Федосеева Анастасия 431 группа

Отчет по теме: «Аппроксимация данных. Наилучшее квадратичное приближение»

Постановка задачи. Пусть задана дискретная функция $y(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \dots N$ и некоторая система $\{\phi^{(k)}(x)\}_1^n$ базиснных функций. Требуется найти коэффициенты c_i для $F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi^{(i)}(x)$, являющейся решением следующей задачи

$$\rho = \inf_{c_i} \sum_{i=0}^{N} (y_i - F(x_i))^2.$$

Нахождение искомых коэффициентов в матричном представлении сводится к минимизации функционала:

$$\inf_{c} \sum_{i=0}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{n} c_j \phi^{(j)}(x_i))^2 = \inf_{c} \sum_{i=0}^{N} ([b - Ac]_i)^2,$$

где $c = (c_0, \dots, c_n)^T$, $(A)_{ij} = \phi^{(j)}(x_i)$, $b = (y_0, \dots, y_N)^T$.

Утверждение. *Вектор c минимизирующий $\|Ac - b\|_2^2$ является решением системы уравнений $A^T A x = A^T b$.*

Данный метод называется методом нормального уравнения.

Метод QR разложения. Предположим, что нам известна матрица отражений Q такая, что $Q^T Q = I$ и QA равно верхнетреугольной R. Так как искомое решение имеет вид $c = (A^T A)^{-1} A^T b$, следовательно $Rc = Q^T b$ и вектор c находится обратным ходом метода Гаусса. При этом

$$\inf_{c} \|Ac - b\|_2^2 = \inf_{c} \|Q^T Ac - Q^T b)\|_2^2.$$

Непосредственной целью работы является:

1) Реализовать метод нормального уравнения для решение поставленной задачи;
2) Реализовать метод QR разложения для решения поставленной задачи;
3) Показать, что в случае систем большой размерности метод QR разложения даёт более точный результат, чем метод нормального уравнения.

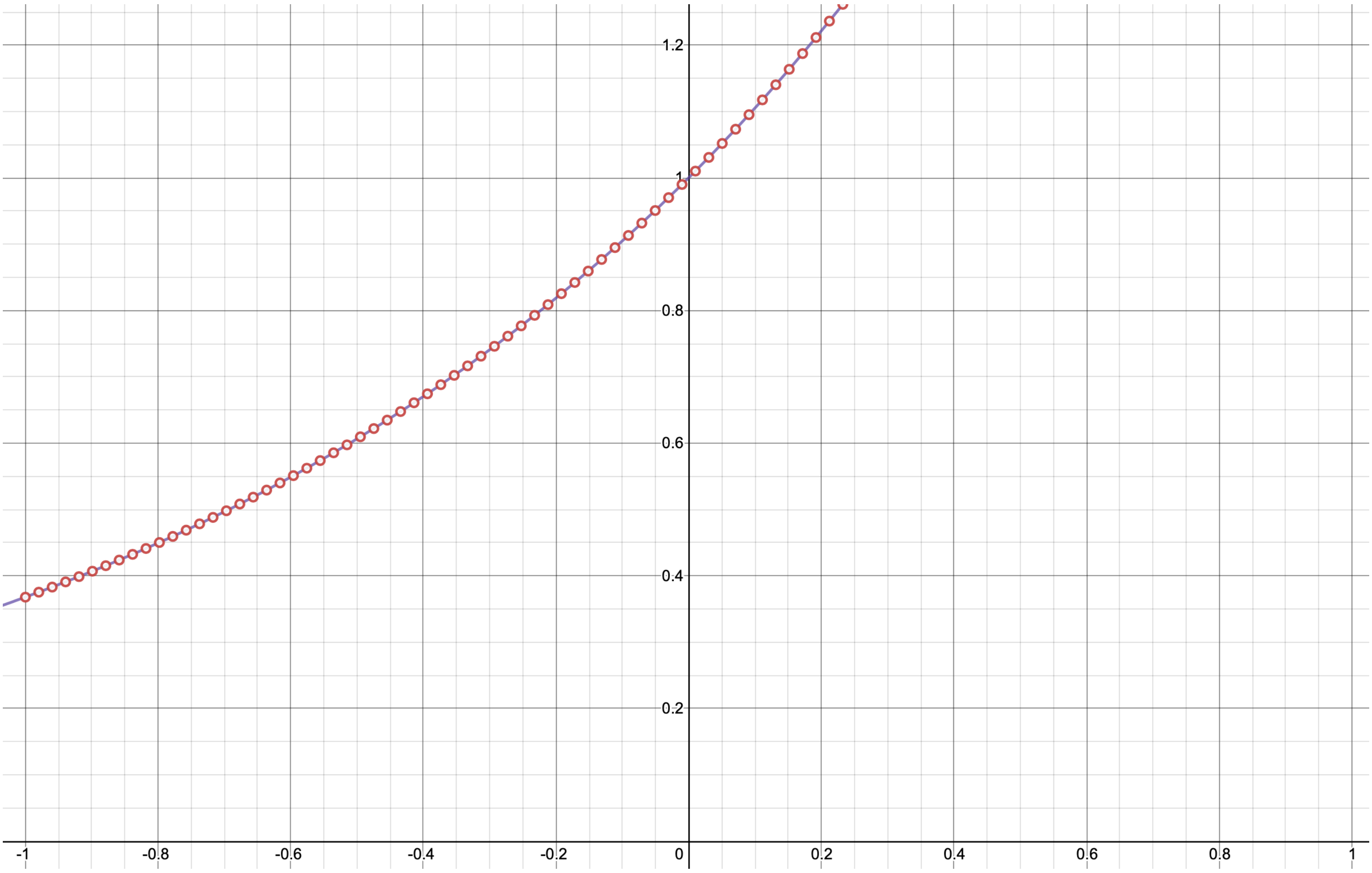
Федосеева Анастасия 431 группа

Результаты работы программы

Метод нормального уравнения

Тест 1

Рассмотрим функцию f(x) = exp(x), заданную на отрезке [-1, 1].
Параметры N = 100, n = 20.



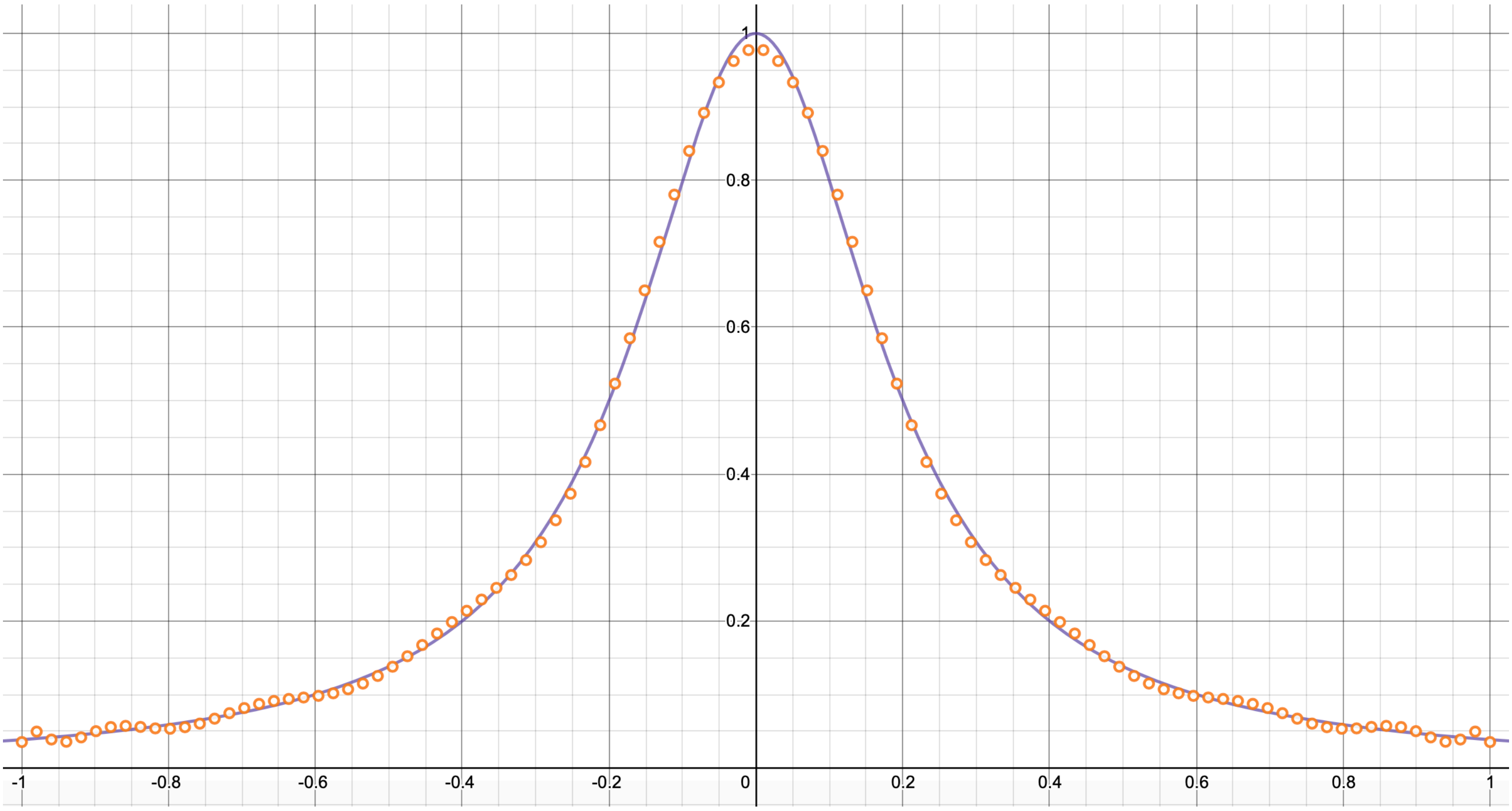
Минимум функционала p = 7.974818495703663e-18

Параметры N = 500, n = 50.
Минимум функционала p = 3.020335460796580e-12

Федосеева Анастасия 431 группа

Тест 2

Рассмотрим функцию f(x) = 1/(25xx+1), заданную на отрезке [-1, 1].
Параметры N = 100, n = 20.



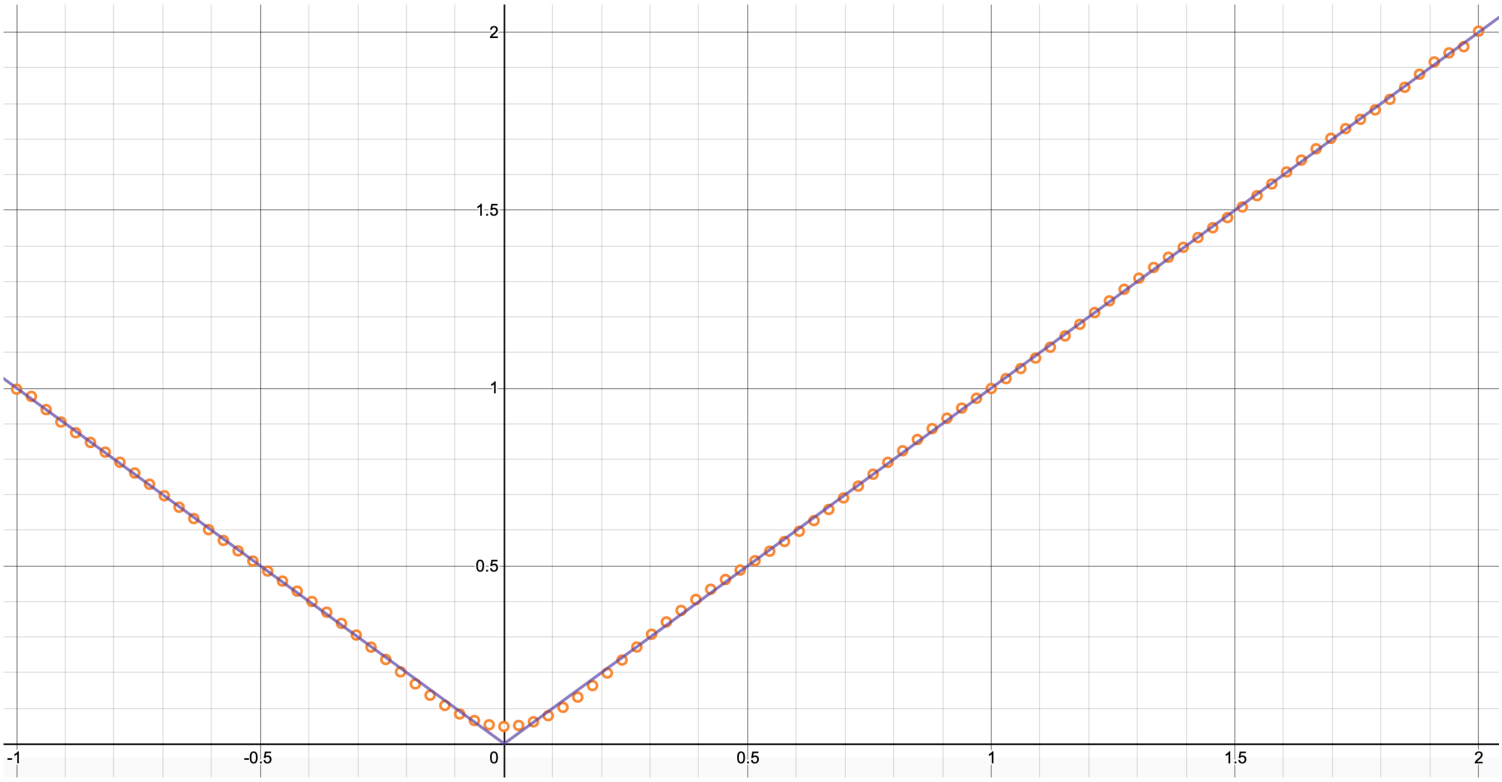
Минимум функционала p = 6.609280604299041e-03

Параметры N = 500, n = 50
Минимум функционала p = 1.242195687842959e-02

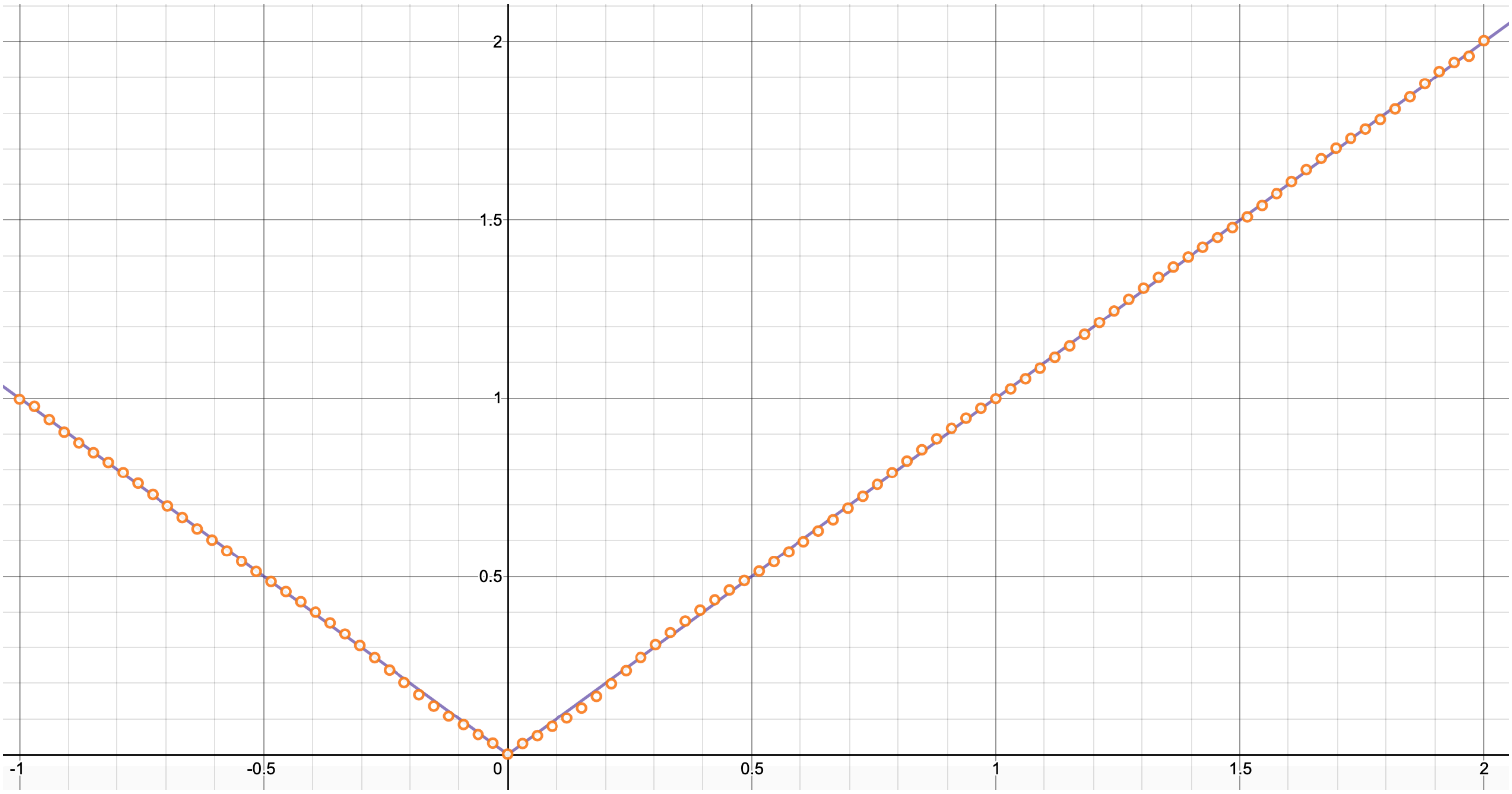
Федосеева Анастасия 431 группа

Тест 3

Рассмотрим функцию f(x) = |x|, заданную на отрезке [-1, 2].
Параметры N = 100, n = 20.
alfa[i] = 1, i=0,…,N-1
Минимум функционала p = 7.763286785575217e-03



alfa[i] = 1, i=1,…,30,36, …, N-1;
alfa[31] = alfa[35] = (b-a)/3,5; alfa[32] = alfa[34] = (b-a)/5; alfa[33] = (b-a)/N;
Минимум функционала p = 4.425570110595603e-03

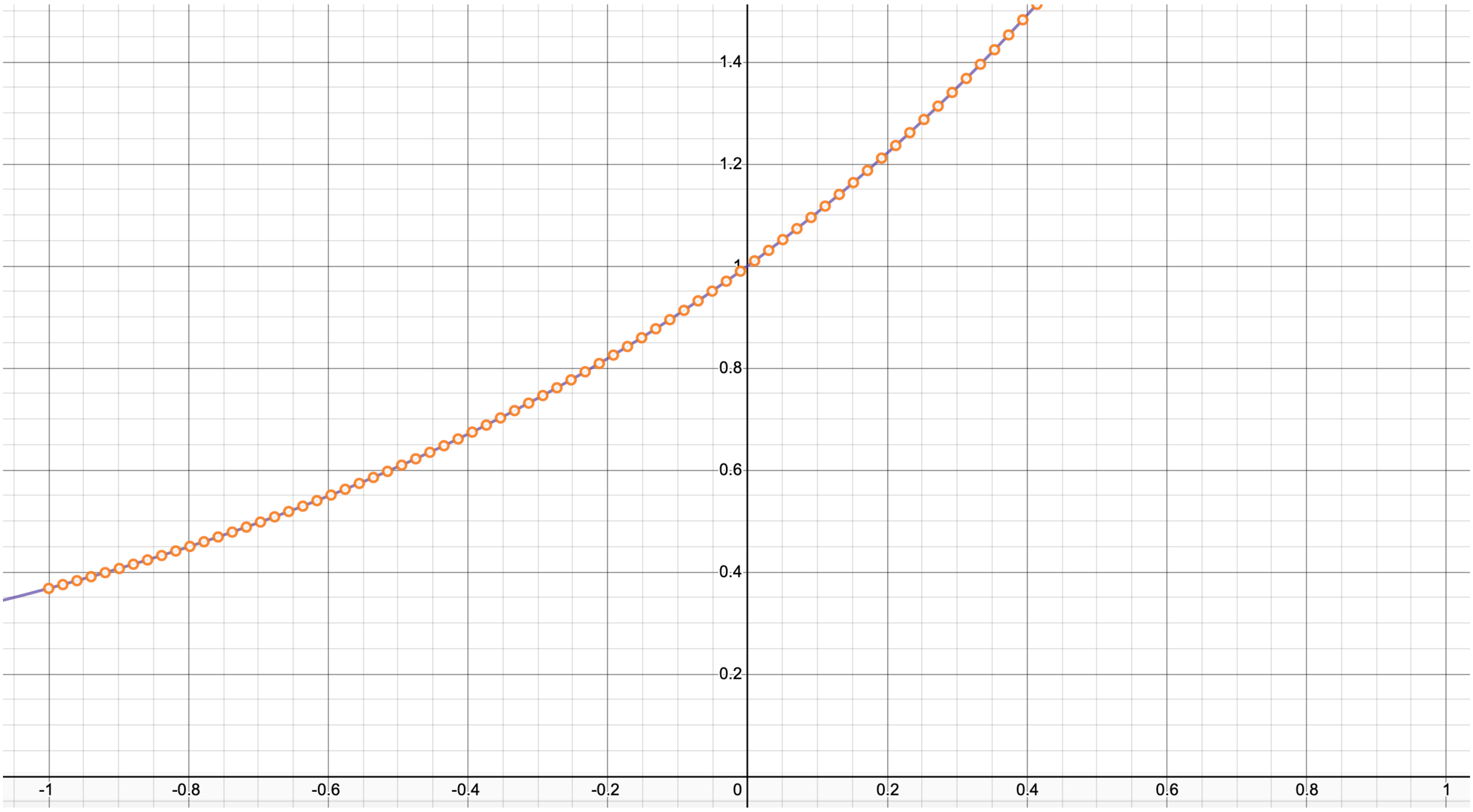


Федосеева Анастасия 431 группа

Метод QR разложения

Тест 1

Рассмотрим функцию f(x) = exp(x), заданную на отрезке [-1, 1].
Параметры N = 100, n = 20.



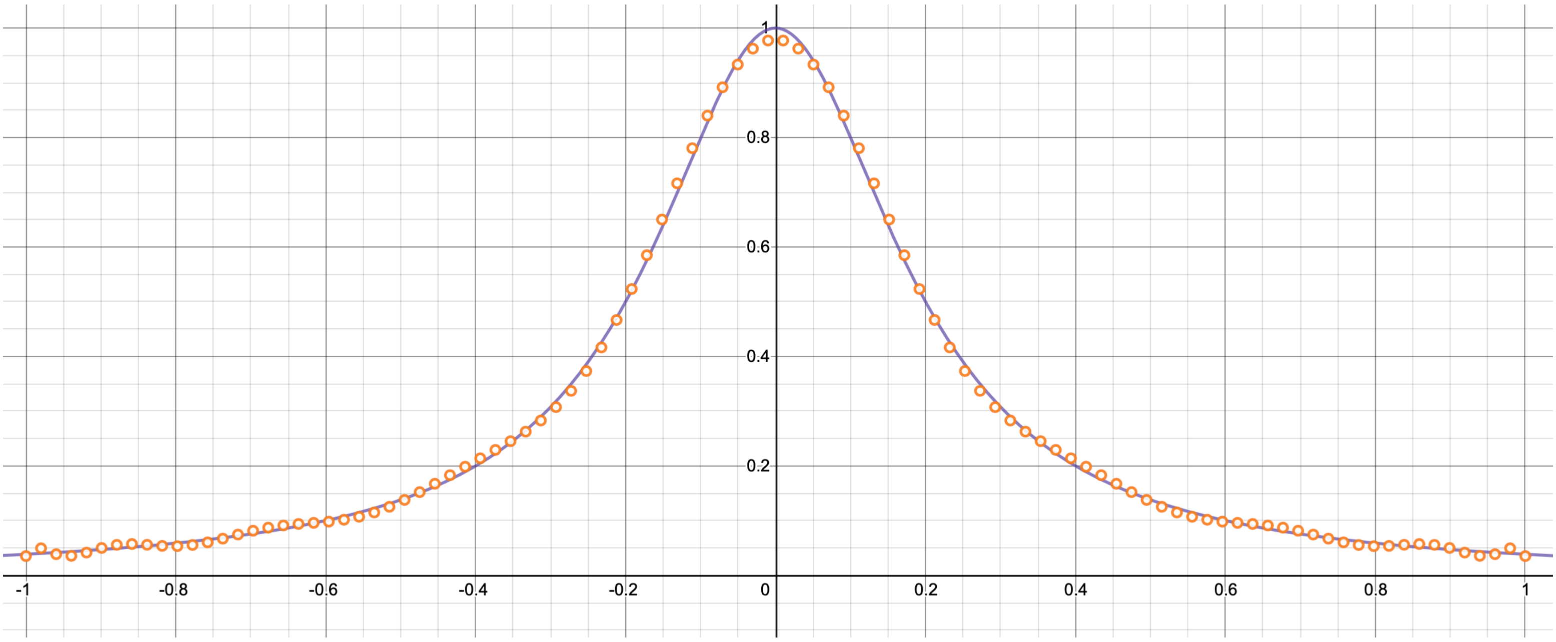
Минимум функционала p = 5.900094088350075e-28

Параметры N = 500, n = 50.
Минимум функционала p = 4.555316432095203e-26

Федосеева Анастасия 431 группа

Тест 2

Рассмотрим функцию f(x) = 1/(25xx+1), заданную на отрезке [-1, 1].
Параметры N = 100, n = 20.



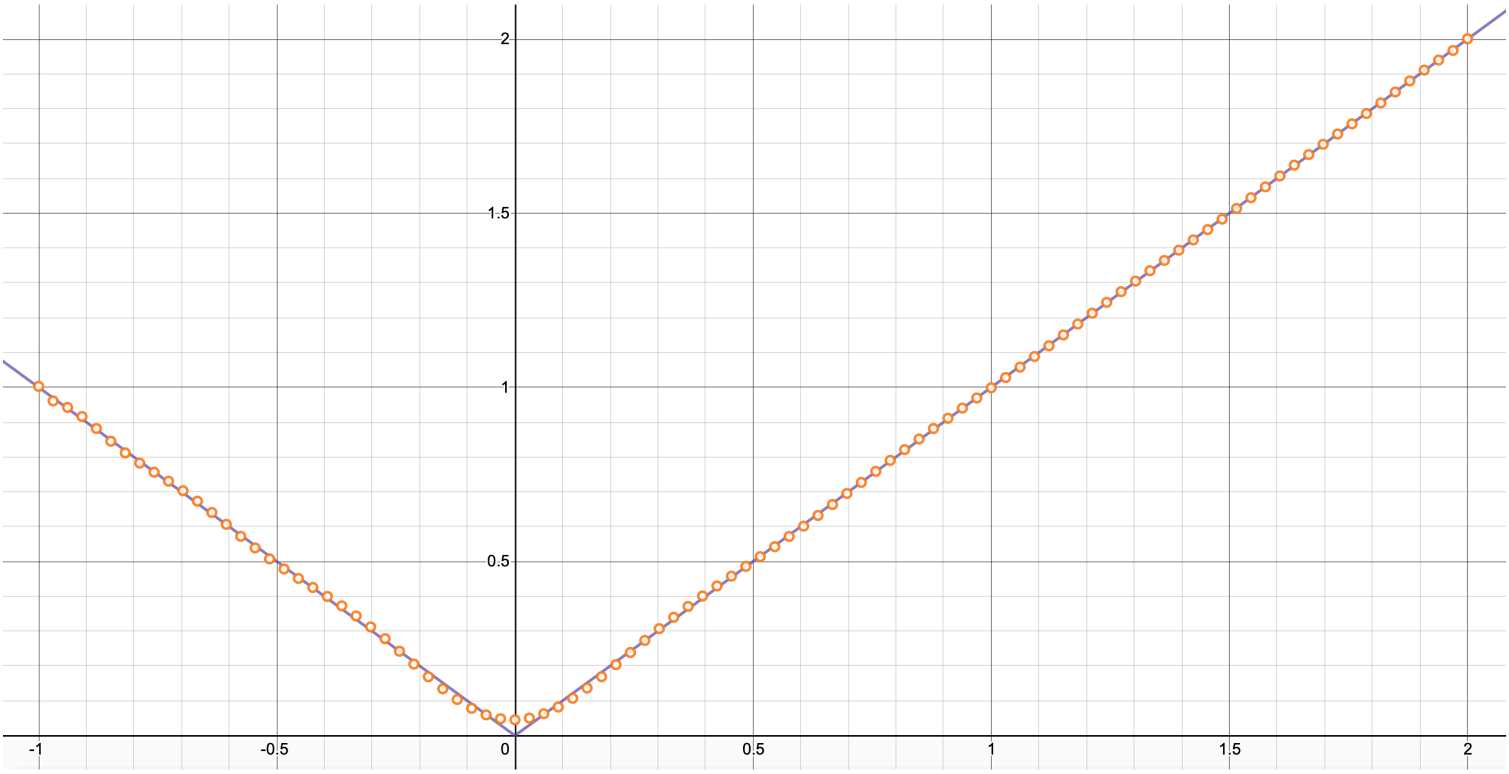
Минимум функционала p = 6.609279559782781e-03

Параметры N = 500, n = 50.
Минимум функционала p = 3.175275834550228e-06

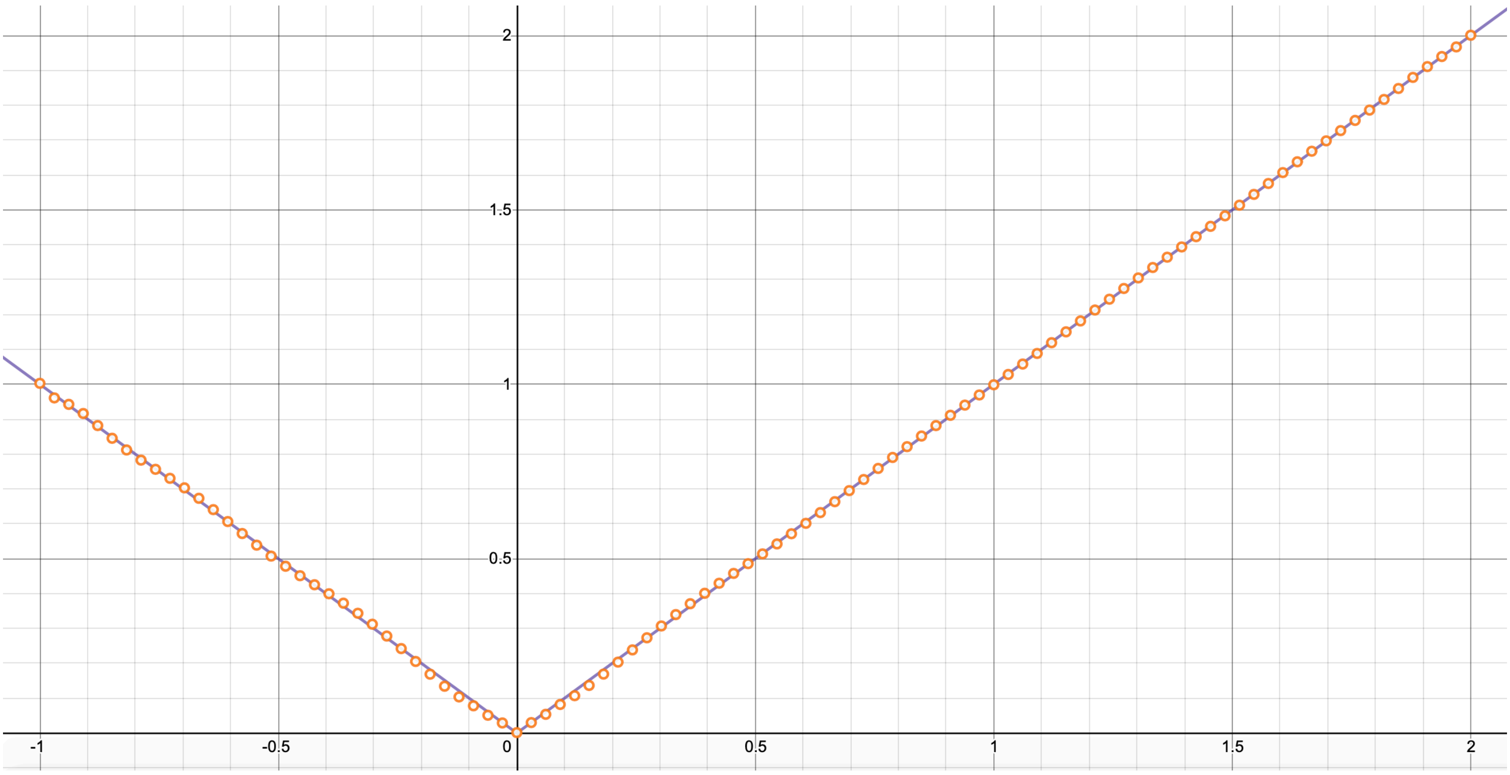
Федосеева Анастасия 431 группа

Тест 3

Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$, заданную на отрезке [-1, 2].
Параметры $N = 100$, $n = 20$.
alfa[i] = 1, i=0,…,N-1
Минимум функционала p = 5.728032868436229e-03



alfa[i] = 1, i=1,…,30,36, …, N-1;
alfa[31] = alfa[35] = (b-a)/3,5; alfa[32] = alfa[34] = (b-a)/5; alfa[33] = (b-a)/N;
Минимум функционала p = 3.069779530579090e-03



Федосеева Анастасия 431 группа

Вывод:
В случае систем большой размерности метод QR разложения даёт более точный результат, чем метод нормального уравнения.