

UNIVERSIDAD EAFIT  
Escuela de Ingeniería  
IM0240 – Diseño de Máquinas

## ENTREGA DE MEMORIAS DE CÁLCULOS

Pablo Andrés Martínez Cardona  
Sebastián Duque Lotero  
Carlos Fernando Paéz González  
Daniel Hurtado López  
Santiago Arango Arango  
Daniel Arango  
Alejandro Arango Giraldo

18 de Noviembre de 2022

# Análisis cinematográfico

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	1/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

## Descripción

Se realiza el análisis cinemático 2D de la ruteadora de control numérico. El análisis se realiza mediante ecuaciones de cierre vectorial sobre cada uno de los ciclos de la cadena cinemática. El sistema es un mecanismo 11 barras con 12 pares de revolución binarios y 2 pares prismáticos. La ecuación de restricción resultante posee 16 ecuaciones de restricción y 2 ecuaciones de actuación. Para la solución de posición se genera un sistema no-lineal de ecuaciones de 18 ecuaciones y 18 incógnitas, donde 2 incógnitas se corresponden con los 2 grados de libertad de actuación del mecanismos, 14 incógnitas se corresponden con la orientación de las barras intermedias y 2 incógnitas se corresponden a los 2 coordenadas de posición de la herramienta.

## Objetivo del cálculo

- Determinar las 18 variables cinemáticas de posición
- Determinar las 18 variables cinemáticas de velocidad
- Determinar las 18 variables cinemáticas de aceleración
- Determinar las aceleraciones de los centros de masa de las barras considerando el efecto coriolis

## Imagen del modelo

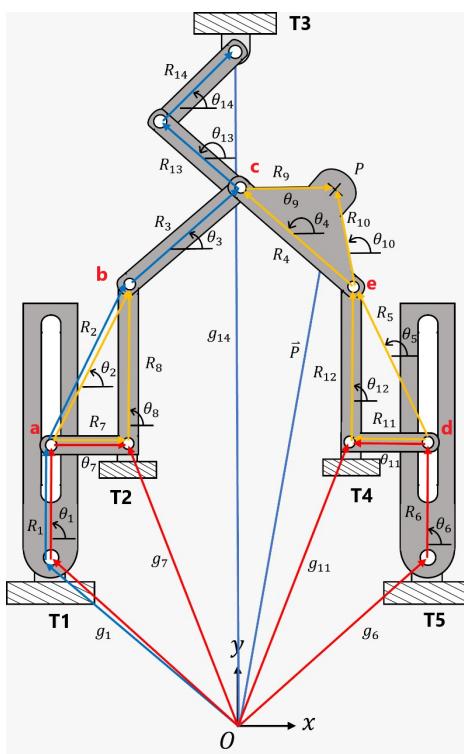


Figura 1: Configuración de los vectores del cierre vectorial.

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	2/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

---

## Variables del modelo

---

Variable	Descripción
$g_{1x}, g_{1y}$	Coordenadas X y Y desde GCS al punto T1
$g_{7x}, g_{7y}$	Coordenadas X y Y desde GCS al punto T2
$g_{14x}, g_{14y}$	Coordenadas X y Y desde GCS al punto T3
$g_{11x}, g_{11y}$	Coordenadas X y Y desde GCS al punto T4
$g_{6x}, g_{6y}$	Coordenadas X y Y desde GCS al punto T5
$P_{x0}, v_{x0}, a_{x0}$	Posición, velocidad y aceleración inicial del efecto en X
$P_{y0}, v_{y0}, a_{y0}$	Posición, velocidad y aceleración inicial del efecto en Y
$P_x$	Coordenada X del efecto
$P_y$	Coordenada Y del efecto
$R_1$	Carrera actuador 1
$R_6$	Carrera actuador 2
$R_2$	Longitud del vector R2
$R_3$	Longitud del vector R3
$R_4$	Longitud del vector R4
$R_5$	Longitud del vector R5
$R_7$	Longitud del vector R7
$R_8$	Longitud del vector R8
$R_9$	Longitud del vector R9
$R_{10}$	Longitud del vector R10
$R_{11}$	Longitud del vector R11
$R_{12}$	Longitud del vector R12
$R_{13}$	Longitud del vector R13
$R_{14}$	Longitud del vector R14
$A_a$	Aceleración del punto a
$A_b$	Aceleración del punto b
$A_c$	Aceleración del punto c
$A_d$	Aceleración del punto d
$A_e$	Aceleración del punto e
$A_{cm2}$	Aceleración centro de masa 2
$A_{cm3}$	Aceleración centro de masa 3
$A_{cm4}$	Aceleración centro de masa 4
$A_{cm5}$	Aceleración centro de masa 5

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de calculo

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	3/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

Variable	Descripción	Variable	Descripción
$\theta_1$	Posición vector R1	$C_1, S_1$	Coseno y Seno de $\theta_1$
$\theta_2$	Posición vector R1	$C_2, S_2$	Coseno y Seno de $\theta_2$
$\theta_3$	Posición vector R1	$C_3, S_3$	Coseno y Seno de $\theta_3$
$\theta_4$	Posición vector R1	$C_4, S_4$	Coseno y Seno de $\theta_4$
$\theta_5$	Posición vector R1	$C_5, S_5$	Coseno y Seno de $\theta_5$
$\theta_6$	Posición vector R1	$C_6, S_6$	Coseno y Seno de $\theta_6$
$\theta_7$	Posición vector R1	$C_7, S_7$	Coseno y Seno de $\theta_7$
$\theta_8$	Posición vector R1	$C_8, S_8$	Coseno y Seno de $\theta_8$
$\theta_9$	Posición vector R1	$C_9, S_9$	Coseno y Seno de $\theta_9$
$\theta_{10}$	Posición vector R1	$C_{10}, S_{10}$	Coseno y Seno de $\theta_{10}$
$\theta_{11}$	Posición vector R1	$C_{11}, S_{11}$	Coseno y Seno de $\theta_{11}$
$\theta_{12}$	Posición vector R1	$C_{12}, S_{12}$	Coseno y Seno de $\theta_{12}$
$\theta_{13}$	Posición vector R1	$C_{13}, S_{13}$	Coseno y Seno de $\theta_{13}$
$\theta_{14}$	Posición vector R1	$C_{14}, S_{14}$	Coseno y Seno de $\theta_{14}$

Cuadro 2: Cont. variables en el modelo de calculo

## Valores del modelo

Los valores de las dimensiones del mecanismo se presentan en la siguiente tabla.

Variable	Valor	Variable	Valor
R <sub>2</sub>	313 mm	g <sub>1x</sub>	-350
R <sub>3</sub>	140 mm	g <sub>1y</sub>	-480
R <sub>4</sub>	140 mm	g <sub>6x</sub>	140
R <sub>5</sub>	313 mm	g <sub>6y</sub>	-480
R <sub>7</sub>	150 mm	g <sub>7x</sub>	-160
R <sub>8</sub>	275 mm	g <sub>7y</sub>	-230
R <sub>9</sub>	72 mm	g <sub>11x</sub>	-50
R <sub>10</sub>	101 mm	g <sub>11y</sub>	-230
R <sub>11</sub>	150 mm	g <sub>14x</sub>	-110
R <sub>12</sub>	275 mm	g <sub>14y</sub>	200
R <sub>13</sub>	160 mm	t	5 seg
R <sub>14</sub>	140 mm		

Cuadro 3: Valores en el modelo de calculo

## Modelo analítico de calculo - MatLab

### Análisis de posición

Para el calculo de la solución de posición se emplea la ecuación de restricción derivada de los cierres vectoriales mostrados en Fig. 1(b) y el calculo de la matriz Jacobiana. La solución del sistema no-lineal de ecuaciones se realiza mediante un esquema iterativo Newton-Raphson.

### Vector de incógnitas

$$q = [ R_1 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad R_6 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9 \quad \theta_{10} \quad \theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \theta_{14} \quad P_x \quad P_y ]^T$$



<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	5/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

$$\begin{bmatrix} -R_9S_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_9C_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{11}S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11}C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{12}S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{12}C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11}S_{11} & R_{12}S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{11}C_{11} & -R_{12}C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_9S_9 & R_{10}S_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_9C_9 & -R_{10}C_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{13}S_{13} & -R_{14}S_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{13}C_{13} & R_{14}C_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Newton-Raphson

$$q^{i+1} = -[J(q^i)]^{-1}\Phi(q^i) + q^i$$

### Análisis de velocidad

Para el calculo de la solución de velocidad se emplea el Jacobiano calculado anteriormente y el vector de derivada explicitas del tiempo de la ecuación de restricción.

$$\dot{\vec{q}} = -[J^{-1}] \Phi_{,t}$$

donde los vectores  $\dot{\vec{\Phi}}$  y  $\dot{\vec{q}}$  estan dados por,

$$\dot{\vec{\Phi}} = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ (-v_{x0} - a_{x0}t) \ (-v_{y0} - a_{y0}t) ]^T$$

$$\dot{\vec{q}} = [ \dot{R}_1 \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ \dot{R}_6 \ w_6 \ w_7 \ w_8 \ w_9 \ w_{10} \ w_{11} \ w_{12} \ w_{13} \ w_{14} \ \dot{P}_x \ \dot{P}_Y ]^T$$

### Análisis de aceleración

El calculo de la solución de aceleración se emplea el Jacobiano calculado anteriormente, el vector de la segunda derivada explicita del tiempo de la ecuación de restricción, la solución de velocidad y la derivada en el tiempo del Jacobiano.

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	6/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

### Derivada del Jacobiano y segunda derivada explícita del tiempo de la ecuación de restricción

$$J = \begin{bmatrix} -S_1 w_1 & \dot{-R_1} S_1 - R_1 C_1 w_1 & -R_2 C_2 w_2 & -R_3 C_3 w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 w_1 & \dot{R_1} C_1 - R_1 S_1 w_1 & -R_2 S_2 w_2 & -R_3 S_3 w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_1 w & \dot{-R_1} S_1 - R_1 C_1 w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_7 C_7 w_7 \\ C_1 w_1 & \dot{R_1} C_1 - R_1 S_1 w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_7 S_7 w_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_6 w_6 & \dot{-R_6} S_6 - R_6 C_6 w_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 w_6 & \dot{R_6} C_6 - R_6 S_6 w_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_3 C_3 w_3 & R_4 C_4 w_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_3 S_3 w_3 & R_4 S_4 w_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 C_2 w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 C_7 w_7 \\ 0 & 0 & -R_2 S_2 w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 S_7 w_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 C_5 w_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 S_5 w_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_4 C_4 w_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_4 S_4 w_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_1 w & \dot{-R_1} S_1 - R_1 C_1 w_1 & -R_2 C_2 w_2 & -R_3 C_3 w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 w_1 & \dot{R_1} C_1 - R_1 S_1 w_1 & -R_2 S_2 w_2 & -R_3 S_3 w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_9 C_9 w_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_9 S_9 w_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{11} C_{11} w_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{11} S_{11} w_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{12} C_{12} w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{12} S_{12} w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11} C_{11} w_{11} & R_{12} C_{12} w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11} S_{11} w_{11} & R_{12} S_{12} w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_9 C_9 w_9 & R_{10} C_{10} w_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_9 S_9 w_9 & R_{10} S_{10} w_{10} & 0 & 0 & -R_{13} C_{13} w_{13} & -R_{14} C_{14} w_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{13} S_{13} w_{13} & -R_{14} S_{14} w_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\Phi} = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ (-a_{x0}) \ (-a_{y0}) ]^T$$

### Solución de la aceleración

$$\ddot{\ddot{q}} = -[J^{-1}] (\ddot{J} \ddot{q} + \Phi_{,t})$$

donde el vector dado  $\ddot{\ddot{q}}$  por,

$$\ddot{\ddot{q}} = [ \ddot{\ddot{R}}_1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \ddot{\ddot{R}}_6 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9 \ \alpha_{10} \ \alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{14} \ \ddot{\ddot{P}}_x \ \ddot{\ddot{P}}_Y ]^T$$

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	7/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

### Aceleración con coriolis

Para el análisis de aceleración, se debe considerar el fenómeno de coriolis que se presenta en las barras de los actuadores, las ecuaciones para este caso están dadas por,

$$\begin{aligned}
 A_a &= \alpha_1 \times r_{a/o2} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{a/O2}) + \ddot{r}_1 + 2(\omega_1 \times \dot{r}_1) \\
 A_{cm2} &= A_a + A_{cm2/a} = A_a + [\alpha_2 \times r_{cm2/a} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{cm2/a})] \\
 A_b &= A_a + A_{b/a} = A_a + [\alpha_2 \times r_{b/a} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{b/a})] \\
 A_{cm3} &= A_b + A_{cm3/b} = A_b + [\alpha_3 \times r_{cm3/b} + \omega_3 \times (\omega_3 \times r_{cm3/b})] \\
 A_c &= A_b + A_{c/b} = A_b + [\alpha_3 \times r_{c/b} + \omega_3 \times (\omega_3 \times r_{c/b})] \\
 A_d &= A_{o6} + A_{d/o6} = \alpha_6 \times r_{d/o6} + \omega_6 \times (\omega_6 \times r_{d/o6}) + \ddot{r}_6 + 2(\omega_6 \times \dot{r}_6) \\
 A_{cm5} &= A_d + A_{cm5/d} = A_d + [\alpha_5 \times r_{cm5/d} + \omega_5 \times (\omega_5 \times r_{cm5/d})] \\
 A_e &= A_d + A_{e/d} = A_d + [\alpha_5 \times r_{e/d} + \omega_5 \times (\omega_5 \times r_{e/d})] \\
 A_{cm4} &= A_e + A_{cm4/e} = A_e + [\alpha_4 \times r_{cm4/e} + \omega_4 \times (\omega_4 \times r_{cm4/e})]
 \end{aligned}$$

---

### Modelo gráfico de cálculo - Working model

De manera paralela al desarrollo del modelo analítico en MatLab, se realiza un análisis alterno empleando el software Workin Model, en el cual se establece las relaciones geométricas entre las barras del mecanismo, con la finalidad de comparar la convergencia de resultados entre ambas alternativas.

La siguiente figura representa el modelo gráfico diseñado en Working Model. El archivo se adjunta como anexo.

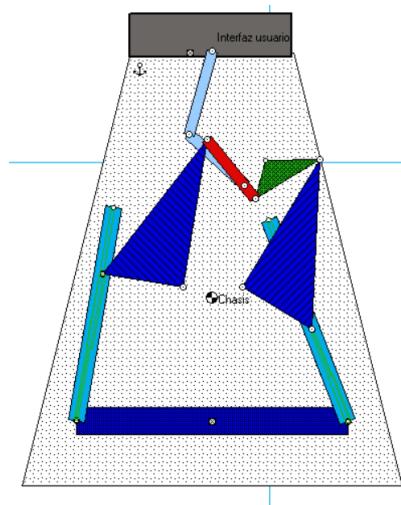


Figura 2: Diseño del mecanismo en Working model

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	8/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

## Resultados

Por razones de la complejidad del modelo no fue posible realizar un barrido del área de trabajo de la posición, velocidad y aceleración del mecanismo, motivo por el cual no se presentan las gráficas para este análisis, sin embargo, los resultados obtenidos para el análisis cinemático realizado de manera analítica en el software de MatLab se presentan a continuación.

Variable	Valor [mm]	Variable	Valor [mm/s]	Variable	Valor [mm/s <sup>2</sup> ]
$R_1$	281.48	$\dot{R}_1$	-6.19	$\ddot{R}_1$	0.12
$R_6$	179.83	$\dot{R}_6$	-0.58	$\ddot{R}_6$	0.31
$P_x$	0	$\dot{P}_x$	5.00	$\ddot{P}_x$	1.00
$P_y$	0	$\dot{P}_y$	10.00	$\ddot{P}_y$	2.00

Cuadro 4: Resultados del modelo analítico.

Variable	Valor [rad]	Variable	Valor [rad/s]	Variable	Valor [rad/s <sup>2</sup> ]
$\theta_1$	1.41	$w_1$	-0.0022	$\alpha_1$	-0.0010
$\theta_2$	0.88	$w_2$	0.04	$\alpha_2$	-0.0006
$\theta_3$	-0.89	$w_3$	0.12	$\alpha_3$	0.03
$\theta_4$	3.65	$w_4$	-0.11	$\alpha_4$	-0.02
$\theta_5$	1.48	$w_5$	-0.0067	$\alpha_5$	0.0037
$\theta_6$	1.97	$w_6$	0.0048	$\alpha_6$	-0.0026
$\theta_7$	-0.18	$w_7$	0.04	$\alpha_7$	-0.006
$\theta_8$	1.38	$w_8$	0.04	$\alpha_8$	-0.006
$\theta_9$	1.27	$w_9$	-0.12	$\alpha_9$	-0.02
$\theta_{10}$	3.13	$w_{10}$	-0.12	$\alpha_{10}$	-0.02
$\theta_{11}$	2.56	$w_{11}$	-0.0067	$\alpha_{11}$	0.0037
$\theta_{12}$	0.98	$w_{12}$	-0.0067	$\alpha_{12}$	0.0037
$\theta_{13}$	2.20	$w_{13}$	0.09	$\alpha_{13}$	0.015
$\theta_{14}$	1.53	$w_{14}$	-0.08	$\alpha_{14}$	-0.0029

Cuadro 5: Cont. resultados del modelo analítico.

Variable	Valor [ mm/s <sup>2</sup> ]
$A_a$	0.213
$A_b$	0.60
$A_c$	3.44
$A_d$	0.55
$A_e$	1.02
$A_{cm2}$	0.27
$A_{cm3}$	1.43
$A_{cm4}$	1.20
$A_{cm5}$	0.46

Cuadro 6: Resultados de aceleración con coriolis modelo analítico.

Para los resultados obtenidos por el modelo gráfico de Working model se cuantifican las variables de posición más representativas del mecanismo, entre las cuales se obtiene lo siguiente.

<b>Proyecto</b>	Diseño de ruteadora	<b>Página</b>	9/9
<b>Calculo</b>	Calculo cinemático 2D	<b>Fecha</b>	15/11/2022
<b>Calculista</b>	Daniel Fernando Arango Ruiz	<b>Revisor</b>	Alejandro Arango

Variable	Valor	Unidades
$R_1$	276	mm
$R_6$	180	mm
$\theta_1$	1.39	rad
$\theta_7$	-0.15	rad
$\theta_3$	-0.89	rad
$\theta_{11}$	2.60	rad
$\theta_4$	3.68	rad
$\theta_{14}$	1.29	rad
$\theta_{13}$	2.39	rad

Cuadro 7: Resultados del modelo gráfico.

## Discusión de resultados

Variable	Valor MatLab	Valor WM	Unidades
$R_1$	281.48	276	mm
$R_6$	179.83	180	mm
$\theta_1$	1.41	1.39	rad
$\theta_3$	-0.88	-0.89	rad
$\theta_4$	3.65	3.68	rad
$\theta_7$	-0.18	-0.15	rad
$\theta_{11}$	2.56	2.60	rad
$\theta_{13}$	2.20	2.39	rad
$\theta_{14}$	1.53	1.29	rad

Cuadro 8: Comparación resultados.

Comparando los valores de posición de ambos modelos se observa que convergen a un resultado en común, con algunas unidades de incertidumbre, esto demuestra que estos primeros valores tienen cierta aproximación a las mediciones reales que se pueden presentar en el mecanismo. Se estima, que para la velocidad, la cual presenta la misma matriz jacobiano de la posición, los valores también pueden presentar aproximaciones válidas, pero por complicaciones en Working model al momento de calcular velocidades angulares, no es posible comparar estos resultados.

Sin embargo, para la aceleración angular no se obtienen resultados convincentes, esto por el desarrollo matemático complejo que es propenso a errores, aún así, se presenta el modelo analítico para velocidades angulares y velocidades que implican coriolis.

# Análisis estático

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

## Descripción

Se realiza el análisis estático 2D de la ruteadora de control numérico. El análisis se realizará mediante ecuaciones de equilibrio estático sobre cada una de las barras, no es necesario emplear ecuaciones de equilibrio nodal ya que los pares R son todos binarios. El sistema original es un mecanismo 11 barras, con 12 pares de revolución binarios y 2 pares prismáticos. Con el fin de simplificar los cálculos el sistema se modelará como un mecanismo 9 barras, con 10 pares de revolución binarios y 2 pares de leva, es decir que los pares R y P de las correderas se modelan como pares de leva con contacto puntual. Se genera un sistema lineal de ecuaciones de 24 ecuaciones de cuerpo y 24 incógnitas, donde 20 incógnitas corresponden a las reacciones de los pares de revolución, 2 incógnitas corresponden a las fuerzas de reacción normal de los pares de leva, y 2 fuerzas de actuación a lo largo de los pares de leva.

## Objetivo del cálculo

- Determinar las 20 fuerzas de reacción en los pares R.
- Determinar las 2 fuerzas de reacción normal en los pares de leva.
- Determinar las 2 fuerzas de actuación en los 2 GDL.

## Variables del modelo de cálculo

Variable	Descripción	Variable	Descripción
$\theta_1$	ángulo de entrada vector AB ∈ barra AB	$R_1$	longitud del vector AB ∈ barra AB
$\theta_2$	ángulo de entrada vector BD ∈ barra BCD	$R_2$	longitud del vector BD ∈ barra BCD
$\theta_7$	ángulo de entrada vector BC ∈ barra BCD	$R_7$	longitud del vector BC ∈ barra BCD
$\theta_8$	ángulo de entrada vector CD ∈ barra BCD	$R_8$	longitud del vector CD ∈ barra BCD
$\theta_3$	ángulo de entrada vector DF ∈ barra DEF	$R_3$	longitud del vector DF ∈ barra DEF
$\theta_3$	ángulo de entrada vector DE ∈ barra DEF	$R_{ter}$	longitud del vector DE ∈ barra DEF
$\theta_{13}$	ángulo de entrada vector EK ∈ barra EK	$R_{13}$	longitud del vector EK ∈ barra EK
$\theta_{14}$	ángulo de entrada vector KL ∈ barra KL	$R_{14}$	longitud del vector KL ∈ barra KL
$\theta_4$	ángulo de entrada vector GF ∈ barra FGP	$R_4$	longitud del vector GF ∈ barra FGP
$\theta_9$	ángulo de entrada vector FP ∈ barra FGP	$R_9$	longitud del vector FP ∈ barra FGP
$\theta_{10}$	ángulo de entrada vector GP ∈ barra FGP	$R_{10}$	longitud del vector GP ∈ barra FGP
$\theta_5$	ángulo de entrada vector IG ∈ barra IGH	$R_5$	longitud del vector IG ∈ barra IGH
$\theta_{11}$	ángulo de entrada vector IH ∈ barra IGH	$R_{11}$	longitud del vector IH ∈ barra IGH
$\theta_{12}$	ángulo de entrada vector HG ∈ barra IGH	$R_{12}$	longitud del vector HG ∈ barra IGH
$\theta_6$	ángulo de entrada vector JI ∈ barra JI	$R_6$	longitud del vector JI ∈ barra JI

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo (ángulos y vectores).

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

Variable	Descripción	Variable	Descripción
$A_{1x}$	Reacción en 'x' del pasador A	$A_{1y}$	Reacción en 'y' del pasador A
$C_{2x}$	Reacción en 'x' del pasador C	$C_{2y}$	Reacción en 'y' del pasador C
$D_{2x}$	Reacción en 'x' del pasador D	$D_{2y}$	Reacción en 'y' del pasador D
$E_{3x}$	Reacción en 'x' del pasador E	$E_{3y}$	Reacción en 'y' del pasador E
$F_{3x}$	Reacción en 'x' del pasador F	$F_{3y}$	Reacción en 'y' del pasador F
$G_{6x}$	Reacción en 'x' del pasador G	$G_{6y}$	Reacción en 'y' del pasador G
$H_{7x}$	Reacción en 'x' del pasador H	$H_{7y}$	Reacción en 'y' del pasador H
$J_{8x}$	Reacción en 'x' del pasador J	$J_{8y}$	Reacción en 'y' del pasador J
$K_{4x}$	Reacción en 'x' del pasador K	$K_{4y}$	Reacción en 'y' del pasador K
$L_{5x}$	Reacción en 'x' del pasador L	$L_{5y}$	Reacción en 'y' del pasador L
$F_{N1}$	Fuerza normal en el par de leva B	$F_{B1}$	Fuerza de actuación en el par de leva B
$F_{N7}$	Fuerza normal en el par de leva I	$F_{I7}$	Fuerza de actuación en el par de leva I
$F_{ext}$	Carga externa generada por la herramienta de corte	$\theta_{ext}$	Orientación de la carga externa

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo (fuerzas y reacciones).

### Imagen del modelo de cálculo

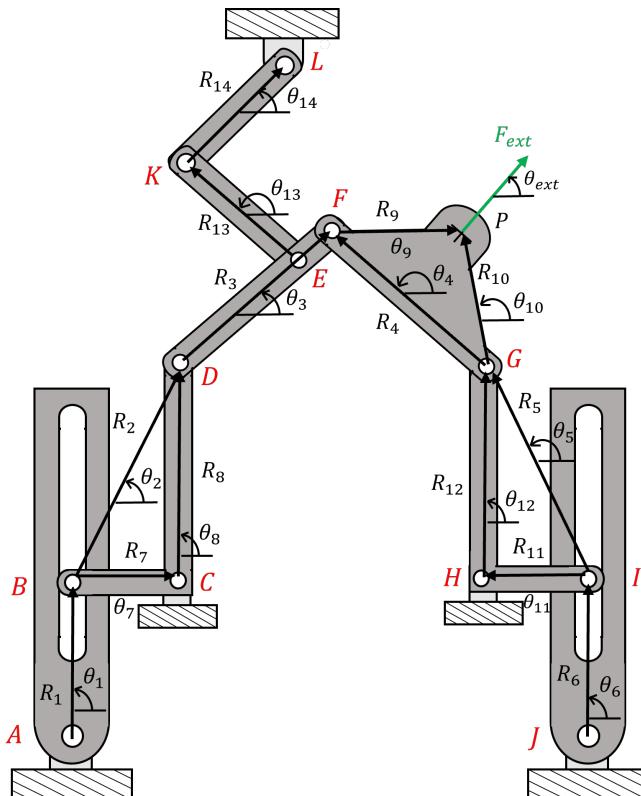


Figura 1: DCL de la máquina ensamblada

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

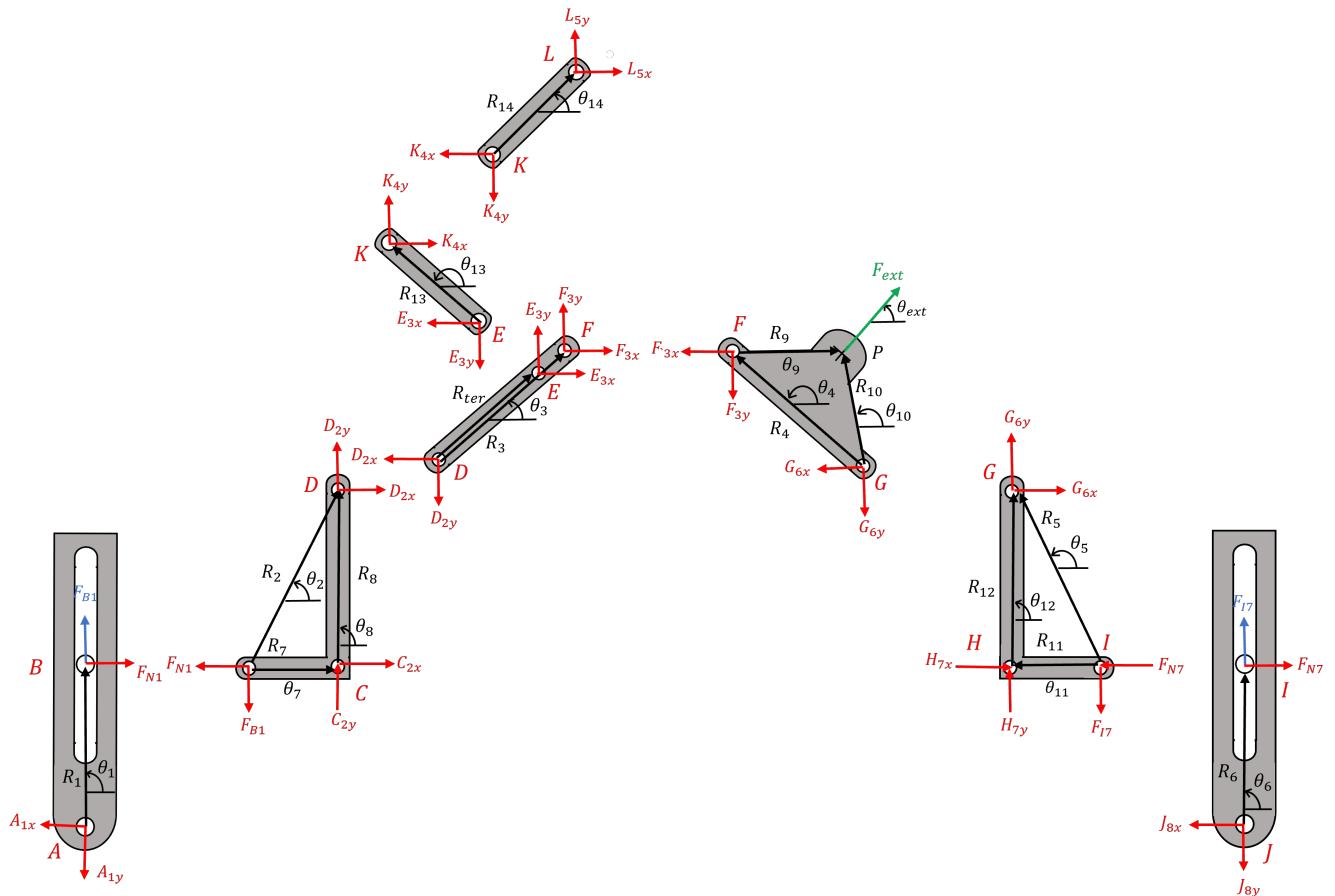


Figura 2: DCL de la máquina desensamblada

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

---

## Valores del modelo de cálculo

---

Variable	Valor	Variable	Valor
$\theta_1$	1.4185836 Rad	$R_1$	0.281m
$\theta_2$	0.88360101 Rad	$R_2$	0.313 m
$\theta_3$	-0,8930732 Rad	$R_3$	0.140m
$\theta_4$	3.6545892 Rad	$R_4$	0.140m
$\theta_5$	1.4893007 Rad	$R_5$	0.313 m
$\theta_6$	1.9375199 Rad	$R_6$	0.1798m
$\theta_7$	-0.189306323 Rad	$R_7$	0.150m
$\theta_8$	1.38338091 Rad	$R_8$	0.275m
$\theta_9$	1.2751322475 Rad	$R_9$	0.072 m
$\theta_{10}$	3.13995712 Rad	$R_{10}$	0.101mm
$\theta_{11}$	2.5622080410 Rad	$R_{11}$	0.150m
$\theta_{12}$	0.989520803 Rad	$R_{12}$	0.275m
$\theta_{13}$	2.2039160959 Rad	$R_{13}$	0.160m
$\theta_{14}$	1.5304635910 Rad	$R_{14}$	0.140m
$\theta_{ef}$	0.523599 Rad	$R_{ter}$	0.110m
$F_{ext}$	1N		

Cuadro 3: Variables empleadas en el modelo de cálculo (ángulos y vectores).

---

## Modelo de cálculo

---

Para el modelo de cálculos se debe obtener las 3 ecuaciones de equilibrio para cada una de las barras de la máquina.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	5/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

### Ecuaciones de equilibrio barra AB

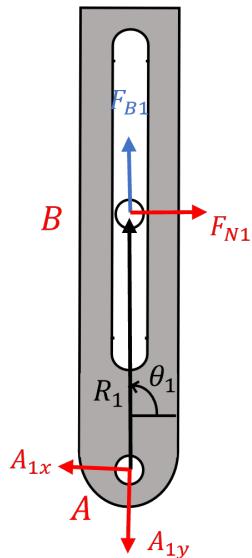


Figura 3: DCL de la barra AB

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0 = F_{N1} \cos\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) - A_{1x} + F_{B1} \cos(\theta_1) \\ \sum F_Y &= 0 = F_{N1} \sin\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) - A_{1y} + F_{B1} \sin(\theta_1) \\ \sum M_A &= 0 = R_1 \cos(\theta_1) F_{N1} \sin\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) - R_1 \sin(\theta_1) F_{N1} \cos\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (1)$$

### Ecuaciones de equilibrio barra BCD

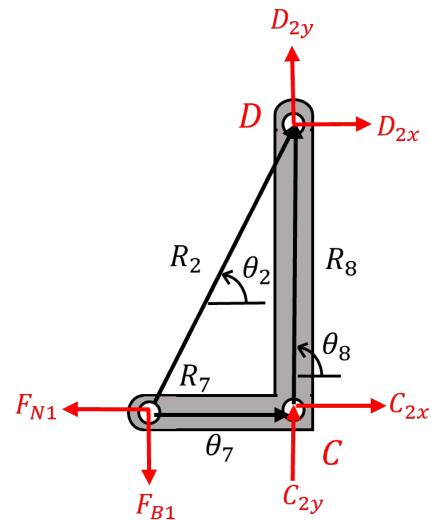


Figura 4: DCL de la barra BCD

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	6/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

$$\begin{aligned}
 \sum F_X &= 0 = D_{2x} - F_{N_1} \cos(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) + C_{2x} - F_{B_1} \cos(\theta_1) \\
 \sum F_Y &= 0 = D_{2y} - F_{N_1} \sin(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) + C_{2y} - F_{B_1} \sin(\theta_1) \\
 \sum M_B &= 0 = R_7 \cos(\theta_7) C_{2y} - R_7 \sin(\theta_7) C_{2x} + R_2 \cos(\theta_2) D_{2y} - R_2 \sin(\theta_2) D_{2x}
 \end{aligned} \tag{2}$$

#### Ecuaciones de equilibrio barra DEF

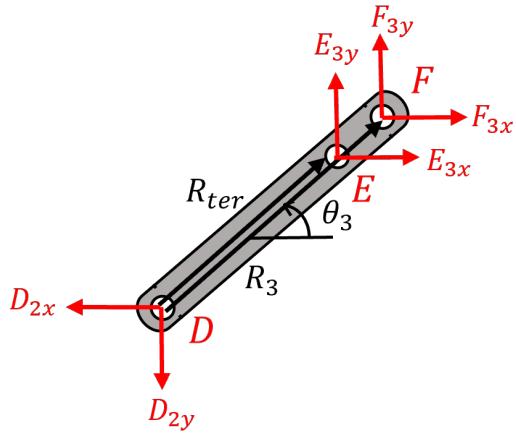


Figura 5: DCL de la barra DEF

$$\begin{aligned}
 \sum F_X &= 0 = F_{3x} + E_{3x} - D_{2x} \\
 \sum F_Y &= 0 = F_{3y} + E_{3y} - D_{2y} \\
 \sum M_D &= 0 = R_{ter} \cos(\theta_3) E_y - R_{ter} \sin(\theta_3) E_x + R_3 \cos(\theta_3) F_y - R_3 \sin(\theta_3) F_x
 \end{aligned} \tag{3}$$

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	7/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

### Ecuaciones de equilibrio barra EK

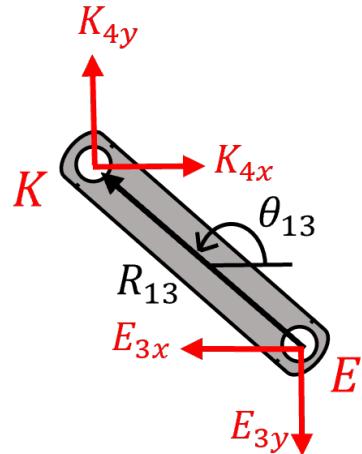


Figura 6: DCL de la barra EK

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0 = K_{4x} - E_{3x} \\ \sum F_Y &= 0 = K_{4y} - E_{3y}\end{aligned}\quad (4)$$

$$\sum M_E = 0 = R_{13} \cos(\theta_{13}) K_y - R_{13} \sin(\theta_{13}) K_x$$

### Ecuaciones de equilibrio barra KL

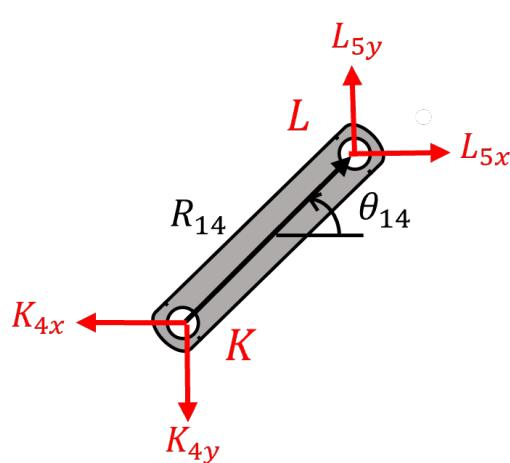


Figura 7: DCL de la barra KL

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	8/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

$$\begin{aligned}
 \sum F_X &= 0 = L_{5x} - K_{4x} \\
 \sum F_Y &= 0 = L_{5y} - K_{4y} \\
 \sum M_K &= 0 = R_{14} \cos(\theta_{14}) L_{5y} - R_{14} \sin(\theta_{14}) L_{5x}
 \end{aligned} \tag{5}$$

#### Ecuaciones de equilibrio barra FGP

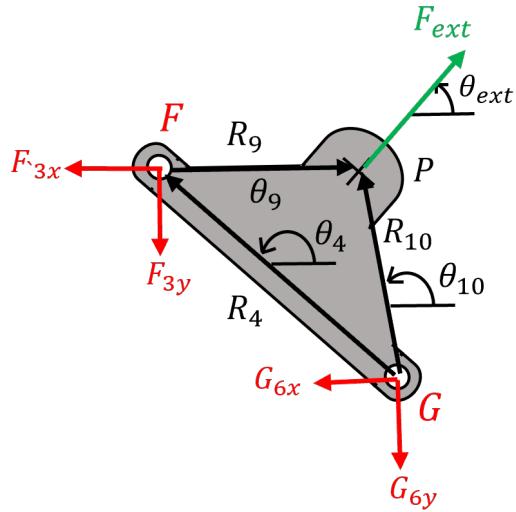


Figura 8: DCL de la barra FGP

$$\begin{aligned}
 \sum F_X &= 0 = F_{ext} \cos(\theta_{ext}) - G_{6x} - F_{3x} \\
 \sum F_Y &= 0 = F_{ext} \sin(\theta_{ext}) - G_{6y} - F_{3y} \\
 \sum M_G &= 0 = R_{10} \cos(\theta_{10}) F_{ext} \sin(\theta_{ext}) - R_{10} \sin(\theta_{10}) F_{ext} \cos(\theta_{ext}) - R_4 \cos(\theta_4) F_{3y} + R_4 \sin(\theta_4) F_{3x}
 \end{aligned} \tag{6}$$

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	9/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martinez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

### Ecuaciones de equilibrio barra IGH

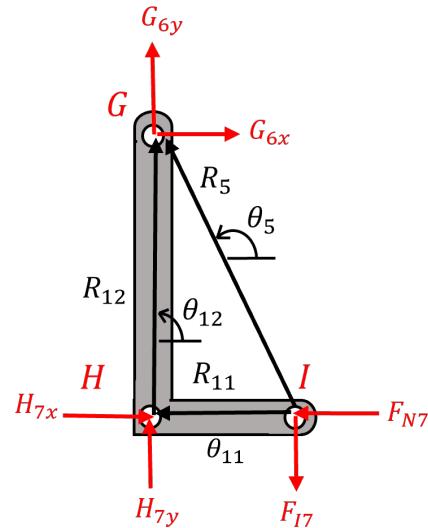


Figura 9: DCL de la barra IGH

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0 = H_{7x} - F_{N7} \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + G_{6x} - F_{I7} \cos(\theta_6) \\ \sum F_Y &= 0 = H_{7y} - F_{N7} \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + G_{6y} - F_{I7} \sin(\theta_6) \\ \sum M_I &= 0 = R_{11} \cos(\theta_{11}) H_{7y} - R_{11} \sin(\theta_{11}) H_{7x} + R_5 \cos(\theta_5) G_{6y} - R_5 \sin(\theta_5) G_{6x}\end{aligned}\quad (7)$$

### Ecuaciones de equilibrio barra JI

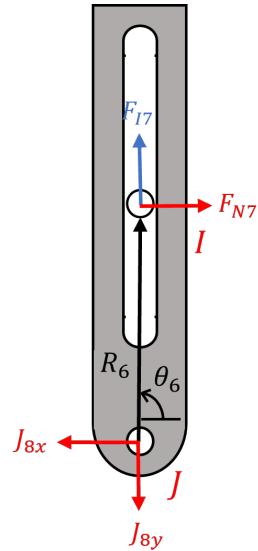


Figura 10: DCL de la barra JI

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	10/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

$$\sum F_X = 0 = F_{N_7} \cos\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right) + F_{I7} \cos(\theta_6) - J_{8x}$$

$$\sum F_Y = 0 = F_{N_7} \sin\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right) + F_{I7} \sin(\theta_6) - J_{8y} \quad (8)$$

$$\sum M_A = 0 = R_6 \cos(\theta_6) F_{N_7} \sin\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right) - R_6 \sin(\theta_6) F_{N_7} \cos\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right)$$

## Sistema de Matrices

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	11/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martinez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

$$X = \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ F_{N1} \\ F_{B1} \\ C_{2x} \\ C_{2y} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ E_{3x} \\ E_{3y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ G_{6x} \\ G_{6y} \\ H_{7x} \\ H_{7y} \\ F_{N7} \\ F_{I7} \\ J_{8x} \\ J_{8y} \\ K_{4x} \\ K_{4y} \\ L_{5x} \\ L_{5y} \end{bmatrix}$$

Posterior a definir la matriz  $A$  y los vectores  $X$  y  $B$ , podemos establecer un sistema de ecuaciones lineales  $24x24$  y resolverlo mediante  $AX = B$ .

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	12/12
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango, Pablo Andrés Martínez	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque Lotero, Daniel Hurtado

Obteniendo entonces la expresión  $X = A^{-1}B$ . Para hallar así los valores los valores de cada una de las variables presentes en el vector  $X$  para los ángulos y longitudes de barra establecidos anteriormente.

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

Se presentan a continuación los resultados del análisis estático para todo el espacio de trabajo en términos de las coordenadas px y py cuando el sistema está sometido a una fuerza unitaria,  $F_{ext} = 1$ , con orientación  $\alpha = \pi/6$ , aplicada en el centroide del efecto.

### Valores de las fuerzas y reacciones

A continuación, en la tabla 4 se presentan los valores de cada una de las fuerzas y reacciones presentes en el sistema cuando el mecanismo está ubicado en el cero de la máquina.

Variable	Resultado	Variable	Resultado
$A_{1x}$	-0.0776 N	$G_{6x}$	1.0960 N
$A_{1y}$	-0.5062 N	$G_{6y}$	0.2143 N
$F_{N_1}$	0 N	$H_{7x}$	-0.1987 N
$F_{B1}$	-0.5121 N	$H_{7y}$	-2.5503 N
$C_{2x}$	0.1523 N	$F_{N7}$	0 N
$C_{2y}$	-0.7918 N	$F_{17}$	-2.5024 N
$D_{2x}$	-0.2299 N	$J_{8x}$	0.8972
$D_{2y}$	0.2857 N	$J_{8y}$	-2.3360
$E_{3x}$	0 N	$K_{4x}$	0 N
$E_{3y}$	0 N	$K_{4y}$	0 N
$F_{3x}$	-0.2299 N	$L_{5x}$	0 N
$F_{3y}$	0.2857 N	$L_{5y}$	0 N

Cuadro 4: Variables empleadas en el modelo de cálculo (fuerzas y reacciones).

Analizando los resultados obtenidos, podemos concluir que para la configuración del mecanismo seleccionada para el análisis estático, no existen fuerzas normales en los pares prismáticos, por tanto, las únicas fuerzas en acción son las de actuación.

Adicionalmente, las reacciones en las barras del grupo de Assur tienen magnitud 0, lo que implica que, en esta configuración de posición, estas dos barras no juegan el papel de soporte para el que fueron agregadas al mecanismo. Asimismo, no sufren ningún tipo de esfuerzo en el plano 'XY', por tanto, no presentarán falla.

Por último, como puede observarse en la tabla 4, las reacciones de mayor magnitud son  $F_{17}$ ,  $J_{8y}$  y  $H_{7y}$ , con magnitudes de 2.50, 2.34 y 2.55 Newtons respectivamente. Estos son los pares cinemáticos más cercanos al punto de aplicación de la fuerza externa, por lo tanto, es razonable que estas presenten las fuerzas más altas en toda la configuración.

# Análisis de falla

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Barras	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Daniel Hurtado

---

## Descripción

Se realiza el análisis de falla 2D de la ruteadora CNC. Se consideran los diferentes estados de carga y los casos de falla correspondientes a los diferentes elementos de interés presentes en la máquina. Se analiza el caso de falla por esfuerzo axial en las barras binarias del grupo de assur, la barra ternaria recta y los nodos B, D, G e I para la configuración de posición empleada en el análisis estático.

En este análisis se deja expresada la fuerza axial máxima para así ofrecer mayor libertad de cálculo a la hora de realizar el análisis para diferentes configuraciones de posición. Al hacer esto, los resultados son expresados en términos de la fuerza, por tanto, una vez se tenga una fuerza para la cual se requiera realizar el análisis de falla, únicamente se reemplaza en la fórmula y se obtienen los resultados buscados.

---

## Objetivo del cálculo

- Determinar el esfuerzo axial sobre las barras binarias del mecanismo, la barra ternaria recta y los nodos B, D, G e I para cualquier configuración de posición.
- Determinar el factor de seguridad en los puntos de interés al aplicar la fuerza axial máxima.

---

## Variables del modelo de cálculo

Variable	Descripción
$F_{a,max}$	Fuerza axial máxima en la configuración de posición
$e_{barra}$	Espesor de las barras
$a_{barra}$	Ancho de las barras
$d_{perf}$	Diámetro de la perforación para los pares R en las barras
$K_T$	Factor de concentrador de esfuerzo para perforación
$\sigma_y$	Límite de fluencia del acero A36
$\sigma_{axial}$	Esfuerzo axial de la barra

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Barras	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Daniel Hurtado

## Imagen del modelo de cálculo

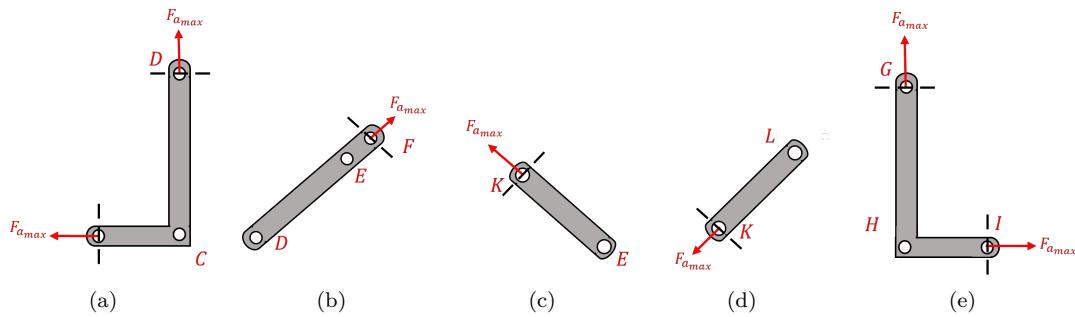


Figura 1: Diagramas donde se muestra la fuerza axial máxima y el punto crítico donde se realiza el corte para el análisis de falla. (a) diagrama de la barra 2. (b) diagrama de la barra 3. (c) diagrama de la barra 4. (d) diagrama de la barra 5. (e) diagrama de la barra 7.

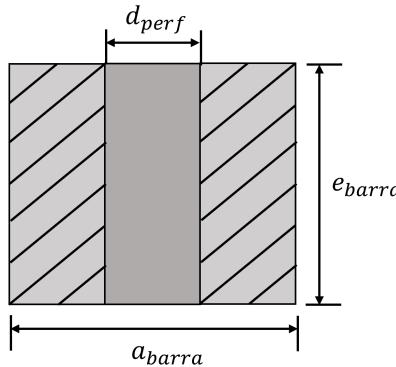


Figura 2: Vista frontal del área transversal de la barra en el punto de corte

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Barras	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Daniel Hurtado

## Valores del modelo de cálculo

Los valores de las variables empleadas en el modelo de cálculo se encuentran en la tabla 2.

Variable	Valor	Variable	Valor
$F_{a_{max}}$	$F_{a_{max}}$	$e_{barra}$	0.00635 m
$a_{barra}$	0.04 m	$d_{perf}$	0.02 m
$K_T$	2.175	$\sigma_y$	250 MPa

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

El valor de  $F_{a_{max}}$  se obtiene realizando la proyección de las reacciones obtenidas en la cabeza de los vectores de cada barra en el análisis estático. Para ello, se emplea la siguiente ecuación:

$$F_x \cos(\theta) + F_y \sin(\theta) \quad (1)$$

Al realizar este proceso con cada reacción, se obtiene la fuerza axial máxima en esta configuración de posición. Esta variable se debe reemplazar en las expresiones presentadas en los resultados para obtener los valores correspondientes a la configuración tratada.

El valor del factor de concentrador de esfuerzo  $K_T$  se obtiene de la figura 3. Para la lectura de esta gráfica se tiene en cuenta que la relación  $d/W$  para las barras del mecanismo es de 0.5. Esto, pues, como se observa en la figura,  $W$  corresponde al ancho de la barra dado por la variable  $a_{barra}$ , y  $d$  corresponde al diámetro de la perforación  $d_{perf}$ .

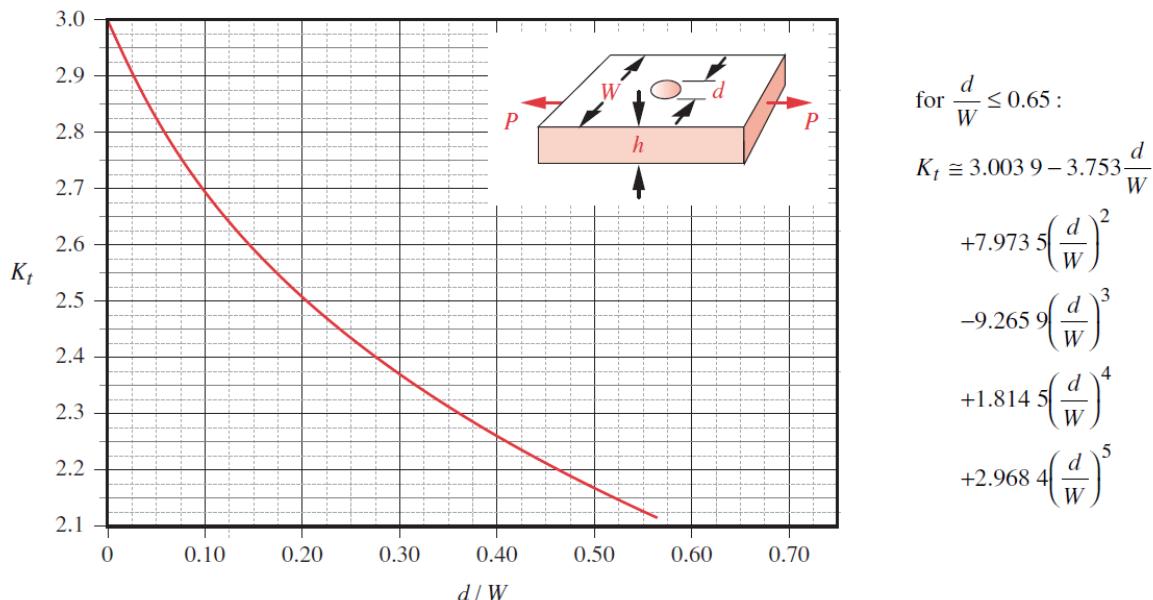


FIGURE C-13

Geometric Stress-Concentration Factor  $K_t$  for a Flat Bar with Transverse Hole in Axial Tension

Figura 3: Factor de concentrador de esfuerzo geométrico  $K_T$  para barra plana con agujero transversal en tensión axial

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Barras	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Daniel Hurtado

---

## Modelo de cálculo

Para el análisis de falla de las barras únicamente se considera el fallo a tensión por fuerzas axiales. Para esto, se emplea la ecuación del esfuerzo axial dada por la expresión 2.

$$\sigma_{\text{axial}} = \frac{F}{A} K_T \quad (2)$$

En el caso tratado, la fuerza  $F$  corresponde a la fuerza axial máxima, mientras que el área está dada por  $h_{buje}(a_{barra} - d_{perf})$ . Esto nos permite obtener la siguiente ecuación:

$$\sigma_{\text{axial}} = \frac{F_{a_{\max}}}{e_{\text{barra}}(a_{\text{barra}} - d_{\text{perf}})} K_T \quad (3)$$

---

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

Al resolver la ecuación 3 con los valores mostrados en la tabla 2, obtenemos la siguiente expresión para el esfuerzo axial:

$$\sigma_{\text{axial}} = 17126 F_{a_{\max}}$$

Este esfuerzo axial es el mismo para todas las barras y nodos siendo estudiados, pues estas tienen la misma área transversal y están siendo analizadas con la misma fuerza axial.

Asimismo, ya que las barras del mecanismo son todas del mismo material (acero A36), todas cuentan con el mismo límite de fluencia. Por tanto, aplicando la siguiente fórmula para hallar el factor de seguridad:

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{axial}}} \quad (4)$$

Se obtiene que las barras binarias 4 y 5, así como la barra ternaria 3 y los nodos B, D, G e I presentan un factor de seguridad dado por la siguiente ecuación:

$$F.S = \frac{14598}{F_{a_{\max}}} \quad (5)$$

Con base en la ecuación 5, podemos concluir que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza axial ejercida sobre las barras y nodos estudiados no puede ser mayor o igual a 14598 N.

Como se evidencia en este resultado, las fuerzas axiales que pueden soportar las barras son bastante elevadas y considerablemente mayores a las que podrían experimentar en los movimientos descritos por el mecanismo. Por tanto, se puede razonar que las barras no van a fallar por esfuerzo axial en ninguna configuración de posición posible dentro del área de trabajo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Bujes	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Carlos Paez

## Descripción

Se realiza el análisis de falla 2D de la ruteadora CNC. Se consideran los diferentes estados de carga y los casos de falla correspondientes a los diferentes elementos de interés presentes en la máquina. Se analiza el caso de falla por esfuerzo de aplastamiento en los bujes de bronce SAE 40 para la configuración de posición empleada en el análisis estático.

El esfuerzo de aplastamiento ocurre tanto entre el buje y la barra como entre el buje y el pin. Para definir cuál de los dos esfuerzos se debe calcular, se determina el área proyectada de contacto entre cada pareja, y, con base a esto, se calcula el esfuerzo de aplastamiento entre los dos elementos que menor área de contacto tengan. Esto se realiza con el fin de analizar este esfuerzo cuando es máximo, pues, mientras menor sea el área, mayor será el esfuerzo, y mayor será el riesgo de falla.

Por otra parte, en este análisis se deja expresada la fuerza de aplastamiento máxima para así ofrecer mayor libertad de cálculo a la hora de realizar el análisis para diferentes configuraciones de posición. Al hacer esto, los resultados son expresados en términos de la fuerza, por tanto, una vez se tenga una fuerza para la cual se requiera realizar el análisis de falla, únicamente se reemplaza en la fórmula y se obtienen los resultados buscados.

Cabe aclarar, la fuerza de aplastamiento máxima es equivalente físicamente a la fuerza axial máxima utilizada en el análisis de falla de las barras.

## Objetivo del cálculo

- Determinar el esfuerzo por aplastamiento en los bujes del mecanismo para cualquier configuración de posición.
- Determinar el factor de seguridad de los bujes al aplicar la fuerza de aplastamiento máxima.

## Variables del modelo de cálculo

Variable	Descripción
$F_{ap\_max}$	Fuerza de aplastamiento máxima en la configuración de posición
$e_{barra}$	Espesor de las barras
$h_{buje}$	Altura total del buje
$d_{ext}$	Diámetro externo del buje en contacto con la barra
$d_{int}$	Diámetro interno del buje en contacto con el pin
$\sigma_y$	Límite de fluencia del bronce SAE 40
$\sigma_{ap}$	Esfuerzo de aplastamiento del buje

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Bujes	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Carlos Paez

---

### Imagen del modelo de cálculo

---

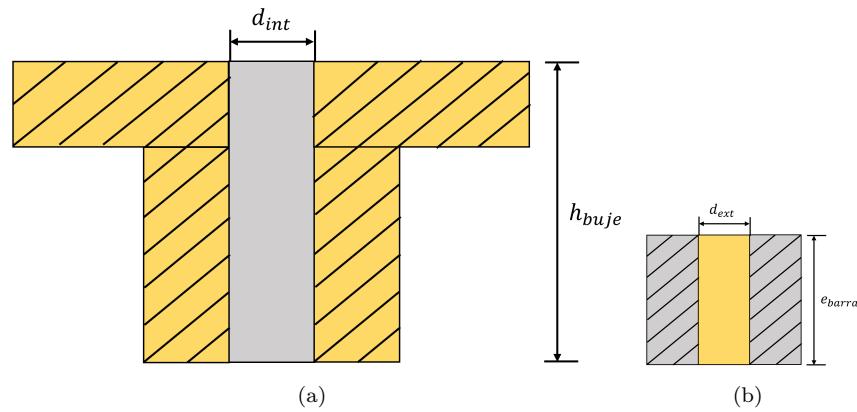


Figura 1: Vistas frontales en sección (a) Buje-pin. (b) Buje-barra.

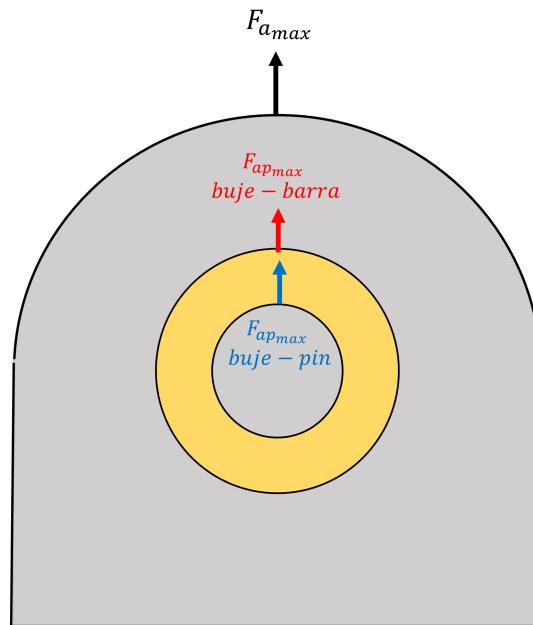


Figura 2: Diagrama donde se muestra la fuerza axial máxima sobre la barra y las fuerzas de aplastamiento generadas.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Bujes	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Carlos Paez

## Valores del modelo de cálculo

Los valores de las variables empleadas en el modelo de cálculo se encuentran en la tabla 2.

Variable	Valor	Variable	Valor
$F_{ap_{max}}$	$F_{ap_{max}}$	$e_{barra}$	0.00635 m
$h_{buje}$	0.03 m	$d_{ext}$	0.02 m
$d_{int}$	0.01 m	$\sigma_y$	97 MPa

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

## Modelo de cálculo

Para el análisis de falla de los bujes únicamente se considera el fallo por aplastamiento por las fuerzas de aplastamiento transmitidas desde las barras.

Inicialmente, se determina el área proyectada de menor contacto entre buje-barra y buje-pin. Para ello, se calcula el área proyectada de contacto entre buje y barra con la ecuación 1 y entre buje y pin con la ecuación 2.

$$A_{bb} = e_{barra} \times d_{ext} \quad (1)$$

$$A_{bp} = h_{buje} \times d_{int} \quad (2)$$

Al realizar ambos cálculos, se obtiene que la menor área proyectada de contacto es la de buje-barra con  $1.27 \times 10^{-4} m^2$  y no la de buje-pin con  $3 \times 10^{-4} m^2$ . Por tanto, el cálculo del esfuerzo de aplastamiento se realiza con esta área, pues el contacto entre el buje y la barra es el punto crítico donde el buje es más propenso al fallo.

Conocida el área, se emplea la ecuación 3 para calcular el esfuerzo de aplastamiento con la fuerza de aplastamiento máxima  $F_{ap_{max}}$ .

$$\sigma_{ap} = \frac{F_{ap_{max}}}{A_{bb}} \quad (3)$$

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

Al resolver la ecuación 3 con los valores mostrados en la tabla 2, obtenemos la siguiente expresión para el esfuerzo de aplastamiento:

$$\sigma_{ap} = \frac{F_{ap_{max}}}{1.27 \times 10^{-4}} \quad (4)$$

Este esfuerzo de aplastamiento es el mismo para todos los bujes, pues estos tienen la misma área proyectada de contacto y están siendo analizadas con la misma fuerza de aplastamiento.

Asimismo, ya que los bujes son todos del mismo material (bronce SAE40), todos cuentan con el mismo límite de fluencia. Por tanto, aplicando la siguiente fórmula para hallar el factor de seguridad:

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_{ap}} \quad (5)$$

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Bujes	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Carlos Paez

Se obtiene que los bujes presentan un factor de seguridad dado por la ecuación:

$$F.S = \frac{12319}{F_{ap_{max}}} \quad (6)$$

Con base en la ecuación 6, podemos concluir que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza de aplastamiento ejercida sobre los bujes no puede ser mayor o igual a 12319 N.

Como se evidencia en este resultado, las fuerzas de aplastamiento que pueden soportar los bujes son bastante elevadas y considerablemente mayores a las que podrían experimentar en los movimientos descritos por el mecanismo. Por tanto, se puede razonar que los bujes no van a fallar por esfuerzo de aplastamiento en ninguna configuración de posición posible dentro del área de trabajo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

## Descripción

Se realiza el análisis de falla 2D de la ruteadora CNC. Se consideran los diferentes estados de carga y los casos de falla correspondientes a los diferentes elementos de interés presentes en la máquina. Se analiza el caso de falla por pandeo y por cortante de torsión para el tornillo de potencia.

El análisis de pandeo se realiza cuando el carro se encuentra en el extremo del tornillo, pues es en esta posición que el pandeo es máximo al generarse una reacción compresiva sobre el tornillo por la fuerza de actuación. Esta fuerza de actuación tiene su origen en el motor en forma de torque y es convertida en movimiento lineal por el tornillo.

La condición de frontera que presenta el tornillo en este caso de estudio es fijo-fijo, esto porque el tornillo está fijado a ambos extremos por los soportes BK y BF mostrados en la figura 1, los cuales cuentan con rodamientos radiales.



Figura 1: Soportes BK y BF

Es importante señalar que en el caso del análisis de falla por pandeo, la fuerza de actuación que actúa como carga compresiva se deja indicada. De esta manera se ofrece mayor libertad de cálculo, siendo únicamente necesario reemplazar esta fuerza para cualquier configuración de posición y así obtener el resultado correspondiente.

Por otra parte, el análisis de cortante de torsión se puede realizar cuando la corredera se encuentra en cualquier punto del recorrido del tornillo. Este análisis considera el torque máximo transmitido por el motor, de tal manera que se pueda comprobar si el tornillo puede resistir esta carga sin fallar. Asimismo, también se considera un caso ideal sin fricción donde se relaciona la fuerza de avance con el par de torsión para así tener la posibilidad de calcular el esfuerzo cortante de torsión para cualquier configuración de posición deseada.

## Objetivo del cálculo

- Determinar si el tornillo experimenta pandeo cuando la corredera se encuentra en el extremo.
- Determinar el esfuerzo cortante de torsión en el tornillo para el torque máximo.
- Determinar el factor de seguridad del tornillo a pandeo.
- Determinar el factor de seguridad del tornillo a cortante de torsión.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

---

## Variables del modelo de cálculo

---

Variable	Descripción
$L$	Longitud total del tornillo de potencia
$d_r$	Diámetro de raíz del tornillo
$I$	Segundo momento de inercia de la sección transversal tornillo
$A$	Área de la sección transversal del tornillo
$S_r$	Razón de esbeltez del tornillo
$E$	Módulo de Young del acero inoxidable 304
$P_{cr}$	Carga crítica donde ocurre pandeo
$P$	Fuerza de actuación o carga compresiva ejercida sobre el tornillo
$S_{yc}$	Esfuerzo de fluencia compresivo del acero inoxidable 304
$c$	Distancia de la fibra neutra a la fibra de interés
$e$	Excentricidad de la carga
$l_{eff}$	Longitud efectiva de la columna
$k$	Radio de giro de la sección
$\sigma_{max}$	Esfuerzo compresivo
$T$	Torque entregado por el motor al tornillo
$J$	Momento polar de inercia del tornillo
$r$	Radio del área transversal del tornillo

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

---

## Imagen del modelo de cálculo

---

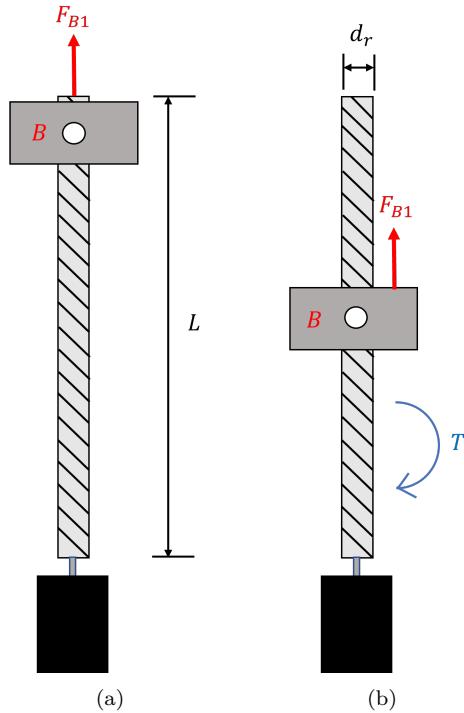


Figura 2: (a) Fuerza de actuación sobre el tornillo que provoca pandeo. (b) Fuerza normal sobre el tornillo que genera esfuerzo cortante de torsión.

---

## Valores del modelo de cálculo

---

Los valores de las variables empleadas en el modelo de cálculo se encuentran en la tabla 2.

Variable	Valor	Variable	Valor
$L$	0.325 mm	$d_r$	0.007 mm
$E$	193 GPa	$P$	$F_{B1}$ o $F_{I7}$
$S_{yc}$ y $\sigma_y$	195 MPa	$T$	12.5 Nm
$c$	0.0035 mm	$e$	0.001 mm

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

---

## Modelo de cálculo

---

### Pandeo

Para el análisis de falla por pandeo del tornillo de potencia se comprueba que la fuerza de actuación sobre el tornillo en una configuración de posición dada sea menor a la carga crítica a la que ocurre pandeo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

Antes de plantear el modelo de cálculo, es importante aclarar que las ecuaciones mostradas a continuación aplican únicamente a una condición de frontera pin-pin. Por tanto, al ser la condición de frontera en este caso de fijo-fijo, se debe corregir la longitud real de la columna por su longitud efectiva con la tabla mostrada a continuación:

Condición de frontera	pin pin	fijo fijo	pin fijo	libre fijo	patín fijo	patín pin
	$l$	$0.5l$	$0.707l$	$2l$	$l$	$2l$
Valor teórico	$l$	$0.5l$	$0.707l$	$2l$	$l$	$2l$
Valor recomendado	$l$	$0.65l$	$0.8l$	$2.1l$	$1.2l$	$2l$
Valor conservativo	$l$	$l$	$l$	$2.4l$		

Figura 3: Tabla para la corrección de la longitud real para condiciones de frontera diferentes a pin-pin.

Con base a la figura 3, se utilizará el valor conservador para la condición de frontera fijo-fijo. Por lo tanto, la longitud efectiva a usar será la misma longitud real  $L$ .

Una vez establecida la longitud efectiva, se procede a determinar el segundo momento de inercia del tornillo, así como el área de su sección transversal. Para ello, se emplean las ecuaciones 1 y 2.

$$A = \frac{1}{4}\pi d_r^2 \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{64}\pi d_r^4 \quad (2)$$

Los resultados obtenidos son de  $3.85 \times 10^{-5} m^2$  y  $1.18 \times 10^{-10} m^4$  para el área y la inercia respectivamente. Con estos valores, se emplea la ecuación 3 para determinar la razón de esbeltez  $S_r$ .

$$S_r = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad (3)$$

Para determinar si el criterio de falla que debe emplearse para el tornillo es la parábola de Johnson o la carga crítica a pandeo, se debe comprobar si la razón de esbeltez al cuadrado ( $S_r^2$ ) es menor o mayor que el siguiente valor:

$$C = \pi \sqrt{\frac{2E}{S_{yc}}} \quad (4)$$

Si  $S_r^2$  es menor, entonces se emplea como criterio de falla la parábola de Johnson descrita por la ecuación 5. De lo contrario, si  $S_r^2$  es mayor, se toma como criterio de falla la carga crítica a pandeo expresada con la ecuación 6.

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_{yc} - \frac{1}{E} \left( \frac{S_{yc} S_r}{2\pi} \right)^2 \quad (5)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E A}{S_r^2} \quad (6)$$

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	5/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

A partir de los resultados obtenidos para la carga crítica  $P_{cr}$ , se comprueba si  $P_{cr} > P$ . Si esta relación se cumple, el tornillo no presentará pandeo.

Ya determinado el valor de la carga crítica  $P_{cr}$ , se calcula el esfuerzo compresivo (compresión axial + flexión) empleando la fórmula de la carga excéntrica 7.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{k^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right) \quad (7)$$

Donde el radio de giro  $k$  está dado por la ecuación 8.

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (8)$$

Con el esfuerzo compresivo se determina el factor de seguridad del tornillo, haciendo uso de la ecuación 9.

$$F.S = \frac{S_{yc}}{\sigma_{max}} \quad (9)$$

Finalmente, con la ecuación 10, se establece la eficiencia del tornillo en esta configuración de posición para un caso sin fricción. La fricción se considera nula, pues el tornillo empleado es de bolas recirculantes, una pieza con una fricción ínfima que puede ser despreciada.

$$e = \frac{PL}{2\pi T} \quad (10)$$

### Cortante de torsión

Para el análisis de falla por cortante de torsión del tornillo de potencia se emplea la ecuación de esfuerzo cortante de torsión 11.

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad (11)$$

Al expresar esta ecuación en términos del diámetro, se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{16T}{\pi d_r^3} \quad (12)$$

En un principio, para analizar la falla del tornillo cuando está expuesto al torque máximo transmitido por el motor, se examina la gráfica de fábrica del motor NEMA 34 en la figura 4.

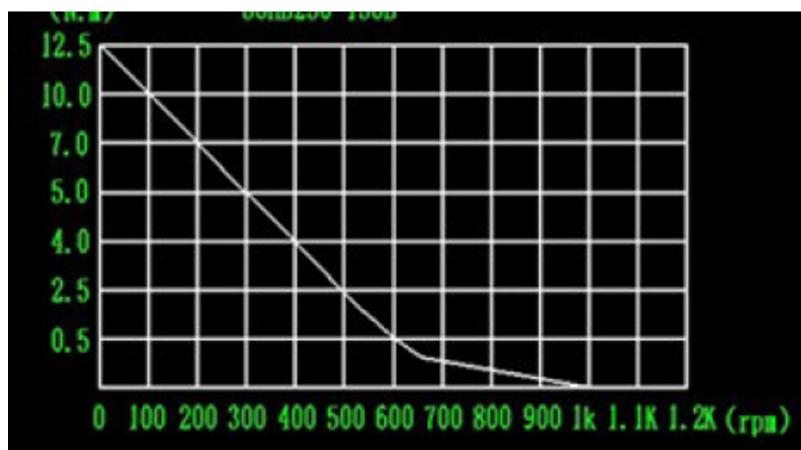


Figura 4: Gráfica Torque [Nm] vs. Velocidad angular [rpm] del motor NEMA 34.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	6/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

Según la gráfica, el torque máximo que puede ofrecer el motor es de 12.5 Nm (12500 Nmm), por tanto, este será el valor con el que se calculará el esfuerzo cortante de torsión máximo para el tornillo.

Por otra parte, si se quiere evaluar el esfuerzo cortante de torsión considerando la fuerza de actuación a la que está sometida el tornillo, se usa la siguiente ecuación:

$$T = \frac{PL}{2\pi} \quad (13)$$

Tomando la ecuación 12, se puede plantear la siguiente expresión para el esfuerzo:

$$\tau = \frac{8PL}{\pi^2 d_r^3} \quad (14)$$

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

### Pandeo

Al resolver la ecuación 3, obtenemos que la razón de esbeltez del tornillo es:

$$S_r = 185.75$$

Si comparamos este valor con el de la constante  $C$  de la ecuación 4

$$C = 139.77$$

Podemos identificar que

$$S_r^2 > C$$

$$32503.1 > 139.77$$

Por tanto, el criterio de falla que se debe emplear en este caso es el de la carga crítica a pandeo. Con esto en mente, se calcula la carga crítica  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = 2125.5N$$

Con este valor se puede verificar si la carga de actuación a la que está sometida el tornillo en una configuración de posición dada es mayor o menor a la carga crítica.

Posteriormente, empleando la ecuación 7, se obtiene la siguiente expresión que retorna el valor del esfuerzo compresivo debido al pandeo:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{3.85 \times 10^{-5}} \left( 1 + 1.142 \sec \left( 0.034\sqrt{P} \right) \right) \quad (15)$$

Al reemplazar esta fórmula en la ecuación 9, se llega a la siguiente expresión para hallar el factor de seguridad del tornillo:

$$F.S = \frac{7507.5}{P \left( 1 + 1.142 \sec \left( 0.034\sqrt{P} \right) \right)} \quad (16)$$

Finalmente, para hallar la eficiencia del tornillo en esta posición, se aplica la ecuación 10, donde, para ofrecer mayor libertad de cálculo, el torque se deja indicado.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	7/7
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Tornillo	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque

$$e = 0.0517 \frac{P}{T} \quad (17)$$

### Cortante de torsión

Evaluada la ecuación 12, se obtiene el siguiente esfuerzo cortante de torsión:

$$\tau = 185.6 MPa \quad (18)$$

Con este valor calculado, se emplea la ecuación 19 para calcular el factor de seguridad del tornillo para el torque máximo que puede llegar a experimentar.

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\tau} \quad (19)$$

Al resolver la anterior ecuación para el  $\sigma_y$  del acero inoxidable 304, se obtiene el siguiente factor de seguridad:

$$F.S = 1.05$$

Por otra parte, si se quiere hallar el factor de seguridad para una fuerza de actuación definida, se reemplaza el esfuerzo cortante a torsión obtenido en la ecuación 14 en la fórmula para el factor de seguridad 19. De esta manera, se obtiene la siguiente expresión:

$$F.S = \frac{254}{P} \quad (20)$$

### Conclusiones

Primeramente, cabe aclarar que estos cálculos aplican a ambos tornillos, pues estos tienen las mismas dimensiones y propiedades mecánicas.

En el caso del pandeo, se espera que los tornillos de potencia puedan resistir cargas de actuación bastante elevadas, pues estos son diseñados para soportar las fuerzas compresivas.

Si se realiza un proceso iterativo con la ecuación 16, se puede identificar que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza compresiva ejercida sobre el tornillo no puede ser mayor o igual a aproximadamente 3500 N.

Por otra parte, de la ecuación 10 se puede concluir que, si se quiere lograr una eficiencia mayor o igual al 50 % en una posición dada, la relación entre la fuerza de actuación  $P$  y el torque entregado por el motor  $T$  debe ser mayor o igual a 9.67.

En el caso de fallo por cortante de torsión, se puede concluir del resultado de la ecuación 19 que si se llegase a transmitir el torque máximo del motor al tornillo, se presentaría una falla inminente, provocando deformación plástica sobre el tornillo e imposibilitando el funcionamiento preciso que requiere la ruteadora.

Adicionalmente, con base en la ecuación 20, se puede colegir que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza de actuación (fuerza compresiva) ejercida sobre el tornillo no puede ser mayor o igual a 254 N. Las cargas cortantes sobre el tornillo, como se puede evidenciar en este resultado, deben ser siempre minúsculas, pues los tornillos no están fabricados para soportar este tipo de esfuerzos.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/3
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Pines	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

## Descripción

Se realiza el análisis de falla 2D de la ruteadora CNC. Se consideran los diferentes estados de carga y los casos de falla correspondientes a los diferentes elementos de interés presentes en la máquina. Se analiza el caso de falla por esfuerzo cortante simple en los pines de acero 1040 para la configuración de posición empleada en el análisis estático.

El esfuerzo cortante se produce al exponer el pin a las fuerzas opuestas en orientación transmitidas por las barras a cada extremo del pin. Ya que en el mecanismo existen dos tipos de pines (alto y bajo), donde el alto presenta cargas combinadas de cortante y flexión, solo se analizará el pin bajo.

Los pines bajos presentan una perforación roscada en la parte superior y se encuentran soldados en su base a una de las barras. La sección perforada es la que entra al buje de la otra barra para formar el par de revolución. Tomando esto en consideración, se estudiará el esfuerzo cortante únicamente en la sección perforada, pues es en este segmento del pin que el área transversal es menor, por tanto, es más propensa al fallo.

Por otra parte, en este análisis se deja expresada la fuerza cortante máxima para así ofrecer mayor libertad de cálculo a la hora de realizar el análisis para diferentes configuraciones de posición. Al hacer esto, los resultados son expresados en términos de la fuerza, por tanto, una vez se tenga una fuerza para la cual se requiera realizar el análisis de falla, únicamente se reemplaza en la fórmula y se obtienen los resultados en buscados.

Cabe aclarar, la fuerza cortante máxima es equivalente físicamente a la fuerza axial máxima utilizada en el análisis de falla de las barras.

## Objetivo del cálculo

- Determinar el esfuerzo cortante simple en los pines bajos del mecanismo para cualquier configuración de posición.
- Determinar el factor de seguridad de los pines bajos al aplicar la fuerza cortante máxima en los pines.

## VARIABLES DEL MODELO DE CÁLCULO

Variable	Descripción
$F_{cmax}$	Fuerza cortante máxima en la configuración de posición
$d_{ext}$	Diámetro externo del pin
$d_{int}$	Diámetro de la perforación roscada del pin
$\sigma_y$	Límite de fluencia del acero 1040
$\tau$	Esfuerzo cortante simple del pin

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/3
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Pines	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

## Imagen del modelo de cálculo

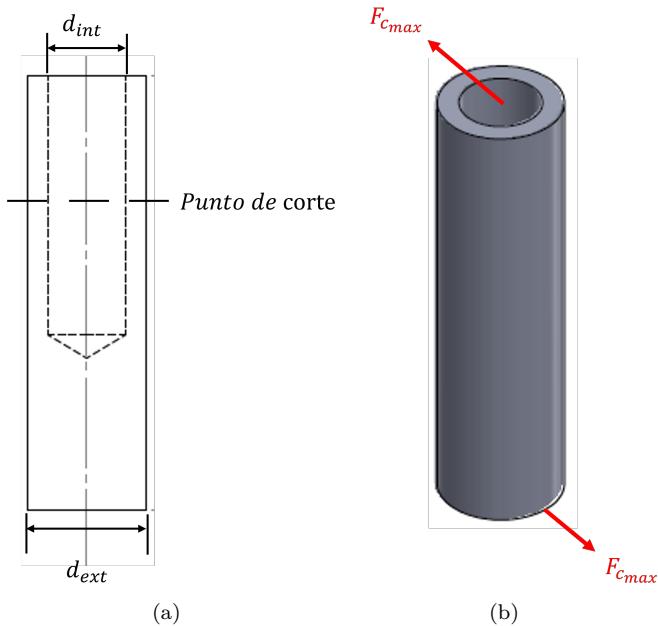


Figura 1: (a) Punto de corte para el análisis de falla del pin bajo. (b) Fuerzas cortantes ejercidas sobre el pin.

## Valores del modelo de cálculo

Los valores de las variables empleadas en el modelo de cálculo se encuentran en la tabla 2.

Variable	Valor	Variable	Valor
$F_{c_{max}}$	$F_{c_{max}}$	$d_{ext}$	0.01 m
$d_{int}$	0.006 m	$\sigma_y$	320 MPa

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

## Modelo de cálculo

Para el análisis de falla de los pines bajos únicamente se considera el fallo por cortante simple como consecuencia de las fuerzas cortantes transmitidas desde las barras.

Inicialmente, se determina el área de la sección transversal en el punto de corte mostrado en la figura 1(a). Para ello, se emplea la ecuación 1.

$$A_{t_{pin}} = \frac{\pi}{4} (d_{ext}^2 - d_{int}^2) \quad (1)$$

El resultado obtenido es de  $5.03 \times 10^{-5} m^2$ . Con esta área calculada, se emplea la ecuación 2 para determinar el esfuerzo cortante simple con la fuerza cortante máxima  $F_{c_{max}}$ .

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/3
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Pines	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

$$\tau = \frac{F_{c_{max}}}{A_{t_{pin}}} \quad (2)$$

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

---

Al resolver la ecuación 2 con los valores mostrados en la tabla 2, obtenemos el siguiente esfuerzo cortante:

$$\tau = \frac{F_{c_{max}}}{5.03 \times 10^{-5}}$$

Este esfuerzo cortante es el mismo para todos los pines bajos, pues estos tienen la misma área transversal y están siendo analizados con la misma fuerza cortante.

Asimismo, ya que los pines son todos del mismo material (acero 1040), todos cuentan con el mismo límite de fluencia. Por tanto, aplicando la siguiente fórmula para hallar el factor de seguridad:

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\tau} \quad (3)$$

Se obtiene que los pines presentan un factor de seguridad dado por la ecuación:

$$F.S = \frac{16085}{F_{c_{max}}} \quad (4)$$

Con base en la ecuación 4, podemos concluir que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza cortante ejercida sobre los pines bajos no puede ser mayor o igual a 16085 N.

Como se evidencia en este resultado, las fuerzas cortantes que pueden soportar los pines bajos son bastante elevadas y considerablemente mayores a las que podrían experimentar en los movimientos descritos por el mecanismo. Por tanto, se puede razonar que las barras no van a fallar por esfuerzo axial en ninguna configuración de posición posible dentro del área de trabajo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Guias	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

---

## Descripción

Se realiza el análisis de falla 2D de la ruteadora CNC. Se consideran los diferentes estados de carga y los casos de falla correspondientes a los diferentes elementos de interés presentes en la máquina. Se analiza el caso de falla por deflexión para las guías del par R en el brazo de actuación.

El análisis de deflexión se realiza cuando el carro se encuentra en la mitad del recorrido total del tornillo, pues es en esta posición que la flexión es máxima sobre las guías debido a la carga puntual. La fuerza normal al movimiento del carro se transmite directamente a las guías, pues la función de estas es prevenir que el tornillo sufra este tipo de esfuerzos debido a las cargas transversales.

Por otra parte, en este análisis se deja expresada la carga de flexión máxima para así ofrecer mayor libertad de cálculo a la hora de realizar el análisis para diferentes configuraciones de posición. Al hacer esto, los resultados son expresados en términos de la fuerza, por tanto, una vez se tenga una fuerza para la cual se requiera realizar el análisis de falla, únicamente se reemplaza en la fórmula y se obtienen los resultados buscados.

Cabe aclarar, la carga de flexión máxima es equivalente físicamente a la fuerza normal máxima obtenida en el análisis estático.

---

## Objetivo del cálculo

- Determinar el esfuerzo de flexión máximo en las guías del par P del mecanismo para cualquier configuración de posición.
- Determinar el factor de seguridad de las guías al aplicar la fuerza de flexión máxima en estas.

---

## Variables del modelo de cálculo

Variable	Descripción
$F_{f_{max}}$	Fuerza de flexión máxima en la configuración de posición
$d$	Diámetro de las guías
$E$	Módulo de Young del acero plata
$I$	Segundo momento de inercia de la sección transversal de la guía
$L$	Longitud total de la guía
$M$	Momento flexor
$c$	Distancia de la fibra neutra a la fibra de interés
$\sigma_y$	Límite de fluencia del acero plata
$\sigma_b$	Esfuerzo de flexión
$\Delta_{max}$	Deflexión máxima

Cuadro 1: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Guias	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

---

### Imagen del modelo de cálculo

---

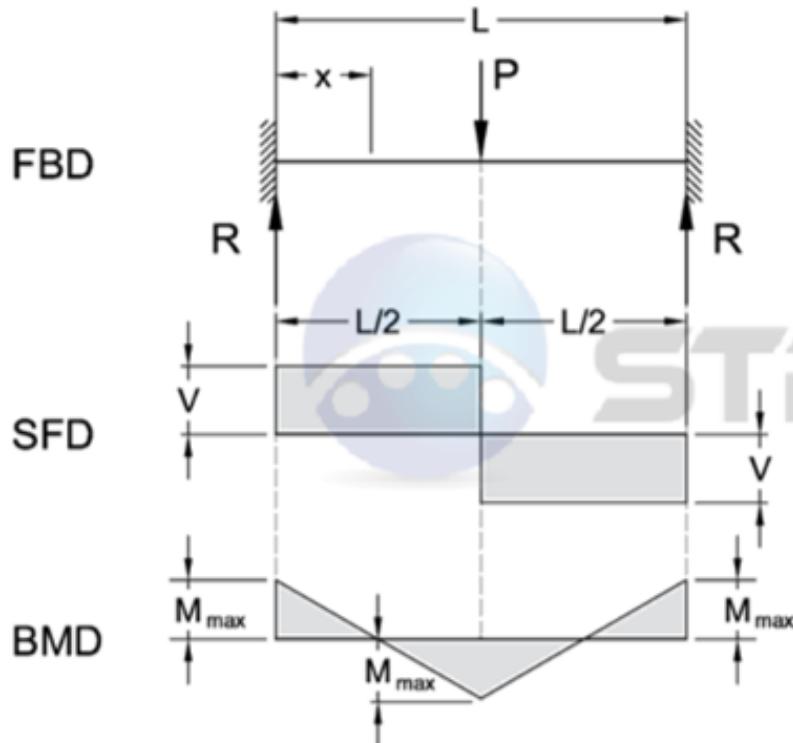


Figura 1: FBD: free body diagram. SFD: shear force diagram. BMD: bending moment diagram. Recuperado de [http://www.structx.com/BeamFormulas\\_16.html](http://www.structx.com/BeamFormulas_16.html)

---

### Valores del modelo de cálculo

---

Los valores de las variables empleadas en el modelo de cálculo se encuentran en la tabla 2.

Variable	Valor	Variable	Valor
$F_{f_{max}}$	$F_{N1} \text{ o } F_{N7}$	$d$	0.012 m
$E$	199.948 MPa	$L$	0.46 m
$\sigma_y$	580 MPa	$c$	0.006

Cuadro 2: Variables empleadas en el modelo de cálculo.

---

### Modelo de cálculo

---

Para el análisis de falla de las guías únicamente se considera el fallo por deflexión como consecuencia de la fuerza de flexión transmitida desde la corredera.

El esfuerzo de flexión se calcula con la ecuación 1.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Guias	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} \quad (1)$$

Al expresar esta fórmula en términos del diámetro se obtiene:

$$\sigma_b = \frac{32M}{\pi d^3} \quad (2)$$

Donde el momento flexor  $M$  se puede expresar en términos de la fuerza  $F_{f_{max}}$  al ser una carga puntual en la mitad de la longitud total de la guía.

$$M = \frac{F_{f_{max}} L}{8} \quad (3)$$

En este orden de ideas, el esfuerzo de flexión puede ser calculado con la siguiente ecuación:

$$\sigma_b = \frac{4F_{f_{max}} L}{\pi d^3} \quad (4)$$

De igual forma, con la ecuación 5 se puede calcular la deflexión máxima que sufren las guías al ejercerse la carga puntual  $F_{f_{max}}$ .

$$\Delta_{max} = \frac{F_{f_{max}} L^3}{192EI} \quad (5)$$

Donde el segundo momento de inercia  $I$  se calcula con la fórmula 6 y tiene un valor de  $1.0179 \times 10^{-9} m^4$ .

$$I = \frac{1}{64}\pi d^4 \quad (6)$$

## Resultados y conclusiones del modelo de cálculo

Al resolver la ecuación 4 con los valores mostrados en la tabla 2, obtenemos la siguiente expresión para el esfuerzo de flexión:

$$\sigma_b = 338941.1 F_{f_{max}} \quad (7)$$

Este esfuerzo de flexión solo lo sufre una de las dos guías por brazo de actuación en un momento dado, puesto que la fuerza normal solo se ejerce hacia un sentido, y ya que las guías están en lados opuestos, solo una recibe la carga.

Por otra parte, para determinar la deflexión máxima, al resolver la ecuación 5 se obtiene:

$$\Delta_{max} = (2.491 \times 10^{-3}) F_{f_{max}} \quad (8)$$

Por último, para hallar el factor de seguridad de las guías en esta configuración de posición, se emplea la fórmula 9.

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_b} \quad (9)$$

Se obtiene entonces que las guías presentan un factor de seguridad dado por la ecuación:

$$F.S = \frac{1711}{F_{f_{max}}} \quad (10)$$

Con base en la ecuación 10, podemos concluir que, para prevenir una falla inminente (factor de seguridad igual a 1), la fuerza de flexión ejercida sobre las guías no puede ser mayor o igual a 1711 N.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/4
<b>Cálculo</b>	Análisis de Falla de Guias	<b>Fecha</b>	16 de noviembre de 2022
<b>Calculista</b>	Alejandro Arango	<b>Revisor</b>	Santiago Arango

Como se evidencia en este resultado, las fuerzas de flexión que pueden soportar las guías de los pares P son moderadas. No obstante, considerando los resultados del análisis estático, y suponiendo que las fuerzas normales  $F_{N1}$  y  $F_{N7}$  van a ser de magnitudes reducidas en toda configuración del mecanismo, las guías nunca experimentarán fuerzas cercanas al valor crítico. Por tanto, se puede razonar que las guías no van a fallar por deflexión en ninguna configuración de posición posible dentro del área de trabajo.

# **Análisis de elementos Finitos**

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	1/5
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Pablo Andrés Martínez Cardona	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque L.

---

## Descripción

En este informe se realizará un análisis de elementos finitos con la herramienta SolidWorks, utilizando ciertas cargas estáticas con el fin de predecir las regiones críticas del elemento seleccionado, determinar si falla y proponer una solución ante esta posible falla. Se utilizaron los valores hallados en los cálculos del análisis estático presentado anteriormente, usando únicamente las reacciones de los pares R que van acoplados al chasis mediante rodamientos, que a su vez transmiten la carga al chasis en dirección transversal a este.

---

## Análisis del chasis

### Materiales y métodos

La geometría correspondiente al chasis es la siguiente:

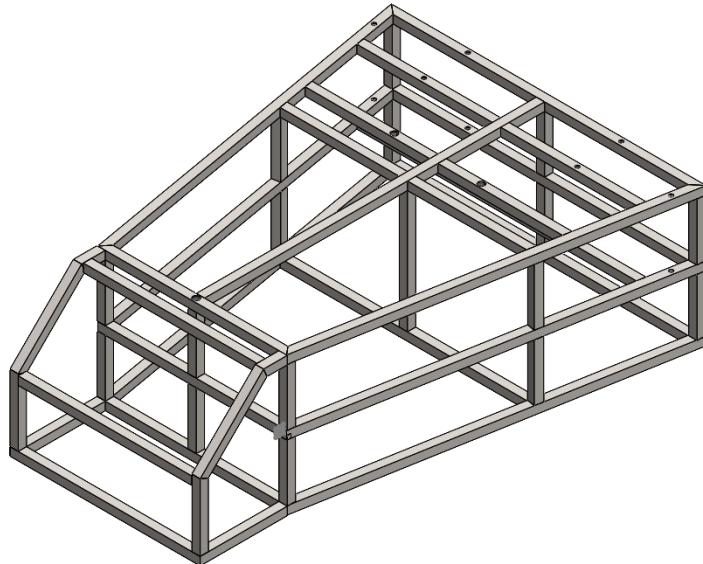


Figura 1: Geometría del chasis

El chasis se compone de 49 tramos de tubería de acero 1020 de 3/4 de pulgada y calibre 16. Cuya sección transversal corresponde a un cuadrado de 19.05mm de lado en su cara externa y un espesor de 2mm. Esta pieza fue modelada con elementos estructurales, que nos permite realizar simplemente un croquis 3D para luego crear la tubería a lo largo de este con el perfil deseado, definiendo también que las uniones son dadas mediante soldadura.

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	2/5
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Pablo Andrés Martínez Cardona	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque L.

## Constantes empleadas en el análisis

Constante	Descripción	Valor
$E$	módulo de Young	200GPa
$\nu$	coeficiente de Poisson	0.29
$\sigma_y$	límite de fluencia	351MPa
$F$	magnitud de las cargas	250N

Cuadro 1: Constantes empleadas en el análisis estático.

## Condiciones de frontera

La carga es soportada por 5 barras que están ubicadas en la parte posterior del chasis. tal como se muestra en la figura 2. Debido a las direcciones obtenidas en el análisis estático, se ubicaron las fuerzas en el sentido mostrado en la figura anteriormente mencionada. El contacto entre el chasis y la superficie inferior se definió como rígida y las fuerzas se aplicaron como cargas uniformemente distribuidas a lo largo de las 5 barras involucradas.

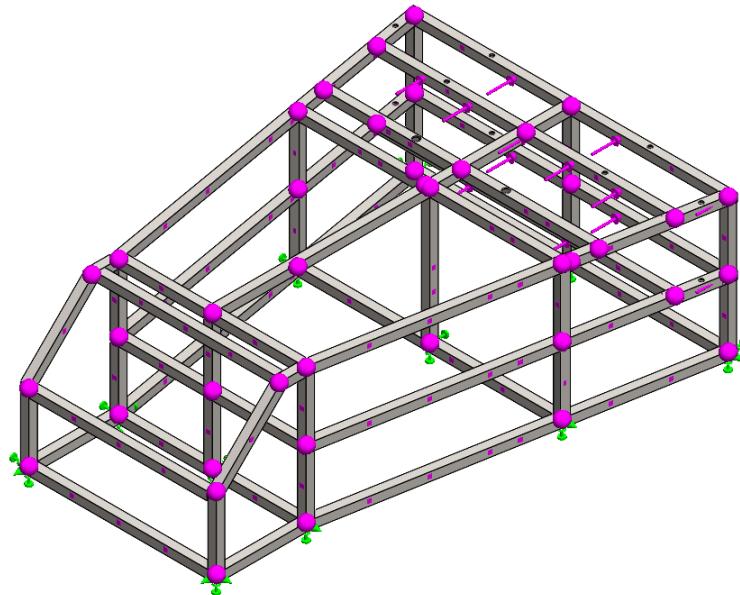


Figura 2: Cargas aplicadas y sujetos

En la figura 2 se observan en verde los elementos fijos y en morado las cargas aplicadas a las barras previamente seleccionadas.

## Detalles de la malla

En este caso, en aras de obtener un resultado tan preciso como fuese posible y dado que el estudio no consumía excesivos recursos de cómputo, se malló utilizando un tamaño de elemento fino haciendo un control de malla, que arroja entonces los siguientes resultados:

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	3/5
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Pablo Andrés Martínez Cardona	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque L.

Study name	Elementos finitos* (-Predeterminado<Como soldada>-)
DetailsMesh type	Beam Mesh
Mesh Control	Defined
Total nodes	3840
Total elements	3888
Time to complete mesh(hh:mm:ss)	00:00:07
Computer name	PABLOMARTINEZ

Figura 3: Detalles del mallado

Se debe tener en cuenta que para este estudio, el software analiza los elementos como si estos fuesen vigas, esto debido al método de modelado que fue mediante elementos estructurales. Esta malla entonces, en lugar de generar los conocidos tetraedros como elemento finito, genera discos circulares, pues asume la tubería como un cilindro y la rebana del tamaño que establezcamos el elemento finito.

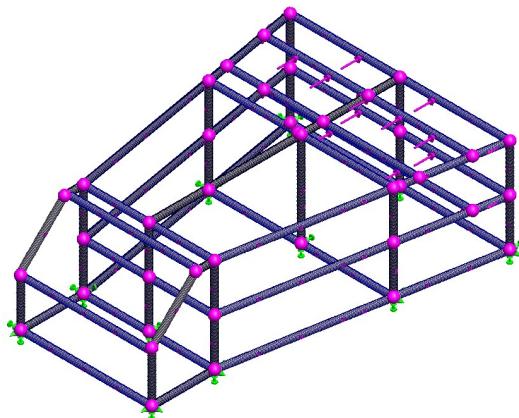


Figura 4: Malla generada

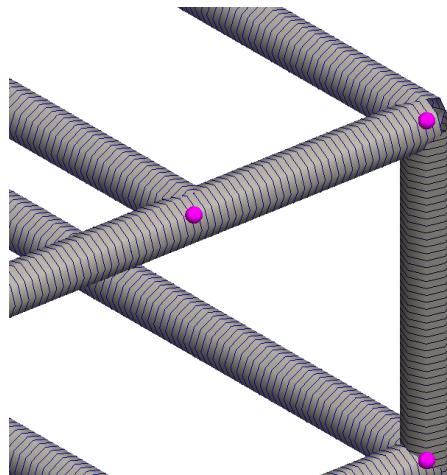


Figura 5: Malla generada en detalle

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	4/5
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Pablo Andrés Martínez Cardona	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque L.

## Método de solución

En este caso se realizó un análisis estático lineal, que utiliza el método FFEPlus para encontrar los valores de esfuerzos y deflexión en la estructura.

## Resultados y conclusiones del análisis

### Esfuerzos máximos:

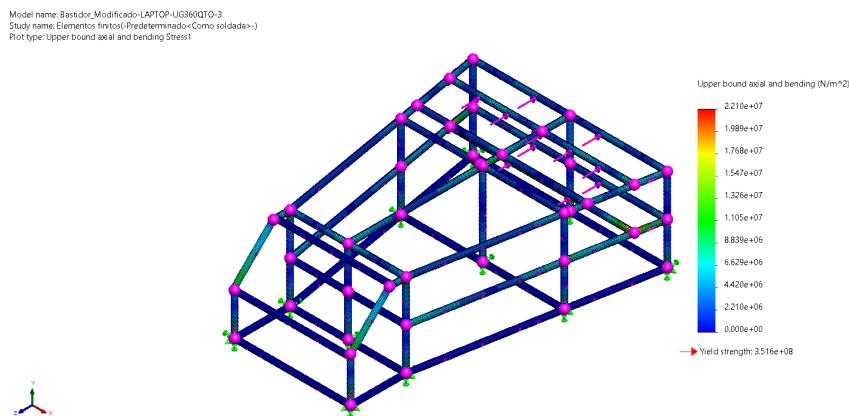


Figura 6: Esfuerzos máximos

El esfuerzo máximo presentado en la estructura es  $22.1 MPa$  como puede observarse en la Figura 6. Dado que ninguna barra supera el esfuerzo de fluencia, que es  $351 MPa$ , podemos asumir que la estructura no presenta deformación plástica en ninguna región. Por lo tanto, podemos concluir que el diseño es pertinente y puede soportar las cargas presentes.

### Desplazamiento (URES):

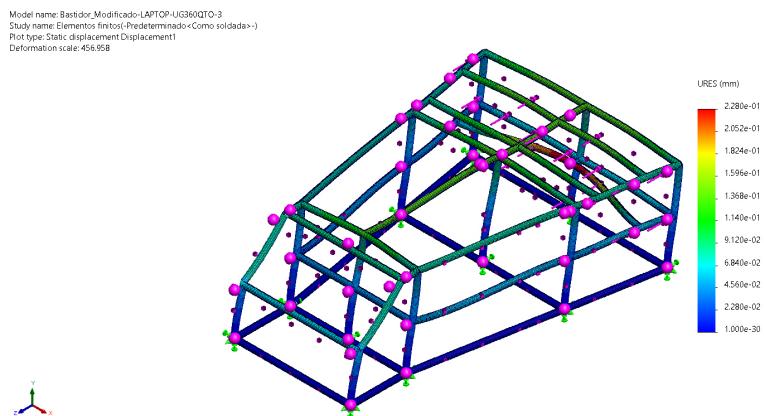


Figura 7: Desplazamientos (URES) de las barras

<b>Proyecto</b>	Ruteadora CNC - 2 GDL	<b>Página</b>	5/5
<b>Cálculo</b>	Análisis Estático	<b>Fecha</b>	12 de noviembre 2022
<b>Calculista</b>	Pablo Andrés Martínez Cardona	<b>Revisor</b>	Sebastián Duque L.

En este gráfico se observa que el máximo desplazamiento presente corresponde a 0.22mm, valor que es admisible dentro de las consideraciones de diseño del chasis. No obstante se sugiere añadir una barra a lo largo del eje z mostrado en la representación, que vaya desde la barra más deformada hasta la barra posterior del chasis. Esto con el fin de aumentar la rigidez y disminuir la deformación presente en esta barra.

#### Factor de seguridad (FOS):

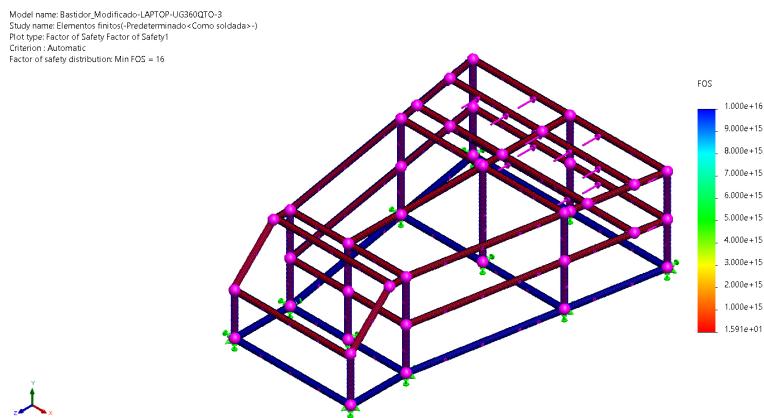


Figura 8: Factor de seguridad (FOS)

En la figura 8 se evidencia que el factor de seguridad mínimo es de 16, es decir, la estructura está considerablemente sobre dimensionada. Aunque, teniendo en cuenta que el factor de seguridad es la medida de la incertidumbre, se considera que el factor de seguridad es apropiado, porque no se verificaron las propiedades del material. Además, en la etapa constructiva se hallaron ciertas irregularidades en la sección transversal.