2020 级数值分析第三次作业 参考答案及评分标准

一、判断题(每题 2 分，共 12 分)

1. Jacobi 迭代法、Seidel 迭代法、Sor 迭代法分别是求解线性方程组的三种迭代方法。(对)

2. Jacobi 迭代法、Seidel 迭代法收敛的充分必要条件是它们的迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 中，迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)\le 1$。(错)

3. 设矩阵 A 是严格对角占优矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代和 Seidel 迭代对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。(对)

4. 设 A 是对称正定矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代、Seidel 迭代以及 Sor 迭代对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。(错)

5. $\det\left(\lambda I-D^{-1}(L+U)\right)=\det\left(D^{-1}\right)\det\left(\lambda D-L-U\right)$。(对)

6. 设有迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$,那么,若 $\|B\|_F<1$,则此迭代法收敛. (对)

二、填空题(每空 2 分,共 12 分)

1. 设 $x=(1,2,-3)$，则 $\|x\|_1=$ __6__, $\|x\|_2=$ __$\sqrt{14}$__, $\|x\|_\infty=$ __3__.

2. 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -0.4 & -0.6\\ 0.25 & 0 & -0.5\\ -0.2 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$$

则 $\|A\|_1=$ __1.1__, $\|A\|_F=$ __0.9811(近似 0.9811 都算对)__, $\|A\|_\infty=$ __1__.

三、(36 分)设线性方程组

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\ -x_1+4x_2+2x_3=20\\ 2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$

(1) 考查用雅可比迭代法，赛德尔迭代法解此方程组的收敛性；(20 分)

(2) 用雅可比迭代法及赛德尔迭代法解此方程组，要求当 $\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止.(16 分)

解：(解题方法不唯一，答案正确即可)

(1) 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 10\end{pmatrix},$$

由 $|a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}|,|a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|,|a_{33}|>|a_{31}|+|a_{32}|$，知矩阵 A 是严格对角占优。因此，雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法均收敛。

(2) 雅克比迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{-12}{5} - \dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 5 + \dfrac{1}{4}x_1^{(k)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k)} \end{cases},$$

取初始近似解向量为 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$，迭代到 18 次达到精度要求

$x^{(18)} = (-3.999996, 2.999974, 1.999999)^T$.

高斯-赛德尔迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{-12}{5} - \dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 5 + \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

取初始近似解向量为 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$，迭代到 8 次达到精度要求

$x^{(8)} = (-4.000036, 2.999985, 2.000003)^T$.

四、(每小题 20 分，共 40 分)设方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2 \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

试考查解此线性方程组的雅克比迭代法及赛德尔迭代法的收敛性。

解：(解题方法不唯一，答案正确即可)

(1) 系数矩阵 A 分解为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D - L - U$$

雅克比迭代矩阵 $B_J = D^{-1}(L+U) = D^{-1}(D-A) = I - D^{-1}A$。

因为

$$|\lambda I - B_J| = |D^{-1}||\lambda D - (L+U)| = 0 \Rightarrow |\lambda D - (L+U)| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0 & \lambda - 0.8 & 0.8 - \lambda \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32) = 0$$

所以 $\rho(B_J)=1.09>1$，故雅克比迭代法不收敛。

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$B_S=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ 0 & 0.16 & -0.64\\ 0 & 0.032 & 0.672\end{bmatrix}$$

因为 $\rho(B_S)\le\|B_S\|$，而又存在 $\|B_S\|_\infty=0.8<1$.($\|B_S\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|$)，从而高斯-赛德尔迭代收敛。

或者,另解：因为系数矩阵 *A* 是对称正定矩阵，所以赛德尔迭代法收敛.

(2)

雅克比迭代矩阵 $B_J=D^{-1}(L+U)=D^{-1}\left(D-A\right)=I-D^{-1}A$。

因为

$$|\lambda I-B_J|=\left|D^{-1}\right|\left|\lambda D-(L+U)\right|=0\Rightarrow\left|\lambda D-(L+U)\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & -2\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1+2\lambda\\ 1 & 1 & -2\lambda\end{vmatrix}$$

$$=2\lambda[-2\lambda(\lambda-1)-(2\lambda+1)]+(1-2\lambda-\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^3+5\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$$

$$\Rightarrow\rho(B_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$$

所以雅克比迭代法不收敛。注：也可以先求出雅克比迭代矩阵。

赛德尔迭代矩阵

$$B_S=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & -0.5\\ 0 & -0.5 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.5\end{bmatrix}$$

容易求得 B_S 特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-0.5$,从而可知赛德尔迭代法收敛.

或者，另解：

由 $\det(\lambda I-B_S)=\det(\lambda I-(D-L)^{-1}U)=\det((D-L)^{-1})\det(\lambda I(D-L)-U)=0$

可得

$$\det(\lambda(D-L)-U)=\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda & \lambda & -2\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1+2\lambda\\ \lambda & \lambda & -2\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 2\lambda\lambda(1+2\lambda)+\lambda(1+2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda(2\lambda+1)^2=0$$
$$\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=-0.5$$