Föreläsning 2

Signalbehandling i multimedia ETI265

Kapitel 2

Faltning
Impulssvar
Differensekvationer
Korrelationsfunktioner

LTH
2014

Nedelko Grbic

(mtrl. från Bengt Mandersson)

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Kapitel 2 Faltning sid 71-80

Det viktigaste samband mellan insignal och utsignal kallas faltning. Om vi vet en krets impulssvar *h(n)* kan vi beräkna utsignalen för en godtycklig insignal.

Vi utnyttjar bara linjaritet och tidsinvarians (LTI).

$$\begin{array}{lcl} \textit{Insignal} & & \textit{Utsignal} \\ x(n) & \Rightarrow & y(n) \end{array}$$

Definition

$$\textit{impuls } \delta(n) \quad \Rightarrow \quad \textit{impulssvar } h(n)$$

$$\delta(n-k) \quad \Rightarrow \quad h(n-k)$$

$$x(k)\,\delta(n-k) \quad \Rightarrow \quad x(k)\,h(n-k)$$

$$\underbrace{\sum_k x(k)\,\delta(n-k)}_{x(n)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_k x(k)\,h(n-k)}_{y(n)}$$

$$y(n) = \sum_k x(k)\,h(n-k) = \sum_k h(k)\,x(n-k) = h(n) * x(n)$$

Detta samband kallas faltning och är den mest allmängiltiga formeln i kursen

Exempel på faltning

Givet: Insignal och impulssvar

$$x(n) = \begin{bmatrix} \ldots & 0 & 0 & \underset{\uparrow}{2} & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \quad och$$

$$h(n) = \begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sök: Utsignal (faltning)

$$y(n) = \sum_k h(n-k)\,x(k) = \sum_k h(k)\,x(n-k) =$$

$$= \underbrace{h(0)}_{3}\,x(n) + \underbrace{h(1)}_{2}\,x(n-1) + \underbrace{h(2)}_{1}\,x(n-2) =$$

$$= 3\,x(n) + 2\,x(n-1) + x(n-2)$$

Lösning: Vi löser ”grafiskt” genom att skriva enligt

$$\begin{array}{llllllllllll}
\textit{vikter baklänges } h(0-k) & & & 1 & 2 & \underset{\uparrow}{3} & & & & & & \\
x(k) & \ldots & 0 & 0 & \underset{\uparrow}{2} & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & & \\
\textit{ger} \quad y(n) = & & \big[\,0 & 0 & \underset{\uparrow}{6} & 16 & 28 & 28 & 20 & 8 & 2\,\big] &
\end{array}$$

Multiplicera komponentvis och addera.
Skifta sen impulssvar åt höger

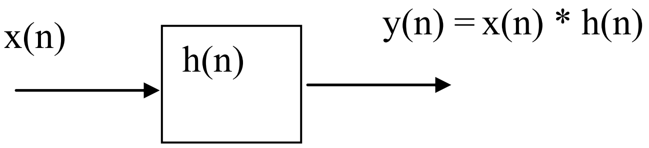
Egenskaper för faltning (vanliga räkneregler gäller) sid 81 (Kommutativ, Associativ och Distributiv)

$$x_1(n)*x_2(n) \quad = \quad x_2(n)*x_1(n)$$

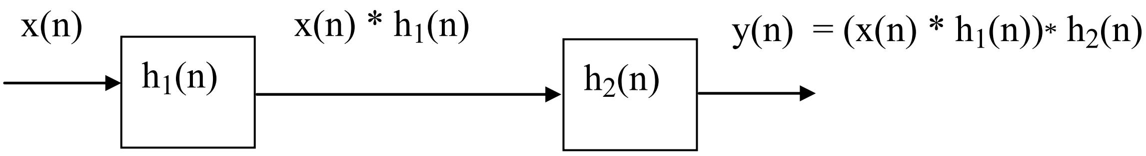
$$(x_1(n)*x_2(n))*x_3(n) \;=\; x_1(n)*(x_2(n)*x_3(n))$$

$$(x_1(n)+x_2(n))*x_3(n) \;=\; x_1(n)*x_3(n)+x_2(n)*x_3(n)$$

Input - output

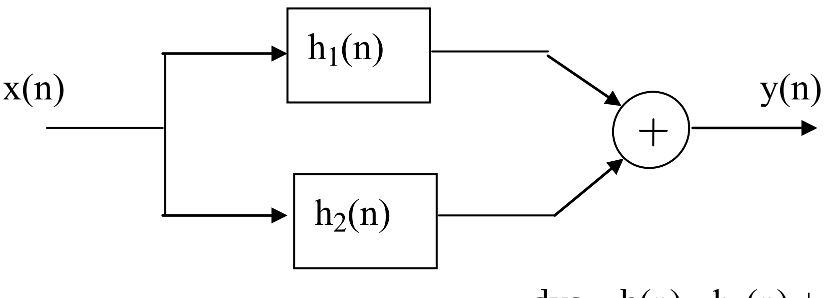


Kaskadkoppling (seriekoppling)



dvs $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

Parallellkoppling



dvs $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$

Definition av stabilitet   sid 85.

En krets BIBI-stabil (bounded input-bounded output) om

$$|x(n)| \leq M_x \qquad medför \; |y(n)| \leq M_y$$

Hur ser det sambandet ut i impulssvaret

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|\underbrace{|x(n-k)|}_{\leq M_x}$$

$$\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Dvs stabilt om

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

Differensekvation sid 93-95.

Allmänt:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

Exempel: FIR filter

$$y(n) = 0.5\, x(n) + 0.25\, x(n-1) + 0.15\, x(n-2)$$

ger direkt impulssvaret

$$h(n) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Exempel: Första ordningens IIR

$$y(n) = 0.5\, y(n-1) + 2\, x(n)$$

Exempel: Andra ordningens IIR

$$y(n) = 0.5\, y(n-1) + 0.5\, y(n-2) + x(n)$$

För IIR-filter måste vi lösa differensekvationen för att bestämma impulssvaret h(n)

Vi löser första ordningens differensekvation sid 94.

$$y(n) = -a_1 \;\; y(n-1) \; + \; b_0 \;\; x(n)$$

Lös iterativt för n≥0

$$y(0) = -a_1 \;\; y(-1) \; + \; b_0 \;\; x(0)$$
$$y(1) = -a_1\, y(0) + b_0 \;\; x(1) = (-a_1)^2\, y(-1) + b_0 \;\; x(1) + b_0\, (-a_1)\, x(0)$$
$$y(2) = -a_1\, y(1) + b_0 \;\; x(2) = (-a_1)^3\, y(-1) + b_0 \;\; x(2) + b_0\, (-a_1)\, x(1) + b_0\, (-a_1)^2 \;\; x(0)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \; b_0 \;\; (-a_1)^k \; x(n-k) \;\; + \;\; \underbrace{(-a_1)^{n+1}\, y(-1)}_{\substack{oftast = 0 \\ beror\, av\, startvärde}}$$

Impulssvar

Om $x(n) = \delta(n)$ **får vi**

$$y(n) = h(n) = b_0\, (-a_1)^n \qquad för \;\; n \geq 0$$

För godtycklig insignal beräknar vi sen utsignalen med faltning

$$y(n) = \sum_{k} \; h(k) \;\; x(n-k)$$

För lösning av högre ordningens ekv väntar vi tills vi har Z-transformen (kap 3).

Exempel

Givet:

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n \ u(n)$$

$$x(n) \ = u(n)$$

Sök:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Lösning: Faltning ger

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h(k)}_{\substack{=(\frac{1}{2})^k \ om \\ k \geq 0}} * \underbrace{x(n-k)}_{\substack{=1 \ om \\ k \leq n}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-(\frac{1}{2})^n$$

$$om \quad n \geq 0$$

Svar:

$$y(n) \ = (2-(\frac{1}{2})^n \ )u(n)$$

Korrelationfunktioner deterministiskt sid 118.

Vi avslutar kapitel 2 med att definiera korrelationsfunktioner.

Hur lika är signaler?

Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ x(n-l)$$

Korskorrelationsfunktion

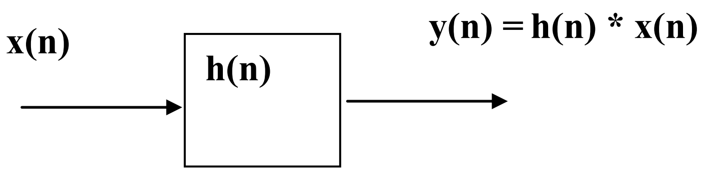
$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\ x(n-l)$$

Skriv om som faltning

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l)$$

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l)$$

Samband mellan korrelationsfunktioner för input - output



Autokorrelationsfunktion för insignalen

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l)$$

Autokorrelationsfunktion för utsignalen

$$r_{yy}(l) = y(l) * y(-l) = h(l) * x(l) * h(-l) * x(-l) =$$
$$= r_{hh}(l) * r_{xx}(l) \quad [dvs \ r_{hh}(l) = h(l) * h(-l)]$$

Korskorrelationsfunktion för utsignalen-insignal

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l) = h(l) * x(l) * x(-l) =$$
$$= h(l) * r_{xx}(l)$$

Vi kan lätt mäta upp ett okänt system *h(n)* genom att använda en insignal *x(n)*
(dvs om x(n) är vald till vitt brus, tex randn(.) i Matlab)

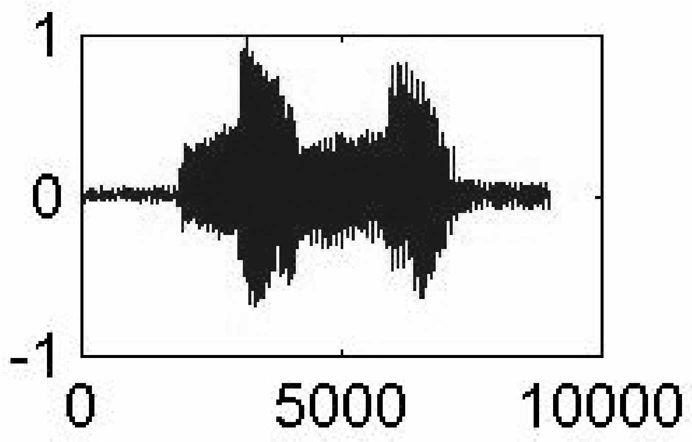
med

$$r_{xx}(l) = \delta(l)$$

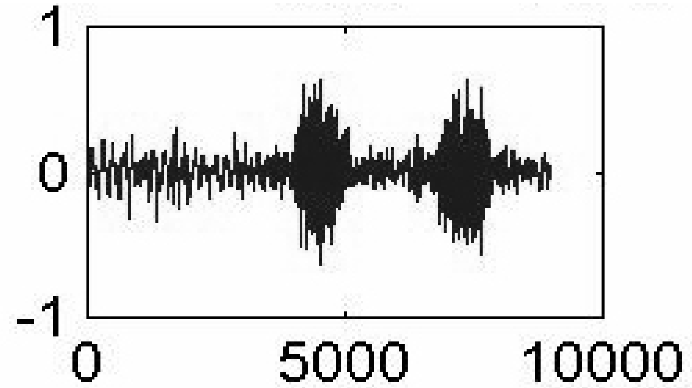
Vi får då

$$h(l) = r_{yx}(l)$$

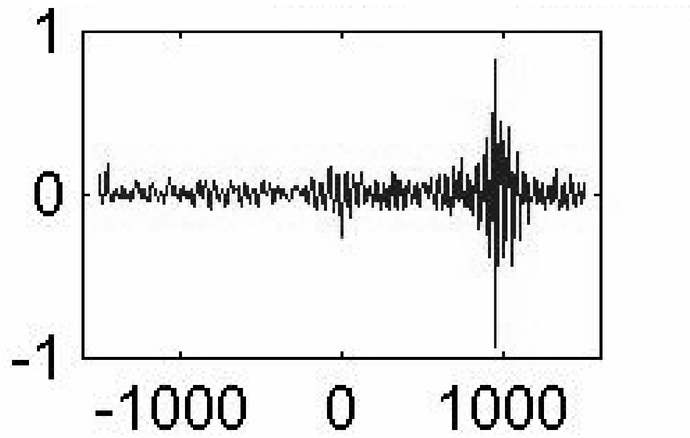
Exempel på korrelation, fördröjning i GSM;-överföring



Signal före GSM



Signal efter GSM



Korskorrelation

Exempel på IIR-filter (Infinitive Impulse Response)

Exempel: Beräkning behållning på bankkonto (beräkning av ränta på ränta)

Givet:	**y(n)**	**Behållning på kontot år n**
	x(n)=100	**Insättning 100 kr en gång per år**
	5 % årlig ränta	**(beräknas en gång per år)**

Sök. **Vad är saldot efter 1, 2, 5, 20 år**

Lösning: **Aktuellt saldo=gammalt saldo*1.05 + insättning**

y(n)=1.05*y(n-1) + x(n)

Vi har ett återkopplat system, nya saldot beror på såväl ingående saldo (gammal utsignal) som på insättning (insignal) (IIR-filter)

Iterativ lösning ger:

$$y(0) = 1.05 \cdot \underbrace{y(-1)}_{\substack{=0 \;\; \text{när vi börjar spara} \\ \text{Initial rest condition} \\ (\text{krets i vila})}} + \underbrace{x(0)}_{100} = 100$$

$$y(1) = 1.05 \cdot y(0) + x(1) = 1.05 \cdot 100 + 100$$

$$y(2) = 1.05 \cdot y(1) + x(2) = 1.05 \cdot (1.05 \cdot 100 + 100) + 100$$

osv

Med hjälp av z-transform kan vi få en formel för *y(n)* (kommer senare)