Федосеева Анастасия 431

Отчет по теме: «Численное интегрирование»

Для приближенного вычисления определенных интегралов обычно применяется метод квадратурных формул:

$$I^{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx S_n^{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

При этом узлы $\{x_i\}$ и коэффициенты $\{c_i\}$ выбираются специальным образом так, что для погрешности $R_n(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)|$ верна оценка вида $R_n(f) \leq C(b-a)^k$.

Одной из известных квадратур является формула Гаусса по трём узлам:

$\frac{b-a}{18}(5f(x_-) + 8f(x_0) + 5f(x_+))$ с погрешностью $\|f^{(6)}\| \frac{(b-a)^7}{737280}$,
где $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_\pm = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

В данном случае $\|g\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$.

При большом значении полученной погрешности полезно разбить отрезок [a,b] на N подотрезков $[a,b] = \cup_{k=1}^{N}[a_k, b_k]$, и для вычисления интеграла $I^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} I^{[a_k,b_k]}(f)$ использовать составную квадратурную формулу $S_{N,n}^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} S_n^{[a_k,b_k]}(f)$ с оценкой погрешности $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \leq \sum_{k=1}^{N} R_n^{[a_k,b_k]}(f)$.

Федосеева Анастасия 431

Результаты работы программы: одномерное интегрирование

Рассмотрим функцию f(x) = exp(x)
1) a = 0.600000, b = 1.500000, N = 10

Sn = 2.659570269946855081144576615770
If = 2.659570269947555409828510164516
|Sn - If| = 7.00329e-13
Rn = 6.49416e-14

2) a = 0.600000, b = 1.500000, N = 100

Sn = 2.659570269947556298006929864641
If = 2.659570269947555853917720014579
|Sn - If| = 4.44089e-16
Rn = 7.04208e-22

Рассмотрим функцию f(x) = x^10
1) a = 0.600000, b = 1.500000, N = 10

Sn = 7.863084542332369863970598089509
If = 7.863084602108182608048991824035
|Sn - If| = 5.97758e-08
Rn = 2.97308e-08

2) a = 0.600000, b = 1.500000, N = 100

Sn = 7.863084602108123100094871915644
If = 7.863084602108181719870572123909
|Sn - If| = 5.86198e-14
Rn = 3.39357e-16

Рассмотрим функцию f(x) = sin2x*sin5x

1) a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 100

Sn = -0.000000000000000126092712660064
If = -0.000000000000000084567769453869
|Sn - If| = 4.15249e-17
Rn = 1.87919e-11

2) a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 1000

Sn = 0.000000000000000234261996397991
If = -0.000000000000000000001482307658
|Sn - If| = 2.34263e-16
Rn = 1.53594e-19

Рассмотрим функцию f(x) = sin2x*sin2x
1) a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 100

Sn = 3.141592653589792671908753618482
If = 3.141592653589790895551914218231
|Sn - If| = 1.77636e-15
Rn = 5.55711e-13

2) a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 1000

Sn = 3.141592653589792671908753618482
If = 3.141592653589792227819543768419
|Sn - If| = 4.44089e-16
Rn = 4.55727e-21

Рассмотрим функцию f(x)=sin²(mx), N>>1, m=1, 10³
1) a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 100

Sn = 2.813545149901059971853101160377
If = 2.813544626340807486286621497129
|Sn - If| = 5.23560e-07
Rn = 8.21298e-15

Для оценки погрешности верна формула $C(b-a)^p$, где C зависит от типа квадратуры.

Разобьём отрезок $[a,\ b]$ на N равных частей с шагом $h\ =\ \frac{b-a}{N}$.
Тогда верна оценка $|R_n(f)|\ \leq\ \Sigma\ C(\frac{b-a}{N})^p[a_k,\ b_k]$ на отрезке $[a_k,\ b_k]$.
Общая оценка погрешности не превосходит суммы на каждом подотрезке $[a_k,\ b_k]$ =>
=> $|R_n(f)|\ \leq\ N\ C(\frac{b-a}{N})^p[a_k,\ b_k]\ \sim\ \frac{C}{N^p}\ \sim Ch^{p-1}$ на отрезке $[a,\ b]$.

Для того, чтобы найти константы C и p для оценки $|S_{N,3}^{[-\pi,\pi]}\ -\ I_{N,3}^{[-\pi,\pi]}|\ \sim\ \frac{C}{N^p}$,
при больших N необходимо исследовать график функции :
$F(lnN)\ =\ lnR^{-1}(N)\ \sim lnC^{-1}\ +\ plnN$.
Введём переменные : $R\ =\ \ ln(|S_{N,3}^{[-\pi,\pi]}\ -\ I_{N,3}^{[-\pi,\pi]}|^{-1})$;
$lnC\ \ = \{\ \frac{R}{lnN}\}$;
$C\ =\ \frac{1}{C}$;
$p\ =\ \frac{R-lnC}{lnN}$;
В итоге точность имеет вид $\frac{C}{e^{plnN}}$
Получим численно, что асимптотика для данной квадратуры имеет вид Ch^p, $h\ =\ \frac{b-a}{N}$

2) Оценка погрешности в виде $|S_{N,3}^{[-\pi,\pi]}\ -\ I_{N,3}^{[-\pi,\pi]}|\ \sim\ \frac{C}{N^p}$

a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 100
$|Sn - If|\ \sim\ \frac{0.1353352832}{100^{2.7062221839}}\ =\ 5.23560e-07$
accuracy = 4.23516e-22

a = -3.141592653589793, b = 3.141592653589793, N = 1000
$|Sn - If|\ \sim\ \frac{0.1353352832}{1000^{1.8041471368}}$ = 5.23564e-07
accuracy = 2.11758e-22

Рассмотрим функцию f(x) = ∫1 / sqrt(1-x*x) = π

1) a = -1.000000000000000, b = 1.000000000000000, N = 1000
Sn = 3.125835487034186677135494392132
If = 3.141592653589794004176383168669
|Sn - If| = 1.57572e-02
2) a = -1.000000000000000, b = 1.000000000000000, N = 10000
Sn = 3.13660977387270536763708150829
If = 3.141592653589797556890061969170
|Sn - If| = 4.98288e-03

Результаты работы программы: двумерное интегрирование

Вычисление двойного интеграла в прямоугольной области разбиением на треугольники

Область ограничена $[a_x, b_x]$, $[a_y, b_y]$;
Для гладких функций можно добиться оценки погрешности $|S_n - I| \sim h^p$
Вычислим $p = ln(|S_n - I|^{-1}) / lnh$

Рассмотрим функцию $f(x) = x + e^y$
Область x: [0,1] , y: [0,1]
1) a = 0.000000, b = 1.000000, N = 10

I = 2.218281888103855958 86
true I = 2.21828182845904509080
|I - true I| = 5.9644810868e-08 = $0.100000^{7.224427}$

2) a = 0.000000, b = 1.000000, N = 100

I = 2.21828182846501276160
true I = 2.21828182845904509080
|I - true I| = 5.9676708020e-12 = $0.010000^{5.612098}$

Рассмотрим функцию $f(x) = xe^y$
Область x: [0,1] , y: [0,1]
1) a = 0.000000, b = 1.000000, N = 10

I = 0.85914094405192842352
true I = 0.85914091422952254540
|I - true I| = 2.9822405878e-08 = $0.100000^{7.525457}$

2) a = 0.000000, b = 1.000000, N = 100

I = 0.85914091423250504853
true I = 0.85914091422952254540
|I - true I| = 2.9825031334e-12 = $0.010000^{5.762710}$