

Домашняя работа по курсу «Теория риска и стохастическая финансовая математика»

Артемий Сазонов

17 декабря 2022 г.

ДЗ 8

Виды и механизмы перестрахования. Пропорциональное перестрахование, квотный договор. Уравновешенность договора, экономические и финансовые условия

Задача 1.

Нарисовать кривую Лоренца для распределения Парето с $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Решение

Найдем квантильную функцию распределения F :

$$y = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha} \Rightarrow x = \sigma(1 - y)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (8.1)$$

$$\int_0^u \sigma(1 - t)^{-\frac{1}{\alpha}} dt = \int_{1-u}^1 \sigma s^{-\frac{1}{\alpha}} ds = \sigma \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(1 - (1 - u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right). \quad (8.2)$$

Следовательно

$$L_X(u) = 1 - (1 - u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \quad (8.3)$$

См Рис 8.1.

Задача 2.

Проверить, что если $X \prec_{Lor} Y$, то $CV(X) \leq CV(Y)$. Верно ли обратное утверждение?

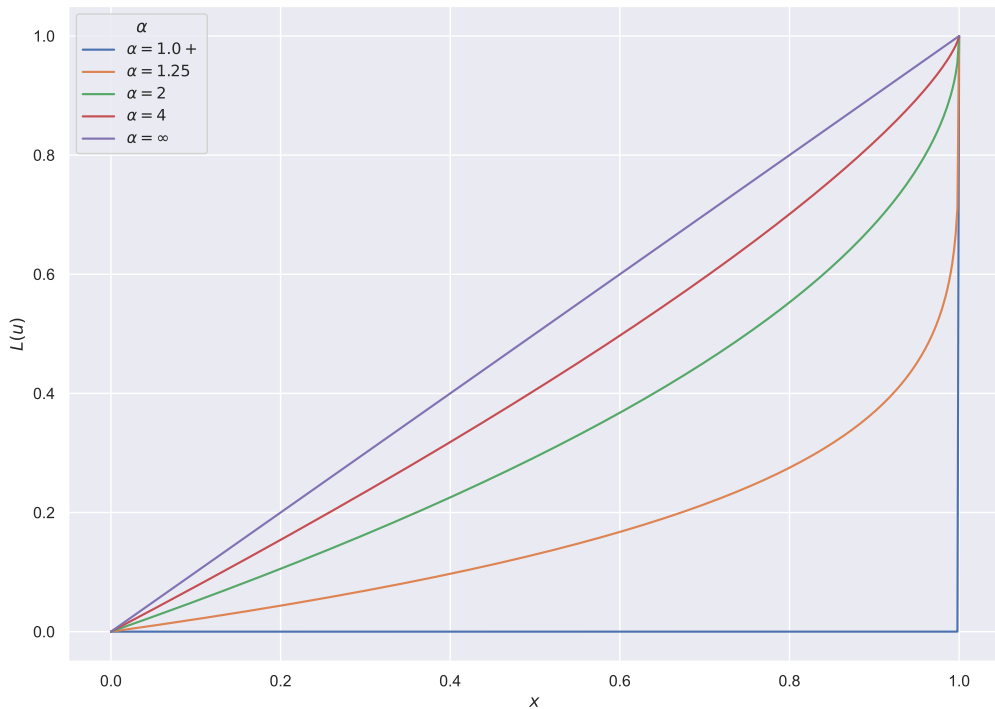


Рис. 8.1: Кривая Лоренца для распределения Парето с разными параметрами

Решение

$$X \prec_{Lor} Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{X}{\mathbb{E}[X]} <_{cx} \frac{Y}{\mathbb{E}[Y]}$$

Имеем:

$$\mathbb{E}[X^2]/(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]/(\mathbb{E}[Y])^2, \quad (8.4)$$

$$(\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2)/(\mathbb{E}[X])^2 \leq (\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2)/(\mathbb{E}[Y])^2. \quad (8.5)$$

Взяв квадратный корень от обеих частей получаем требуемое утверждение. Чтобы показать, что обратное неверно, возьмем случайные величины X, Y со средним, равным 1, $X < C = \text{const}$ п.н., Y - неограничена, и $\text{var } X > \text{var } Y$. Подойдут например $X : \mathbb{P}(X = 0) = 2/3, \mathbb{P}(X = 3) = 1/3$ и $Y \sim \text{Exp}(1)$. Тогда $\sqrt{2} = CV(X) > CV(Y) = 1$. Но $\mathbb{E}(X - 3)^+ = 0 < \mathbb{E}(Y - 3)^+ = e^{-3}$. Значит, либо $X <_{cx} Y$ либо X и Y - несравнимы.

Задача 3.

Пусть X и Z - независимые случайные величины, $X \sim \Gamma(1, \lambda^{-1})$, $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. Проверить, что $Y = X/Z$ имеет распределение Парето с функцией распределения $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Решение

$$\begin{aligned}
 \iint_{x/y \leq t} f_{X,Y}(x,y) dx dy &= \iint_{x/y \leq t} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\
 &= [x/y = u, x = v] = \int_{u \leq t} \int_{v \in \mathbb{R}} f_X(v) f_Y(v/u) \frac{|v|}{u^2} dv du = \\
 &= \int_{0 \leq u \leq t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{v/\lambda} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha-1} e^{-v/u} \frac{v}{u^2} dv du = \\
 &= \int_{0 \leq u \leq t} \frac{1}{\Gamma(\alpha) u^{\alpha+1} \lambda} \int_0^{+\infty} v^\alpha \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{u} \right) v \right\} dv du = \\
 &= \int_{0 \leq u \leq t} \frac{\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{u} \right)^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha) u^{\alpha+1} \lambda} \int_0^{+\infty} s^\alpha \exp(-s) ds du = \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_{0 \leq u \leq t} \left(\frac{u}{\lambda} + 1 \right)^{-\alpha-1} du = \alpha \int_1^{1+t/\lambda} s^{-\alpha-1} ds = \\
 &= 1 - (1 + t/\lambda)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Задача 4.

Показать, что $X <_{st} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim U(0, 2), Y \sim U(1, 2)$, где $U(a, b)$ - равномерное распределение на (a, b) .)

Решение

Рассмотрим предложенные случайные величины. $X^* = X/\mathbb{E}[X] = X, Y^* = Y/\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3}Y$. Для любого t $F_X(t) \geq F_Y(t) \iff X <_{st} Y$. Однако, $\frac{2}{3}Y \sim U(2/3, 4/3)$ и $\mathbb{E}[(X^* - 4/3)^+] = 1/3 > \mathbb{E}[(Y^* - 4/3)^+] = 0$. Следовательно, X^* и Y^* либо несравнимы, либо $Y^* <_{sl} X^*$. Осталось вспомнить, что $Y^* <_{sl} X^* \iff Y <_k X$.

Задача 5.

Показать, что $X <_k Y \not\Rightarrow X <_{st} Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim Exp(1), Y \sim Exp(2)$, где $Exp(a)$ - показательное распределение с параметром a .)

Решение

Рассмотрим предложенные случайные величины. $X^* = X/\mathbb{E}X = X, Y^* = Y/\mathbb{E}Y = 2Y \sim X \Rightarrow X^* <_{sl} Y^*$, но $\bar{F}_Y(x) = e^{-2x} < e^{-x} = \bar{F}_X(x), x \geq 0 \Rightarrow Y <_{st} X$.

Задача 6.

Проверить, что гамма-распределение с $\alpha \geq 1$ и равномерное имеют тип IFR.

Решение

- (а) Случай гамма распределения. Для простоты будем рассматривать $1/\lambda(x)$. Необходимо показать, что $1/\lambda(x)$ - убывает по x .

$$\begin{aligned} 1/\lambda(x) &= \left(\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right)^{-1} \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} dt = \\ &= [t - x = u, dt = du] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{x} + 1 \right)^{\alpha-1} e^{-\beta u} du \quad (8.6) \end{aligned}$$

не возрастает по x при $\alpha \geq 1$.

- (б) Случай равномерного распределения $U(a, b)$.

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{b-a}}{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \frac{1}{b-x}, \quad (8.7)$$

Это выражение возрастает по x .

Задача 7.

Показать, что если $X_i <_{mor} Y_i, i \geq 1$, то $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

Решение

Напомним, что $F_{\min_i X_i}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. Действительно, $\mathbb{P}(\min_i X_i < x)$ означает, что хотя бы 1 из X_i меньше либо равен x . Это тоже самое, что

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x, X_{(k+1)} > x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F^k(x) (1 - F(x))^{n-k} = 1 - (1 - F(x))^n. \quad (8.8)$$

Отсюда, поскольку $\frac{1-F_X(x)}{1-F_Y(x)}$ убывает по x , то

$$\frac{1 - F_{\min_i X_i}(x)}{1 - F_{\min_i Y_i}(x)} = \left(\frac{1 - F_X(x)}{1 - F_Y(x)} \right)^n \quad (8.9)$$

убывает по x и, следовательно, $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

ДЗ 9

Непропорциональное страхование. Экцедент убытка по рisku/катастрофе. Финансовые и экономические условия.

Задача 1.

Рассматривается договор эксцедента убытка по риску $XL: 5 \times 2$. Предполагается, что возможны 4 возобновления. Добавочные премии за возобновление полосы: 25%, 50%, 100%, 200%. Произошло 8 убытков, их размеры: 5, 10, 7, 4, 6, 8, 3, 9. Первоначальная премия равна 4. Подсчитать размер добавочных премий. Все размеры в млн.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min \{5, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $L = 5 \cdot (4 + 1) = 25$ – максимальное значение гарантий перестраховщика, $Y = \sum_{i=1}^8 Y_i$ – суммарные выплаты по обязательствам перестраховщика.

i	X_i	Y_i	Y	XL	добавочная премия
1	3	3	3	3	0.6
2	10	5	8	5	1.6
3	7	5	13	5	3.2
4	4	2	15	2	1.6
5	6	4	19	4	6.4
6	8	5	24	5	1.6
7	3	1	25	1	—
8	9	5	30	—	—

Добавочные премии закончились на 7-м убытке, т.к. мы достигли максимальных гарантий перестраховщика.

Задача 2.

Подсчитать, чему равна премия по договору 3 xs 2 (млн.), если размеры последовательных убытков равнялись 3, 3.4, 3.2, 4.8, 4.4, 7. Предполагается, что применяется скользящая ставка премии от 2% до 5% (при коэффициенте надбавки 100/80 убытков на гарантии перестраховщика, уже оплаченных или еще не урегулированных). Премия прямого страховщика равна $200 \cdot 10^6$.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min \{3, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $Y = \sum_{i=1}^6 Y_i = 11.8$.

$$r = \min \left\{ \underbrace{r_{\max}}_{5\%}, \max \left\{ \underbrace{r_{\min}}_{2\%}, \underbrace{\frac{dY}{A}}_{= \frac{100 \times 11.8}{8 \times 200} = 73.75\%} \right\} \right\} = 5\%. \quad (9.1)$$

Итого, $P = rA = .05 \times 200 = 10$.

ДЗ 10

Оптимальное перестрахование. Порядки рационального перестраховщика, эксцедента богатства и рассеивания.

Задача 1.

Решение

- Пусть $X \sim U[0, 2b]$. Тогда

$$\begin{aligned}\pi_\rho(X) &= \int_0^{2b} (1 - t/(2b))^{\frac{1}{\rho}} dt = \\ &= [1 - t/(2b) = y, -2b dy = dt] = 2b \int_0^1 y^{\frac{1}{\rho}} dy = 2b \frac{1}{\frac{1}{\rho} + 1} = \frac{2b\rho}{1 + \rho}. \quad (10.1)\end{aligned}$$

Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1,2}(X) = \frac{2.4b}{2.2} \approx 1.09b$, $\pi_{1,5}(X) = \frac{3b}{2.5} = 1.2b$, $\pi_{1,8}(X) = \frac{3.6b}{2.8} \approx 1.286b$

- Пусть $Y \sim \exp(1/b)$. Тогда

$$\pi_\rho(Y) = \int_0^{+\infty} \exp(-t/(b\rho)) dt = b\rho. \quad (10.2)$$

Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1,2}(Y) = 1.2b$, $\pi_{1,5}(Y) = 1.5b$, $\pi_{1,8}(Y) = 1.8b$.

- Пусть $Z \sim \bar{F}_Z(t) = b^2/(b+t)^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\pi_\rho(Y) &= \int_0^{+\infty} b^2/(b+t)^{2\rho} dt = \\ &= [y = b+t, dy = dt] = b^{2\rho} \int_b^{+\infty} y^{-2\rho} dy = \frac{b}{2\rho-1}, \quad \rho > 1/2. \quad (10.3)\end{aligned}$$

Подставляя значения ρ получаем $\pi_{1,2}(Z) = b/1.4$, $\pi_{1,5}(Z) = b/2$, $\pi_{1,8}(Z) = b/2.6$.

ДЗ 11

Апостериорная тарификация. Теория ограниченных флуктуаций. Модель Бюлмана.

Задача 1.

Найти наилучшее приближение X_{t+1} с помощью неоднородной линейной комбинации X_1, \dots, X_t .

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{X}_{t+1} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [1, X_1, X_2, \dots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_0, \dots, \beta_t], \quad (11.1)$$

$$\forall s = 0, \dots, t \quad \text{cov} [X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s] = 0 \quad (11.2)$$

Очевидно, что из $X_0 = 1$ следует несмещенность оценки и выражение β_0 через другие коэффициенты:

$$\beta_0 = \left(1 - \sum_{s=1}^t \beta_s\right) m. \quad (11.3)$$

В частности,

$$0 = \text{cov} [X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s] = \mathbb{E} \left[(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) X_s \right]. \quad (11.4)$$

Итого,

$$\begin{aligned} \text{cov} [X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s] &= \text{cov} [X_{t+1}, X_s] - \sum_{u=0}^t \beta_u \text{cov} [X_u, X_s] = \\ &= a - \sum_{u=1, u \neq s}^t \beta_u a - \beta_s (a + s^2) = 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

откуда имеем

$$\forall i = 1, \dots, t \quad \beta_i s^2 = a \left(1 - \sum_{s=1}^t \beta_s\right) \implies \forall i = 1, \dots, t \quad \beta_i = \frac{a}{at + s^2}. \quad (11.6)$$

Задача 2.

Найти наилучшее приближение $\mu(\Theta)$ с помощью однородной линейной комбинации X_1, \dots, X_t .

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{\mu} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [X_1, X_2, \dots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_1, \dots, \beta_t], \quad (11.7)$$

$$\forall s = 0, \dots, t \quad \text{cov} [X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s] = 0. \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\mu(\theta) - \hat{\mu}) X_s] &= \text{cov} [\mu(\theta) - \hat{\mu}, X_s] = \text{cov} [\mu(\theta), X_s] - \text{cov} [\hat{\mu}, X_s] = \\ &= \text{cov} [\mu(\theta), X_s] - \sum_{u=1}^t \beta_u \text{cov} [X_u, X_s] + \mathbb{E}[X_s] \left(\mathbb{E} [\mu(\theta)] - \sum_{u=1}^t \beta_u \mathbb{E} [X_u] \right) = \\ &= a - \sum_{u=1}^t \beta_u a - \beta_s s^2 + m^2 \left(1 - \sum_{u=1}^t \beta_u \right) = 0 \end{aligned} \quad (11.9)$$

Итого,

$$\beta_{\dots} = \frac{a + m^2}{(a + m^2)t + s^2} \quad (11.10)$$

Задача 3.

Проверить, пользуясь тем, что X_{t+1} и X_1, \dots, X_t условно независимы при данной Θ , равенство

$$E(X_{t+1} | X_1, \dots, X_t) = E(\mu(\Theta) | X_1, \dots, X_t).$$

Решение

$\mu(\Theta) := \mathbb{E} [X_i | \Theta]$. Знаем, что

$$\mathbb{E} [X_{t+1} | X_1, \dots, X_t, \Theta] = \mathbb{E} [X_{t+1} | \Theta] = \mu(\Theta). \quad (11.11)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu(\Theta) | X_1, \dots, X_t] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [X_{t+1} | \Theta] | X_1, \dots, X_t] = \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [X_{t+1} | X_1, \dots, X_t, \Theta] | X_1, \dots, X_t] \stackrel{\text{iterated expectations}}{=} \mathbb{E} [X_{t+1} | X_1, \dots, X_t] \end{aligned} \quad (11.12)$$

ДЗ 12

Оценка структурных параметров и модель Бюлмана-Штрауба

Задача 1.

Верны следующие соотношения

$$(a) \text{ cov}(\mu(\Theta_k), X_{pl}) = a\delta_{kp},$$

$$(b) \text{ cov}(X_{ki}, X_{pl}) = (a + s^2\delta_{il})\delta_{kp},$$

$$(c) \text{ cov}(\bar{X}_k(t), \bar{X}_p(t)) = (a + \frac{s^2}{t})\delta_{kp}, \text{ где } \bar{X}_{j\cdot}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_{ji}.$$

Решение

Часть (a)

$\mu(\Theta_k) = \mathbb{E}[X|\Theta_k]$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mu(\Theta_k), X_{pl}] &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta_k) - \mathbb{E}[\mu(\Theta_k)])(X_{pl} - \mathbb{E}[X_{pl}])|\Theta_k] = \\ &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta_k) - m)\mathbb{E}[X_{pl} - m|\Theta_k]] \end{aligned} \quad (12.1)$$

Рассмотрим $p = k$.

$$\mathbb{E}[X_{pl} - m|\Theta_k] = \mathbb{E}[X_{kl} - m|\Theta_k] = \mu(\Theta_k) - m. \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mu(\Theta_k), X_{pl}] &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta_k) - m)(X_{pl} - m)|\Theta_k] = \\ &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta_k) - m)^2] = \text{var } \mu(\Theta_k) = a. \end{aligned} \quad (12.3)$$

При $p \neq k$ $X_{pl} \perp \Theta_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{pl} - m|\Theta_k] &= \mathbb{E}[X_{pl} - m] = 0 \implies \text{cov}[\mu(\Theta_k), X_{pl}] = \\ &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta_k) - m)(X_{pl} - m)] = \mathbb{E}[\mu(\Theta_k) - m] \mathbb{E}[X_{pl} - m] = 0 \end{aligned} \quad (12.4)$$

Получили первое утверждение.

Часть (b)

При $p \neq k$ величины независимы, т.е. их ковариация равна нулю. Поэтому рассмотрим $p = k$.

$$\begin{aligned}\text{cov}[X_{ki}, X_{pl}] &= \text{cov}[X_{ki}, X_{kl}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{ki} - m)(X_{kl} - m)|\Theta_k]] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{ki} - \mu(\Theta_k) + \mu(\Theta_k) - m)(X_{kl} - \mu(\Theta_k) + \mu(\Theta_k) - m)|\Theta_k]] = \\ &= (a + \delta_{il}s^2)\delta_{kp} \quad (12.5)\end{aligned}$$

Часть (c)

Ровно так же как и в пункте (b).

Задача 2.

При выполнении гипотез (BS1) и (BS2) установить следующие соотношения (где δ_{ij} - символ Кронекера):

- (a) $\text{cov}(\mu(\Theta_k), X_{pi}) = a\delta_{kp},$
- (b) $\text{cov}(X_{ki}, X_{pj}) = (a + \delta_{ij}\frac{s^2}{W_{ki}})\delta_{kp},$
- (c) $\text{cov}(X_{ki}, X_{k.}^W) = \text{cov}(X_{k.}^W, X_{k.}^W) = a + \frac{s^2}{W_{k.}},$
- (d) $\text{cov}(X_{ki}, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}},$
- (e) $\text{cov}(X_{k.}^W, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}},$
- (f) $\text{cov}(X_{..}^W, X_{..}^W) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\sum_{k=1}^n (\frac{W_{k.}}{W_{..}})^2.$

Решение

Часть (a)

Следует из п. (a) предыдущей задачи.

Часть (b)

При $p \neq k$ величины независимы, т.е. их ковариация равна нулю. Поэтому рассмотрим $p = k$.

$$\begin{aligned}\text{cov}[X_{ki}, X_{pj}] &= \text{cov}[X_{ki}, X_{kj}] = \\ &= \mathbb{E}[\text{cov}[X_{ki}, X_{kj}|\Theta_k]] + \text{cov}[\mathbb{E}[X_{ki}|\Theta_k], \mathbb{E}[X_{kj}|\Theta_k]] = \\ &= \delta_{ij}\frac{s^2}{W_{ki}} + a \quad (12.6)\end{aligned}$$

Часть (c)

b

Часть (d)

$$\text{cov} [X_{ki}, X_{..}^W] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \text{cov} [X_{ki}, X_{k.}^W] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \left(a + \frac{s^2}{W_{k.}} \right) \quad (12.7)$$

Часть (e)

Аналогично предыдущей части,

$$\text{cov} [X_{k.}^W, X_{..}^W] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \text{cov} [X_{k.}^W, X_{k.}^W] = \frac{W_{k.}}{W_{..}} \left(a + \frac{s^2}{W_{k.}} \right) \quad (12.8)$$

Часть (f)

$$\begin{aligned} \text{cov} [X_{..}^W, X_{..}^W] &= \sum_{k=1}^n \frac{W_{k.}}{W_{..}} \text{cov} [X_{k.}^W, X_{k.}^W] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{W_{k.}}{W_{..}} \left(a + \frac{s^2}{W_{k.}} \right) = \frac{s^2}{W_{..}} + a \sum_{k=1}^n \left(\frac{W_{k.}}{W_{..}} \right)^2. \end{aligned} \quad (12.9)$$