

## Análisis Numérico - Taller computacional de mecanismos

Arango Giraldo, Alejandro; Hurtado López, Daniel

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, [aarangog2@eafit.edu.co](mailto:aarangog2@eafit.edu.co)

Ingeniería mecánica, Universidad Eafit, Medellín, Colombia, [dhurtadol@eafit.edu.co](mailto:dhurtadol@eafit.edu.co)

### RESUMEN:

En esta actividad se utilizó el método de análisis numérico de posición para el diseño de un mecanismo de 4 barras de tipo manivela-corredera. Este mecanismo cumple con una relación entre un ángulo de entrada  $\phi$  y el desplazamiento de la corredera  $d$ , lo que en otras palabras se describe como una función  $d(\phi)$ . Para realizar este análisis, se utiliza el software de Matlab y Excel, en los cuales se desarrolla un programa en el cual se otorga la ecuación de restricción cinemática  $\Phi(q_i)$ , obtenido de las ecuaciones de cierre vectorial, el vector  $q_i$ , el cual contiene las variables incógnitas, la matriz jacobiana  $J(q_i)$ , y una serie de parámetros necesarios para resolver las matrices. A partir de estos componentes y la formula  $q_{i+1} = -[J(q_i)]^{-1}\Phi(q_i) + q_i$ , el programa encuentra  $q_{i+1}$ , lo que nos permite graficar el movimiento de la corredera y su posición dado diferentes ángulos de entrada, para posteriormente ser comprobado en Working Model.

### PALABRAS CLAVE / KEYWORDS:

Análisis de posición, mecanismo 4 barras, mecanismo manivela-corredera, cierre vectorial, Jacobiano, Matlab, Excel, Working Model.

### 1. INTRODUCCIÓN

Esta actividad fue realizada con el objetivo de analizar el movimiento de un mecanismo 4 barras de tipo manivela-corredera, que diera cumplimiento con una relación entre un ángulo de entrada y el desplazamiento de la corredera a lo largo del eje de traslación, todo esto empleando el método de análisis numérico de posición.

Este mecanismo se basa en una generación de función que relaciona un ángulo de entrada para producir un desplazamiento axial de la corredera, tomando como parámetro diferentes dimensiones y ángulos. Para este caso particular, tenemos como parámetros las dimensiones  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  y los ángulos  $\psi$  y  $\phi$  (ángulo de tierra), mientras que las variables incógnitas son la distancia  $R_1$  y los

ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , donde  $\phi$  es el ángulo de entrada y  $d$  es la distancia que se desplaza la corredera como se puede observar en la figura 1.

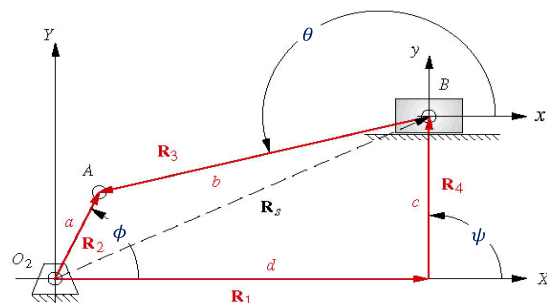


Figura 1. Mecanismo 4 barras manivela-corredera con notación tradicional.

No obstante, ya que la ecuación de restricción cinemática únicamente otorga dos ecuaciones, no se pueden tener tres incógnitas pues el problema sería irresoluble.

Por tal razón, se define constante el GDL (grado de libertad) para así solucionar la posición en un valor dado de este. En este caso, el GDL es el ángulo  $\phi$ , por lo tanto, a este se le asignarán valores de los cuales obtendremos la solución para  $R_1$  y  $\theta$ .

Este método es utilizado con regularidad en el proceso de análisis de posición de componentes de mecanismos como bielas o correderas. Como su nombre lo indica, el análisis de posición trata del estudio de un movimiento particular ejecutado por un componente del mecanismo, a partir de esto, resolver una ecuación que nos permita conocer la posición específica de un punto dado cierto ángulo inicial.

## 2. CÁLCULOS Y RESULTADOS

Para esta actividad fueron asignados una serie de requerimientos. En un principio, el mecanismo debe ser de 4 barras tipo manivela-corredera, lo que implica que este solo tiene 1 grado de libertad. Adicionalmente, este debe de cumplir con una relación entre un ángulo de entrada y la distancia horizontal que se desplaza la corredera, donde  $\phi$  es el ángulo de entrada,  $d$  es el desplazamiento de la corredera, y  $\theta$  el ángulo absoluto de  $R_3$ , siendo las tres variables incógnitas. No obstante, como fue mencionado anteriormente, se toma el ángulo  $\phi$  como el GDL, volviéndolo así un parámetro más (ver Tabla 1). Por lo tanto, el ángulo  $\theta$  y la dimensión  $d$  son variables, mientras que las dimensiones  $a, b$  y  $c$  ( $R_2, R_3$  y  $R_4$  respectivamente), al igual que los ángulos  $\phi$  y  $\varphi$  son parámetros. Para tener una mayor comprensión de estos elementos, la figura 1 muestra a que corresponde cada uno de estos en el mecanismo.

Tabla 1. Parámetros y variables incógnitas del problema.

<i>Variables incógnitas</i>	<i>Parámetros</i>
$\theta$ y $d$	$a, b, c, \phi, \psi$ , y $\varphi$

En otro orden de ideas, para poder realizar el análisis de posición, se debe inicialmente plantear la ecuación de cierre vectorial la cual surge de la disposición de los vectores correspondientes a cada barra, como se puede observar en la figura 1. Con base a este arreglo, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\overline{R_2} - \overline{R_3} - \overline{R_4} - \overline{R_1} = 0 \quad (1)$$

Al expresar estos vectores en sus dos componentes, obtenemos las siguientes expresiones:

$$a \cos \phi - b \cos \theta - c \cos \psi - d \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$a \sin \phi - b \sin \theta - c \sin \psi - d \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Con base a las dos ecuaciones anteriores, se puede plantear la ecuación de restricción cinemática, la cual está dada por la matriz:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi & a \cos \phi & -b \cos \theta & -c \cos \psi \\ -d \sin \varphi & a \sin \phi & -b \sin \theta & -c \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De igual forma, podemos definir el vector correspondiente a las constantes y el vector  $q$  correspondiente a las variables incógnitas de la siguiente forma:

$$constantes = [a \quad b \quad c \quad \phi \quad \psi \quad \varphi]^T$$

$$q = \begin{bmatrix} d \\ \theta \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz jacobiana, también llamada gradiente, se puede obtener derivando la ecuación de restricción cinemática respecto a las variables incógnitas como se muestra a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & b \sin \theta \\ -\sin \varphi & -b \cos \theta \end{bmatrix}$$

Una vez se tienen estas matrices y vectores, se procede a utilizar el método de Newton-Raphson dado por la formula  $q_{i+1} = -[J(q_i)]^{-1} \Phi(q_i) + q_i$ , y así hallar la posición de la corredera por medio de un método iterativo que nos da  $q_{i+1}$  para diferentes ángulos de entrada  $\phi$  asignados inicialmente.

Tomando las dimensiones y ángulos utilizados en el código de Matlab (ver Tabla 2), se diseña

un modelo en Working Model que nos permita confirmar los resultados obtenidos (ver Figura 2).

Tabla 2. Parámetros y variables incógnitas del problema.

Párametro	Valor
$a$	$3\text{ m}$
$b$	$6\text{ m}$
$c$	$2.5\text{ m}$
$\psi$	$\frac{\pi}{2}\text{ rad}$
$\varphi$	$0\text{ rad}$

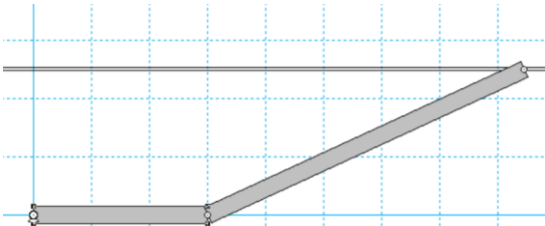


Figura 2. Modelo de Working Model de mecanismo 4 barras manivela-corredera.

Como se puede observar, el mecanismo se compone de un actuador (motor de  $1\text{ rad/s}$ ) ubicado en el que vendría siendo el punto  $O_2$ , y una corredera (el punto extremo de la barra de  $6\text{ m}$ ), la cual es nuestro foco de interés para determinar su posición.

Una vez con los códigos y el mecanismo de Working Model, podemos obtener la gráfica que indica la posición de la corredera. En el código de Matlab, esta se obtiene dándole valores al ángulo de entrada  $\phi$  desde  $0$  a  $2\pi$  radianes, con una diferencia de  $0.1$  radianes entre cada valor, e indicando un valor semilla para el vector  $q$ . En el caso del programa de Excel, este realiza las iteraciones individualmente, calculando las variables incógnitas una a una usando el Jacobiano, y el vector  $q$ , el cual se va actualizando con cada iteración. Finalmente, por parte del software de Working Model, este se encarga de crear la gráfica como parte de las opciones que ofrece el programa.

### 3. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El objetivo general de esta actividad puede ser enmarcado en el análisis de posición de un mecanismo 4 barras manivela-corredera a partir de una relación entre un ángulo de entrada y un desplazamiento horizontal de la corredera. El uso de los programas de Excel y Matlab facilitaron la identificación de la posición de la corredera al plantear una serie de ángulos de entrada producidos por el actuador en el punto del GDL. Este mecanismo debe ser formalizado por medio de la creación de un modelo en Working Model que satisfaga estos criterios, el cual tiene el motor ubicado en el punto  $O_2$ .

En este orden de ideas, el desarrollo de la actividad fue exitoso puesto que se logró obtener el mismo movimiento que arroja Working Model en nuestro programa de Matlab y Excel.

Analizando el mecanismo, encontramos que la gráfica de posición de Working Model y Matlab coinciden completamente como se muestra en la figura 3 y 4.

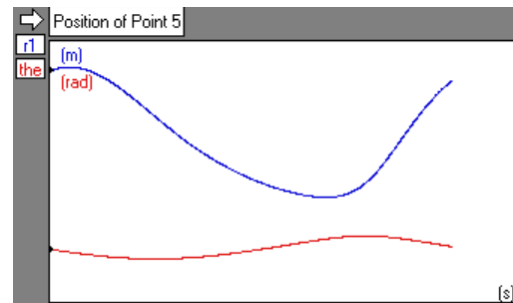


Figura 3. Gráfica de posición de la corredera en Working Model, donde la curva roja representa el ángulo  $\theta$ , y la azul representa  $d$ .

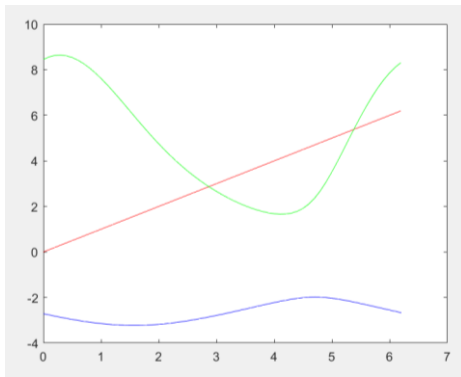


Figura 4. Gráfica de posición de la corredora en Matlab, donde la curva azul representa el ángulo  $\theta$ , y la verde representa  $d$ .

La gráfica de posición del modelo de Working Model la crea el propio programa, pero en el caso del código de Matlab, se asigna un valor semilla para  $d$  y  $\theta$ , los cuales componen el vector  $q$ . Estos se toman del modelo de Working Model, obteniendo así el vector  $q = \begin{bmatrix} 8.4 \\ -2.7 \end{bmatrix}$ .

Como se observa en ambas gráficas, estas son iguales, lo que significa que el código y sus componentes son correctos y, por consiguiente, los valores que este arroje serán acertados. Si se hace una comparación punto a punto, se puede verificar la certeza de la grafica arrojada por el código de Matlab, brindando los mismos valores que ofrece Working Model.

Para el código de Excel, se realizaron 6 iteraciones para cada aumento de  $12^\circ$  en  $\phi$ , y así obtener los valores de  $\theta$  y  $d$  en cada una de estas posiciones. Al tabular estos resultados, se obtuvieron las siguientes graficas (ver Figuras 5 y 6):

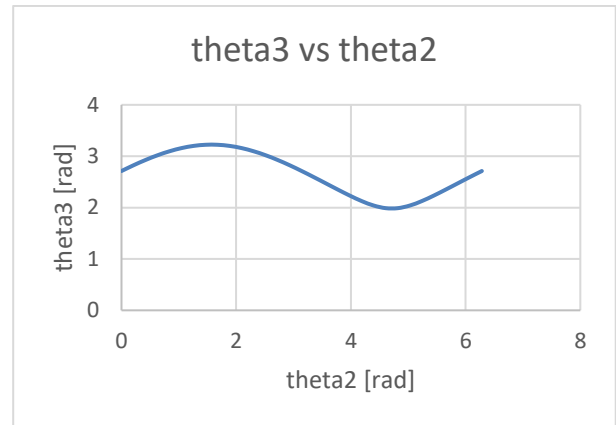


Figura 5. Gráfica de  $\theta_3$  vs  $\theta_2$  ( $\theta$  vs  $\phi$ ) de la corredora en Excel.

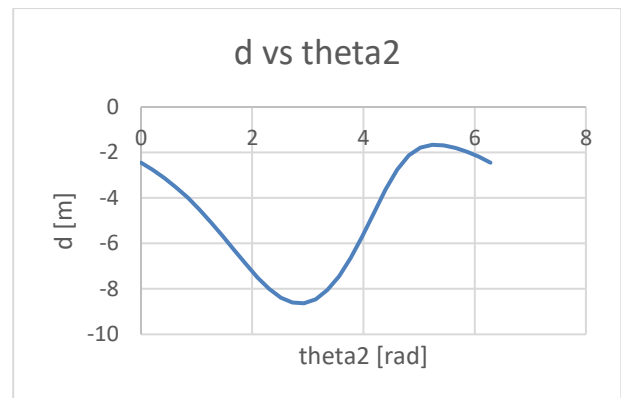


Figura 6. Gráfica de  $d$  vs  $\theta_2$  ( $d$  vs  $\phi$ ) de la corredora en Excel.

Con base a estas gráficas podemos notar que hay unas cuantas incongruencias con respecto a las arrojadas por Working Model y Matlab, y es que, aunque tienen la misma forma y escala, los valores de los resultados en el Excel tienen signos opuestos a los obtenidos en los otros programas. Igualmente, la gráfica  $\theta$  vs  $\phi$  de Excel comienza en una parte diferente del ciclo de movimiento, por lo que se muestra que su máximo es el primero en llegar, lo opuesto a lo que se muestra en las otras gráficas, donde el mínimo es el primer punto de interés en mostrarse. No obstante, aunque se presenten estas diferencias, no es un problema de gran relevancia pues, independiente de ellos, los resultados arrojados por el Excel denotan perfectamente el movimiento descrito por la corredora, y a partir de estas gráficas

individuales se puede identificar la posición de esta.

#### 4. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis realizado se puede concluir que el método de análisis de posición es una herramienta fundamental para el estudio del movimiento de mecanismos que generan función. Esta práctica facilita en gran medida el cálculo de las diferentes posiciones que asume un componente del mecanismo dada una variación en el grado de libertad, ya sea en ángulo o distancia.

Este tipo de análisis permite tomar una ecuación de restricción cinemática, que surge de la ecuación de cierre vectorial, y obtener el posicionamiento de cualquiera de los componentes del mecanismo. Al establecer el grado de libertad, a este se le asignan valores que nos permiten conocer cómo se comporta un punto a medida que el GDL asume los valores otorgados. Este método resulta de gran importancia en diferentes ámbitos de la industria, siendo uno de los más comunes las líneas industriales automatizadas, donde es fundamental conocer la posición de diversos puntos de interés para que el proceso se lleve de manera fluida y sin fallos.

Finalmente, también pudimos reconocer la importancia de la doble verificación de la configuración de los mecanismos usando los códigos y Working Model, puesto que, en este caso, los parámetros eran entregados sin ninguna certeza de que el mecanismo fuera a funcionar. Por tal razón, en el inicio las constantes dadas no permitían un movimiento continuo del mecanismo, e incluso, al comprobar en Working Model, estas dimensiones impedían que la barra  $R_2$  rotara los  $360^\circ$ . El uso simultáneo de los códigos y Working Model nos facilitó la comprobación de la viabilidad del mecanismo para finalmente concebir uno que cumpliera con los requerimientos.