Föreläsning 3

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 3

Z-transformen

LTH
2014

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Kap 3 z-transform

Vi utgår från ett kausalt impulssvar $h(n)$.
Kausalt innebär att

$$h(n) = 0 \quad för \;\; n < 0$$

Vi definierar nu Z-transformen av impulssvaret som

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\; z^{-n}$$

där $z = r\,e^{j\omega}$

är ett komplext tal som vi oftast skriver som belopp och fas.

H(z) **är en komplex funktion av en komplex variabel.**

Några exempel på z-transformer dirkt från definitionen

Tidsfunktion FIR Z-transform

Tidsfunktion FIR	Z-transform
$h(n)$	$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{-n} = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \dots$
$\delta(n) = \{\dots 0 \ \underset{\uparrow}{1} \ 0 \dots\}$	1
$\delta(n-1)$	z^{-1}
$h(n-1)$	$z^{-1}\, H(z)$
$h(n) = \{3 \quad 2 \quad 1\}$	$H(z) = 3 + 2\, z^{-1} + z^{-2}$

Bevis fördröjning:

$$y[n] = x[n-1] \quad \Leftrightarrow \; Y(z) = \sum_n y[n]\, z^{-n} = \sum_n x[n-1]\, z^{-n} =$$

$$= \underbrace{\sum_n x[n-1]\, z^{-(n-1)}}_{X(z)} z^{-1} = z^{-1}\, X(z)$$

Ytterligare exempel

Tidsfunktion IIR Z-transform

$$h(n) = a^n \ u(n) \qquad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \ z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \quad z^{-1})^n =$$

$$= \frac{1-(az^{-1})^{\infty+1}}{1-a\,z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1-a\,z^{-1}} \qquad om \ |\, z \,| > a \ \ (ROC)$$

$$h(n) = u(n) \qquad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ z^{-n} = \frac{1-(z^{-1})^{\infty+1}}{1-a\,z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad om \ |\, z \,| > 1 \ (ROC)$$

ROC betyder Region of Convergence, dvs för vilka z summan konvergerar.

För en kausal signal (signalen = 0 för negativa n) blir ROC ett plan

$$|\, z \,| \geq R_{\min}$$

Detta är vårt normala fall i denna kurs.

För en icke-kausal signal blir det lite besvärligare. Vi visar detta med ett exempel på nästa sida.

Exempel på z-transform av icke-kausal signal sid 154

Givet:

$$x(n) = (\frac{1}{2})^{|n|} \quad för \quad alla \quad n$$

Sök:

$$X(z)$$

Lösning: *x(n)* är skild från 0 för negativa *n*.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|n|} z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} (\frac{1}{2})^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n} z^{-n} - 1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n} z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n} z^{-n} - 1 =$$

$$= \frac{1-(\frac{1}{2}z)^{\infty+1}}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{\infty+1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 1 = \frac{1-(1/2)^2}{(1-\frac{1}{2}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$om \quad ROC \quad |z| < 2 \qquad och \qquad |z| > 1/2$$

Här tvingas vi kontrollera ROC för varje enskilt fall.

Faltning övergår i produkt

$$y(n) = h(n) * x(n) \qquad \Leftrightarrow \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

Bevis

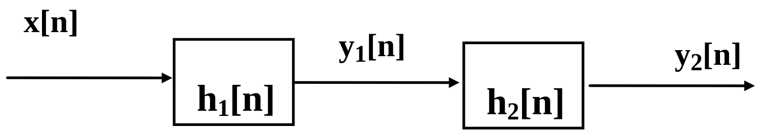
$$Y(z) = \sum_n y(n) z^{-n} = \sum_n \underbrace{\sum_k h(k)\; x(n-k)}_{y(n)} \; z^{-n} =$$

$$= \sum_n \sum_k h(k)\; x(n-k)\; z^{-(n-k)}\; z^{-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_k h(k) z^{-k}}_{H(z)} \underbrace{\sum_n x(n-k)\; z^{-(n-k)}}_{X(z)} = H(z)X(z)$$

Kaskadkoppling (seriekoppling) av kretsar

Vid kaskadkoppling får vi



$$h_{hela}[n] = h_1[n] * h_2[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad H_{hela}(z) = H_1(z) H_2(z)$$

Impulssvaret för hela kretsen är faltningen mellan bägge impulssvaren. Och systemfunktionen för hela kretsen är produkten av kretsarna systemfunktion.

Slutsats: Faltning i tidsplanet ger produkt i z-planet.

Bevis (samma som tidigare)

$$H_{hela}(z) = \sum_n h_{hela}(n)\, z^{-n} = \sum_n \underbrace{\sum_k h_1(k)\; h_2(n-k)}_{h_{hela}[n]} \; z^{-n} =$$

$$= \sum_n \sum_k h_1(k)\; h_2(n-k) \; z^{-(n-k)}\; z^{-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_k h_1(k)\, z^{-k}}_{H_1(z)} \underbrace{\sum_n h_2(n-k)\; z^{-(n-k)}}_{H_2(z)} = \quad H_1(z) H_2(z)$$

Ränteberäkning med z-transform

Bankkonto (fortsättning från kap. 2)

Nu kan vi få en formel för vår behållning på kontot.
Vi hade (kap. 2)

$$y[n] = 1.05y[n-1] + x[n]$$
$$x[n] = 100 \cdot u[n] \qquad (\textit{insättning} \quad 100kr/år)$$

Z-transformera

$$Y(z) = 1.05z^{-1}Y(z) + X(z), \quad X(z) = \frac{100}{1-z^{-1}}$$
$$Y(z) = \frac{1}{1-1.05z^{-1}} X(z) = \frac{1}{1-1.05z^{-1}} \cdot \frac{100}{1-z^{-1}} =$$
$$= 100 \; \left(\frac{21}{1-1.05z^{-1}} - \frac{20}{1-z^{-1}}\right)$$

Detta ger oss

$$y[n] = 100 \cdot (21 \cdot 1.05^n - 20)u[n]$$

$$y[n] = [\underbrace{100}_{år\ 0}, \; 205, \; 315, \ldots, \; \underbrace{680}_{år\ 5}, \ldots, \; \underbrace{1421}_{år\ 10}, \; \ldots, \underbrace{3572}_{år\ 20}, \ldots, \underbrace{\approx 10^{45}}_{år\ 2000}, \ldots]$$

Lösning av andra ordningens differensekvation

Första ordningens differensekvation löste vi i kapitel 2. Med hjälp av z-transformen kan vi nu enkelt lösa högre ordningens differensekvationer. Vi löser för *n≥0* och antar att både *y(n)* och *x(n)* är noll för negativa *n* (krets i vila).

Givet en andra ordninges differensekvation

$$y(n) - 1.27y(n-1) + 0.81y(n-2) = x(n-1) - x(n-2)$$

Vi kan Z-transformera varje term i ovanstående uttryck och får (vi antar att både x(n) och y(n) är kausala)

$$Y(z) - 1.27\ z^{-1}Y(z) + 0.81\ z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z) - z^{-2}\ X(z)$$

Lös ut

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27\ z^{-1} + 0.81\ z^{-2}}}_{H(z)}\ X(z) = H(z)\,X(z)$$

Med hjälp av tabeller med z-transform kan vi också enkelt få $y(n)$ och $h(n)$. I de flesta fall vill vi enbart ha fram egenskaper hos $H(z)$.

Exempel: Fibonacci sequence sid 210

Fibonacci sequence är en sekvens där nästa tal är summan av de två föregående talen, dvs

$$\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots\}$$

Kan vi hitta en sluten lösning på denna serie? Ja

Differensekvation:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2)$$
$$d\ddot{a}r\ \ y(0)=1,\ y(1)=1$$

A: Lös med impulssvar

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + \delta(n)$$

Lösning:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + 1$$
$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{A}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{B}{1-p_2 z^{-1}}$$
$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}}$$
$$p_1 = 0.5(1+\sqrt{5}), \qquad p_2 = 0.5(1-\sqrt{5}),$$

där $A_1 = (1+\sqrt{5})/(2\sqrt{5}), \quad A_2 = -(1-\sqrt{5})/(2\sqrt{5})$

Svar: $y(n) = A_1\, p_1^{\,n} + A_2\, p_2^{\,n} \quad f\ddot{o}r\ \ n \geq 0$

B: Lös med startvärden (kommer senare, boken sid 210)

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2)$$
$$med\ \ y(-1)=0,\ \ y(-2)=1$$

Invers z-transform: Utnyttja tabeller

A: Enligt definitionen sid 181
B: Polynomdivision sid 183
C: Tabeller

A:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z)\, z^{n-1}\, dz$$

B: **Exempel sid 181**

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \dots = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} \dots$$

C: **Utnyttja kända transformpar från tabeller.**
Det är detta vi ska utnyttja mest.

C: Tabell (eller kända transformer)

1:a ordningen

$$Y(z) = \frac{1}{1-0.9\,z^{-1}} \quad \textbf{ger} \qquad y(n) = 0.9^n u(n)$$

2:a ordningen, reella poler (partialbråksuppdeln).

$$Y(z) = \frac{1}{1-3/2\ z^{-1} + 1/2\ z^{-2}} = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-1/2\,z^{-1}}$$

ger $y(n) = 2\,u(n) - (1/2)^n\ u(n)$

2:a ordningen, komplexa poler (formelsamling direkt)

$$Y(z) = \frac{0.5\sin(\pi/4)\,z^{-1}}{1-2\cdot\cos(\pi/4)\,z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

ger $y(n) = 0.5^n\ \sin(\pi/4\ n)\ \ u(n)$

Mer om detta nästa föreläsning och på räkneövningarna

Dela upp i 1:a och 2:a gradsuttryck (partialbråksuppdelning)

2:a gradsuttryck, kolla allra först om reella eller komplexa poler.

Lösning av differensekvation med begynnelsevärden

Första ordningens differensekvation löste vi i kapitel 2. Vi sa att begynnelsevärde *y(-1)* oftast är noll. Vi kan använda Z-transform även om *y(-1)* är skild från noll.

Vi löser för *n≥0* och *x(n)* är noll för negativa *n* men *y(-1)* är skild från noll (krets ej ivila).

Vi definierar *enkelsidig Z-transform* enligt

$$Y^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} \qquad \text{\textit{även om}} \quad y(n) \neq 0 \quad \text{\textit{för}} \quad n < 0$$

Med denna definition blir Z-transformen av skift annorlunda.

Med

$$y_0(n) = y(n-1) \quad \text{\textit{blir}} \quad Z^{+} - \text{\textit{transformen (enligt def)}}$$

$$Y_0^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_0(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1) z^{-n} =$$

$$= y(-1) + \sum_{n=1}^{\infty} y(n-1) z^{-(n-1)} \; z^{-1} = z^{-1}\, Y^{+}(z) + y(-1)$$

dvs vi får lägga till startvärdet *y(-1)* för att få ett korrekt svar.

Med hjälp av den *enkelsidig z-transformen* kan vi lösa differensekvationer med begynnelsevärden. Se gärna exemplet i boken på lösning av Fibonacci-sekvensen.

Exempel: Lös en första ordningens differensekvation med starvärde.

Givet:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad med \quad startvärde \;\; y(-1) \;\; givet$$

Sök: $y(n) \quad för \quad n \geq 0$

Lösning:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad Z^{+} - transformera$$

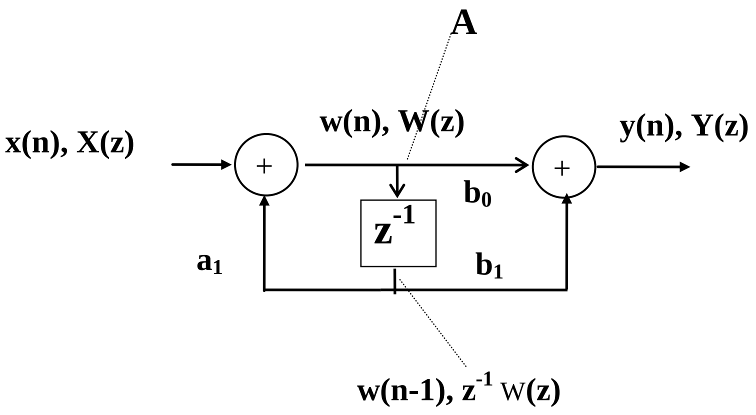
$$Y^{+}(z) = a(\; z^{-1} \; Y^{+}(z) \; + \; y(-1)) + X(z) \quad ger$$

$$Y^{+}(z) = \frac{1}{1-a\,z^{-1}} X(z) \; + \; \frac{a}{1-a\,z^{-1}} y(-1)$$

Direktform II, sid 265 (standardritsätt)

Vi illustrerar ofta differensekvationer grafiskt. Ett enkelt exempel visas nedan. Mer om detta kommer i kapitel 9.

Givet: Krets ritat på formen



Sök: Samband mellan x[n] och y[n]

Lösning: Inför hjälpvariabel w[n] och inför beteckningarna X(z), W(z) och Y(z). Räkna med dessa. Beräkna summan i punkten A.

$$W(z) = a_1 z^{-1} W(z) + X(z) \quad \Rightarrow W(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} X(z)$$

$$Y(z) = b_0 W(z) + b_1 z^{-1} W(z) \quad \Rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}}_{H(z)} X(z)$$

dvs

$$Y(z) = H(z)\ X(z)$$