

Análisis Cinemático - Taller computacional de mecanismos

Arango Giraldo, Alejandro; Hurtado López, Daniel

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, aarangoq2@eafit.edu.co

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, dhurtadol@eafit.edu.co

RESUMEN:

En esta actividad se utilizó el método de análisis cinemático para el diseño de un mecanismo de 4 barras de tipo manivela-corredera. Este mecanismo cumple con una relación entre un ángulo de entrada ϕ y el desplazamiento de la corredera d , lo que en otras palabras se describe como una función $d(\phi)$. Para realizar este análisis, se utiliza el software de Matlab y Excel, en los cuales se desarrolla un programa al que se le entrega el sistema de ecuaciones $\Phi(q_i)$, compuesto por las ecuaciones de restricción cinemática, obtenidas del cierre vectorial, y la ecuación de restricción de actuación, así como el vector q_i , el cual contiene las variables incógnitas, la matriz jacobiana ($J(q_i)$) y jacobiana punto ($J(q_i)$), los vectores $\dot{\theta}_T$ y $\ddot{\theta}_T$, y una serie de parámetros necesarios para resolver las matrices. A partir de estos elementos, y las formulas $q_{i+1} = -[J(q_i)]^{-1}\Phi(q_i) + q_i$, $\dot{q} = -[J(q_i)]^{-1}\dot{\theta}_T$, y $\ddot{q} = -[J(q_i)]^{-1}(J\dot{q} + \ddot{\theta}_T)$, el programa encuentra q_{i+1} , \dot{q} y \ddot{q} , lo que nos permite graficar la posición, velocidad y aceleración de la corredera en función del tiempo, dado diferentes ángulos de entrada.

PALABRAS CLAVE / KEYWORDS:

Análisis cinemático, mecanismo 4 barras, mecanismo manivela-corredera, cierre vectorial, Jacobiano, Matlab, Excel, Working Model.

1. INTRODUCCIÓN

Esta actividad fue realizada con el objetivo de analizar el movimiento de un mecanismo 4 barras de tipo manivela-corredera, que diera cumplimiento con una relación entre un ángulo de entrada y el desplazamiento de la corredera a lo largo del eje de traslación, todo esto empleando el método de análisis cinemático.

Este mecanismo se basa en una generación de función que relaciona un ángulo de entrada para producir un desplazamiento axial de la corredera, tomando como parámetro diferentes dimensiones y ángulos. Para este caso particular, tenemos como parámetros

las dimensiones R_2, R_3 y R_4 y los ángulos ψ y φ (ángulo de tierra), mientras que las variables incógnitas son la distancia R_1 y los ángulos ϕ y θ , donde ϕ es el ángulo de entrada y d es la distancia que se desplaza la corredera como se puede observar en la figura 1.

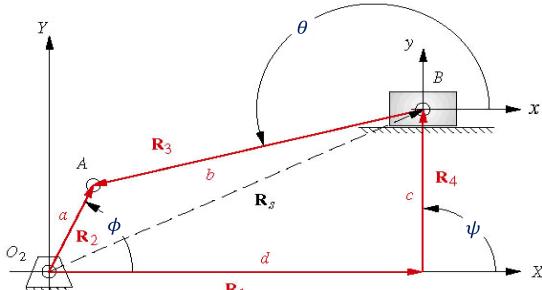


Figura 1. Mecanismo 4 barras manivela-corredera con notación tradicional.

Para hallar estas tres incógnitas se requieren 3 ecuaciones, 2 vienen dadas por las ecuaciones de restricción cinemática derivadas del cierre vectorial, y la tercera surge de la ecuación de restricción de actuación. En este caso, el GDL es el ángulo ϕ , por consiguiente, el motor que generará el movimiento del mecanismo estará ubicado en el punto O_2 . Tomando en cuenta este factor, al resolver los sistemas de ecuaciones obtendremos la posición, velocidad y aceleración de la corredera con respecto al tiempo.

Este método es utilizado con regularidad en el proceso de análisis cinemático de componentes de mecanismos como bielas o correderas. Como su nombre lo indica, esta estrategia trata del estudio de un movimiento particular ejecutado por un componente del mecanismo. Resolviendo los sistemas de ecuaciones planteados se puede describir el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración de un punto del mecanismo en cualquier instante de su movimiento.

2. CÁLCULOS Y RESULTADOS

Para esta actividad fueron asignados una serie de requerimientos. En un principio, el mecanismo debe ser de 4 barras tipo manivela-corredera, lo que implica que este solo tiene 1 grado de libertad. Adicionalmente, este debe de cumplir con una relación entre un ángulo de entrada y la distancia horizontal que se desplaza la corredera, donde ϕ es el ángulo de entrada,

el cual representa el GDL, d es el desplazamiento de la corredera, y θ el ángulo absoluto de R_3 , siendo las tres variables incógnitas como se observa en la Tabla 1. Por lo tanto, los ángulos ϕ y θ junto a la dimensión d son variables, mientras que las dimensiones a , b y c (R_2 , R_3 y R_4 respectivamente), al igual que los ángulos ψ y φ son parámetros. Para tener una mayor comprensión de estos elementos, la figura 1 muestra a qué corresponde cada uno de estos en el mecanismo.

Tabla 1. Parámetros y variables incógnitas del problema.

| Variables incognitas | Parámetros |
|----------------------|-------------------------------|
| ϕ, θ y d | a, b, c, ψ , y φ |

En otro orden de ideas, para poder realizar el análisis cinemático, se debe inicialmente plantear la ecuación de cierre vectorial la cual surge de la disposición de los vectores correspondientes a cada barra, como se puede observar en la figura 1. No obstante, tomando como base un arreglo más común, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\overline{R_2} + \overline{R_3} - \overline{R_4} - \overline{R_1} = 0 \quad (1)$$

Al expresar estos vectores en sus dos componentes, obtenemos las siguientes expresiones:

$$a \cos \phi + b \cos \theta - c \cos \psi - d \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$a \sin \phi + b \sin \theta - c \sin \psi - d \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Adicional a esto, se plantea la ecuación de restricción de actuación, que para un mecanismo de manivela-corredera correspondería a la siguiente expresión:

$$\phi_2 - \phi_{20} - \dot{\phi}_{20}t - \frac{1}{2}\ddot{\phi}_{20}t^2 = 0$$

Con base a las tres ecuaciones anteriores, se puede proponer la siguiente matriz:

$$\Phi(q, t) = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi + a \cos \phi + b \cos \theta - c \cos \psi \\ -d \sin \varphi + a \sin \phi + b \sin \theta - c \sin \psi \\ \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_{20} - \dot{\phi}_{20}t - \frac{1}{2}\ddot{\phi}_{20}t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De igual forma, podemos definir el vector correspondiente a las constantes y el vector q correspondiente a las variables incógnitas de la siguiente forma:

$$\text{constantes} = [a \quad b \quad c \quad \psi \quad \varphi]^T$$

$$q = \begin{bmatrix} d \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz jacobiana, también llamada gradiente, se puede obtener derivando la ecuación de restricción cinemática respecto a las variables incógnitas como se muestra a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -a \sin \phi & -b \sin \theta \\ -\sin \varphi & a \cos \phi & b \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez se tienen estas matrices y vectores, se procede a utilizar el método de Newton-Raphson dado por la formula $q_{i+1} = -[J(q_i)]^{-1}\Phi(q_i) + q_i$, y así hallar la posición de la corredera por medio de un método iterativo que nos da q_{i+1} en función del tiempo.

Conociendo el comportamiento de la posición de la corredera, podemos hallar la velocidad de este elemento tomando en cuenta que la velocidad es la derivada de la posición. Partiendo de esta idea, obtenemos la siguiente expresión al derivar la ecuación de restricción en función del tiempo:

$$\dot{q} = -[J(q_i)]^{-1}\dot{\Phi}_T$$

Donde $\dot{\Phi}_T$ es el vector compuesto por las derivadas explícitas en términos de t de la ecuación $\Phi(q, t)$, el cual se expresa como:

$$\dot{\Phi}_T = [0, 0, -\dot{\phi}_{20}t - \frac{1}{2}\ddot{\phi}_{20}t^2]^T$$

Por otra parte, el vector \ddot{q} , formado por las variables incógnitas, es el siguiente:

$$\ddot{q} = [v_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$$

En el que v_1 es la velocidad de la corredera, mientras que ω_2 y ω_3 son las velocidades angulares de ϕ y θ respectivamente.

En este orden de ideas, nos basamos en el mismo procedimiento para hallar la aceleración, pues esta es la derivada de la velocidad. De esto obtenemos la ecuación:

$$\ddot{q} = -[J(q_i)]^{-1} \left(J\dot{q} + \ddot{\Phi}_T \right)$$

Donde la matriz $J\dot{q}$, llamada Jacobiano-punto, es el resultado de derivar en el tiempo la matriz Jacobiana y, en este caso, estaría dada por:

$$J\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -a\omega_2 \cos \phi & -b\omega_3 \cos \theta \\ 0 & -a\omega_2 \sin \phi & -b\omega_3 \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ddot{\Phi}_T$ vendría siendo el vector constituido por las segundas derivadas explícitas en términos de t de la ecuación $\Phi(q, t)$, planteado como:

$$\ddot{\Phi}_T = [0, 0, -\ddot{\phi}_{20}t]^T$$

Y \ddot{q} sería:

$$\ddot{q} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$$

Tomando las dimensiones y ángulos utilizados en el código de Matlab (ver Tabla 2), se diseña un modelo en Working Model que nos permite confirmar los resultados obtenidos (ver Figura 2).

Tabla 2. Parámetros y variables incógnitas del problema.

| Párametro | Valor |
|--------------------|----------------------|
| a | 3 m |
| b | 6 m |
| c | 2.5 m |
| ψ | $\frac{\pi}{2}$ rad |
| φ | 0 rad |
| ϕ_{20} | 0 m |
| $\dot{\phi}_{20}$ | 0 m/s |
| $\ddot{\phi}_{20}$ | 0.5 m/s ² |

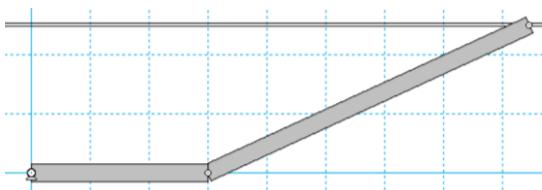


Figura 2. Modelo de Working Model de mecanismo 4 barras manivela-corredera.

Como se puede observar, el mecanismo se compone de un actuador (motor con aceleración de 0.5 rad/s^2) ubicado en el que vendría siendo el punto O_2 , y una corredera (el punto extremo de la barra de 6m), la cual es nuestro foco de interés para determinar su cinemática.

Una vez con los códigos y el mecanismo de Working Model, podemos obtener la gráfica que indica la posición, velocidad y aceleración de la corredera. En el código de Matlab, estas variables se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones en función del tiempo, empezando desde el segundo 0, registrando los valores cada 0.1 segundos hasta llegar a 6, e indicando un valor semilla para el vector q . En el caso del programa de Excel, este realiza las iteraciones individualmente, calculando las variables incógnitas una a una usando el Jacobiano, y el vector q , el cual se va actualizando con cada iteración. Finalmente, por parte del software de Working Model, este se encarga de crear la gráfica como parte de las opciones que ofrece el programa.

Lamentablemente, para el código de Excel, solo se logró que este calculara la posición del mecanismo. Después de reiterados intentos, no se obtuvo que el código convergiera al calcular la velocidad y aceleración, por lo tanto, se tuvo que dejar este programa incompleto y conformarse con la gráfica de posición.

3. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El objetivo general de esta actividad puede ser enmarcado en el análisis cinemático de un

mecanismo 4 barras manivela-corredera a partir de una relación entre un ángulo de entrada y un desplazamiento horizontal de la corredera. El uso de los programas de Excel y Matlab facilitaron la identificación de la cinemática de la corredera (posición, velocidad y aceleración) al plantear una serie de sistemas de ecuaciones en función del tiempo que relacionara los ángulos de entrada producidos por el actuador en el punto del GDL, con la cinemática del mecanismo. Este modelo debe ser formalizado por medio de una simulación en Working Model que satisfaga estos criterios, y ubique el motor en el punto O_2 .

En este orden de ideas, el desarrollo de la actividad fue exitoso puesto que se logró obtener la misma cinemática que arroja Working Model en nuestro programa de Matlab y Excel.

Analizando el mecanismo, encontramos que las gráficas de posición, velocidad y aceleración de Working Model y Matlab coinciden completamente como se muestra en las figuras 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

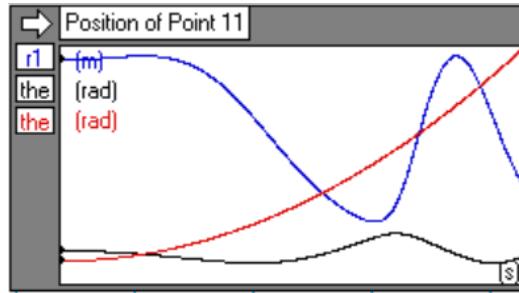


Figura 3. Gráfica de posición en Working Model, donde la curva roja representa el ángulo ϕ , la azul representa d y la negra θ .

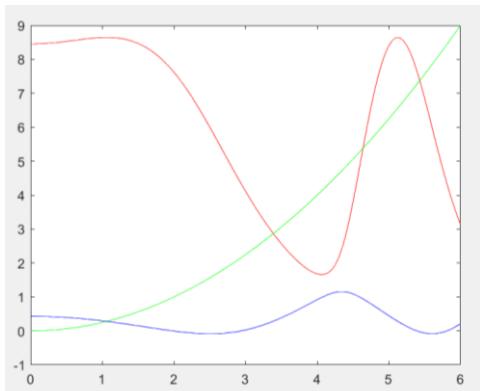


Figura 4. Gráfica de posición en Matlab, donde la curva verde representa el ángulo ϕ , la roja representa d y la azul θ .

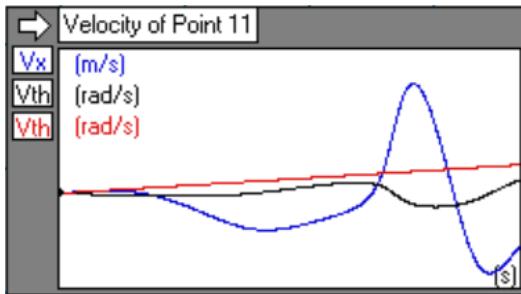


Figura 5. Gráfica de velocidad en Working Model, donde la curva roja representa la velocidad angular de ϕ , la azul representa la velocidad de d y la negra la velocidad angular de θ .

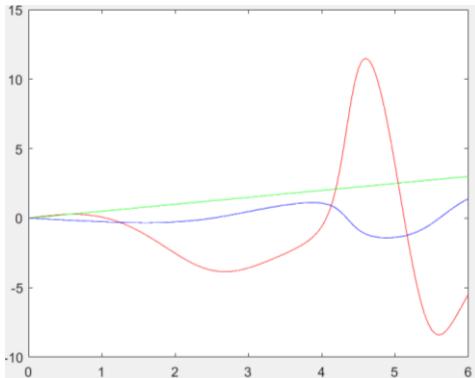


Figura 6. Gráfica de velocidad en Matlab, donde la curva verde representa la velocidad angular de ϕ , la roja representa la velocidad de d y la azul la velocidad angular de θ .

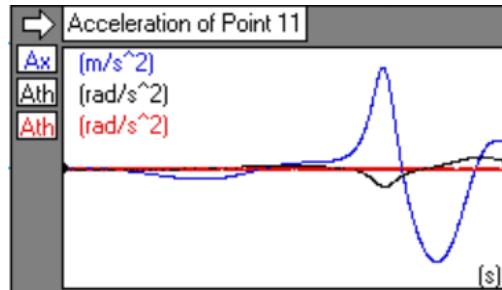


Figura 7. Gráfica de aceleración en Working Model, donde la curva roja representa la aceleración angular de ϕ , la azul representa la aceleración de d y la negra la aceleración angular de θ .

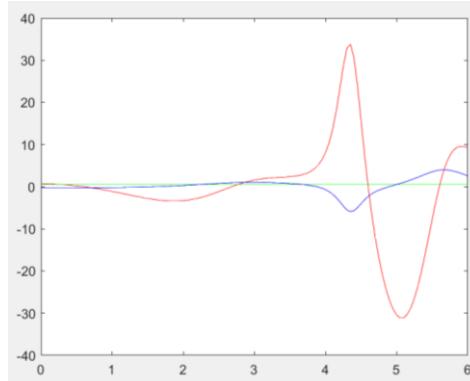


Figura 8. Gráfica de aceleración en Matlab, donde la curva verde representa la aceleración angular de ϕ , la roja representa la aceleración de d y la azul la aceleración angular de θ .

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración del modelo de Working Model las crea el propio programa, pero en el caso del código de Matlab, se asigna un valor semilla para d , ϕ y θ , los cuales componen el vector q . Estos se toman del modelo de Working Model, obteniendo así el vector $q = \begin{bmatrix} 8.4 \\ 0 \\ 0.43 \end{bmatrix}$.

Como se observa en las gráficas correspondientes a cada variable, estas son iguales entre sí, lo que significa que el código y sus componentes son correctos y, por consiguiente, los valores que este arroje serán acertados. Si se hace una comparación punto a punto, se puede verificar la certeza de las graficas arrojadas por el código de Matlab,

brindando los mismos valores que ofrece Working Model.

Para el código de Excel, se realizaron diferente número de iteraciones para cada aumento de 0.1 segundos, y así obtener los valores de ϕ , θ y d en cada uno de estos instantes. Al tabular estos resultados, se obtuvo la siguiente gráfica (ver Figuras 9):

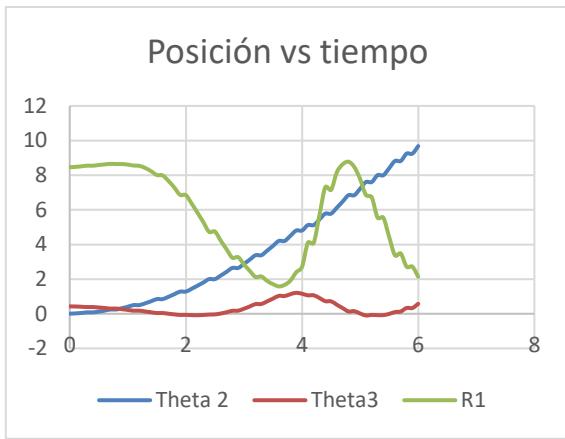


Figura 9. Gráfica de posición vs tiempo en Excel con aceleración igual a 0.5 m/s^2 .

Con base a estas gráficas podemos notar que hay unas cuantas incongruencias y falta de fluidez con respecto a las arrojadas por Working Model y Matlab, y es que, aunque se asemejan en su forma, la gráfica de Excel es más alargada y menos fluida que las de los demás programas. Esto se traduce a la obtención de unos valores incorrectos que se pueden deber a errores dentro del programa. Aunque los valores que ofrece Excel son prácticamente iguales a los de los otros softwares, estos se encuentran a destiempo, por lo que deben ser descartados a raíz de su falta de exactitud.

Si le aumentamos la aceleración a 1 m/s^2 , como podemos observar en la figura 10, la gráfica se asemeja más a las de Matlab y Working Model. Esto es únicamente un ejercicio para confirmar que la gráfica de Excel fuera similar a las demás en cierta medida fuera de los límites de la anterior simulación.



Figura 10. Gráfica de posición vs tiempo en Excel con aceleración igual a 1 m/s^2 .

4. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis realizado se puede concluir que el método de análisis cinemático es una herramienta fundamental para el estudio del movimiento de mecanismos que generan función. Esta práctica facilita en gran medida el cálculo de las diferentes posiciones, velocidades y aceleraciones que asume un componente del mecanismo dada una variación en el grado de libertad en función del tiempo, ya sea en ángulo o distancia.

Este tipo de análisis permite tomar una ecuación de restricción cinemática, que surge de la ecuación de cierre vectorial, y la ecuación de restricción de actuación, y obtener el posicionamiento, velocidad y aceleración de cualquiera de los componentes del mecanismo. Al establecer el grado de libertad, este varía con respecto al tiempo, provocando variaciones en las demás variables. Conociendo la relación entre el GDL y las demás incógnitas, podemos conocer cómo se comporta un punto a medida que el GDL asume diferentes valores. Este método es de gran importancia en diferentes ámbitos de la industria, siendo uno de los más comunes las líneas industriales automatizadas, donde es fundamental conocer la cinemática de diversos puntos de interés para que el proceso se lleve de manera fluida y sin fallos.

Finalmente, también pudimos reconocer la importancia de la doble verificación de la configuración de los mecanismos usando los códigos y Working Model, puesto que, en este caso, los parámetros eran entregados sin ninguna certeza de que el mecanismo fuera a funcionar. Por tal razón, en el inicio las constantes dadas no permitían un movimiento continuo del mecanismo, e incluso, al comprobar en Working Model, estas dimensiones impedían que la barra R_2 rotara los 360° . El uso simultaneo de los códigos y Working Model nos facilitó la comprobación de la viabilidad del mecanismo para finalmente concebir uno que cumpliera con los requerimientos.