Домашняя работа по курсу «Теория риска и стохастическая финансовая математика»

Артемий Сазонов

9 декабря 2022 г.

ДЗ 6

Тарифный принцип, нагрузка в явном и неявном виде. Порядок отношения правдоподобия и экспоненциальный порядок.

Задача 1.

Пусть число наступления событий N имеет распределение Пуассона с параметром λ. События классифицируются на m групп, причем каждое из них, независимо от остальных, принадлежит i-й группе с вероятностью p_i. Тогда случайные величины N_i, $i = \overline{1, m}$, независимые пуассоновские с параметрами $p_i\lambda$. (N_i - число событий в группе i.)

Решение

Пусть η_k – номер класса события k. Тогда

$$\mathbb{P}(\eta_k = i) = p_i. \tag{6.1}$$

Из условия задачи имеем

$$N_i = \sum_{k:\ \eta_k = i} 1 = \sum_k \mathbb{1}(\eta_k = i). \tag{6.2}$$

Найдем искомое распределение:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_i = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k, \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\
= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k, \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\
= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k\right) \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\
= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \binom{k}{n} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\
= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\
= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{n!(k-n)!} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\
= \frac{p_i^n e^{\lambda} \lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_i))^k}{k!} = \frac{(\lambda p_i)^n}{n!} e^{-\lambda p_i}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Получили искомое распределение. Остается проверить независимость. Это свойство очевидно следует из независимости η_k.

Задача 2.

Проверить, что биномиальные распределения с параметрами n и p растут стохастически по p при фиксированном n и стохастически растут по n при фиксированном p.

Решение

1. Фиксируем n. Пусть $p_1 < p_2$. Тогда хотим

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \geq \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} = P(X_2 = k). \tag{6.4}$$

На биномиальный коэффициент можно не обращать внимания, так как он не зависит от p. Тогда нужно проверить неравенство

$$p_1^k (1-p_1)^{n-k} \geq p_2^k (1-p_2)^{n-k}. \tag{6.5}$$

Обозначим $a = p_2/p_1 > 1, p_1 = p$. Имеем:

$$\underbrace{a^k}_{<1} \left(\frac{1-ap}{1-p}\right)^{n-k} < ...? \tag{6.6}$$

$$\frac{1-ap}{1-p} \ ? \ 1 \tag{6.7}$$

$$1 - ap \ ? \ 1 - p \tag{6.8}$$

Отсюда следует, что $?$ это $<$. Таким образом, в (6.6) можно поставить 1 вместо многоточия, и имеем стохастическую монотонность.

2. Фиксируем p. Пусть $n_1 < n_2$. Тогда хотим

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1 - k} \geq \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2 - k} = P(X_2 = k). \tag{6.9}$$

Хотим

$$\frac{n_1!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1} \geq \frac{n_2!}{(n_2 - k)!}(1-p)^{n_2} \tag{6.10}$$

Хотим

$$\frac{n_1!}{n_2!} \frac{(n_2 - k)!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1 - n_2} \geq 1 \tag{6.11}$$

Имеем

$$\frac{n_1!}{n_2!} \frac{(n_2 - k)!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1 - n_2} \geq \frac{n_1!}{n_2!} \frac{(n_2 - n_1)!}{1}(1-p)^{n_1 - n_2} > 1 \tag{6.12}$$

Задача 3.

Верно ли, что $DY \geq DX$, если $X <_v Y$?

Решение

Пусть $X <_v Y$. По определению это означает, что $\exists Z \colon \mathbb{E}\left[Z | X\right] \overset{\text{a.s.}}{\geq} 0$ и $X + Z \overset{\text{law}}{=} Y$. Более того, знаем, что $X <_v Y \iff X <_{sl} Y, X <_{st} Y$. А отсюда следует необходимость данного стохастического порядка. Рассмотрим

(a) $X \sim U[1, 3]$, $\operatorname{var} X = 1/3$;

(b) $Y \sim U[3, 4]$, $\operatorname{var} Y = 1/12$.

Есть стохастический и стоп-лосс, а значит, выполнено $X <_v Y$. Но $\operatorname{var} X > \operatorname{var} Y$, что противоречит условию.

Задача 4.

Пусть риск X равномерно распределен на $[0, 2]$, а Y имеет показательное распределение с параметром 1, тогда $X <_{sl} Y$.

Решение

Пусть $0 < d < 2$.

$$\mathbb{E}\left[(X-d)^+\right] = 0.5 \int_d^2 (x-d)dx = 0.5\frac{4-d^2}{2} + 0.5(d-2)d = 1 - d + 0.25d^2, \tag{6.13}$$

$$\mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right] = \int_d^\infty (y-d)e^{-(y-d)-d}dy = e^{-d}\int_0^\infty ye^{-y}dy = e^{-d}. \tag{6.14}$$

Очевидно, что когда $d \geq 2$, то $0 = \mathbb{E}\left[(X-d)^+\right] < \mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right]$. Таким образом, $X <_{sl} Y$.

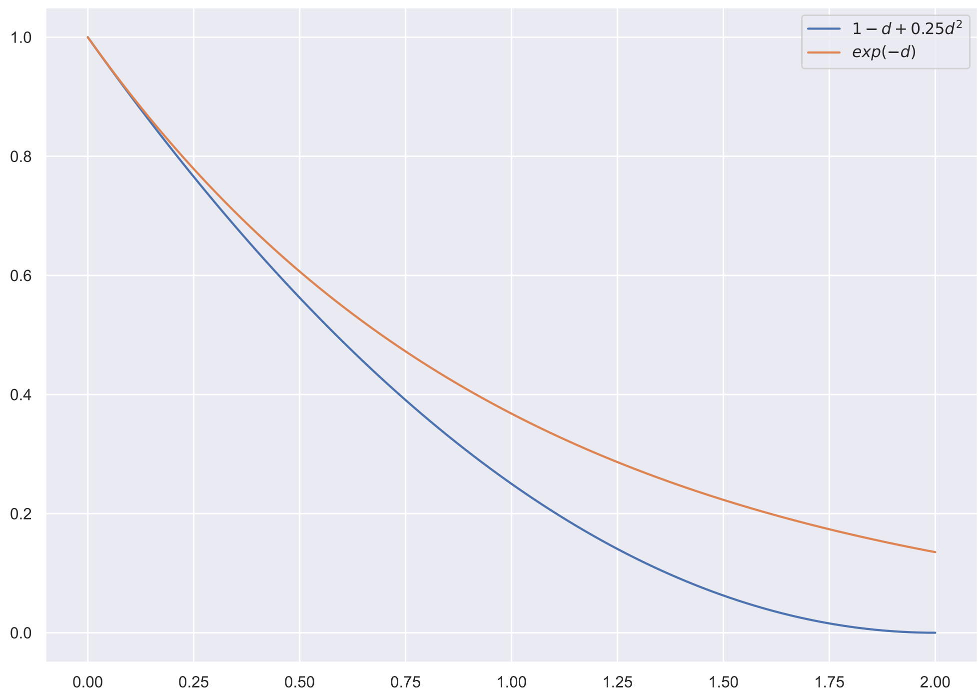

Рис. 6.1: Графики функций $\mathbb{E}\left[(X-d)^+\right]$ и $\mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right]$ при $d \in [0, 2]$

ДЗ 7

Порядок Лоренца. Операции, ослабляющие и сохраняющие порядок. Взвешивание и смеси.

Задача 1.

Стохастический порядок не сохраняется для премии Эсшера. Пример: совместное распределение двух рисков X и Y задается следующим образом при некотором $h > 0$: $P(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $P(X = 0, Y = 2/(3h)) = 1/3$, $P(X = 3/h, Y = 3/h) = 1/3$.
Необходимо проверить, что $X <_{st} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

Решение

Премия Эсшера:

$$\Pi(X, h) = \Pi_X = \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{hX}\right]}{g_X(h)} = \frac{g'_X(h)}{g_X(h)} \tag{7.1}$$

Из условия следуют совместные распределения X и Y:

x	0	$3/h$
$P(X = x)$	$2/3$	$1/3$

y	0	$2/(3h)$	$3/h$
$P(Y = y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

По определению стохастического порядка получаем, что $X <_{st} Y$ (см. рис. 7). Теперь сравним соотвествующие премии:

$$g_X(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t}, \qquad g'_X(t) = \frac{1}{h}e^{\frac{3}{h}t}; \tag{7.2}$$

$$g_Y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3h}t}, \qquad g'_Y(t) = \frac{1}{h}e^{\frac{3}{h}t} + \frac{2}{9h}e^{\frac{2}{3h}t}. \tag{7.3}$$

Отсюда получаем

$$\Pi_X = \frac{\frac{1}{h}e^3}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t}}; \tag{7.4}$$

$$\Pi_Y = \frac{\frac{1}{h}e^3 + \frac{2}{9h}e^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}}. \tag{7.5}$$

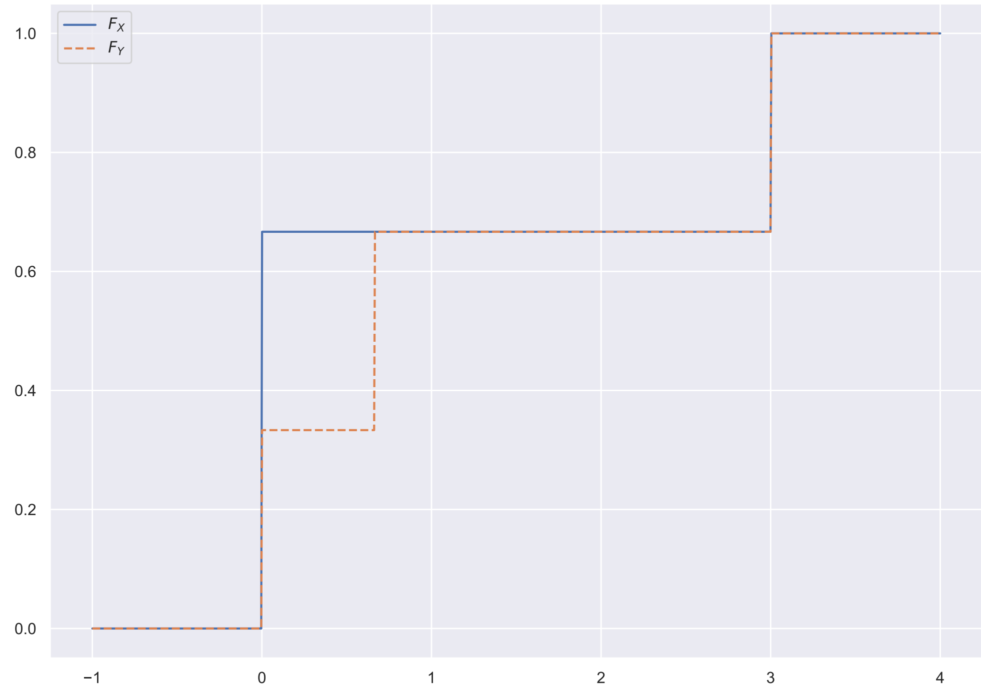

Рис. 7.1: Функции распределения X и Y

Посчитаем отношение премий:

$$\frac{\Pi_X}{\Pi_Y} \approx 1.02091201055381, \tag{7.6}$$

что означает, что $\Pi_X > \Pi_Y$.

Задача 2.

Сохраняется ли стохастический порядок рисков при подсчете премий по принципу среднего квадратичного?

Решение

Премия, посчитанная по принципу среднего квадратичного:

$$H(X) = \mathbb{E}\,[X] + \beta\,\mathrm{std}\,X. \tag{7.7}$$

Пусть $X \sim Be(0.5)$, $Y \equiv 1$, $\beta = 2$. Тогда

- $\mathbb{E}\,[X] = 0.5$, $\mathrm{std}\,X = 0.5$, $H(X) = 1.5$;
- $\mathbb{E}\,[Y] = 1$, $\mathrm{std}\,Y = 0$, $H(Y) = 1$.

Но $X <_{st} Y$. Значит, не сохраняется.

Задача 3.

Всегда ли принцип нулевой полезности обеспечивает премию с нагрузкой?

Решение

Пусть экономический агент обладает склонностью к риску ($MU(x)$ не убывает). Тогда его функция полезности будет выпуклой. По неравенству Йенсена имеем

$$\mathbb{E}\left[U(X)\right] \geq U\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right). \tag{7.8}$$

Премия, рассчитанная по принципу нулевой полезности, будет равна

$$P: \quad \mathbb{E}\left[U(P-X)\right] = U(0). \tag{7.9}$$

Из уравнений (7.8) и (7.9) следует, что

$$U(0) = \mathbb{E}\left[U(P-X)\right] \geq U\left(\mathbb{E}\left[P-X\right]\right) = U\left(P-\mathbb{E}\left[X\right]\right) \tag{7.10}$$

Из монотонности полезности имеем, что

$$0 \geq P - \mathbb{E}\left[X\right] \implies P \leq \mathbb{E}\left[X\right]. \tag{7.11}$$

Поэтому эта премия не будет обеспечивать нагрузку.

Задача 4.

Как меняется в смысле порядка $<_e$ семейство показательных распределений при росте параметра?

Решение

По определению: $X \leq_e Y$, если $\forall \alpha > 0 \quad \mathbb{E}\left[e^{\alpha X}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha Y}\right]$.

$$\mathrm{MGF}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha-\lambda} & \alpha < \lambda, \\ \infty & \alpha \geq \lambda. \end{cases} \tag{7.12}$$

Очевидно, что по обоим аргументам функция строго монотонна на области определения. Поэтому экспоненциальный порядок сохраняет порядок на параметрах экспоненциального распределения.

Задача 5.

Экспоненциальный порядок не является полным порядком. Пример: X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, а Y - это смесь двух распределений, сосредоточенного в нуле и экспоненциального с параметром $1/2$, веса равны соответственно $2/3$ и $1/3$. Проверить, что нельзя упорядочить указанные величины в смысле экспоненциального порядка.

Решение

$$\mathrm{MGF}_X(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1, \\ \infty & \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{7.13}$$

$$\mathrm{MGF}_Y(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{3-6\alpha} & \alpha < \frac{1}{2}, \\ \infty & \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{7.14}$$

Отсюда видим, что распределения несравнимы в экспоненциальном смысле.

	MGF_X	MGF_Y
MGF	$\frac{1}{\alpha-1}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3-6\alpha}$
$\alpha = 1/6$	$6/5$	$7/6$
$\alpha = 1/3$	$3/2$	$5/3$