性质：

①α_1,α_2是$Ax=b$的解，那么$\alpha_1-\alpha_2$是$Ax=0$的解；

证明：$A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=b-b=0$.

②若α_0是$Ax=b$的解，η是$Ax=0$的解，那么$\alpha_0+\eta$是$Ax=b$的解；

证明：$A(\alpha_0+\eta)=A\alpha_0+A\eta=b+0=b$.

定理：若α_0是$Ax=b$的一个解（通常称为特解），η是导出组$Ax=0$的通解，即

$\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$为导出组$Ax=0$的一个基础解系，则

$Ax=b$的通解为$\alpha=\alpha_0+\eta$.（类似微积分中高阶线性微分方程解的结构，非齐次

的通解=一个非齐次的特解＋对应的齐次通解.）

例 1. 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$的通解.

解：增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1\\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 3\\ 3 & 8 & -1 & 1 & \vdots & 1\\ 1 & -9 & 3 & 7 & \vdots & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & \frac{13}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \vdots & -\frac{4}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$，得

$\begin{cases}x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\ x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$，$x_3,x_4$为自由未知量，取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，则$\alpha_0=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$是非齐次线性方程组的一个特解，

导出组的同解方程组为$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\ x_2=\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$，$x_3,x_4$为自由未知量，令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$分别取

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\ \frac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\ \frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$，那么非齐次线性方程组得通解

$\alpha=\alpha_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$，其中$c_1,c_2$ 为任意常数.

求非齐次通解的步骤：

①写出增广矩阵$\overline{A}$，只做初等行变换，化为行简化阶梯形矩阵；

②非零行的首非零元的 1 留在等号左边，其余的挪到右边，写出非齐次的同解方程组，指出谁是自由未知量（不在左边的都是自由未知量）；

③令自由未知量均取 0，得非齐次的一个特解；

④令非齐次的同解方程组等号右边的常数项均为 0，得导出组的同解方程组，指出谁是自由未知量，令自由未知量$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\end{pmatrix}$分别取$\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\end{pmatrix}\cdots$，得导出组的基础解系；

⑤非齐次特解＋导出组基础解系的线性组合.

例 2. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的三个解向量，且$\alpha_1=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,2,3,4)^T$，求该方程组的通解.

解：由非齐次线性方程组解的结构可得，

$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=2(2,3,4,5)^T-(1,2,3,4)^T=(3,4,5,6)^T$是导出组的一个解，

因为非齐次为四元，且$r(A)=3$，所以导出组基础解系中的解向量个数为 1，

故非齐次通解$\alpha=\alpha_1+c_1(3,4,5,6)^T$，其中$c_1$为任意常数.

若题目中改成$\alpha_2+2\alpha_3=(1,2,3,4)^T$，只需写成：

$3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=3(2,3,4,5)^T-(1,2,3,4)^T$，其余步骤类似.

P32 5.1 矩阵的特征值与特征向量（一）

设A是n阶方阵，若对于数λ，存在非零列向量α，使得$A\alpha=\lambda\alpha$，则称λ为方阵A的一个**特征值**，α为方阵A对应于特征值λ的**特征向量**.

注意事项：λ可以为 0；特征向量不能为O.

如何求特征值：

$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A\alpha=\lambda E\alpha\Rightarrow\lambda E\alpha-A\alpha=0\Rightarrow(\lambda E-A)\alpha=0$,

即求$(\lambda E-A)x=0$的非零解$\Leftrightarrow$系数行列式$|\lambda E-A|=0$.

称$\lambda E-A$为方阵A的特征矩阵，其行列式$|\lambda E-A|$称为A的特征多项式；

$|\lambda E-A|=0$称为A的**特征方程**，所以有时特征值也称为特征根.

结论：

①λ是A的一个特征值，α是λ对应的特征向量，那么$c\alpha\ (c\neq 0)$也是λ对应的特征向量.

证明：已知$A\alpha=\lambda\alpha$，显然$A(c\alpha)=\lambda(c\alpha)$.

所以一个特征值可以对应无穷个特征向量，但反之，一个特征向量只能对应一个特征值.

证明:若$\alpha\left(\alpha \neq O\right)$是$\lambda_1,\lambda_2\left(\lambda_1 \neq \lambda_2\right)$的特征向量,那么$A\alpha=\lambda_1\alpha$,$A\alpha=\lambda_2\alpha$

两式相减,得$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\alpha=O$,又因为$\alpha \neq O$,所以$\lambda_1=\lambda_2$与假设冲突,故一个特征向量只能对应一个特征值.

②若α_1与α_2是λ对应的特征向量,则非零向量$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$也是λ对应的特征向量.

证明:$A\alpha_1=\lambda\alpha_1$,$A\alpha_2=\lambda\alpha_2 \Rightarrow Ac_1\alpha_1=\lambda c_1\alpha_1$,$Ac_2\alpha_2=\lambda c_2\alpha_2$,两式相加,得

$Ac_1\alpha_1+Ac_2\alpha_2=\lambda c_1\alpha_1+\lambda c_2\alpha_2 \Rightarrow A\left(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2\right)=\lambda\left(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2\right)$,得证.

P33 5.1 矩阵的特征值与特征向量(二)

例 1. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解:$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$,

$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\left[\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-3\right)+4\right]=\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-1\right)$,

所以特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$(重根都要写出来),

[如何解这个行列式:
①不要完全展开;
②找零多的某行(列),按行(列)展开;
③提某行(列)含λ的公因子;
④有相反数或相同数利用行列式的运算消掉;如果每行(列)元素之和是一样的,制造行(列)和.]

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时,$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得同解方程组,

$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 (x_3) 取 (1)，得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，故矩阵 A 对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $c_1\eta_1 = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c_1$ 为任意非零常数.

当 $\lambda_3 = 2$ 时，$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 (x_3) 取 (1)，得基础解系 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，故矩阵 A 对应于 $\lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $c_2\eta_2 = c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c_2$ 为任意非零常数.

（所以求矩阵 A 的特征值，就是再求特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的根；对应的特征向量就是以 $(\lambda E - A)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的通解；弹幕中有很多人反映不会变换成行简化阶梯形矩阵，思路是先把 a_{11} 化成 1，再把第一列其他行化成 0，把 a_{22} 化成 1，再把第二列其他行化成 0…，化成 1 的过程可以交换两行，也可以提取公因子.）

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$，

注意：① λ 只在主对角线；② A 的所有元素都取相反数.

例 2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+7)$，（第二行加到第三行上去；提取公因子；按第三行展开.）

特征值 $\lambda_1=-7$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，

当 $\lambda_1=-7$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ -8 & 2 & -2\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得同解方程组 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，$x_3$

为自由未知量，令 (x_3) 取 (-2)，得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$，故矩阵 A 对应于 $\lambda_1=-7$ 的

全部特征向量为 $c_1\eta_1=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$，$c_1$ 为任意非零常数.

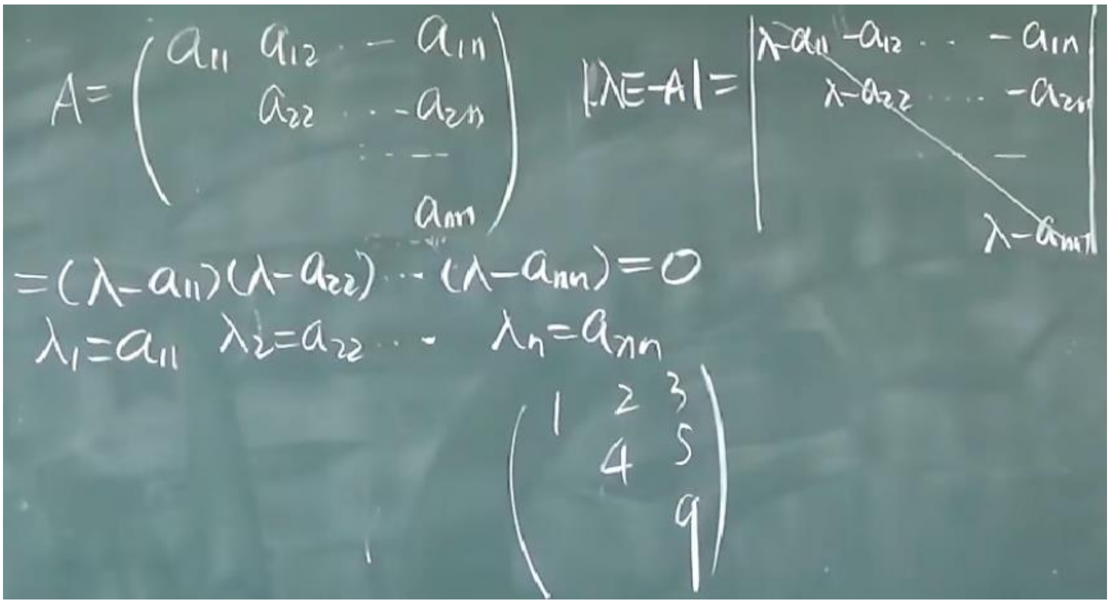
当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得同解方程组

$\{x_1=-2x_2+2x_3$，x_2,x_3 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，得基础解系

$\eta_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，故矩阵 A 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为

$c_2\eta_2+c_3\eta_3=c_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$c_2,c_3$ 是不同时为 0 的任意常数.

例 3. 证明：n 阶三角形矩阵的特征值是主对角线上的 n 个元素.



P34 5.1 特征值和特征向量的性质

练习：求 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：$|\lambda E-A|=|\lambda E|=\begin{vmatrix}\lambda&&\\&\lambda&\\&&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$，得特征值 $\lambda=0$，

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，没有非零行首非零元为 1，所以 x_1,x_2,x_3 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

故矩阵 A 对应于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

c_1,c_2,c_3 是不同时为 0 的任意常数，所以非零的向量都是特征向量.

特征值与特征向量的基本性质：

★★①矩阵 A 与 A^T 有相同的特征值；

证明：$\left|\lambda E-A^T\right|=\left|\lambda E^T-A^T\right|=\left|(\lambda E-A)^T\right|=\left|\lambda E-A\right|$.

注：虽然矩阵 A 与 A^T 有相同的特征值，但是它们的特征向量却不一定相同.

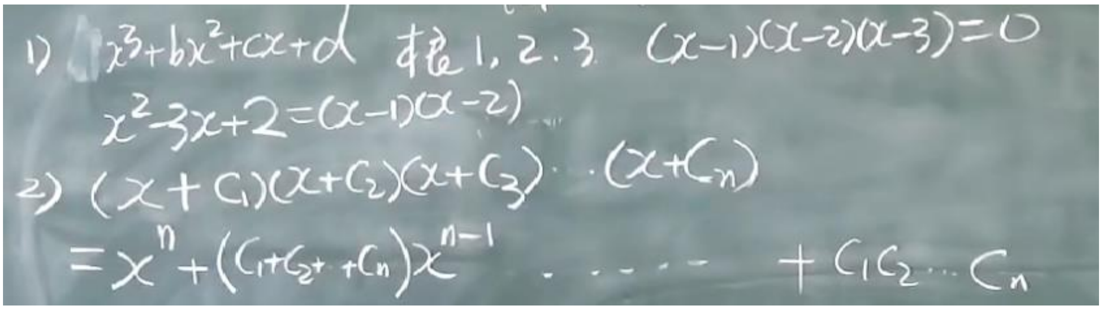
②矩阵 A 的每行元素绝对值之和<1或矩阵 A 的每列元素绝对值之和<1，则 A 的所有特征值的膜都<1，即 $\left|\lambda_k\right|<1$.

★★★③矩阵 A 有 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则：

（1）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，所有特征值之和等于矩阵 A 主对角线元素之和；

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|A\right|$，所有特征值相乘等于 A 的行列式.

引例：



在（2）中，求常数项时，只需把 $x=0$ 代入.

证明：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

对这个行列式按第一行展开

$$\left|\lambda E-A\right|=\left(\lambda-a_{11}\right)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+\left(-a_{12}\right)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-a_{21} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots$$

可以发现，只有第一行第一个元素会出现 λ^n 与 λ^{n-1}，因为第一行第二个元素展开时所在行所在列去掉，相当于消去了 2 个 λ，所以后面项的次数最多只有 λ^{n-2}，

那么我们对 λ^n 与 λ^{n-1} 进一步发现，只有 $(\lambda-a_{11})$ 与 $\begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$ 主对角线元素相乘才会有 λ^n 与 λ^{n-1}，理由同上，所以进一步展开可得：

$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$，

令 $\lambda=0$，$|\lambda E-A|=|0-A|=|-A|=(-1)^n|A|$，我们就可以得到没有 λ 的**所有常数项**，即：$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$，

由题意可知，特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么通过引例（1）并展开可知：

$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

对比两个式子的结果，我们可以发现 λ^{n-1} 的系数与常数项部分都应该对应相等，

故：$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$，即 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，

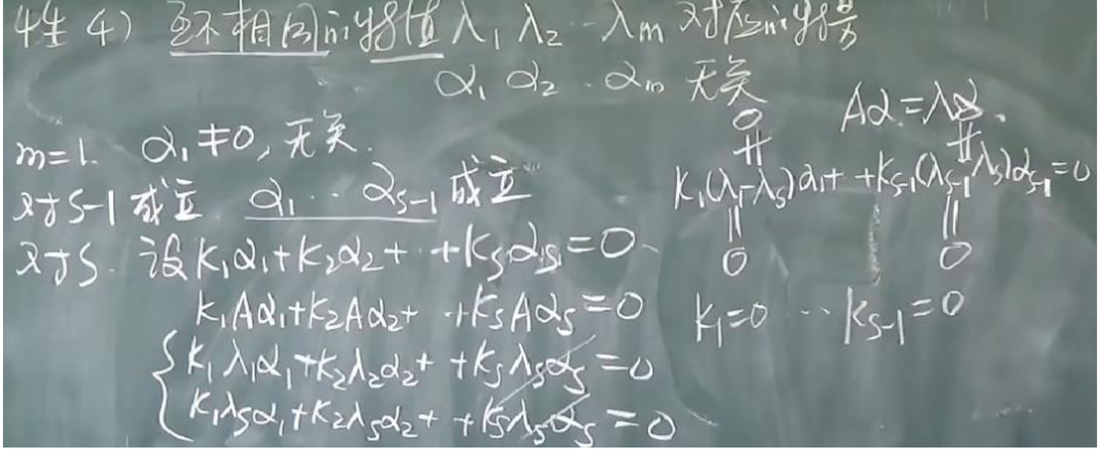
$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，即所有特征值相乘等于 A 的行列式.

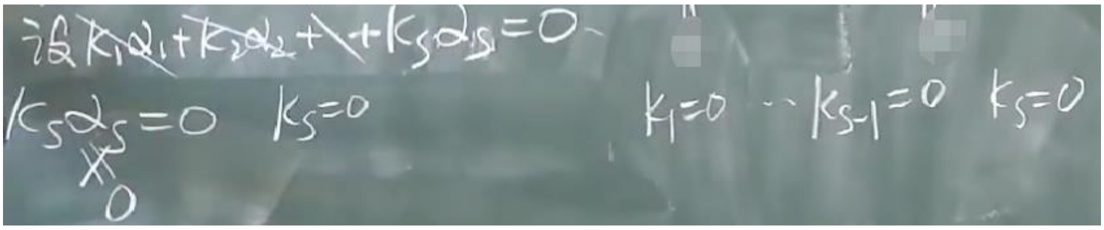
我们称 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为矩阵 A 的**迹**，记作 $tr(A)$.

推论：矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 的所有特根值都不等于零.

④矩阵 A 互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 对应的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

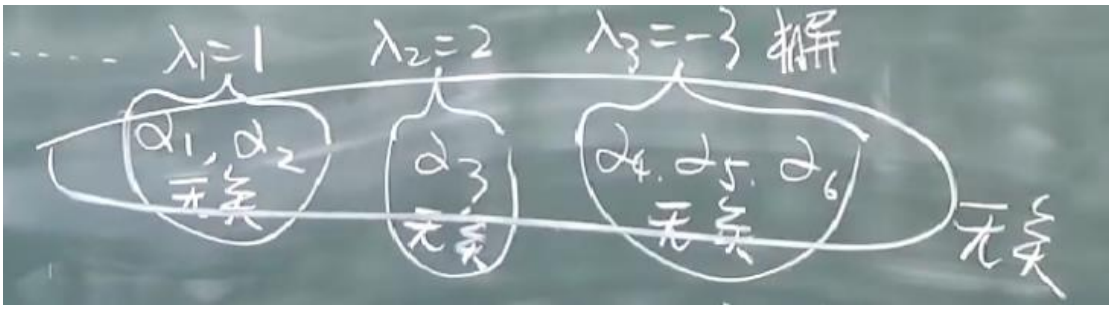
证明：数学归纳法（三步）：①证明 $m=1$ 时成立；②假设 $s-1$ 成立；③证明 s 成立.





（有弹幕说：“一个特征值可以对应多个特征向量，且这些特征向量是线性相关的，即特征向量线性相关，特征值相同，那么逆否命题，特征值不同，对应的特征向量线性无关.”这是错的，如：我们知道特征值对应的特征向量就是以$(\lambda E-A)$为系数矩阵的齐次线性方程组的通解，那么基础解系中$\eta_1,\eta_2,\cdots$也是特征向量，但是它们线性无关.）

⑤互不相同的特征值对应的特征向量，无论这些特征值中一个对应多少线性无关的特征向量，把所有这些特征向量接在一起，它们仍是线性无关的.（无关的无关还是无关）



⑥k重特征根对应的线性无关的特征向量的个数小于等于k，特别地，单特征根对应的线性无关的特征向量仅有一个.

如：A为 6 阶方阵，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$（3 重），$\lambda_4=\lambda_5=0$（2 重），$\lambda_6=5$（单重）

对应的线性无关的特征向量个数分别为：$\le 3;\le 2;=1$.

结论：n阶矩阵A的线性无关的特征向量个数小于等于n个.

其他性质：设λ是矩阵A的特征值.

①$k\lambda$是kA的特征值；

证明：$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow(3A)\alpha=(3\lambda)\alpha$.

②λ^2是A^2的特征值；

证明：$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow AA\alpha=A\lambda\alpha=\lambda A\alpha=\lambda\lambda\alpha\Rightarrow A^2\alpha=\lambda^2\alpha$.

同理：λ^3是A^3的特征值；λ^k是A^k的特征值；

③$f(\lambda)$是$f(A)$特征值；

如：2 是矩阵 A 的特征值，且 $f(A)=A^5+6A^2+A+3E$，那么 $f(A)$ 的特征值

$f(2)=2^5+6\times2^2+2+3$，注意单位阵 E 的特征值为 1.

④若矩阵 A 可逆，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，$\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值.

证明：$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A^{-1}A\alpha=A^{-1}\lambda\alpha\Rightarrow\alpha=A^{-1}\lambda\alpha\Rightarrow\frac{1}{\lambda}\alpha=A^{-1}\alpha$，

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*\Rightarrow A^{-1}\alpha=\frac{1}{|A|}A^*\alpha\Rightarrow\frac{1}{\lambda}\alpha=\frac{1}{|A|}A^*\alpha\Rightarrow\frac{1}{\lambda}|A|\alpha=A^*\alpha$.

问：$(A^*)^*$ 的特征值为多少？

解：由 $\frac{1}{\lambda}|A|\alpha=A^*\alpha$，$\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值可得，

$\frac{1}{\frac{1}{\lambda}|A|}|A^*|\alpha=(A^*)^*\alpha$，故 $(A^*)^*\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}|A|}|A|^{n-1}\alpha=\lambda|A|^{n-2}\alpha$，其特征值为 $\lambda|A|^{n-2}$.

（$|AA^*|=||A|E|=|A|^n\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}$，见第 35 页.在替换 $A\to A^*$ 时，A 的特征值也要替换为 A^* 的特征值.）

问：$((A^*)^*)^*$ 的特征值为多少？

解：$\frac{1}{\lambda|A|^{n-2}}|(A^*)^*|\alpha=((A^*)^*)^*\alpha$，$|(A^*)^*|=|A^*|^{n-1}=(|A|^{n-1})^{n-1}$，故 $((A^*)^*)^*$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda|A|^{n-2}}(|A|^{n-1})^{n-1}$.

例 1. 设 A 为四阶方阵，满足 $|3E+A|=0$，$AA^T=2E$，且 $|A|<0$，求伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

解：$|3E+A|=|-(-3E-A)|=(-1)^4|(-3E-A)|=0$，所以 $\lambda=-3$ 是矩阵 A 的特征值，

$AA^T=2E\Rightarrow|AA^T|=|2E|\Rightarrow|A|^2=2^4|E|=16$，$|A|<0$，所以 $|A|=-4$，

A^* 的一个特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|=\frac{1}{-3}\times(-4)=\frac{4}{3}$.

例 2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$，有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4,\lambda_3$，求 a,b 的值及 λ_3.

解：$\begin{cases}1+a+b=-2+4+\lambda_3\\ (-2)\times4\times\lambda_3=|A|\end{cases}$，$|\lambda_1E-A|=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -3\\ -3 & -2-a & -3\\ -6 & 6 & -2-b\end{vmatrix}=3(5+a)(4-b)=0$，

$|\lambda_2E-A|=\begin{vmatrix}3 & 3 & -3\\ -3 & 4-a & -3\\ -6 & 6 & 4-b\end{vmatrix}=3[72-(7-a)(2+b)]=0$，得 $\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}$，$\lambda_3=-2$.

例 3. 设三阶 A 的特征值为 4 和 -1（二重），求 $|A|$ 和 $tr(A)$.

解：$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$, $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$.

例 4. 已知 n 阶方阵 A 的一个特征值为 $\lambda_0=2$，求：

（1）$E+2A$ 的一个特征值；

（2）A^T 的一个特征值；

（3）若 A 可逆，求 A^{-1} 的一个特征值；

（4）若 A 可逆，且 $|A|=k$，求 A^* 的一个特征值.

解：（1）$E+2A$ 的一个特征值为 $1+2\times2=5$；

（2）A^T 的一个特征值为 2；

（3）若 A 可逆，A^{-1} 的一个特征值为 $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$；

（4）若 A 可逆，且 $|A|=k$，A^* 的一个特征值为 $\frac{1}{\lambda}|A|=\frac{k}{2}$.

例 5. 三阶矩阵 A 的特征值分别为 $-1,1,2$，矩阵 $B=A^3-5A^2+3A+E$，求 $|B|$.

解：矩阵 B 的特征值分别为 $(-1)^3-5(-1)^2+3(-1)+1=-8$，$1^3-5\times1^2+3\times1+1=0$，

$2^3-5\times2^2+3\times2+1=-5$，$|B|=(-8)\times0\times(-5)=0$.

P36 5.2 相似矩阵和矩阵可对角化的条件

相似矩阵:设矩阵 A,B 是 n 阶同阶方阵,若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 与 B 相似，记作 $A\sim B$.

相似的性质:

①反身性: $A\sim A$;

证明: $E^{-1}AE=A$.

②对称性:若 $A\sim B$，则 $B\sim A$;

证明: $P^{-1}AP=B\Rightarrow PP^{-1}APP^{-1}=PBP^{-1}\Rightarrow A=PBP^{-1}\Rightarrow A=\left(P^{-1}\right)^{-1}BP^{-1}$.

③传递性:若 $A\sim B$， $B\sim C$，则 $A\sim C$.

证明: $P^{-1}AP=B,Q^{-1}BQ=C\Rightarrow Q^{-1}P^{-1}APQ=Q^{-1}BQ=C\Rightarrow(PQ)^{-1}APQ=C$.

相似矩阵的性质:

①若 $A\sim B$，则矩阵 A,B 有相同的特征值，从而 $|A|=|B|$，即 $tr(A)=tr(B)$;

证明: $|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|$，特征方程相同，所以具有相同的特征值.

（回忆：$AA^{-1}=E\Rightarrow\left|AA^{-1}\right|=|E|\Rightarrow|A|\left|A^{-1}\right|=|E|=1$.）

注意：逆命题：矩阵 A,B 有相同的特征值，不一定能得出 A 与 B 相似.

②若 $A\sim B$，则 A 可逆 $\Leftrightarrow$ B 可逆，而且当 A,B 都可逆时，有 $A^{-1}\sim B^{-1}$；

证明：因为 $A\sim B$，有 $|A|=|B|\begin{cases}\neq 0 & A,B\text{可逆}\\ =0 & A,B\text{不可逆}\end{cases}$，$B^{-1}=\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，所以

$A^{-1}\sim B^{-1}$.

若 $A\sim B$，则 A,B 同时可逆或同时不可逆.

③若 $A\sim B$，则 $A^m\sim B^m$（m 为正整数）.

证明：因为 $P^{-1}AP=B$，那么

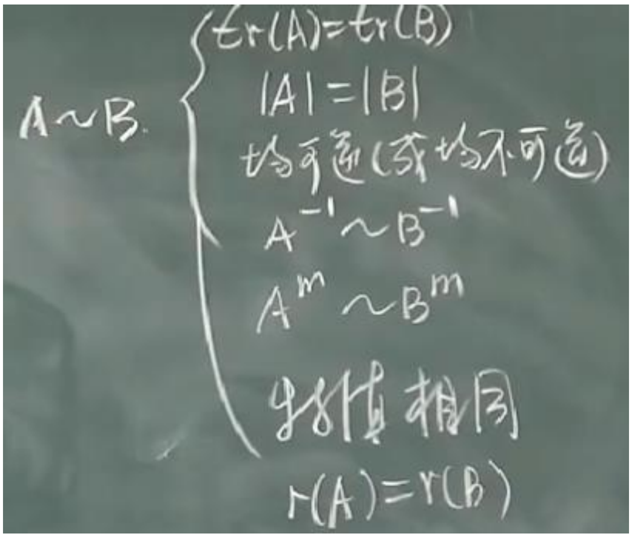
$B^m=\left(P^{-1}AP\right)^m=\underbrace{P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP}_{m\text{个}}=P^{-1}AEAE\cdots EAP=P^{-1}A^mP$，所以 $A^m\sim B^m$.

例 1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&2&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&-1&b\end{pmatrix}$，且 $A\sim B$，求 a,b 的值.

解：$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&2&a\end{vmatrix}=2(a-2)$，$|B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&-1&b\end{vmatrix}=3b+2$，

$tr(A)=3+a$，$tr(B)=4+b$，$\begin{cases}2(a-2)=3b+2\\ 3+a=4+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-4\end{cases}$.

相似矩阵小结（重要性从上往下排列）：



矩阵与对角形矩阵相似$\left(P^{-1}AP=\Lambda\,,A\sim\Lambda\right)$的条件：

定理：若n阶矩阵 A 相似于对角形矩阵$\Lambda \Leftrightarrow A$ 有n个线性无关的特征向量.

证明：必要性：若 $A\sim\Lambda$，则有 $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow AP=P\Lambda$，设可逆矩阵

$$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)，\quad A\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$\left(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n\right)=\left(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n\right)$，得到

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1\,,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\,,\cdots,A\alpha_n=\lambda_n\alpha_n$，即$\lambda_i$是矩阵 A 的特征值，α_i是对应于λ_i的特征向量，因为$\alpha_i\neq 0$且可逆矩阵 P 满秩$r\left(P\right)=n$，其列秩$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=n$，所以向量组$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$的秩等于向量的个数，故$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$线性无关.

（通过此证明过程我们可以发现，对角形矩阵就是矩阵 A 的特征值放在主对角线上，可逆矩阵 P 按列分块后的每一列就是对应的特征向量.）

推论：如果n阶矩阵 A 有n个互异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 A 与对角形矩阵

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$相似，即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

证明：n阶矩阵 A 有n个互异的特征值（充分条件），则必有n个线性无关的特征向量，那么 $A\sim\Lambda$.

①矩阵 A 的特征根都是单根，则一定相似于对角形矩阵；

②每一个重根的线性无关的特征向量个数等于重数，才相似于对角形矩阵.

例 1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$，判断其是否于对角形矩阵相似？若相似求相应的对角形矩阵 Λ 和可逆矩阵 P.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3\lambda+6&0&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=-3(\lambda-2)(4-\lambda-2)+(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda+2)+4\right]$

$=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-8)=(\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-4$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\\-3&-6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得同解方程组

$x_1=-2x_2+x_3$，其中 x_2,x_3 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系

$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，此基础解系即为所要找的线性无关的特征向量；

当$\lambda_3=-4$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-7&-2&1\\2&-2&-2\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$，得同解方程组

$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_3\\x_2=-\frac{2}{3}x_3\end{cases}$，其中$x_3$为自由未知量，令$(x_3)$为$(3)$，得基础解系$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，

故 3 阶矩阵A存在 3 个线性无关的特征向量，可以与对角形矩阵相似，

对角形矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-4\end{pmatrix}$，可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

定理：n阶矩阵$A\sim\Lambda\Leftrightarrow$对于$A$的每一个$r_i$重特征根，其基础解系中的解向量均有$r_i$个.（就是每一个重根的线性无关的特征向量个数等于重数）

例 2. 设 3 阶矩阵A的 3 个特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的特征向量分别为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$，求：

（1）矩阵A；（2）A^T的特征值与特征向量.

解：（1）由题意可知，可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，

$$(P,E)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&&\\1&2&3&&1&\\1&3&6&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&-3&5&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{pmatrix}=(E,P^{-1})$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&2\\3&-9&7\end{pmatrix}.$$

（2）A^T 的特征值分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，

$$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^T=\Lambda^T \Rightarrow P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=\Lambda^T \Rightarrow P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=\Lambda^T=\Lambda$$

$\left(\left(P^T\right)^{-1}\right)^{-1}A^T\left(P^T\right)^{-1}=\Lambda$，

解出 $\left(P^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$，所以 A^T 的特征向量分别为 $c_1\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix},c_2\begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix},c_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

例 3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

解：（$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$.）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\2&\lambda&-2\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\2&\lambda&-2\\1-\lambda&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)+(\lambda-1)\left(\lambda^2+2\right)$$

$=(\lambda-1)\left(\lambda^2+2+\lambda-2\right)=(\lambda-2)\lambda(\lambda+1)$，

求出矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$，对应的特征向量分别为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$，得 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$，

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\2&1&-2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\2&1&-2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-2&0&2\\-2&-1&3\end{pmatrix}$.

P37 5.3 实对称矩阵的对角化（一）

5.2 回顾：什么矩阵能对角化？
答：n阶矩阵具有n个线性无关的特征向量.
在此节中记住一句话：所有实对称矩阵都能对角化.

向量的内积（类似点乘）：设向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，称实数$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$为向量$\alpha$与$\beta$的**内积**，记作$(\alpha,\beta)$，即$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$

（α,β是列向量，若是行向量则等于$\alpha\beta^T$.）.

如：$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$(\alpha,\beta)=1\times0+2\times0+3\times8=24$.

内积是一个数，对应分量相乘再相加.

内积的性质：设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

①非负性：$(\alpha,\alpha)\geq0$，$(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+a_3^2\geq0$，当且仅当$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=O$；

②对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

③齐次性：$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)$；$(k\alpha,\beta)=ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3=k(\alpha,\beta)$.

同理可推$(k\alpha,k\beta)=k^2(\alpha,\beta)$.

④线性性：$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$.

（这些性质与微积分中向量的点乘一样，把括号内的逗号看成点乘的“·”即可，学过可不记.）

向量的长度（或称范数、膜）：记作$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.（同点乘，$\alpha\cdot\alpha=|\alpha||\alpha|\cos0=|\alpha|^2$，$|\alpha|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$.）

如：$\alpha=(-1,-1,5)$，$\|\alpha\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}$，点到原点的距离.

长度为 1 的向量称为单位向量，$\|\alpha\|=1$，如$\alpha=(1,0,0)$.

$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量，这种得到单位向量的方法称为将$\alpha$单位化（或标准化）.

P38 5.3 实对称矩阵的对角化（二）

向量长度的性质：

①非负性：$\|\alpha\| \geq 0$，当且仅当$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = O$；

②齐次性：$\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$；$\|k\alpha\| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)} = |k| \cdot \|\alpha\|$.

③柯西——施瓦兹不等式：$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

④三角不等式：$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$；（三角形两边之和大于第三边，向量同向时相等.）

正交：若$(\alpha, \beta) = 0$，则称向量α与β正交（或垂直），记作$\alpha \perp \beta$.

零向量与任何向量都正交，与自身正交的向量只有零向量.

正交向量组：<u>不含零向量</u>的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$两两正交，则称此向量组为正交向量组. 若正交向量组中每一个向量都是单位向量，则称此向量组为标准正交向量组（或单位正交向量组），即$\begin{cases} (\alpha_i, \alpha_i) = 1 \\ (\alpha_i, \alpha_j) = 0 \end{cases}$.

定理：若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是正交向量组，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$必线性无关.

证明：设$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = O$，那么$(\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) = (\alpha_1, O) = 0$，因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是正交向量组，所以展开得$k_1(\alpha_1, \alpha_1) = 0$，即$k_1 = 0$，同理可得$k_2 = k_3 = \cdots = k_s = 0$，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

施密特正交化：给一组线性无关的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，去求与之等价的正交向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，此方法称为施密特正交化.

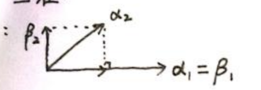
①令$\beta_1 = \alpha_1$；

②$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$，$\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$，…

（这里是利用了向量的投影与向量的加减的运算，如：

二维：

如：



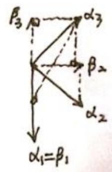
$\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|}$ 是 α_2 在 β_1 上的投影，

$\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$ 是与 β_1 同向的单位向量，

那么 $\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|}\cdot\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1$ 是 α_2 在 β_1 上投影出的向量.

故，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.

同理：三维空间



$\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1$ 是 α_3 在 β_1 上投影出的向量；

$\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\cdot\beta_2$ 是 α_3 在 β_2 上投影出的向量；

故 $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\cdot\beta_2$.

例 1. 将向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,-3,-4)^T$，$\alpha_3=(1,2,2,3)^T$，化为标准正交向量组.

解：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

取 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T$；$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(3,0,-1,-2)^T$；

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\left(\frac{1}{14},0,-\frac{5}{14},\frac{2}{7}\right)^T,$$

得单位正交向量组：$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$，

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},0,-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^T,\quad \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{42}},0,-\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}\right)^T.$$

P39 5.3 实对称矩阵的对角化（三）

正交矩阵：设 A 为 n 阶方阵，且 $A^TA=E$，则称 A 为**正交矩阵**.

正交矩阵的性质：

①若 A 为正交矩阵，则 $|A|=-1$ 或 -1；

证明：$\left|A^T A\right|=|E|=1 \Rightarrow |A|^2=1$.

②若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1}=A^T$，且 A^{-1} 和 A^T 均为正交矩阵；

证明：$\because A^T A=E$，$\therefore A^{-1}=A^T$，$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T A^T=\left(AA^{-1}\right)^T=E$，

$\left(A^T\right)^T A^T=AA^T=AA^{-1}=E$，故 A^{-1} 和 A^T 均为正交矩阵.

③若 A,B 均为 n 阶正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵；

证明：$(AB)^T AB=B^T A^T AB=B^T EB=E$.

④若 A 为 n 阶正交矩阵，α,β 是 n 维列向量，则 $(A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)$.

证明：$(A\alpha, A\beta)=(A\alpha)^T A\beta=\alpha^T A^T A\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta)$.

定理：n 阶矩阵 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的列（行）向量组是标准正交向量组.

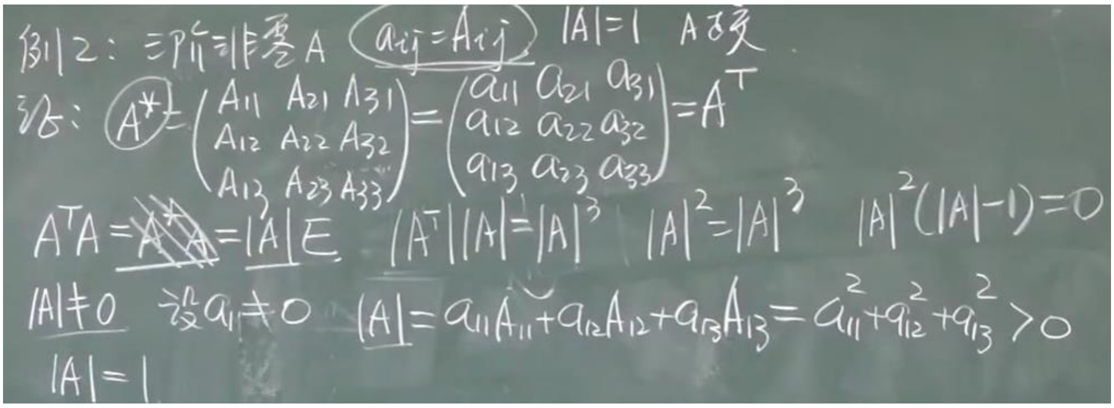
证明：设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，将 A 按列分块得,

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，那么

$A^T A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，因为 A 为正交矩阵，所以有 $A^T A=E$，即 $(\alpha_i,\alpha_i)=1, (\alpha_i,\alpha_j)=0$，$A$ 的列向量组是标准正交向量组.

例 1. 设 3 阶非零方阵 A，且 $a_{ij}=A_{ij}$，求证：$|A|=1$，且 A 是正交矩阵.

证明：



（当题目中出现 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，考虑伴随矩阵.）

定理：n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值都是实数，且其特征向量是实向量.

定理：实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量必正交（这里的正交是垂直，不是正交矩阵）.

证明：由实对称矩阵可知，$A^T=A$，设 A 有两个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2\left(\lambda_1\neq\lambda_2\right)$，

由特征值和特征向量的定义可知，$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$（此特征向量为列向量），

那么 $\left(A\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(\lambda_1\alpha_1,\alpha_2\right)\Rightarrow\left(A\alpha_1\right)^T\alpha_2=\lambda_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\Rightarrow\alpha_1^TA^T\alpha_2=\lambda_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$

$\Rightarrow\alpha_1^TA\alpha_2=\lambda_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$，因为 $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，所以

$\alpha_1^TA\alpha_2=\alpha_1^T\lambda_2\alpha_2=\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2=\lambda_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$，两式相减，$\lambda_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)-\lambda_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=0$，

即 $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=0$，$\because\left(\lambda_1\neq\lambda_2\right)$，$\therefore\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=0$.

正交相似：设 A,B 为同阶矩阵，若存在同阶正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 与 B **正交相似**.（正交矩阵一定可逆.）

定理：设 A 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

n 阶实对称矩阵 A 一定有 n 个线性无关的特征向量.

推论：设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ_i 是 A 的一个 r_i 重特征根，则 A 恰有 r_i 个对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.

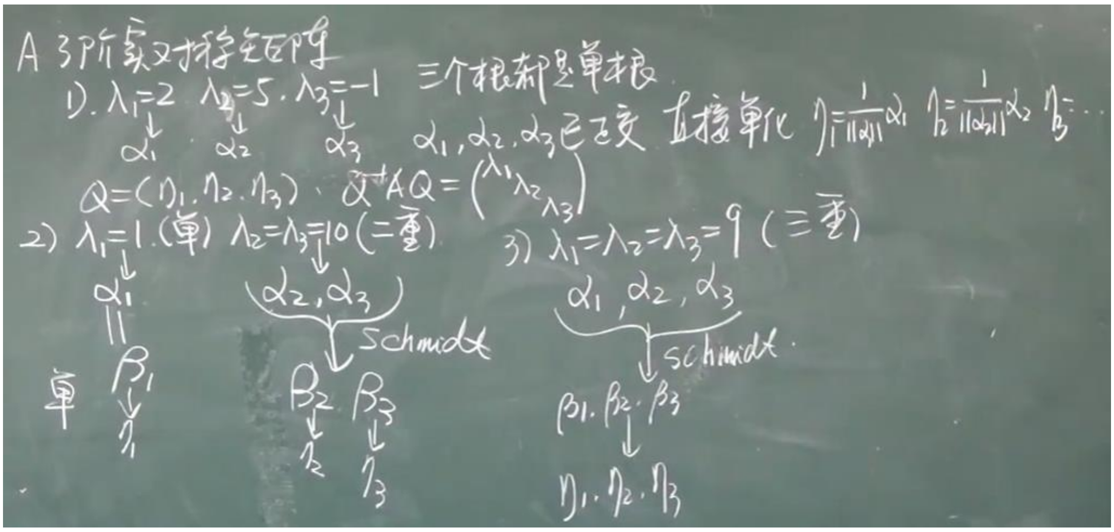
求正交矩阵Q的步骤：

①求A的特征值；
②求对应的特征向量；
★③对特征向量进行施密特正交化，并单位化；

④将得到的标准正交向量组做成列，构成Q；

⑤$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，特征值与向量位置对应.

小结：（一句话单根不用参与施密特正交化，因为其特征向量本身就与其他特征值对应的特征向量正交.）



例 1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，求一正交矩阵$Q$，使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 4 & -2\\ 4 & \lambda-4 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -2\lambda\\ 4 & \lambda-4 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=\lambda\left[(\lambda-4)(\lambda-1)-4\right]+(-2\lambda)\left[8+2(\lambda-4)\right]=\lambda\left(\lambda^2-5\lambda-4\lambda\right)=\lambda^2(\lambda-9)=0$，

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-4 & 4 & -2\\ 4 & -4 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得同解方程组，

$x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$，其中 x_2, x_3 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，得

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，进行施密特正交化，$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$，再标准化得，$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$，

$\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^T$；

当 $\lambda_3 = 9$ 时，$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$，

其中 x_3 为自由未知量，令 (x_3) 取 (1)，得 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_3$，

$\eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$，

故正交矩阵 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

例 2. 三阶实对称矩阵 A，其特征值分别为 $6, 3, 3$，且特征值 6 对应的一个特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解：$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$，

设特征值3对应的特征向量为$\alpha=\left(x_1\,,x_2\,,x_3\right)^T$，则$\left(\alpha\,,\alpha_1\right)=x_1+x_2+x_3=0$，$A$为实对称矩阵且特征值3为二重根，必有 2 个线性无关的特征向量，故同解方程组为$x_1=-x_2-x_3$，其中$x_2\,,x_3$为自由未知量，令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$分别取$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}，\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}，\ P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix},$$

$$\left(P\,,E\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&&\\1&1&0&&1&\\1&0&1&&&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\left(E\,,P^{-1}\right),$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

P40 6.1 二次型定义

简单理解：相乘的每一项都是二次，有几个变量就称为几元.

如：x^2+xy+y^2，是二元二次型；

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-x_1x_3$，是三元二次型，其中 x_1^2,x_2^2,x_3^2 这种谁的平方，称为平方项；$2x_1x_2,-x_1x_3$ 这种由两个变量相乘，称为交叉项.

$x^2-xy^2+y^2$，$x_1^2-x_2+3$，x^2+y^2-6 都不是二次型.

二次型转化为矩阵表达式：
①平方项的系数直接做成主对角线元素；
②交叉项的系数除以 2，放到两个对称的相应位置（下标与坐标对应）上.

如：$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+2x_3^2-2x_1x_3$，转化为

$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X^TAX$，称 A 为**二次型的矩阵**，A 的秩称为**二次型的秩**. 由此可见二次型的矩阵一定是对称的，$A^T=A$.

矩阵转化为二次型：
①主对角线元素直接做成平方项的系数；
②取上三角元素乘以 2，作为相应的交叉项系数（建议换成：将主对角线以外的元素做成相应的交叉项系数）.

如：已知二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}$，得 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3+x_2x_3$，

（或 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-x_1x_3-x_3x_1+\frac{1}{2}x_2x_3+\frac{1}{2}x_3x_2$）.

已知 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，注意这里的矩阵不是对称的，所

以为 $x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_2x_3$，其二次型矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

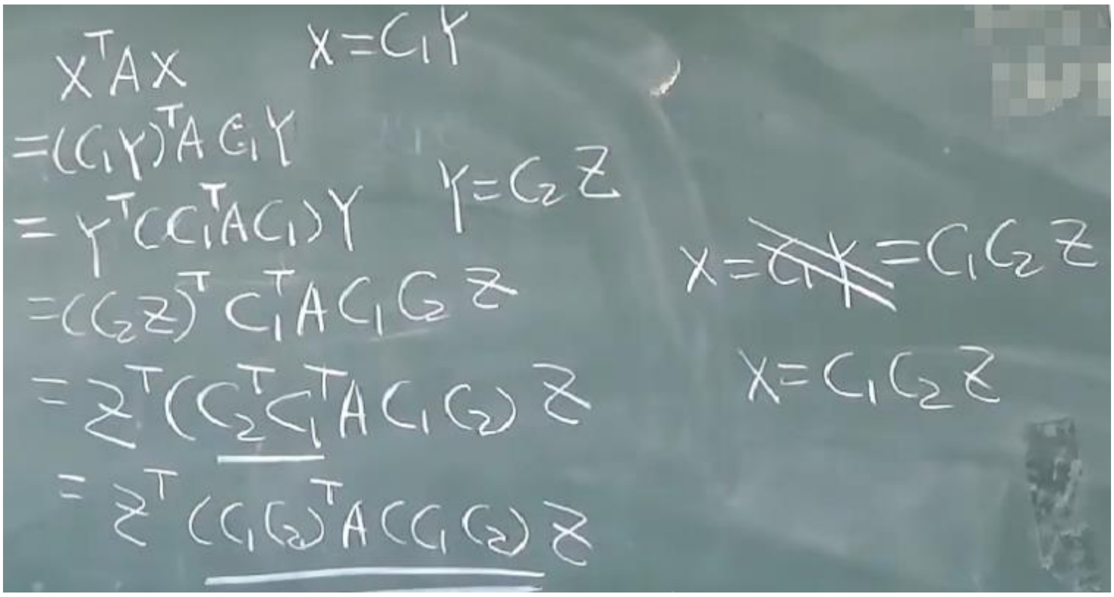
标准形：只有平方项，形如：$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$.

如：$y_1^2 + y_2^2 + y_3^3$，$z_1^2 + z_3^2$ 都是标准形，系数可以为零.

线性替换：已知 $f(X) = X^TAX$，令 $X = CY$，代入得

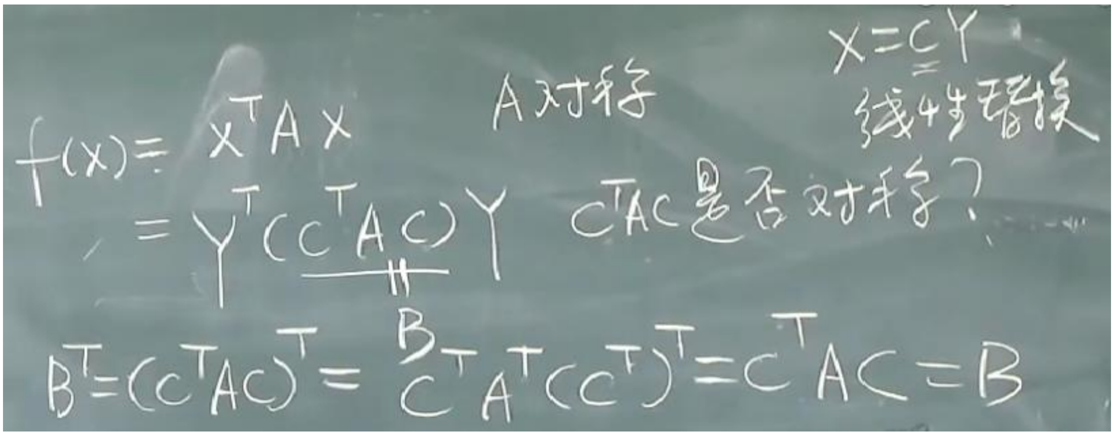
$(CY)^T ACY = Y^T(C^TAC)Y$，其中 $B = C^TAC$ 为对角形矩阵，那么以 Y 为变量是一个标准形，$X = CY$ 为线性替换，矩阵 C 为线性替换的矩阵，若 $|C| \neq 0$，称为非退化（或可逆、满秩）的线性替换.

有时会做两次线性替换，可令 $X = C_1C_2Z$



定理：线性替换乘积的矩阵等于各线性替换矩阵的乘积，且非退化线性替换的乘积仍是非退化线性替换.

定理：二次型 $f(X) = X^TAX$ 经过线性替换 $X = CY$ 后，会得到以 $B = C^TAC$ 为二次型矩阵的新二次型 Y^TBY.



合同：设 A,B 为 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，则称 A 合同于 B，记作 $A\simeq B$.

合同的性质：

①反身性：$A\simeq A$；

②对称性：若 $A\simeq B$，则 $B\simeq A$；

证明：$C^TAC=B\Rightarrow\left(C^T\right)^{-1}C^TACC^{-1}=\left(C^T\right)^{-1}BC^{-1}\Rightarrow A=\left(C^{-1}\right)^TBC^{-1}$，故 $B\simeq A$.

③传递性：若 $A\simeq B$，$B\simeq C$，则 $A\simeq C$；

证明：$P_1^TAP_1=B,P_2^TBP_2=C\Rightarrow P_2^TP_1^TAP_1P_2=C\Rightarrow\left(P_1P_2\right)^TAP_1P_2=C$，故 $A\simeq C$.

④若 $A\simeq B$，则 $r\left(A\right)=r\left(B\right)$；

证明：一个矩阵左乘或右乘一个可逆矩阵，其秩不变.

⑤若 $A\simeq B$，则 $A^T=A\Leftrightarrow B^T=B$；

证明：充分性：

$$C^TAC=B,B^T=B\Rightarrow\left(C^TAC\right)^T=C^TAC\Rightarrow C^TA^TC=C^TAC\Rightarrow A^T=A.$$

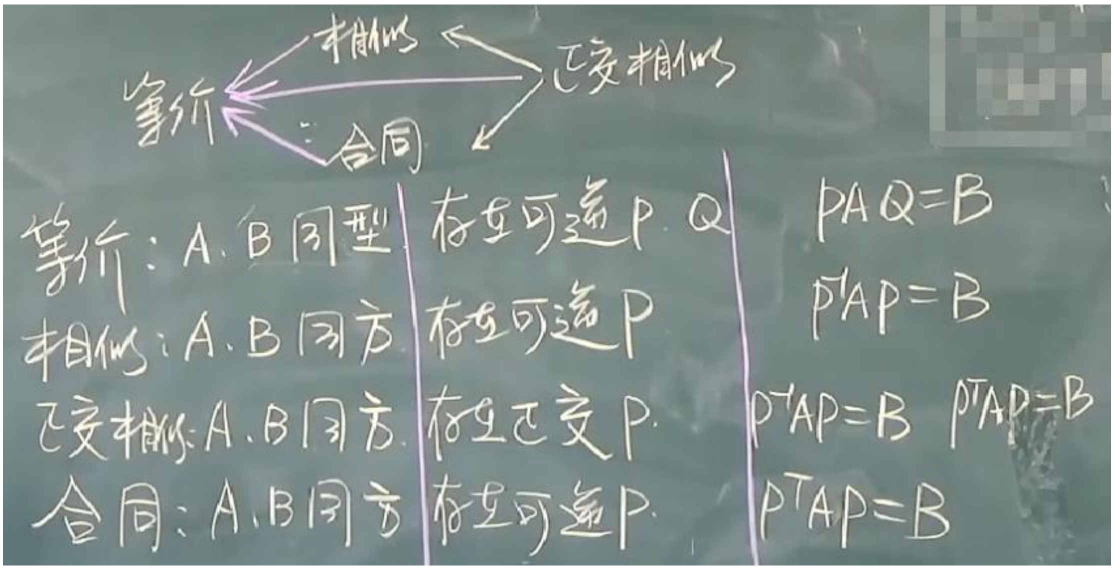
⑥若 $A\simeq B$，且 A,B 可逆，则 $A^{-1}\simeq B^{-1}$；

证明：

$$C^TAC=B\Rightarrow\left(C^TAC\right)^{-1}=B^{-1}\Rightarrow C^{-1}A^{-1}\left(C^T\right)^{-1}=B^{-1}\Rightarrow\left(\left(C^{-1}\right)^T\right)^TA^{-1}\left(C^{-1}\right)^T=B^{-1}.$$

⑦若 $A\simeq B$，则 $A^T\simeq B^T$.

矩阵之间的关系：


相似
正交相似
等价
合同
等价：A.B同型　存在可逆P.Q　PAQ=B
相似：A.B同方　存在可逆P　P⁻¹AP=B
正交相似：A.B同方　存在正交P　P⁻¹AP=B　PᵀAP=B
合同：A.B同方　存在可逆P　PᵀAP=B

P41 6.2 二次型定义化标准形（配方法）

配方法（配完全平方）注意事项：

①先从 x_1，再 x_2，再 $x_3\cdots$；

②配完 x_1 后，后面的项中不能出现 x_1；

例 1. 将二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 化为标准形，并写出非退化线性替换矩阵.

解：$f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2-2x_1\left(x_2-x_3\right)+\left(x_2-x_3\right)^2-\left(x_2-x_3\right)^2-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3$

$=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2-\left(x_2-x_3\right)^2-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3$

$=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2-4x_2^2-4x_2x_3-x_3^2+x_3^2+3x_3^2$

$=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2-\left(2x_2+x_3\right)^2+4x_3^2$

$=y_1^2-y_2^2+4y_3^2$.

$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=2x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1+\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{3}{2}y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，在 $X=CY$ 的线性替换下，

非退化线性替换矩阵 $C=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

只有交叉项如何处理：

例 2. $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=2x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$，令 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3 + 5x_3x_4 + x_1x_4，\ 令\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

前面的 x_1, x_2 是固定的，可直接记.

P42 6.2 二次型定义化标准形（初等变换，正交替换）

初等变换法注意事项：

①对 A, E 做同样的初等列变换；

②只对 A 做相应的初等行变换.

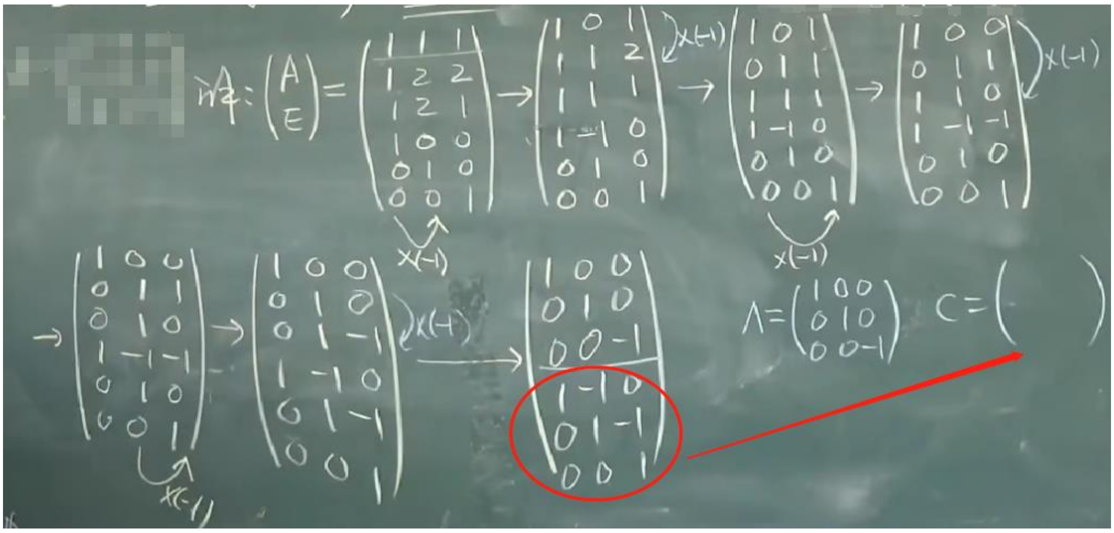
（交换了 1，3 列，那么相应的交换 1，3 行；$\frac{1}{2}\times$ 第 2 列 + 到第 3 列，那么相应的 $\frac{1}{2}\times$ 第 2 行 + 到第 3 行；变换时一次列一次行，配套的.）

③ A 化成对角形矩阵 Λ 时，E 化成的就是非退化线性替换矩阵 C，即

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{只对}A\text{做相应的行变换}]{\text{对整个矩阵做列变换}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}.$$

例 1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求非退化矩阵 C.

解：



一次列一次行变换之后上面的矩阵又变回成对称矩阵；上面的对角形矩阵的主对角线元素一定可以化成1或−1，并且1与−1可以交换位置.

若一个 n 元二次型 $f\left(X\right)=X^{T}AX$ 的标准形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ $\left(p\le r\le n\right)$，则称该标准形为二次型的**规范形**，r 是二次型的秩（即系数为 $1,-1$ 的个数）.

（系数先是 1，再是 -1，最后是 0.）

如：$x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 系数分别为 $1,1,1$ 是规范形；$x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 系数分别为 $1,-1,1$ 不是规范形；$x_1^2+x_2^2+x_4^2$ 系数分别为 $1,1,0,1$ 不是规范形（但是都可以通过线性替换化成规范形）.

惯性定理：任一 n 元二次型 $f\left(X\right)=X^{T}AX$，都可通过非退化线性替换化成规范形 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2\left(p\le r\le n\right)$.

正项的个数 p 称为二次型的**正惯性指数**，负项的个数 $r-p$ 称为二次型的**负惯性指数**，它们的差 $p-\left(r-p\right)=2p-r$ 称为二次型的**符号差**.

定理：任意 n 阶对称矩阵 A，都与对角形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 合同.

定理：对称矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ A,B 具有相同的秩和相同的正惯性指数（相同的负惯性指数）.

正交替换：

①写出二次型的矩阵A，求其特征值；

②求特征值对应的特征向量，并正交化，单位化；

③单位化后的向量作成列得到非退化线性替换矩阵C，$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

（为什么可以这么做？因为我们在求正交矩阵Q时，$Q^{-1}AQ=\Lambda$，而正交矩阵满足$Q^T=Q^{-1}$，即$Q^TAQ=\Lambda$ ，所以我们在找非退化线性替换矩阵C时，发现其满足$C^TAC=\Lambda$，显然正交矩阵Q就是我们要找的非退化线性替换矩阵C.）

P43 6.3 有定性

若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq 0$，则 $f>0$，称 $f(X)$ 为**正定**二次型；

若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+0x_3^2$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq 0$，则 $f\geq 0$，称 $f(X)$ 为**半正定**二次型；

若 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq 0$，则 $f<0$，称 $f(X)$ 为**负定**二次型；

若 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-2x_2^2-0x_3^2$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq 0$，则 $f\leq 0$，称 $f(X)$ 为**半负定**二次型；

以上四种统称为**有定的**.

若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$，有正有负，称此二次型是**不定的**.

定义：设 n 元二次型 $f(X)=X^TAX\left(A^T=A\right)$，若对于任意 $X\neq O$，都有 $f(X)=X^TAX>0(<0)$，$f(X)=X^TAX\geq 0(\leq 0)$，则称 $f(X)=X^TAX$ 为**正（负）定二次型，半正（负）定二次型**，矩阵 A 为**正（负）定矩阵，半正（负）定矩阵**.

例 1. 判断下列二次型的定性.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+7x_3^2$；正定

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+0x_3^2$；半正定

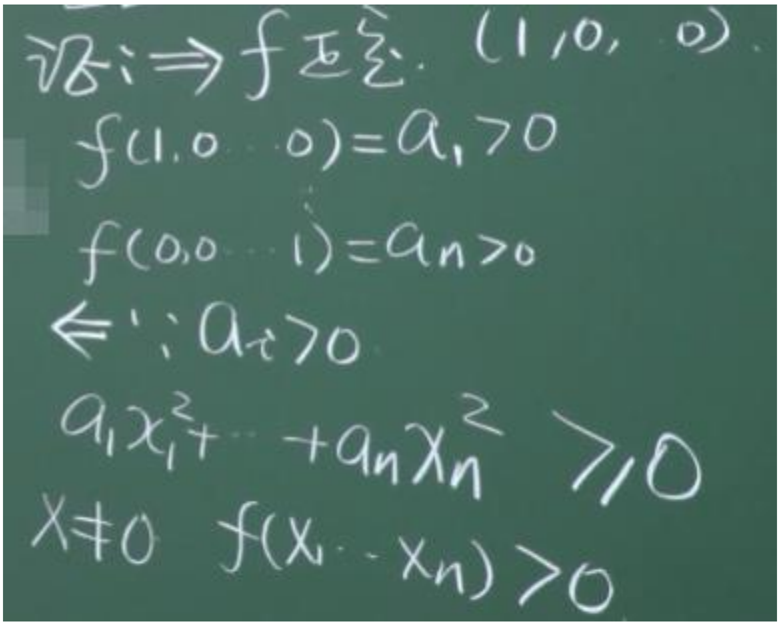
（3） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$；正定

（4） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$；半正定

（5） $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-2x_2^2-5x_3^2$；负定

（6） $f(x_1,x_2)=-x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2=-(x_1-2x_2)^2$； $f(2,1)=0$，半负定

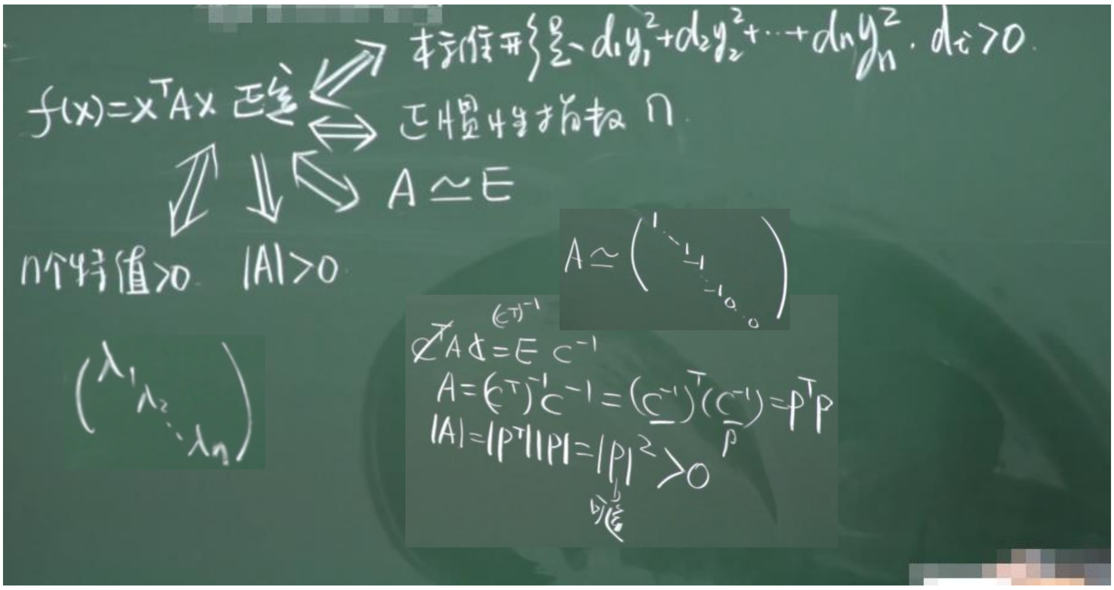
例 2. $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$ 是正定 $\Leftrightarrow a_i>0$.



P44 6.3 有定性的判别

定理 1：正定二次型经过非退化线性替换后，仍是正定.

结论：



矩阵 A 正定 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式 >0.

例 1.　$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$ 是否正定？

解：$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，其一阶顺序主子式为 $|2|>0$，二阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$，

三阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1>0$，故矩阵 A 正定.

例 2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&t\end{pmatrix}$ 正定，求 t 的取值.

解：$|1|>0$，$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1>0$，$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&t\end{vmatrix}=-2+t>0$，即 $t>2$.

性质：

①若 A 正定，则 A^{-1} 也正定；

证明：因为 A 正定，所以其特征值 λ_i 都大于 0，那么 A^{-1} 的特征值 $\frac{1}{\lambda_i}$ 也都大于 0，故 A^{-1} 也正定.

②若 A 正定，则 A^* 也正定；

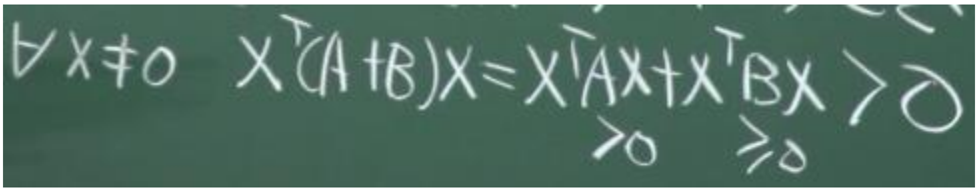
证明：因为 A 正定，所以其特征值 λ_i 都大于 0，$|A|>0$，那么 A^* 的特征值 $\frac{1}{\lambda_i}|A|$ 也都大于 0，故 A^* 也正定.

③若 A 正定，则 A^k 也正定；

证明：因为 A 正定，所以其特征值 λ_i 都大于 0，那么 A^k 的特征值 λ_i^k 也都大于 0，故 A^k 也正定.

④若 A 正定，B 正定（或半正定），则 $A+B$ 正定；

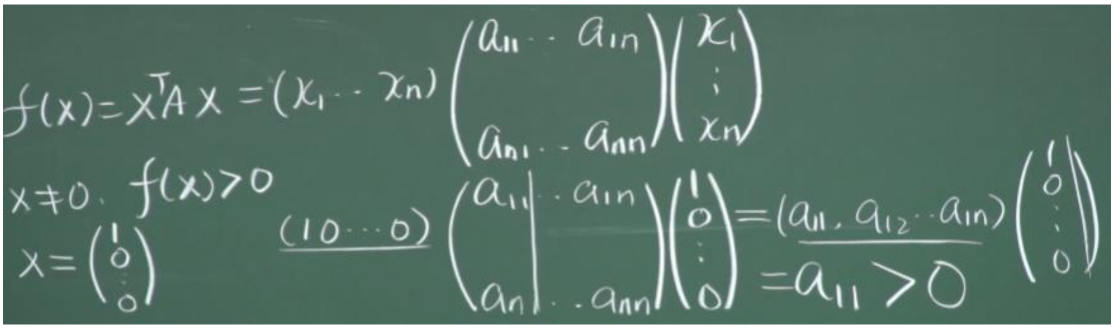
证明：



⑤若 A 正定，则其主对角线元素全大于 0，即 $a_{ii}>0$，反之不一定成立；

逆否命题：矩阵 A 主对角线元素不全大于 0，则 A 不正定.

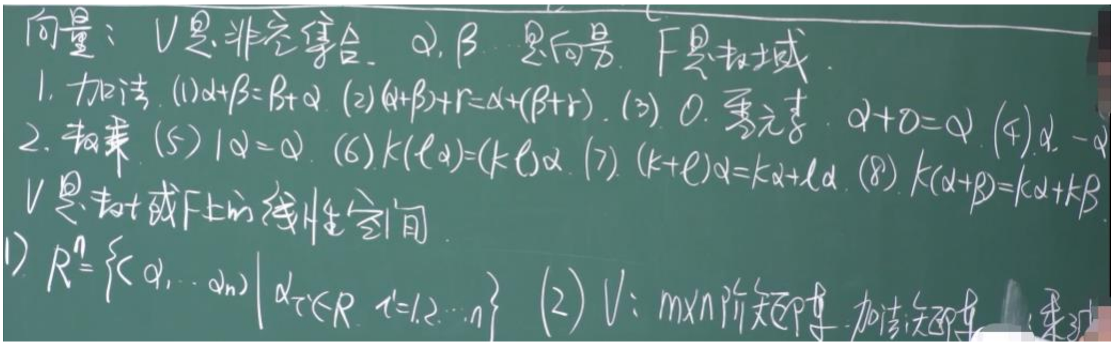
证明：

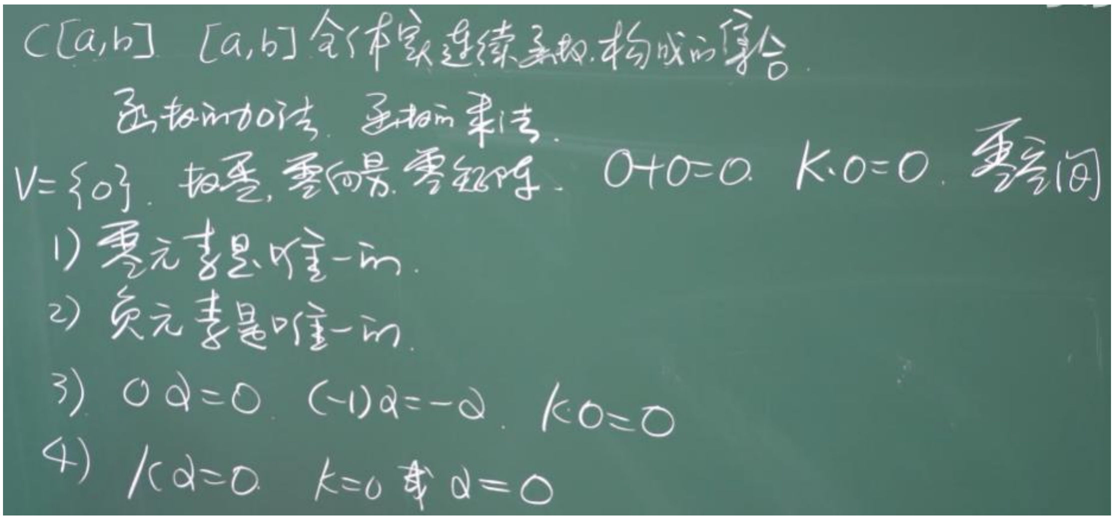


P45 7.1 线性空间（全是概念，这里就不记了，大家听一听就好了）

数域：F 是至少包含两个数的一个数集，若 F 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍是 F 中的数，则称 F 是**数域**，也称数域 F 关于加、减、乘、除四则运算是**封闭**的.
那么全体有理数、全体实数、全体复数构成的集合都是数域，分别称为有理数域、实数域、复数域，并分别用 Q,R,C 表示.

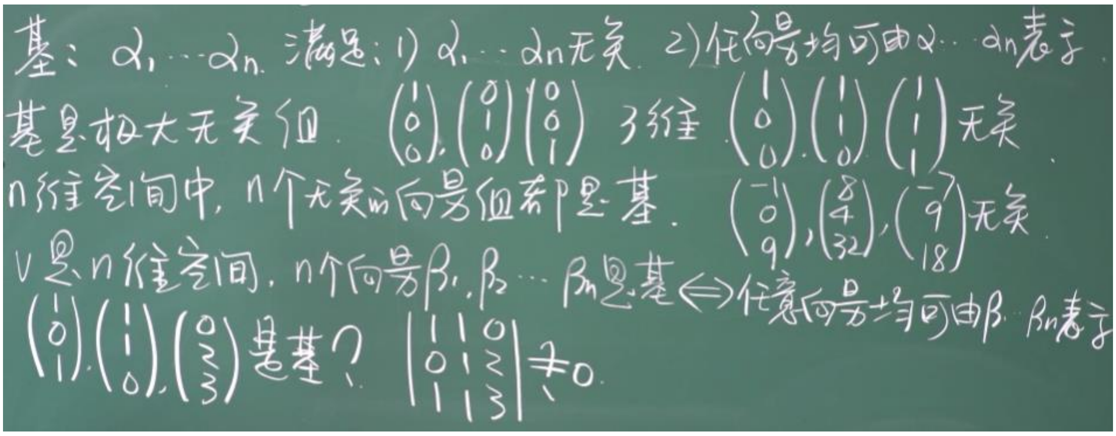
向量：





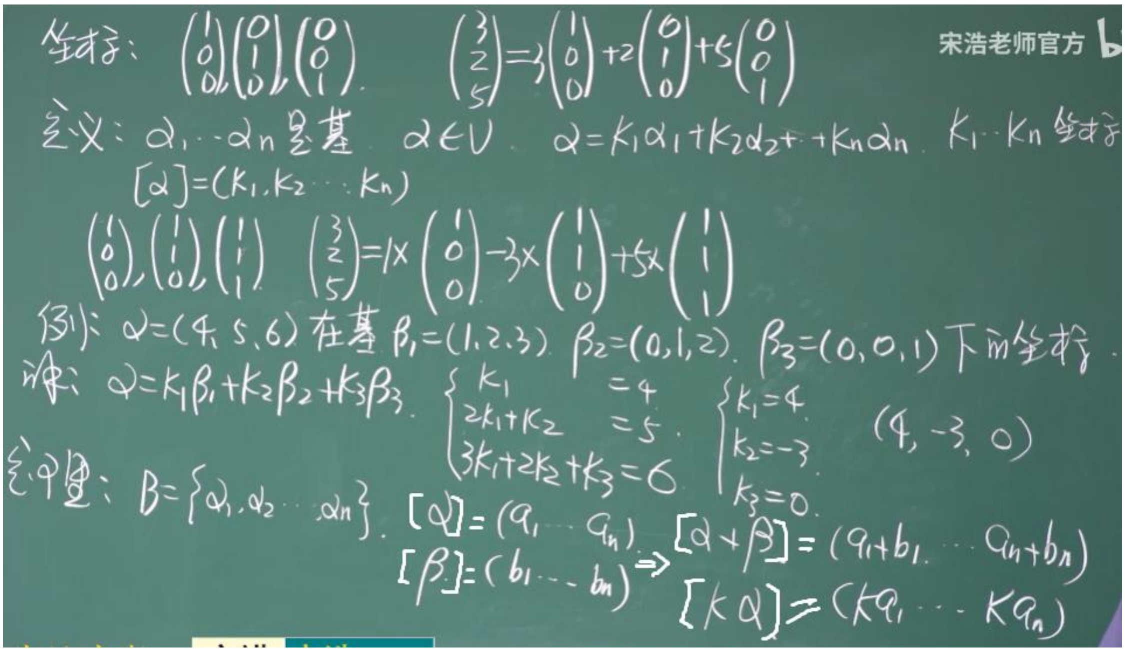
P46 7.2 基、维数、坐标

基、维数：



行列式的值等于 0，线性相关不是基；行列式的值不等于 0，线性无关是基.

坐标：
基发生变化，其坐标也会发生变化.



过渡矩阵：