Föreläsning 4

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 3

Z-transformen

fortsättning

LTH
2014

Nedelko Grbic

(mtrl. från Bengt Mandersson)

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Kap 3 z-transform, fortsättning

Vi definierade Z-transformen av impulssvaret *h(n)* som

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\ z^{-n}$$

med $$h(n) = 0 \quad \textit{för} \ \ n < 0$$

där $$z = r\, e^{j\omega}$$

***H(z)* är en komplex funktion av en komplex variabel.**

Vi använde z-transformen på en andra ordningens differensekvation

$$y[n] - 1.27\, y[n-1] + 0.81\, y[n-2] \ = \ x[n-1] - x[n-2]$$

med z-transfomenen

$$Y(z) - 1.27\ z^{-1}\, Y(z) + 0.81\ z^{-2}\, Y(z) = \ z^{-1}\, X(z) - \ z^{-2}\, X(z)$$

Detta gav

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27\, z^{-1} + 0.81 z^{-2}}}_{H(z)}\, X(z) = H(z)\, X(z)$$

Vi fortsätter med detta exempel

Poler och nollställen (Poles and zeroes)

Utgående från en differensekvation får vi alltid ett $H(z)$ som är kvoten mellan två polynom i z^{-1}

Detta vill vi tolka och faktoriserar $H(z)$.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27\ z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = \frac{z - 1}{z^2 - 1.27z + 0.81}$$

Sök rötterna till nämnaren

$$z^2 - 1.27\ z + 0.81 = 0 \quad ger$$

$$z = 1.27/2 \pm \sqrt{(1.27/2)^2 - 0.81} =$$

$$= 0.64 \pm j\ 0.64 = \ 0.9 e^{\pm j\pi/4}$$

Sök rötterna till täljaren

$$z - 1 = 0 \quad ger$$

$$z = 1$$

Poler och nollställen, fortsättning 1

Faktoriseringen av $H(z)$ kan nu skrivas

$$H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27\ z^{-1} + 0.81\ z^{-2}} = \frac{z-1}{z^2 - 1.27\ z + 0.81}$$

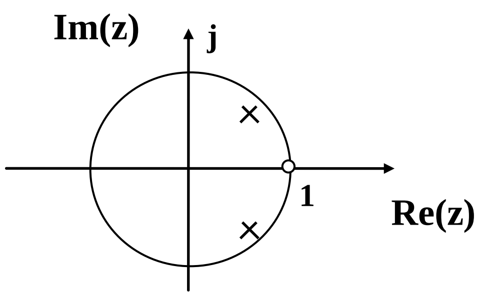
$$= \frac{z-1}{(z - 0.9e^{j\ \pi/4})(z - 0.9e^{-j\ \pi/4})}$$

Rötterna till täljaren kallar vi nollställen och rötterna till nämnaren kallar vi poler. Vi ritar in dem i ett komplext talplan, ett pol-nollställesdiagram där nollställen markeras med ring och poler med kryss.

poler: $p_{1,2} = 0.9e^{\pm j\ \pi/4}$

nollställen $z = 1$

z-plan (komplext talplan)



OBS: $H(z) = 0$ **i nollställe**

$H(z) = \infty$ **i pol**

$H(z)$ *liten nära nollställe* (*beloppet*)

$H(z)$ *stor nära pol* (*beloppet*)

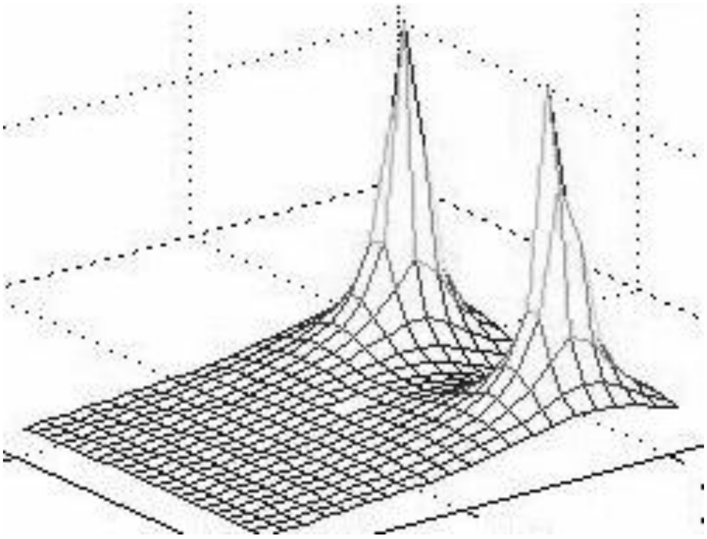
Poler och nollställen, fortsättning 2

Beskrivningen med poler och nollställen är mycket användbart och oftast ritar man in dessa i ett komplext talplan. Vi kallar detta ett pol-nollställesdiagram (pole-zero plot)

Rita $H(z)$ (Komplex funktion av komplex variabel)

Vi försöker plotta beloppet av $H(z)$

$|H(z)|$



Plottat i MATLAB. **Skalor; -1 < Re(z) < 1, -1 < Im(z) < 1**
(se även figur i läroboken)

Poler och nollställen, fortsättning 3

Vi har här komplexa poler

Z-transformen av 2:a ordningens krets med komplexa rötter (se också formelsamling och övningar).

Sinus

$$h(n) = \quad r^n \sin(\omega_0 n) \;\; u(n) =$$

$$= \;\; r^n \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{2\,j}\;\left(\frac{1}{1-r\,e^{j\omega_0}\;\;z^{-1}} \;\; - \frac{1}{1-r\,e^{-j\omega_0}\;\;z^{-1}}\right) =$$

$$= .... = \frac{r\;\sin(\omega_0)\;z^{-1}}{1-2\;r\;\cos(\omega_0)\;z^{-1}+r^2\;\;z^{-2}}$$

Cosinus

$$h(n) = \quad r^n \cos(\omega_0 n) \;\; u(n) =$$

$$= \;\; r^n \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\;\left(\frac{1}{1-r\,e^{j\omega_0}\;\;z^{-1}} \;\; + \frac{1}{1-re^{-j\omega_0}\;\;z^{-1}}\right) =$$

$$= .... = \frac{1-r\;\cos(\omega_0)\;z^{-1}}{1-2\;r\;\cos(\omega_0)\;z^{-1}+r^2\;\;z^{-2}}$$

Beräkning av impulssvar för vårt genomgående exempel.

Vi hade

$$H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27\, z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = z^{-1} \frac{1 - z^{-1}}{1 - 1.27\, z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

Beräkna nu *h(n)*, dvs invers Z-transform av *H(z)* med hjälp av sambanden på föregående sida.

Skriv om *H(z)* så vi kan identifiera cosinus och sinustermerna.

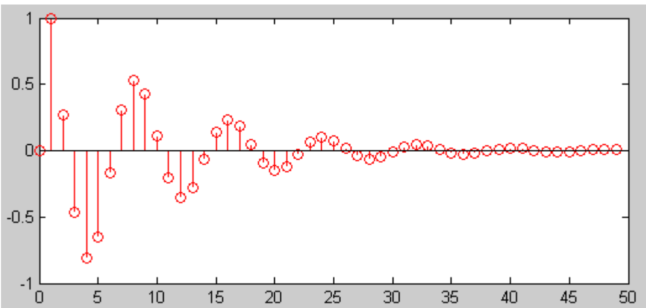
$$H(z) = z^{-1} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - \underbrace{\underbrace{1.27}_{2r\cos(\omega_0)}}_{\omega_0 = \pi/4} z^{-1} + \underbrace{\underbrace{0.81}_{r^2}}_{r=0.9} z^{-2}} =$$

$$= z^{-1} \cdot \frac{1 - r\cos(\omega_0) z^{-1} + (r\cos(\omega_0) z^{-1} - z^{-1}) \frac{r\sin(\omega_0)}{r\sin(\omega_0)}}{1 - \underbrace{\underbrace{1.27}_{2r\cos(\omega_0)}}_{\omega_0 = \pi/4} z^{-1} + \underbrace{\underbrace{0.81}_{r^2}}_{r=0.9} z^{-2}}$$

Formlerna på föregående sida ger nu

$$h(n) = r^{n-1}\{\cos(\omega_0(n-1)) + \frac{r\cos(\omega_0) - 1}{r\sin(\omega_0)} \sin(\omega_0(n-1))\}\, u(n-1) =$$

$$= \{0.9^{\,n-1}\cos(\pi/4(n-1)) - 0.57 \cdot 0.9^{\,n-1}\sin(\pi/4(n-1))\}\, u(n-1)$$



Stabilitet

Ett system är stabilt om en insignal som är amplitudbegränsad ger en utsignal som också är amplitudbegränsad.

Detta kallas BIBO-stabilitet.
Ett tillräckligt krav är att

$$\sum_{n} |h[n]| < \infty$$

Detta är ekvivalent med att alla poler ligger innanför enhetscirklen, se nedan.

FIR-filter

FIR-filter har alla poler i origo och är alltid BIBO-stabila.

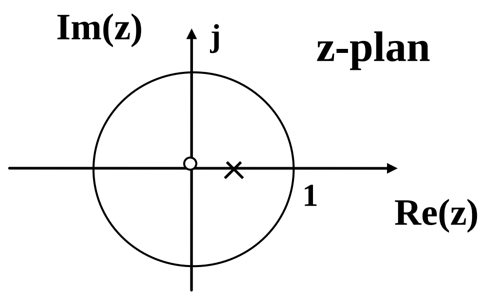
$h[n]$ **har ändlig längd och** $\sum_{n} |h[n]|$ **alltid begränsad**

Stabilitet hos IIR-filter

Första ordningen:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a\ z^{-1}} \qquad\qquad h[n] = a^n\ u[n]$$

Pol i $p = a \qquad (kalla\ \ pol\ \ p\ \ som\ i\ \ Matlab)$



Stabilt om $|\,a\,| < 1$, **dvs pol innanför enhetscirklen**

Andra ordningen:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - p_1\ z^{-1})(1 - p_2\ z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - p_1\ )(z - p_2\ )} =$$

$$= \frac{1}{1 - (\,p_1 + p_1)\ z^{-1} + p_1\ p_2\ z^{-2}}$$

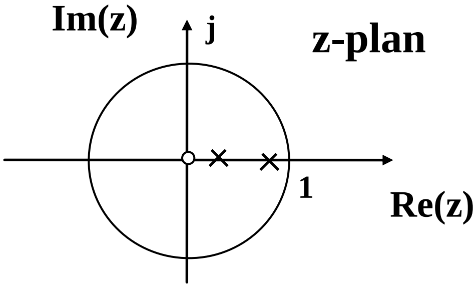
Vi delar upp i två fall

A Reella poler
B Komplexa poler

Reella rötter (poler)

$$H(z) = \frac{1}{(1-p_1\ z^{-1})(1-p_2\ z^{-1})} = \frac{A}{1-p_1\ z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2\ z^{-1}}$$

$$h[n] = (A\,p_1^n \quad + B\,p_2^n\ )\ u[n]$$



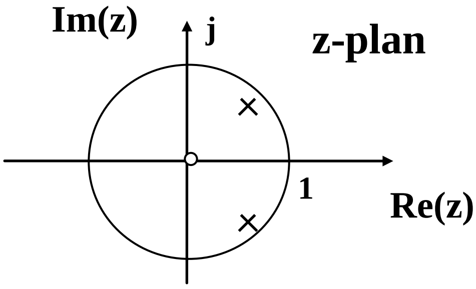
Stabilt om $|\ p_1\ | < 1,\ |\ p_2\ | < 1$ **dvs poler innanför enhetscirklen**

Komplexa rötter (poler) (komplexkonjugerade)

$$p_{1,2} = r\,e^{\pm j\ \omega_0}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1-p_1\ z^{-1})(1-p_2\ z^{-1})} = \frac{1}{1-(p_1+p_2)\ z^{-1} + p_1 p_2\ z^{-2}}$$

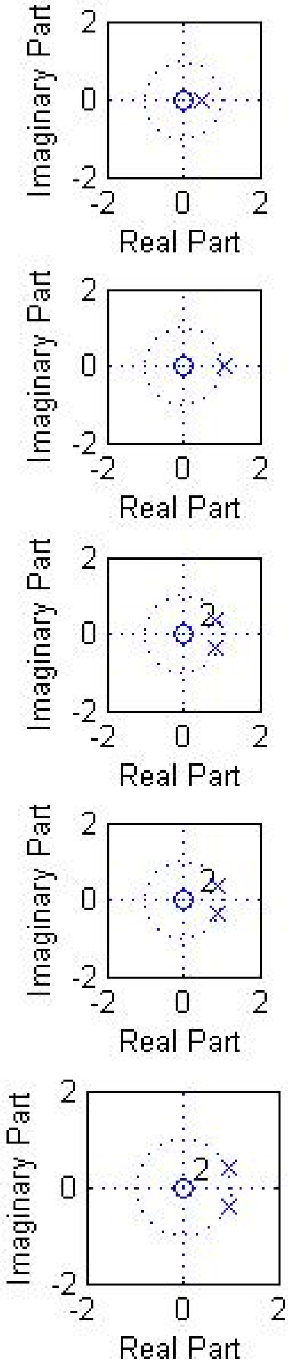
$$= \frac{1}{1-2\,r\cos(\omega_0)\ z^{-1} + r^2\ z^{-2}}$$



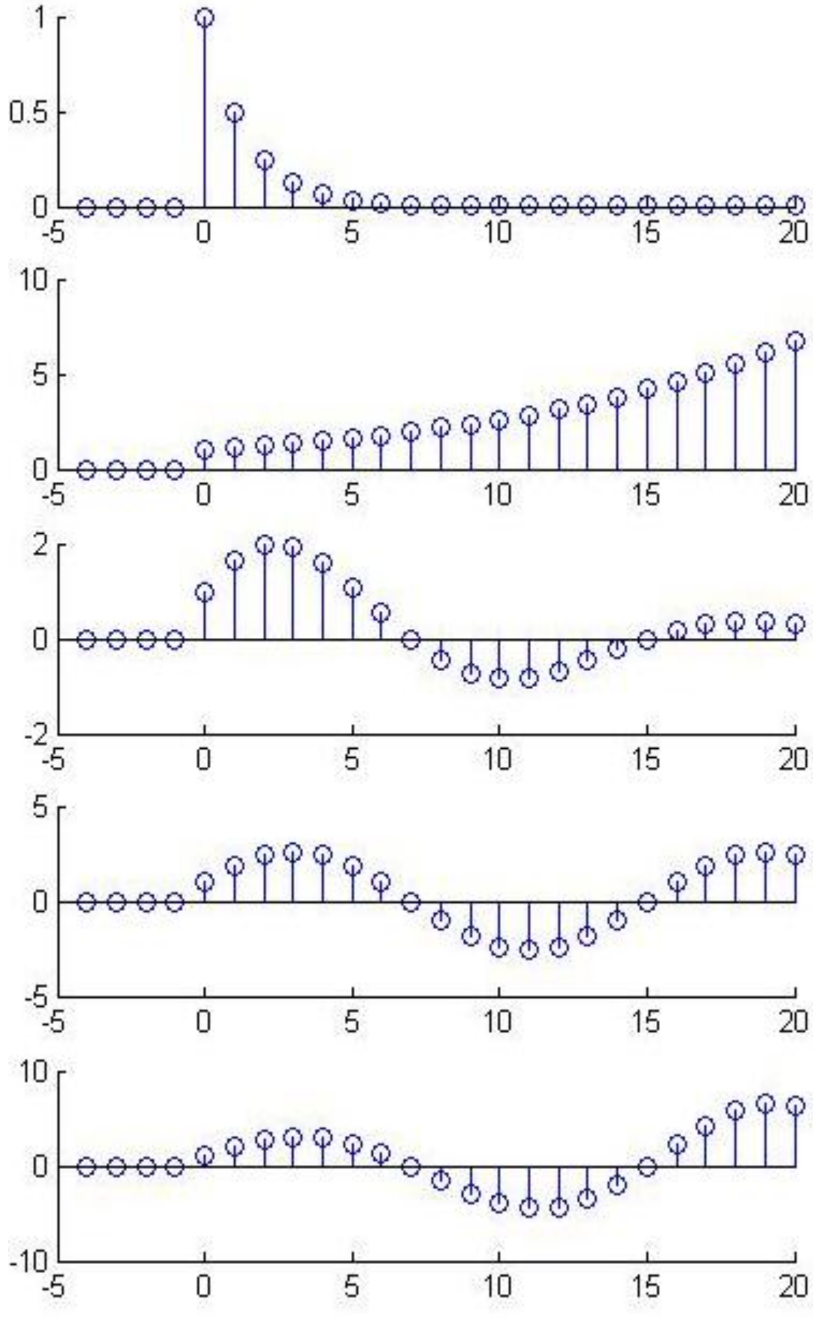
Stabilt om $|\ p_1\ | < 1,\ |\ p_2\ | < 1$ **dvs poler innanför enhetscirklen**

MATLAB exempel

Pol-nollställesdiagram



Impulssvar



Några kommentarer

Stabilitet

FIR-filter har alla polerna i origo.
FIR-filter är alltid stabila i den mening att utsignalens amplitud inte kan bli oändligt stor.

IIR-filter har inte alla poler i origo.
IIR-filter är stabila bara om alla polerna ligger innanför enhetscirklen.

Jämför analogt *H(s)* med tidsdiskret *H(z)*

Analogt: Stabilt om poler i vänstra halvplanet

$$H(s) = \int_t h(t)\, e^{-st}\, dt$$

Tidsdiskret: Stabilt om poler innanför enhetscirklen

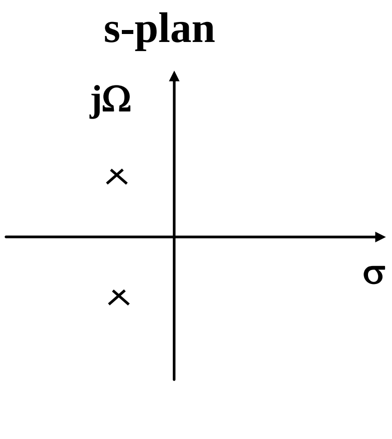
$$H(z) = \sum_n h(n)\, z^{-n}$$

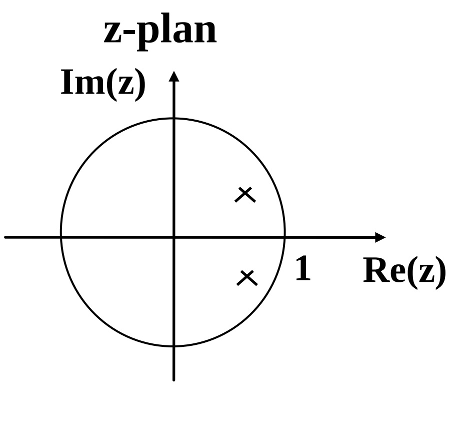
ger $z \sim e^{s}$

Ex:

$$p_{\text{analogt}} = -0.5 \pm 0.5\, j$$

$$p_{\text{diskret}} \sim e^{-0.5 \pm j0.5} = e^{-0.5} e^{\pm j0.5} = 0.6 e^{\pm j0.16\pi}$$





$s = \sigma + j\,\Omega = \sigma + j\,2\,\pi\,F$

$z = r\,e^{j\omega} = r\,e^{j2\,\pi\,f}$

Lösning av allmän differensekvation

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_M z^{-M} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} X(z) = H(z)\, X(z)$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} =$$

$$= \frac{z^{-M}}{z^{-N}} b_0 \frac{(z - z_1)\ldots(z - z_M)}{(z - p_1)\ldots(z - p_N)}$$

z_i nollställen (rötter till täljaren)
p_i poler (rötter till nämnaren)

Inverstransformera Y(Z) (genom partialbråksuppdelning) och lösningen ges av det resulterande y(n).

Appendix : Z-transformer från formelsamlingen

2.3 Z-transformen

2.3.1 Z-transform av kausala signaler

1.	$\mathcal{X}(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	Transform
2.	$x(n) = Z^{-1}[\mathcal{X}(z)] = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz$	Inverstransform
3.	$\sum_\nu a_\nu x_\nu(n) \longleftrightarrow \sum_\nu a_\nu \mathcal{X}_\nu(z)$	Linjäritet
4.	$x(n-n_0) \longleftrightarrow z^{-n_0}\mathcal{X}(z)$	Skift (n_0 positivt eller negativt heltal)
5.	$nx(n) \longleftrightarrow -z\,\frac{d}{dz}\,\mathcal{X}(z)$	Multiplikation med n
6.	$a^n x(n) \longleftrightarrow \mathcal{X}\left(\frac{z}{a}\right)$	Skalning
7.	$x(-n) \longleftrightarrow \mathcal{X}\left(\frac{1}{z}\right)$	Spegling av tidsföljden
8.	$\left[\sum_{\ell=-\infty}^{n} x(\ell)\right] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\,\mathcal{X}(z)$	Summering
9.	$x * y \longleftrightarrow \mathcal{X}(z)\cdot\mathcal{Y}(z)$	Faltning
10.	$x(n)\cdot y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \mathcal{Y}(\xi)\mathcal{X}\left(\frac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}d\xi$	Produkt
11.	$x(0) = \lim_{z\to\infty}\mathcal{X}(z)$ (om gränsvärdet existerar)	Begynnelsevärdesteoremet
12.	$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)\mathcal{X}(z)$ (om ROC inkluderar enhetscirkeln)	Slutvärdesteoremet
13.	$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)y(\ell) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma x(z)y\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz$	Parsevals teorem för reellvärda tidsföljder
14.	$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x^2(\ell) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \mathcal{X}(z)\mathcal{X}(z^{-1})z^{-1}dz$	– --

	Talföljd	$\longleftrightarrow$	Transform
	$x(n)$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{X}(z)$
15.	$\delta(n)$	$\longleftrightarrow$	1
16.	$u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
17.	$nu(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
18.	$\alpha^n u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$
19.	$(n+1)\alpha^n u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$
20.	$\dfrac{(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{(r-1)!}\alpha^n u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{(1-\alpha z^{-1})^r}$
21.	$\alpha^n \cos\beta n\ u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1-z^{-1}\alpha\cos\beta}{1-z^{-1}2\alpha\cos\beta+\alpha^2 z^{-2}}$
22.	$\alpha^n \sin\beta n\ u(n)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{z^{-1}\alpha\sin\beta}{1-z^{-1}2\alpha\cos\beta+\alpha^2 z^{-2}}$
23.	$\mathbf{F}^n u(n)$	$\longleftrightarrow$	$(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{F})^{-1}$

2.3.2 Enkelsidig Z-transform av icke kausala signaler

Beteckning

$\mathcal{X}^+(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$	Enkelsidig Z-transform, $x(n)$ ej nödvändigtvis kausal
$\mathcal{X}(z)=\mathcal{X}^+(z)$	För kausala signaler

Vid skift av $x(n)$ erhålles:
i) skift ett steg

$$\begin{aligned} x(n-1) &\longleftrightarrow z^{-1}\mathcal{X}^+(z)+x(-1) \\ x(n+1) &\longleftrightarrow z\mathcal{X}^+(z)-x(0)\cdot z \end{aligned}$$

ii) skift n_0 steg ($n_0 \geq 0$)

$$\begin{aligned} x(n-n_0) &\longleftrightarrow z^{-n_0}\mathcal{X}^+(z)+x(-1)z^{-n_0+1}+ \\ &\qquad +x(-2)z^{-n_0+2}+\ldots+x(-n_0) \\ x(n+n_0) &\longleftrightarrow z^{n_0}\mathcal{X}^+(z)-x(0)z^{n_0}-x(1)z^{n_0-1}-\ldots-x(n_0-1)z \end{aligned}$$