Домашняя работа по курсу «Теория риска и стохастическая финансовая математика»

Артемий Сазонов

17 декабря 2022 г.

ДЗ 8

Виды и механизмы перестрахования. Пропорциональное перестрахование, квотный договор. Уравновешенность договора, экономические и финансовые условия

Задача 1.

Нарисовать кривую Лоренца для распределения Парето с $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Решение

Найдем квантильную функцию распределения F:

$$y = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha} \;\Rightarrow\; x = \sigma(1-y)^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{8.1}$$

$$\int_0^u \sigma(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}} dt = \int_{1-u}^1 \sigma s^{-\frac{1}{\alpha}} ds = \sigma \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right). \tag{8.2}$$

Следовательно

$$L_X(u) = 1-(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \tag{8.3}$$

См Рис 8.1.

Задача 2.

Проверить, что если $X \prec_{Lor} Y$, то $CV(X) \leq CV(Y)$. Верно ли обратное утверждение?

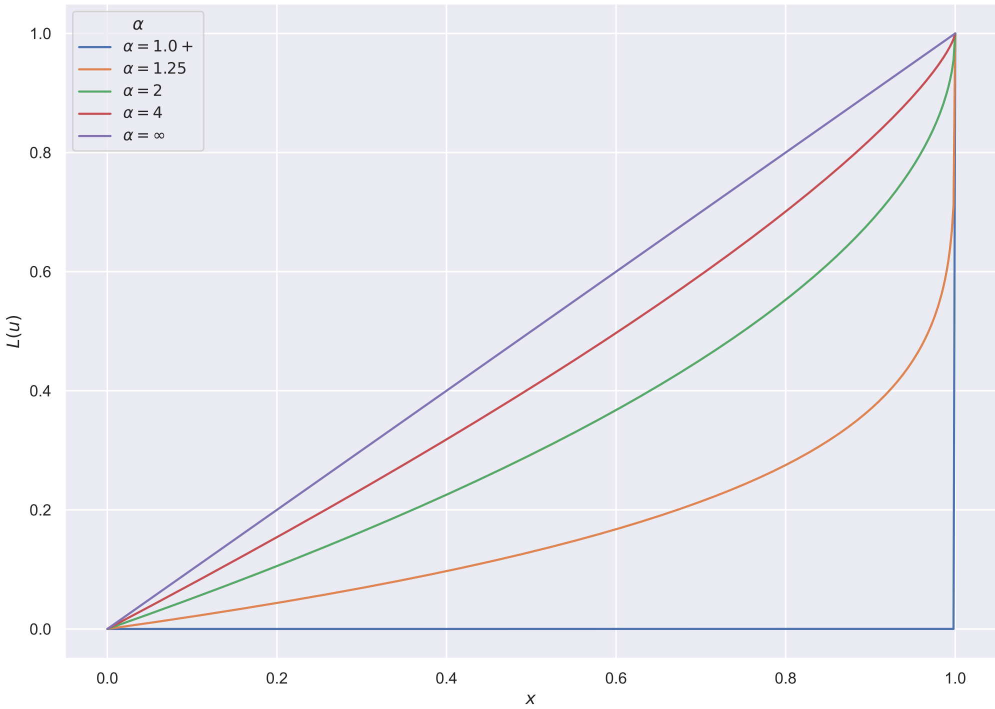

Рис. 8.1: Кривая Лоренца для распределения Парето с разными параметрами

Решение

$$X \prec_{Lor} Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \frac{X}{\mathbb{E}[X]} <_{cx} \frac{Y}{\mathbb{E}[Y]}$$

Имеем:

$$\mathbb{E}[X^2]/(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]/(\mathbb{E}[Y])^2, \tag{8.4}$$
$$(\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2)/(\mathbb{E}[X])^2 \leq (\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2)/(\mathbb{E}[Y])^2. \tag{8.5}$$

Взяв sqrt от обеих частей получаем требуемое утверждение. Чтобы показать, что обратное неверно, возьмем вот что $X : \mathbb{P}(X = 0) = 2/3, \mathbb{P}(X = 3) = 1/3$ и $Y \sim Exp(1)$. Тогда $\sqrt{2} = CV(X) > CV(Y) = 1$. Но $\mathbb{E}(X-3)^+ = 0 < \mathbb{E}(Y-3)^+ = e^{-3}$. Значит, либо $X <_{cx} Y$ либо X и Y - несравнимы.

Задача 3.

Пусть X и Z - независимые случайные величины, $X \sim \Gamma(1, \lambda^{-1})$, $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. Проверить, что $Y = X/Z$ имеет распределение Парето с функцией распределения $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Решение

$$\iint_{x/y\le t} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_{x/y\le t} f_X(x)f_Y(y)dxdy =$$
$$= [x/y=u, x=v] = \int_{u\le t}\int_{v\in\mathbb{R}} f_X(v)f_Y(v/u)\frac{|v|}{u^2}dvdu =$$
$$= \int_{0\le u\le t}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{v/\lambda}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha-1}e^{-v/u}\frac{v}{u^2}dvdu =$$
$$= \int_{0\le u\le t}\frac{1}{\Gamma(\alpha)u^{\alpha+1}\lambda}\int_0^{+\infty} v^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{u}\right)v\right\}dvdu =$$
$$= \int_{0\le u\le t}\frac{(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{u})^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha)u^{\alpha+1}\lambda}\int_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s\right)dsdu =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_{0\le u\le t}\left(\frac{u}{\lambda}+1\right)^{-\alpha-1}du = \alpha\int_1^{1+t/\lambda} s^{-\alpha-1}ds =$$
$$= 1-(1+t/\lambda)^{-\alpha}.$$

Задача 4.

Показать, что $X <_{st} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(1,2)$, где $U(a,b)$ - равномерное распределение на (a,b).)

Решение

$X^* = X/\mathbb{E}[X] = X, Y^* = Y/\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3}Y$. Для любого t $F_X(t) \ge F_Y(t) \iff X <_{st} Y$. Однако, $\frac{2}{3}Y \sim U(2/3,4/3)$ и $\mathbb{E}[(X^*-4/3)^+] = 1/3 > \mathbb{E}[(Y^*-4/3)^+] = 0$. Следовательно, X^* и Y^* либо несравнимы, либо $Y^* <_{sl} X^*$. Помним, что $Y^* <_{sl} X^* \Leftrightarrow Y <_k X_k$.

Задача 5.

Показать, что $X <_k Y \not\Rightarrow X <_{st} Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$, где $Exp(a)$ - показательное распределение с параметром a.)

Решение

$X^* = X/\mathbb{E}X = X,\ Y^* = Y/\mathbb{E}Y = 2Y \sim X \Rightarrow X^* <_{sl} Y^*$, но $\bar{F}_Y(x) = e^{-2x} < e^{-x} = \bar{F}_X(x),\ x \ge 0 \Rightarrow Y <_{st} X$.

Задача 6.

Проверить, что гамма-распределение с $\alpha \ge 1$ и равномерное имеют тип IFR.

Решение

(a) Случай гамма распределения. Для простоты будем рассматривать $1/\lambda(x)$. Необходимо показать, что $1/\lambda(x)$ - убывает по x.

$$1/\lambda(x) = \left(\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{-1} \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} dt = \\ = [t - x = u, dt = du] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{x} + 1\right)^{\alpha-1} e^{-\beta u} du \quad (8.6)$$

не возрастает по x при $\alpha \geq 1$.

(b) Случай равномерного распределения $U(a, b)$.

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{b-a}}{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \frac{1}{b-x}, \quad (8.7)$$

Это выражение возрастает по x.

Задача 7.

Показать, что если $X_i <_{mor} Y_i$, $i \geq 1$, то $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

Решение

Напомним, что $F_{\min_i X_i}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. Действительно, $\mathbb{P}(\min_i X_i < x)$ означает, что хотя бы 1 из X_i меньше либо равен x. Это тоже самое, что

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x, X_{(k+1)} > x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F^k(x)(1 - F(x))^{n-k} = 1 - (1 - F(x))^n. \quad (8.8)$$

Отсюда, поскольку $\frac{1-F_X(x)}{1-F_Y(x)}$ убывает по x, то

$$\frac{1 - F_{\min_i X_i}(x)}{1 - F_{\min_i Y_i}(x)} = \left(\frac{1 - F_X(x)}{1 - F_Y(x)}\right)^n \quad (8.9)$$

убывает по x и, следовательно, $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

ДЗ 9

Непропорциональное страхование. Экцедент убытка по риску/катастрофе. Финансовые и экономические условия.

Задача 1.

Рассматривается договор эксцедента убытка по риску XL: $5\,xs\,2$. Предполагается, что возможны 4 возобновления. Добавочные премии за возобновление полосы: 25%, 50%, 100%, 200%. Произошло 8 убытков, их размеры: 5, 10, 7, 4, 6, 8, 3, 9. Первоначальная премия равна 4. Подсчитать размер добавочных премий. Все размеры в млн.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min\{5, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $L = 5 \cdot (4+1) = 25$ – максимальное значение гарантий перестраховщика, $Y = \sum_{i=1}^{8} Y_i$ – суммарные выплаты по обязательствам перестраховщика.

i	X_i	Y_i	Y	XL	добавочная премия
1	3	3	3	3	0.6
2	10	5	8	5	1.6
3	7	5	13	5	3.2
4	4	2	15	2	1.6
5	6	4	19	4	6.4
6	8	5	24	5	1.6
7	3	1	25	1	—
8	9	5	30	—	—

Добавочные премии закончились на 7-м убытке, т.к. мы достигли максимальных гарантий перестраховщика.

Задача 2.

Подсчитать, чему равна премия по договору $3\,xs\,2$ (млн.), если размеры последовательных убытков равнялись 3, 3.4, 3.2, 4.8, 4.4, 7. Предполагается, что применяется скользящая ставка премии от 2% до 5% (при коэффициенте надбавки $100/80$ убытков на гарантии перестраховщика, уже оплаченных или еще не урегулированных). Премия прямого страховщика равна $200 \cdot 10^6$.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min\{3, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $Y = \sum_{i=1}^{6} Y_i = 11.8$.

$$r = \min\{\underbrace{r_{\max}}_{5\%}, \underbrace{\max\{\underbrace{r_{\min}}_{2\%}, \underbrace{\frac{dY}{A}}_{=\frac{100\times 11.8}{8\times 200}=73.75\%}\}}_{73.75\%}\} = 5\%. \tag{9.1}$$

Итого, $P = rA = .05 \times 200 = 10$.

ДЗ 10

Оптимальное перестрахование. Порядки рационального перестраховщика, эксцедента богатства и рассеивания.

Задача 1.

Решение

- Пусть $X \sim U[0, 2b]$. Тогда

$$\pi_\rho(X) = \int_0^{2b} (1 - t/(2b))^{\frac{1}{\rho}} dt =$$
$$= [1 - t/(2b) = y, -2bdy = dt] = 2b \int_0^1 y^{\frac{1}{\rho}} dy = 2b \frac{1}{\frac{1}{\rho} + 1} = \frac{2b\rho}{1 + \rho}. \quad (10.1)$$

  Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1.2}(X) = \frac{2.4b}{2.2} = 1.1b$, $\pi_{1.5}(X) = \frac{3b}{2.5} = 1.2b$, $\pi_{1.8}(X) = \frac{3.6b}{2.8} = 1.29b$

- Пусть $Y \sim \exp(1/b)$. Тогда

$$\pi_\rho(Y) = \int_0^{+\infty} \exp(-t/(b\rho)) dt = b\rho. \quad (10.2)$$

  Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1.2}(Y) = 1.2b$, $\pi_{1.5}(Y) = 1.5b$, $\pi_{1.8}(Y) = 1.8b$.

- Пусть $Z \sim \bar{F}_Z(t) = b^2/(b + t)^2$. Тогда

$$\pi_\rho(Y) = \int_0^{+\infty} b^{2\rho}/(b + t)^{2\rho} dt =$$
$$= [y = b + t, dy = dt] = b^{2\rho} \int_b^{+\infty} y^{-2\rho} dy = \frac{b}{2\rho - 1}, \rho > 1/2. \quad (10.3)$$

  Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1,2}(Z) = b/1.4$, $\pi_{1,5}(Z) = b/2$, $\pi_{1,8}(Z) = b/2.6$.

ДЗ 11

Апостериорная тарификация. Теория ограниченных флуктуаций. Модель Бюлмана.

Задача 1.

Найти наилучшее приближение X_{t+1} с помощью неоднородной линейной комбинации $X_1, \dots, X_t$.

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{X}_{t+1} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [1, X_1, X_2, \dots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_0, \dots, \beta_t], \tag{11.1}$$

$$\forall s = 0, \dots, t \quad \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = 0 \tag{11.2}$$

Очевидно, что из $X_0 = 1$ следует несмещенность оценки и выражение β_0 через другие коэффициенты:

$$\beta_0 = \left(1 - \sum_{s=1}^{t} \beta_s\right) m. \tag{11.3}$$

В частности,

$$0 = \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}\right) X_s\right]. \tag{11.4}$$

Итого,

$$\operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = \operatorname{cov}\left[X_{t+1}, X_s\right] - \sum_{u=0}^{t} \beta_u \operatorname{cov}\left[X_u, X_s\right] =$$

$$= a - \sum_{u=1, u\neq s}^{t} \beta_u a - \beta_s(a + s^2) = 0, \tag{11.5}$$

откуда имеем

$$\forall i = 1, \dots, t \quad \beta_i s^2 = a\left(1 - \sum_{s=1}^{t} \beta_s\right) \implies \forall i = 1, \dots, t \quad \beta_i = \frac{a}{at + s^2}. \tag{11.6}$$

Задача 2.

Найти наилучшее приближение $\mu(\Theta)$ с помощью однородной линейной комбинации $X_1, \dots, X_t$.

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{\mu} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [X_1, X_2, \dots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_1, \dots, \beta_t], \tag{11.7}$$

$$\forall s = 0, \dots, t \quad \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = 0. \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\mu(\theta) - \hat{\mu})\, X_s\right] &= \operatorname{cov}\left[\mu(\theta) - \hat{\mu}, X_s\right] = \operatorname{cov}\left[\mu(\theta), X_s\right] - \operatorname{cov}\left[\hat{\mu}, X_s\right] = \\ &= \operatorname{cov}\left[\mu(\theta), X_s\right] - \sum_{u=1}^{t} \beta_u \operatorname{cov}\left[X_u, X_s\right] + \mathbb{E}[X_s]\left(\mathbb{E}\left[\mu(\theta)\right] - \sum_{u=1}^{t} \beta_u \mathbb{E}\left[X_u\right]\right) = \\ &= a - \sum_{u=1}^{t} \beta_u a - \beta_s s^2 + m^2\left(1 - \sum_{u=1}^{t} \beta_u\right) = 0\end{aligned} \tag{11.9}$$

Итого,

$$\beta_{\dots} = \frac{a + m^2}{(a + m^2)t + s^2} \tag{11.10}$$

Задача 3.

Проверить, пользуясь тем, что X_{t+1} и $X_1, \dots, X_t$ условно независимы при данной Θ, равенство

$$E(X_{t+1}|X_1, \dots, X_t) = E(\mu(\Theta)|X_1, \dots, X_t).$$

Решение

$\mu(\Theta) := \mathbb{E}\left[X_i|\Theta\right]$. Знаем, что

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \dots, X_t, \Theta\right] = \mathbb{E}\left[X_{t+1}|\Theta\right] = \mu(\Theta). \tag{11.11}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mu(\Theta)|X_1, \dots, X_t\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t+1}|\Theta\right]|X_1, \dots, X_t\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \dots, X_t, \Theta\right]|X_1, \dots, X_t\right] \overset{\text{iterated expectations}}{=} \mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \dots, X_t\right]\end{aligned} \tag{11.12}$$

ДЗ 12

Оценка структурных параметров и модель Бюлмана-Штрауба

Задача 1.

Верны следующие соотношения

(a) $\mathrm{cov}(\mu(\Theta_k), X_{pl}) = a\delta_{kp}$,

(b) $\mathrm{cov}(X_{ki}, X_{pl}) = (a + s^2\delta_{il})\delta_{kp}$,

(c) $\mathrm{cov}(\bar{X}_{k\cdot}(t), \bar{X}_{p\cdot}(t)) = (a + \frac{s^2}{t})\delta_{kp}$, где $\bar{X}_{j\cdot}(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_{ji}$.

Решение

Часть (a)

$\mu(\Theta_k) = \mathbb{E}\left[X|\Theta_k\right]$. Отсюда получаем

$$\begin{multline}\mathrm{cov}\left[\mu(\Theta_k), X_{pl}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\mu(\Theta_k) - \mathbb{E}[\mu(\Theta_k)]\right)\left(X_{pl} - \mathbb{E}\left[X_{pl}\right]\right)|\Theta_k\right] = \\ = \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_k) - m)\mathbb{E}\left[X_{pl} - m|\Theta_k\right]\right] \quad (12.1)\end{multline}$$

Рассмотрим $p = k$.

$$\mathbb{E}\left[X_{pl} - m|\Theta_k\right] = \mathbb{E}\left[X_{kl} - m|\Theta_k\right] = \mu(\Theta_k) - m. \quad (12.2)$$

$$\begin{multline}\mathrm{cov}\left[\mu(\Theta_k), X_{pl}\right] = \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_k) - m)(X_{pl} - m)|\Theta_k\right] = \\ = \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_k) - m)^2\right] = \mathrm{var}\,\mu(\Theta_k) = a. \quad (12.3)\end{multline}$$

При $p \neq k \quad X_{pl} \perp\!\!\!\perp \Theta_k$. Поэтому

$$\begin{multline}\mathbb{E}\left[X_{pl} - m|\Theta_k\right] = \mathbb{E}\left[X_{pl} - m\right] = 0 \implies \mathrm{cov}\left[\mu(\Theta_k), X_{pl}\right] = \\ = \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_k) - m)(X_{pl} - m)\right] = \mathbb{E}\left[\mu(\Theta_k) - m\right]\mathbb{E}\left[X_{pl} - m\right] = 0 \quad (12.4)\end{multline}$$

Получили первое утверждение.

Часть (b)

При $p \neq k$ величины независимы, т.е. их ковариация равна нулю. Поэтому рассмотрим $p = k$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[X_{ki}, X_{pl}] = \operatorname{cov}[X_{ki}, X_{kl}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{ki} - m)(X_{kl} - m)|\Theta_k]] = \\ = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{ki} - \mu(\Theta_k) + \mu(\Theta_k) - m)(X_{kl} - \mu(\Theta_k) + \mu(\Theta_k) - m)|\Theta_k]] = \\ = (a + \delta_{il} s^2)\delta_{kp} \quad (12.5)\end{aligned}$$

Часть (c)

Ровно так же как и в пункте **(b)**.

Задача 2.

При выполнении гипотез $(BS1)$ и $(BS2)$ установить следующие соотношения (где δ_{ij} - символ Кронекера):

(a) $\operatorname{cov}(\mu(\Theta_k), X_{pi}) = a\delta_{kp}$,

(b) $\operatorname{cov}(X_{ki}, X_{pj}) = (a + \delta_{ij} \frac{s^2}{W_{ki}})\delta_{kp}$,

(c) $\operatorname{cov}(X_{ki}, X_{k.}^W) = \operatorname{cov}(X_{k.}^W, X_{k.}^W) = a + \frac{s^2}{W_{k.}}$,

(d) $\operatorname{cov}(X_{ki}, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}}$,

(e) $\operatorname{cov}(X_{k.}^W, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}}$,

(f) $\operatorname{cov}(X_{..}^W, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\sum_{k=1}^{n}(\frac{W_{k.}}{W_{..}})^2$.

Решение

Часть (a)

Следует из п. **(a)** предыдущей задачи.

Часть (b)

При $p \neq k$ величины независимы, т.е. их ковариация равна нулю. Поэтому рассмотрим $p = k$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[X_{ki}, X_{pj}] = \operatorname{cov}[X_{ki}, X_{kj}] = \\ = \mathbb{E}[\operatorname{cov}[X_{ki}, X_{kj}|\Theta_k]] + \operatorname{cov}[\mathbb{E}[X_{ki}|\Theta_k], \mathbb{E}[X_{kj}|\Theta_k]] = \\ = \delta_{ij}\frac{s^2}{W_{ki}} + a \quad (12.6)\end{aligned}$$

Часть (c)

$$\operatorname{cov}\left[X_{ki}, X_{k.}^W\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{cov}\left[X_{ki}, \frac{W_{ki}}{W_{k.}} X_{ki}^W|\Theta_k\right]\right] + \operatorname{cov}\left[\mathbb{E}[X_{ki}|\Theta_k], \mathbb{E}[X_{k.}^W|\Theta_k]\right] =$$
$$= \frac{W_{ki}}{W_{k.}}\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2(\Theta_k)}{W_{ki}}\right] + \operatorname{var}\left[\mu(\Theta_k)\right] = a + \frac{s^2}{W_{k.}} \tag{12.7}$$

Заметим, что

$$\operatorname{cov}\left[X_{ki}, X_{k.}^W\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{cov}\left[X_{ki}, X_{k.}^W|\Theta_k\right]\right] + \operatorname{cov}\left[\mathbb{E}[X_{ki}|\Theta_k], \mathbb{E}[X_{k.}^W|\Theta_k]\right]. \tag{12.8}$$

Докажем второе утверждение из пункта:

$$\operatorname{cov}\left[X_{k.}^W, X_{k.}^W\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{var}\left[X_{k.}^W|\Theta_k\right]\right] + \operatorname{var}\left[\mathbb{E}\left[X_{k.}^W|\Theta_k\right]\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{W_{ki}}{W_{k.}}\right)^2 \frac{\sigma^2(\Theta_k)}{W_{ki}} \operatorname{var}\left[X_{k.}^W|\Theta_k\right]\right] + \operatorname{var}\left[\mu(\Theta_k)\right] =$$
$$= a + \sum_{i=1}^{t} \frac{s^2}{W_{k.}} W_{ki} = a + \frac{s^2}{W_{k.}}. \tag{12.9}$$

Часть (d)

$$\operatorname{cov}\left[X_{ki}, X_{..}^W\right] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \operatorname{cov}\left[X_{ki}, X_{k.}^W\right] = \frac{W_{k.}}{W_{..}}\left(a + \frac{s^2}{W_{k.}}\right) \tag{12.10}$$

Часть (e)

Аналогично предыдущей части,

$$\operatorname{cov}\left[X_{k.}^W, X_{..}^W\right] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \operatorname{cov}\left[X_{k.}^W, X_{k.}^W\right] = \frac{W_{k.}}{W_{..}}\left(a + \frac{s^2}{W_{k.}}\right) \tag{12.11}$$

Часть (f)

$$\operatorname{cov}\left[X_{..}^W, X_{..}^W\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{k.}}{W_{..}} \operatorname{cov}\left[X_{k.}^W, X_{k.}^W\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{k.}}{W_{..}}\left(a + \frac{s^2}{W_{k.}}\right) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{k.}}{W_{..}}\right)^2. \tag{12.12}$$