2020 级数值分析第一次作业　参考答案和评分标准

第 1 章 习题

1. 已知 $\sqrt{3} \approx 1.7320508\cdots$ 的三个近似值分别是 $x_1{*} = 1.73, x_2{*} = 1.7321, x_3{*} = 1.7320$。这些近似值分别有________位、__________位、__________位有效数字。(每空 2 分,共 6 分)

1 解：3 位、5 位、4 位

1.7320508-1.73=0.0020508<1/2*10^(-2) m-n=-2, m=1, n=3

1.7320508-1.7321=0.0001508<1/2*10^(-4) m-n=-4, m=1, n=5

1.7320508-1.7320=0.0000508<1/2*10^(-3)　m-n=-3, m=1, n=4

2. 已知 2.153 是 2.01542 的近似数，问该近似数有几位有效数字？它的绝对误差和相对误差分别是多少？(每个问题 3 分，共 9 分)

2 解：

设有效数字为n位，

因为x^*=2.153=0.2153*10^1，因此m=1.

$$\left|e(x^*)\right| = \left|x^* - x\right| = \left|2.153 - 2.1542\right|$$

$$= \left|-0.0012\right| = 0.0012 = 0.12*10^{-2} = 0.12*10^{m-n} \le 0.5*10^{m-n}。$$

-2=m-n=1-n, 因此n=3，即2.153有3位有效数字。

绝对误差：$x^* - x = 2.153 - 2.1542 = -0.0012$

相对误差：$\dfrac{x^* - x}{x} = \dfrac{2.153 - 2.1542}{2.1542} = \dfrac{-0.0012}{2.1542}$

$= -0.000557051 = -0.5571 \times 10^{-3}$

（注意：这里已知 x 时，算相对误差就要用真值 x，不用近似数）

3. 假设 $x_1{*} = 4.8675, x_2{*} = 4.08675, x_3^* = 0.08675$ 是由四舍五入得到的近似数，求下列各近似数的误差限：(每小题 8 分，共 24 分)

(1) $x_1^* + x_2^* + x_3^*$; (2) $x_1^* x_2^*$; (3) $\dfrac{x_1^*}{x_2^*}$

3 解：

$x_1{*} = 4.8675, x_2{*} = 4.08675, x_3^* = 0.08675$

$x_1{*}$的最右1位5是由四舍五入得到的，

其真值可能为4.86745...,4.86746...,4.86749...,4.86750 ...,4.86751...,4.867549...,等形式的数

即其误差最大不超过0.00005，最小不小于-0.00005，

$\left|e(x_1{*})\right| = \left|x_1{*} - x_1\right| \le \varepsilon(x_1{*}) = 0.00005$

即$\varepsilon(x_1{*})=0.00005=0.5*10^{-4}$，$m=1, m-n=-4, n=5$位有效数字

同理，$\varepsilon(x_2{*})=0.000005=0.5*10^{-5}$，$m=1, m-n=-5, n=6$位有效数字

同理，$\varepsilon(x_3{*})=0.000005=0.5*10^{-5}$，$m=-1, m-n=-5, n=4$位有效数字

因为$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$；

（1）$\varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_3^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_3^*)$

$= 0.5 * 10^{-4} + 0.5 * 10^{-5} + 0.5 * 10^{-5}$

$= 0.5 * 10^{-4} + 0.05 * 10^{-4} + 0.05 * 10^{-4}$

$= 0.6 * 10^{-4}$

$\varepsilon(x_1^* - x_2^* - x_3^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_3^*)$，注意换成减，结果一样

$= 0.5 * 10^{-4} + 0.5 * 10^{-5} + 0.5 * 10^{-5}$

$= 0.5 * 10^{-4} + 0.05 * 10^{-4} + 0.05 * 10^{-4}$

$= 0.6 * 10^{-4}$

(2)因为$\varepsilon(x_1^*\ x_2^*) \approx \left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*)$；

$=4.8675*0.5*10^{-5} + 4.08675*0.5*10^{-4}$

$= 2.43375*10^{-5} + 2.043375*10^{-4}$

$= 0.243375*10^{-4} + 2.043375*10^{-4}$

$= 2.286750*10^{-4} = 0.2286750*10^{-3}$

（3）因为$\varepsilon(x_1^* / x_2^*) \approx \dfrac{\left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*)}{\left|x_2^*\right|^2} \quad (x_2^* \neq 0)$

$=0.2286750*10^{-3} / (4.08675)^2$

$= 0.2286750*10^{-3} / 16.70152556$

$= 0.013691863*10^{-3} = 0.13691863*10^{-4}$

4. (16 分) 已测的某场地长度 l 的值为$l^*=110m$， 宽度 d 的值为$d^*=80m$， 已知$\left|l-l^*\right| \le 0.2\,m, \left|d-d^*\right| \le 0.1\,m$。试求面积$s=ld$的绝对误差限和相对误差限。

4 解：

$$(1)\ e\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i} e\left(x_i^*\right)$$

$$(2)\ \varepsilon\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i}\right| \varepsilon\left(x_i^*\right)$$

$$(3)\ \varepsilon_r\left(f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)}{\partial x_i}\right| \frac{\varepsilon\left(x_i^*\right)}{\left|f\left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)\right|}$$

依据上面的公式（2）和（3），分别进行求解。

$\varepsilon(l^*) = \left|l-l^*\right| \le 0.2m; \varepsilon(d^*) = \left|d-d^*\right| \le 0.1m;$

$\dfrac{\partial s^*}{\partial l^*} = \dfrac{\partial l^* \times d^*}{\partial l^*} = d^* = 80m; \dfrac{\partial s^*}{\partial d^*} = \dfrac{\partial l^* \times d^*}{\partial d^*} = l^* = 110m;$

$$\varepsilon(s^*)=\varepsilon(l^*\times d^*)\approx\left|\frac{\partial s^*}{\partial l^*}\right|\varepsilon(l^*)+\left|\frac{\partial s^*}{\partial d^*}\right|\varepsilon(d^*)$$

$$\le\left|d^*\right|\varepsilon(l^*)+\left|l^*\right|\varepsilon(d^*) \qquad (10\text{ 分})$$

$$=80*0.2+110*0.1$$

$$=16+11=27m^2\text{，绝对误差限为}27m^2\text{。}$$

$$\varepsilon_r(s^*)\approx\frac{\varepsilon(s^*)}{\left|s^*\right|}\le\frac{27m^2}{\left|l^*\times d^*\right|}=\frac{27m^2}{\left|110\text{m}\times 80\text{m}\right|}=\frac{27}{8800}$$

$$\approx 0.0030681818181818\approx 0.3068\times 10^{-2} \qquad (6\text{ 分})$$

$$\le 0.5\times 10^{-2}=\frac{1}{2}\times 10^{-2}\text{，相对误差限为}\frac{1}{2}\times 10^{-2}\text{。}$$

5. (15 分) 计算球体体积时，要使相对误差限为 1%，问半径 R 允许的相对误差限是多少？

5 解：

法一：

球体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

则 $\ln V=\ln(\frac{4}{3}\pi R^3)=\ln\frac{4}{3}\pi+3*\ln R$

那么，$\ln R=(\ln V-\frac{4}{3}\pi)/3$，$d\ln R=\frac{1}{3}*d\ln V$

体积V的相对误差限 $\left|d\ln V\right|=\left|\frac{V^*-V}{V}\right|\le\varepsilon_V^*=1\%=0.01$

半径R的相对误差限 $\left|d\ln R\right|=\frac{1}{3}*\left|d\ln V\right|\le\frac{1}{3}*0.01$

$=\frac{1}{3}*10^{-2}=0.079577473*10^{-2}$

法二：

球体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，相对误差限 $\left|\frac{V^*-V}{V}\right|\le\varepsilon_V^*=1\%=0.01$

$$\left|\frac{\frac{4}{3}\pi R^{*3}-\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=\left|\frac{R^{*3}-R^3}{R^3}\right|=\left|\frac{R^{*3}}{R^3}-1\right|\le\varepsilon_V^*=0.01$$

$-0.01\le\frac{R^{*3}}{R^3}-1\le 0.01$，即 $1-0.01\le\frac{R^{*3}}{R^3}\le 1+0.01$

即$0.99 \le \frac{R^{*3}}{R^3} \le 1.01$，即$\sqrt[3]{0.99} \le \frac{R^*}{R} \le \sqrt[3]{1.01}$

即$\sqrt[3]{0.99}-1 \le \frac{R^*}{R}-1 \le \sqrt[3]{1.01}-1$

$0.996655493-1 \le \frac{R^*}{R}-1 \le 1.003322284-1$

$-0.003344507 \le \frac{R^*}{R}-1 \le 0.003322284$

$-0.003344507 \le \frac{R^*-R}{R} \le 0.003322284$，左边绝对值更大

因此，$\left|\frac{R^*-R}{R}\right| \le 0.003344507=0.3344507*10^{-2}=\varepsilon_R^*$

6. (15 分) 设序列$\{y_n\}$满足递推关系$y_n=10y_{n-1}-1, n=1,2,\cdots$，若$y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$(三位有效数字)，计算到$y_{10}$时的绝对误差是多少？这个计算过程稳定吗？

6 解：

$y_n=10y_{n-1}-1, \quad n=1,2,\cdots$假设近似值为$y_n^*$

则有$y_n*=10y_{n-1}^*-1, \quad n=1,2,\cdots$

绝对误差$\mathrm{e}(y_n*)=y_n*-y_n=10(y_{n-1}*-y_{n-1})=10\mathrm{e}(y_{n-1}*)$

$\mathrm{e}(y_{10}*)=10\mathrm{e}(y_9*)=10^2*\mathrm{e}(y_8*)=10^9*\mathrm{e}(y_1*)=10^{10}*\mathrm{e}(y_0*)$

按误差限来估算，$\mathrm{e}(y_{10}*)=10^{10}*\mathrm{e}(y_0*)$

$y_0^*=1.41$三位有效数字

则$|\mathrm{e}(y_0*)|=|y_0*-y_0|=|1.41-\sqrt{2}|\le 0.5*10^{-2}$

$|\mathrm{e}(y_{10}*)|=|10^{10}*\mathrm{e}(y_0*)|\le 10^{10}*0.5*10^{-2}=0.5*10^8$

也可定量计算一下数值，与上面结果比较一下：

$\sqrt{2}\approx 1.4142135623731, \qquad y_0^*=1.41$三位有效数字

$\mathrm{e}(y_0*)=y_0*-y_0=1.41-\sqrt{2}\approx -0.0042135623731$

$\mathrm{e}(y_{10}*)=10^{10}*\mathrm{e}(y_0*)\approx -10^{10}*0.0042135623731\approx -42135623.731$

因此，这个计算过程显然不稳定。

7. (10 分) 选用更好的方法计算

$$S=\sum_{j=2}^{1000}\frac{1}{j^2-1}$$

7 解：方法一：

采用 j 从 1000 到 2 的顺序相加，这样小数据通过求和，累计变大，不会被舍掉。

$$\mathrm{S}=\sum_{j=2}^{1000}\frac{1}{\mathrm{j}^2-1}=\sum_{j=1000}^{2}\frac{1}{\mathrm{j}^2-1}=\frac{1}{1000^2-1}+\frac{1}{999^2-1}+\ldots+\frac{1}{2^2-1}=0.74900049950$$

方法二：通过分解成两项进行简化计算。

$$S=\sum_{j=2}^{1000}\frac{1}{j^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{j=1000}^{2}(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j+1})=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{1000}(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j+1})$$

这里j可以从1000开始算，也可以从2开始算。

$$=\frac{1}{2}(\sum_{j=2}^{1000}\frac{1}{j-1}-\sum_{j=2}^{1000}\frac{1}{j+1})=0.74900049950$$

8. (5 分) 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的最小正根，使它至少具有 4 位有效数字($\sqrt{783}\approx 27.982$)

8 解：

[解] 由 $x=28\pm\sqrt{783}$ 与 $\sqrt{783}\approx 27.982$（五位有效数字）可知，

$x_1=28+\sqrt{783}=28+27.982=55.982$（五位有效数字）。

而 $x_2=28-\sqrt{783}=28-27.982=0.018$，只有两位有效数字，不符合题意。两个相近的数相减，丢失了有效数字。

但是 $x_2=28-\sqrt{783}=\dfrac{1}{28+\sqrt{783}}=\dfrac{1}{55.982}=1.7863\times 10^{-2}$。这是最小正根。

补充题 1：下列各式如何计算更好?

(1) $y=\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x}$;　　　　(2) $y=10^7(1-\cos 2^\circ)$

当 $|x|<<1$ 时。

(3) $y=\sin\alpha-\sin\beta$, 其中 α 与 β 很接近。

(4) $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$, 当 $x>>1$ 时。

解：

当 $|x|<<1$ 时，式子（1）中 $\dfrac{1}{1+2x}$ 近似为1；式子 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 也近似为1;

式子 $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x}$ 为两个相近的数相减，会丢失有效数字，应该避免。

$$(1)=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

$$(2)=10^7*2\sin^2 1^\circ$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

或

$$1-\cos x \approx 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\right).$$

(3) $y=\sin\alpha-\sin\beta$,其中α与β很接近，两个相近的数相减，要避免。

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(4) $y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$,当$x>>1$时,$\frac{1}{x}\to 0$,$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$为两个相近的数相减。

$$=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}-\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})*(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x}*(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}*(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=\frac{2}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-x}}$$

补充题 2：设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

解：

法一：

设$y=x^n$,取对数则$\ln y=n\ln x$,取导数所以$d\ln y=nd\ln x$。

又因为$d\ln y=e_r(y^*)$,$d\ln x=e_r(x^*)$

x^*相对误差：$e_r(x^*)=d\ln x=\frac{x^*-x}{x}=2\%=2*10^{-2}=0.02$,

$(x^*)^n$相对误差：$e_r(y^*)=d\ln y=nd\ln x=n*2\%=0.02n$

法二：

x^*相对误差：$\frac{x^*-x}{x}=2\%=2*10^{-2}=0.02$,

即 $\frac{x^*}{x}-1=2*10^{-2}$，得到 $\frac{x^*}{x}=1+2*10^{-2}=1.02$，

$(x^*)^n$相对误差：$\frac{(x^*)^n-x^n}{x^n}=\frac{(x^*)^n}{x^n}-1$

$=\left(\frac{x^*}{x}\right)^n-1=(1.02)^n-1$