

Síntesis Dimensional - Taller computacional de mecanismos

Arango Giraldo, Alejandro; Hurtado López, Daniel

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, aarangoq2@eafit.edu.co

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, dhurtadol@eafit.edu.co

RESUMEN:

En esta actividad se utilizó el método de síntesis dimensional para el diseño de un mecanismo de 4 barras utilizando 3 puntos de precisión. Este mecanismo cumple con una relación de ángulos determinada, la cual toma un conjunto de tres ángulos θ de entrada para generar tres ángulos ψ de salida en la biela, lo que en otras palabras se describe como una función $\psi(\theta)$. Para obtener un mecanismo que logre este movimiento, se utiliza el software de Matlab y Excel para desarrollar un programa que, al plantearle un sistema de ecuaciones de Freudenstein obtenido por la simplificación algebraica de la ecuación de cierre vectorial, este encuentre los valores de K_1, K_2 y K_3 al resolver la operación entre matrices $Ax = b$. Una vez se tiene K_i , estas nos permiten hallar las dimensiones del mecanismo que cumpla con los requerimientos iniciales para posteriormente construir este sistema en el software de Working Model y comprobar que la función se cumpla.

PALABRAS CLAVE / KEYWORDS:

Síntesis dimensional, mecanismo 4 barras, cierre vectorial, Freudenstein, Matlab, Excel, Working Model.

1. INTRODUCCIÓN

Esta actividad fue realizada con el objetivo de diseñar un mecanismo 4 barras que diera cumplimiento a una relación de ángulos con 3 puntos de precisión haciendo uso del método de síntesis dimensional.

Este mecanismo se basa en una generación de función que relaciona un conjunto de ángulos de entrada para generar otro conjunto de ángulos de salida. Para este caso particular, únicamente se pueden asegurar 3 puntos de precisión para la función $\psi(\theta)$, donde θ es el ángulo de entrada y ψ es el ángulo de salida, más específicamente, el primero es el ángulo absoluto de la barra R_4 y el segundo es el ángulo absoluto de la biela R_3 como se muestra en la figura 1.

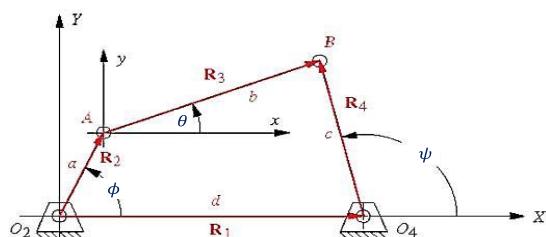


Figura 1. Mecanismo 4 barras con notación tradicional.

Como fue mencionado anteriormente, por este método solo se pueden garantizar 3 puntos de precisión, lo que se traduce a 3 ángulos $\langle\theta_1, \theta_2, \theta_3\rangle$ de entrada que generan 3 ángulos $\langle\psi_1, \psi_2, \psi_3\rangle$ de salida. Esta función se logra otorgándole a las diferentes barras $\langle R_1, R_2, R_3, R_4 \rangle$ las dimensiones $\langle a, b, c, d \rangle$ que el método de síntesis dimensional nos arroja, donde d funciona como un parámetro

arbitrario y variable, y las demás dimensiones serán múltiplos de este.

Este método es utilizado con regularidad en el proceso de generación de función para el diseño de mecanismos. Como su nombre lo indica, la síntesis dimensional trata del planteamiento de un movimiento particular que se busca el mecanismo cumpla y, a partir de esto, resolver un sistema de ecuaciones que nos permita conocer cuales dimensiones posibilitan al sistema satisfacer estas exigencias.

2. CÁLCULOS Y RESULTADOS

Para esta actividad fueron asignados una serie de requerimientos. En un principio, el mecanismo debe ser de 4 barras, lo que implica que este solo tiene 1 grado de libertad. Adicionalmente, este debe de cumplir con una relación de ángulos, donde θ es el ángulo de entrada, y ψ es el ángulo de salida, siendo ambos parámetros (ver Tabla 1). Por otra parte, el ángulo ϕ y la dimensión d son variables, mientras que las dimensiones a, b y c son incógnitas. Para tener una mayor comprensión de estos elementos, la figura 1 muestra a que corresponde cada uno de estos en el mecanismo.

Tabla 1. Relaciones de ángulos de entrada θ y salida ψ .

θ [deg]	ψ [deg]
0	30
20	110
5	130

En otro orden de ideas, para poder realizar la síntesis dimensional, se debe inicialmente plantear la ecuación de cierre vectorial la cual surge de la disposición de los vectores correspondientes a cada barra, como se puede observar en la figura 1. Con base a este arreglo, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\overline{R_2} + \overline{R_3} - \overline{R_4} - \overline{R_1} = 0 \quad (1)$$

Al expresar estos vectores en sus dos componentes obtenemos las siguientes expresiones:

$$a \cos \phi + b \cos \theta a \cos \phi + b \cos \theta - c \cos \psi - d = 0 \quad (2)$$

$$a \sin \phi + b \sin \theta - c \sin \psi = 0 \quad (3)$$

Al realizar diversas operaciones en ambas ecuaciones, se obtiene una ecuación que se podrá emplear en la concepción del sistema de ecuaciones que permitirán realizar la síntesis para la generación de función. En el caso de la función $\psi(\theta)$, se llega a la ecuación de Freudenstein:

$$K_1 \cos \psi - K_2 \cos \theta + K_3 = \cos(\theta - \psi) \quad (4)$$

Donde:

$$K_1 = \frac{d}{b} \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{d}{c} \quad (6)$$

$$K_3 = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - a^2}{2bc} \quad (7)$$

En base a la ecuación (4) se puede plantear un sistema de ecuaciones 3x3 como se muestra a continuación:

$$K_1 \cos \psi_1 - K_2 \cos \theta_1 + K_3 = \cos(\theta_1 - \psi_1)$$

$$K_1 \cos \psi_2 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \psi_2)$$

$$K_1 \cos \psi_3 - K_2 \cos \theta_3 + K_3 = \cos(\theta_3 - \psi_3)$$

Y así construir un sistema matricial del tipo $Ax = b$ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\cos \theta_1 & 1 \\ \cos \psi_2 & -\cos \theta_2 & 1 \\ \cos \psi_3 & -\cos \theta_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 - \psi_1) \\ \cos(\theta_2 - \psi_2) \\ \cos(\theta_3 - \psi_3) \end{bmatrix}$$

Donde A es la primera matriz, x es el vector K_i , y b es el vector de soluciones. Una vez con este sistema de matrices, se reemplazan los valores de ψ_1, ψ_2, ψ_3 y $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, y se resuelve para x usando la expresión:

$$x = A^{-1} \times b \quad (8)$$

Empleando este método de síntesis dimensional y haciendo uso de los programas desarrollados en Excel y Matlab, podemos

obtener los valores de K_1 , K_2 y K_3 (ver Tabla 2).

K_1	K_2	K_3
0.966752	5.005281	5.034075

Tabla 2. Valores de K obtenidos por el método de síntesis dimensional.

Con los valores de K podemos retomar las ecuaciones (5), (6) y (7) y despejar las incógnitas a , b y c , las cuales representan las longitudes de las barras R_2 , R_3 y R_4 . Es importante reiterar que d es variable y arbitraria, usualmente en estos cálculos se usa $d = 1$ para hallar las incógnitas, no obstante, en este caso se usó una $d = 10$. En este orden de ideas, al despejar las incógnitas se obtiene que:

$$b = \frac{d}{K_1} \quad (9)$$

$$c = \frac{d}{K_2} \quad (10)$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 - 2bcK_3} \quad (11)$$

Y al resolver cada una de estas se llega a las dimensiones que deben tener las barras a , b y c para cumplir con la función de ángulos requerida cuando tierra tiene una dimensión de 10 metros ($d = 10$) (ver Tabla 3).

a [m]	b [m]	c [m]
1.708728038	10.34391129	1.997889664

Tabla 3. Valores de a , b y c obtenidos por el método de síntesis dimensional.

3. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El objetivo general de esta actividad puede ser enmarcado en la generación de función de un mecanismo 4 barras a partir de una relación de ángulos de entrada y salida. El uso de los programas de Excel y Matlab facilitaron la identificación de las dimensiones necesarias para que el mecanismo realice el movimiento demandado. Estas dimensiones deben ser formalizadas por medio de la creación de un modelo en Working Model que

satisfaga estos criterios, el cual tiene el motor ubicado en el punto O_2 .

En este orden de ideas, el desarrollo de la actividad fue exitoso puesto que se logró cumplir con la relación de ángulos en el modelo.

Analizando el mecanismo, encontramos que este cumple con cada una de las relaciones de ángulos como se muestra en las figuras 2, 3 y 4, donde “Rectangle 3” es la barra azul y “Rectangle 4” es la barra roja.

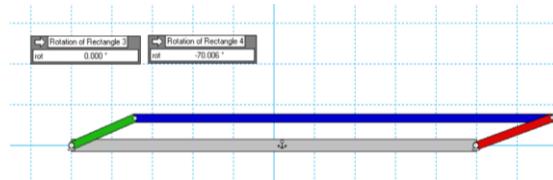


Figura 2. Modelo Working Model con relación de ángulos $\theta_1 = 0^\circ$ y $\psi_1 = 30^\circ$.

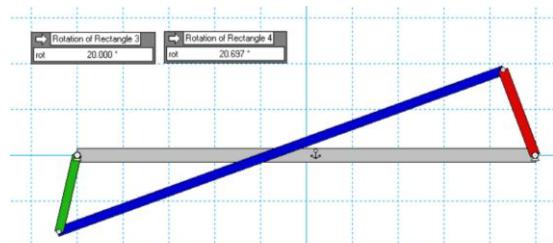


Figura 3. Modelo Working Model con relación de ángulos $\theta_2 = 20^\circ$ y $\psi_2 = 110^\circ$.

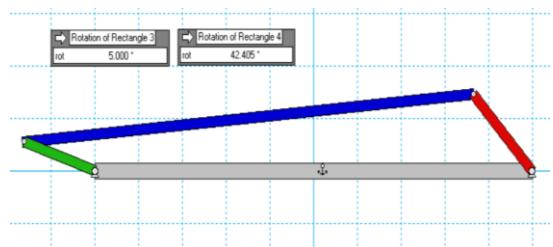


Figura 4. Modelo Working Model con relación de ángulos $\theta_3 = 5^\circ$ y $\psi_3 = 130^\circ$.

Con base a las figuras, podemos notar que el ángulo ψ está definido en el modelo de tal forma que un ángulo absoluto de 90° es igual a un angulo de 0° . En base a esto, podemos hacer una relación y notar que los ángulos absolutos de 30° , 110° y 130° son iguales a

los ángulos de -70° , 20° y 40° en el modelo respectivamente.

Por otra parte, es interesante remarcar que las relaciones $\theta_1 = 0^\circ$ y $\psi_1 = 30^\circ$, y $\theta_3 = 5^\circ$ y $\psi_3 = 130^\circ$ se logran con una solución abierta, mientras que para la relación $\theta_2 = 20^\circ$ y $\psi_2 = 110^\circ$, se logra con una solución cruzada.

Adicionalmente, otro elemento a señalar es el hecho de que este mecanismo, aunque cumple con la 1ra inversión de la ley de Grashof, la barra R_2 de menor longitud, no gira 360° como debería ocurrir según la ley (ver Figura 5).

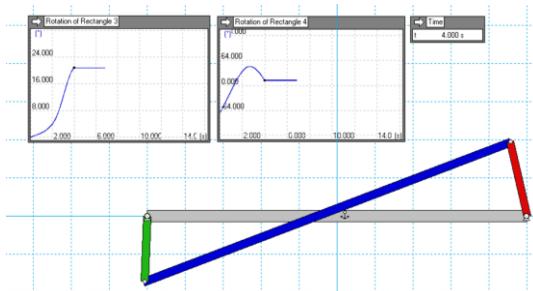


Figura 5. Modelo Working Model al segundo 4.

Como se puede observar, al llegar al segundo 4, la barra R_2 (verde) es incapaz de seguir rotando, impidiendo así que el mecanismo continue moviéndose. Como se mencionó anteriormente, el 4 barras cumple con la ley de Grashof puesto que satisface la expresión:

$$s + l > p + q \quad (12)$$

Donde s es la barra más corta (R_2), l es la barra más larga (R_3), y p y q son las otras dos barras (R_1 y R_4). Al realizar esta desigualdad nos encontramos con que $12.05263933 > 11.99788966$, no obstante, el mecanismo se traba cuando $\theta_1 = 20.715^\circ$ y $\psi_1 = 102.878^\circ$.

Esto se puede deber a dos razones. Por una parte, Working Model solo trabaja con 3 decimales correctos, lo que les quita exactitud a las dimensiones de las barras en el modelo. Por otra parte, como se puede observar al

realizar la desigualdad, los dos valores son relativamente iguales, y ya que la ley de Grashof solo se cumple cuando la suma de la barra larga y corta es estrictamente mayor a la suma de las otras dos barras, esta se estaría incumpliendo.

Tomando en cuenta ambos aspectos, podemos afirmar que este comportamiento es completamente normal y se encuentra dentro de lo esperado. Igualmente, es importante recalcar que hay dos posibles soluciones para este problema, una con una configuración abierta, y otra con una cerrada. Por lo tanto, el punto en el que deja de rotar la barra corta es lo máximo que puede rotar el mecanismo al estar abierto. Cuando se llega a este punto, se requiere de una intervención para ubicar el 4 barras en su configuración cruzada, y así R_2 puede continuar rotando.

4. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis realizado se puede concluir que el método de síntesis dimensional es una herramienta fundamental para el diseño y concepción de mecanismos para generación de función. Esta práctica facilita en gran medida el cálculo de las dimensiones necesarias para que un mecanismo realice un movimiento determinado, el cual puede variar en cada ámbito de la industria.

Este tipo de síntesis permite tomar un sistema de ecuaciones que surge de la ecuación de cierre vectorial y obtener las dimensiones para cada una de las barras que componen el modelo, sin incluir la dimensión de la tierra. Esta última, como se mencionó en el informe, se suele asociar a $d = 1$, una práctica que optimiza el proceso de identificación de las demás medidas, pues los valores que se obtengan en la resolución de las matrices serán con respecto a la dimensión de la tierra. Si se requiere aumentar el tamaño del mecanismo, solo se multiplica cada dimensión por el valor de d .

Finalmente, también pudimos reconocer la importancia de la precisión en las medidas y los límites que puede presentar la ley de Grashof cuando los valores solo difieren por milésimas. En el modelo, estos dos factores fueron de gran relevancia para identificar por qué, aunque el mecanismo cumplía con la ley, la barra corta era incapaz de hacer una rotación completa como lo indicaba la 1ra inversión.