Домашняя работа по курсу «Теория риска и стохастическая финансовая математика»

Артемий Сазонов

19 декабря 2022 г.

ДЗ 2

Модели индивидуального и коллективного риска, распределения убытков и их числа, классы Панджера, составные считающие распределения

Задача 1.

Проверить, что геометрическое распределение с $p_k = \mathbb{P}(X = k) = pq^k$, $k = 0, 1, \ldots$ обладает отсутствием памяти, т.е.

$$\mathbb{P}(X \geq k + l | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq l).$$

Решение

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \geq k + l | X \geq k) = \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(X \geq k + l, X \geq k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq k + l)}{\mathbb{P}(X \geq k)} = \\
&\qquad = \frac{\sum_{n \geq k+l} pq^n}{\sum_{n \geq k} pq^n} = \frac{\sum_{n \geq k+l} q^n}{\sum_{n \geq k} q^n} = \frac{\frac{q^{k+l}}{1-q}}{\frac{q^k}{1-q}} = q^l = \\
&\qquad\qquad = \frac{1-q}{1-q} q^l = \underbrace{(1-q)}_{=p} \frac{q^l}{1-q} = \sum_{n \geq l} pq^n = \mathbb{P}(X \geq l).
\end{aligned}$$

Задача 2.

Проверить, что производящая функция моментов случайной величины $S^{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, где N – целочисленная случайная величина, не зависящая от последовательности н.о.р. случайных величин $(X_i)_{i \geq 1}$, записывается следующим образом:

$$g_{S^{col}}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tS^{col}}\right] = P_N(g_X(t)),$$

где $P_N(z) = \mathbb{E}\left[z^N\right]$ – производящая функция N, а $g_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right]$ – производящая функция моментов случайных величин X_i. Найти математическое ожидание и дисперсию величины S^{col}.

Решение

$$\mathbb{E}\left[e^{tS^{col}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^N X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^N X_i}\middle| N=n\right]_{n=N}\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right]_{n=N}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right]^n_{n=N}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{tX_i}]^N\right] = P_N(g_X(t))$$

Из курса теории вероятностей знаем, что есть формула для моментов случайной величины, выраженных через производные производящей функции моментов:

$$\mathbb{E}\left[(S^{col})^n\right] = \left.\frac{d^n \operatorname{MGF}_{S^{col}}(t)}{dt^n}\right|_{t=0+}$$

Итого имеем:

$$\mathbb{E}\left[S^{col}\right] = P_N'(g_X(0))g_X'(0) = P_N'(1)\mathbb{E}\left[X\right],$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(S^{col})^2\right] &= P_N''(g_X(0))\cdot(g_X'(0))^2 + P_N'(g_X(0))\cdot g_X''(0) = \\ &= P_N''(1)\cdot(\mathbb{E}\left[X\right])^2 + P_N'(1)\operatorname{var}X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}S^{col} &= P_N''(1)\cdot(\mathbb{E}\left[X\right])^2 + P_N'(1)\operatorname{var}X - (P_N'(1)\mathbb{E}\left[X\right])^2 = \\ &= \left(P_N''(1) - P_N'(1)^2\right)\mathbb{E}\left[X\right]^2 + P_N'(1)\operatorname{var}X.\end{aligned}$$

Задача 3.

Коэффициент изменчивости случайной величины X равен $\operatorname{cv}X = \frac{\operatorname{std}X}{\mathbb{E}[X]}$. Пусть

$$S_1^{col} = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i,$$
$$S_2^{col} = \sum_{i=1}^{N_2} Z_i,$$

где $N_1 \sim NB(10, 0.9)$, $N_2 \sim NB(1, 0.1)$, i.i.d. $Y_i \sim Exp(a)$, i.i.d. $Z_i \sim Par(x_0, 9/4)$. Найти коэффициенты изменчивости для N_1, N_2, Y, Z, S_1, S_2. Используемые обозначения:

- Отрицательное биномиальное распределение с параметрами m и p:
$$N \sim NB(m,p) \overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}(N=k) = C_{m+k-1}^k p^m(1-p)^k;$$
- Показательное распределение с параметром a:
$$Y \sim Exp(a) \overset{\text{def}}{\iff} p_Y(x) = ae^{-ax}\mathbb{1}(x \geq 0);$$
- Распределение Парето с параметрами x_0 и d:
$$Z \sim Par(x_0, d) \overset{\text{def}}{\iff} P(Z > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^d \mathbb{1}(x > x_0).$$

Решение

Часть (a)

Найдем коэффициент изменчивости для $N \sim NB(m, p)$.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N\right] &= \frac{pm}{1-p} \\ \operatorname{var} N &= \frac{pm}{(1-p)^2} \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{cv} N = \frac{\sqrt{\frac{pm}{(1-p)^2}}}{\frac{pm}{1-p}} = \frac{1}{\sqrt{pm}}.$$

В частных случаях:

- $(m, p) = (10, 0.9): \quad \operatorname{cv} N_1 = \frac{1}{3}$,
- $(m, p) = (1, 0.1): \quad \operatorname{cv} N_2 = 1$.

Часть (b)

Найдем коэффициент изменчивости для $Y \sim Exp(a)$.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y\right] &= \frac{1}{a} \\ \operatorname{var} Y &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{cv} Y = \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}{\frac{1}{a}} \equiv 1.$$

Часть (c)

$\operatorname{cv} S_1^{col}$ будем считать используя задачу 4. Условная плотность суммы:

$$p_S(x|N) = \frac{a^N x^{N-1}}{\Gamma(N)} e^{-ax} \mathbb{1}(x \geq 0).$$

$$\mathbb{E}\left[S_1^{col}|N\right] = \int_0^\infty x \frac{a^N x^{N-1}}{\Gamma(N)} e^{-ax} dx = \frac{1}{a\Gamma(N)} \int_0^\infty (ax)^N e^{-ax} d(ax) = \\ = \frac{1}{a\Gamma(N)} \int_0^\infty y^{(N+1)-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(N+1)}{a\Gamma(N)} = \frac{N}{a}$$

$$\mathbb{E}\left[(S_1^{col})^2|N\right] = \int_0^\infty x^2 \frac{a^N x^{N-1}}{\Gamma(N)} e^{-ax} dx = \frac{1}{a\Gamma(N)} \int_0^\infty (ax)^{N+1} e^{-ax} dx = \\ = \frac{1}{a^2\Gamma(N)} \int_0^\infty y^{(N+2)-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(N+2)}{a^2\Gamma(N)} = \frac{N(N+1)}{a^2}$$

$$\operatorname{var}\left[S_1^{col}|N\right] = \frac{N(N+1)}{a^2} - \left(\frac{N}{a}\right)^2 = \frac{N}{a^2}$$

Итого,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_1^{col}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[S_1^{col}|N\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N}{a}\right] = \frac{\frac{10 \cdot 0.9}{1-0.9}}{a} = \frac{90}{a}, \\ \operatorname{var} S_1^{col} &= \mathbb{E}\left[\operatorname{var}\left[S_1^{col}|N\right]\right] = \frac{\frac{10 \cdot 0.9}{1-0.9}}{a^2} = \frac{90}{a^2}, \\ \operatorname{cv} S_1^{col} &= \frac{\sqrt{10}}{30}. \end{aligned}$$

Часть (d)

Тут посчитаем проще: $N = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mathbb{1}(N=k)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_2^{col}\right] &= \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left(C_{m+k-1}^k p^m (1-p)^k \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left[Z_i\right] \right) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C_{m+k-1}^k p^m (1-p)^k k \mathbb{E}\left[Z\right] = \mathbb{E}\left[Z\right]\mathbb{E}\left[N_2\right] = \\
&= \frac{9/4\cdot x_0}{5/4}\cdot\frac{1}{0.9} = \frac{9\cdot 10}{5\cdot 9}\cdot x_0 = 2x_0, \\
\operatorname{var} S_2^{col} &= \mathbb{E}\left[N_2\right]\operatorname{var} Z = \frac{1}{0.9}\frac{x_0^2}{\cdot}9/4(5/4)^2\cdot 1/4 = \frac{10\cdot 9}{9\cdot(5/4)^2}x_0^2 = 6.4x_0^2, \\
\operatorname{cv} S_2^{col} &= \frac{\sqrt{6.4x_0^2}}{2x_0} = \frac{\sqrt{6.4x_0^2}}{2} = \sqrt{1.6} = \frac{4\sqrt{10}}{10}.
\end{aligned}$$

Задача 4.

Пусть V_i имеет распределение $\Gamma(\alpha_i,\beta)$, $i=1,\dots,n$ с плотностью

$$f_{V_i}(x) = \frac{\beta^{\alpha_i}x^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-\beta x}\mathbb{1}(x\geq 0).$$

Величины $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ независимы. Используя преобразование Лапласа показать, что $S^{ind} = \sum_{i=1}^n V_i$ имеет распределение $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta)$.

Решение

Знаем, что у $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$

$$\mathrm{MGF}_X(\lambda) = \left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Итого имеем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{MGF}_{S^{ind}}(\lambda) = \mathrm{MGF}_{\sum_{i=1}^n V_i}(\lambda) &\overset{\text{в силу независимости}}{=\!=\!=} \prod_{i=1}^n \mathrm{MGF}_{V_i}(\lambda) = \\
&= \prod_{i=1}^n\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)^{-\alpha_i} = \left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)^{-\sum_{i=1}^n\alpha_i} = \mathrm{MGF}_{\Gamma(\sum_{i=1}^n\alpha_i,\beta)}(\lambda).
\end{aligned}$$

ДЗ 3

Суммарный размер ущерба. Динамические модели. Модель Крамера - Лундберга и вероятность разорения

Задача 1.

Показать, что логарифмически нормальное распределение масштабно инвариантно, но не обладает масштабным параметром.

Решение

Определение 1 (Масштабно инвариантное семейство) *Семейство распределений называется масштабно инвариантным, если вместе с распределением случайной величины X распределение $Y = cX \quad \forall c \in \mathbb{R}^+$ также принадлежит этому семейству.*

$X \sim LN(a, \sigma^2)$, т.е. $\exists Y \sim N(a, \sigma^2) \colon \ X = \exp\{Y\}$. Посмотрим, какое распределение у cX:

$$cX = c \exp\{Y\} = \exp\{Y + \log c\},$$

т.е. $cX \sim LN(a + \log c, \sigma^2)$.

Задача 2.

Доказать, что пуассоновское распределение $Pois(\lambda)$ получается из отрицательно биномиального распределения $NB(\alpha, \beta)$, если положить $\lambda = \alpha(1-\beta)$ и $\beta \to 1$.

Решение

Определение 2 (Отрицательное биномиальное распределение $NB(m, p)$)

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k \iff \mathrm{MGF}_X(t) = \left(\frac{1-p}{1-pe^t}\right)^m.$$

Пусть $X \sim NB(\alpha, \beta), \alpha\beta =: \lambda$. Найдем предельную MGF при $\beta \to 0$:

$$\lim_{\beta \to 0} \mathrm{MGF}_X(t) = \lim_{\beta \to 0} \left(\frac{1-\beta}{1-\beta e^t}\right)^{\alpha} =$$
$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{1-s}{1-se^t}\right)^{\lambda/s} = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1-se^t}{1-s}\right)^{-\lambda/s} \overset{\text{из 2 зам.пр.}}{=\!=\!=} e^{\lambda\left(e^t-1\right)} = \mathrm{MGF}_{Pois(\lambda)}(t).$$

По теореме о характеризации получаем, что предельное распределение пуассоновское ($\mathrm{MGF} \leftrightarrow \mathrm{Law}$).

Задача 3.

Все ли распределения класса $(a, b, 0)$ являются безгранично делимыми?

Решение

Определение 3 *Считающее распределение принадлежит классу* $(a, b, 0)$*, если*

$$p_k = p_{k-1}\left(a + \frac{b}{k}\right).$$

При этом $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k$

Знаем, что только $Pois, B, NB, Geom$[1] принадлежат этому классу.

Определение 4 *Случайная величина Y (ее распределение) называется бесконечно делимой (-ым), если для любого $n \in \mathbb{N}$ она может быть представлена в виде $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}$, где $(X_i^{(n)})_{i=1\ldots n}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины.*

- $Pois(\lambda)$: берем n н.о.р. $Pois(\lambda/n)$ случайных величин;
- $B(m, p)$
$$\mathrm{MGF}_{B(m,p)} = \left(1 - p + pe^t\right)^m = \left(\left(\sqrt[n]{1-p+pe^t}\right)^m\right)^n;$$
- $NB(m, p)$
$$\mathrm{MGF}_{NB(m,p)} = \left(\frac{1-p}{1-pe^t}\right)^m = \left(\left(\sqrt[n]{\frac{1-p}{1-pe^t}}\right)^m\right)^n.$$

Задача 4.

Выписать явный вид $(p_k^T)_{k\geq 1}$ для урезанных в нуле распределения из класса $(a, b, 0)$.

[1] $Geom$ частный случай NB

Решение

$p_k^T = \frac{p_k}{(1-p_0)}$. Далее $k \geq 1$.

- $TB(n,p)$
$$p_k^T = \binom{n}{k} \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n};$$
- $TPois(\lambda)$
$$p_k^T = \frac{1}{k!} \frac{\lambda^k}{e^\lambda - 1};$$
- $TNB(\alpha, \beta)$
$$p_k^T = \tbinom{k+\alpha-1}{k} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{\alpha+k} - (1+\beta)^k};$$
- $TGeom(\beta)$
$$p_k^T = \frac{\beta^{k-1}}{(1+\beta)^k}.$$

ДЗ 4

Меры опасности. Порядки на случайных величинах.

Задача 1.

Пусть $f_X(x) = \exp\{-|x/\theta|\}/2\theta$ для $-\infty < x < \infty$, $\theta > 0$. Найти распределение $Y = e^X$.

Решение

$\mathbb{P}(Y < 0) = 0$. Пусть $x > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \ln x) \quad \Longrightarrow \quad f_Y(x) = f_X(\ln x)/x\mathbb{1}(x > 0).$$

Значит $f_Y(x) = \exp\{-|\ln x/\theta|\}/(2\theta x) \cdot \mathbb{1}(x > 0)$, где $\mathbb{1}(x \in A)$ - индикаторная функция множества A, а функция распределения имеет следующий вид:

$$F_X(x) = \frac{x^{1/\theta}}{2}\mathbb{1}(0 < x < 1) + (1 - \frac{x^{-1/\theta}}{2})\mathbb{1}(x \geq 1).$$

Задача 2.

Будет ли свертка составных пуассоновских распределений также составным пуассоновским распределением?

Решение

Пусть $\widetilde{N}_1$ и $\widetilde{N}_2$ - независимые составные пуассоновские распределения. Тогда их производящие функции имеют следующий вид: $P_{\widetilde{N}_i}(z) = \exp\{\lambda_i(P_i(z) - 1)\}, \quad i = 1, 2$. Тогда

$$P_{\widetilde{N}_1+\widetilde{N}_2}(z) = P_{\widetilde{N}_1}(z) \cdot P_{\widetilde{N}_2}(z) = \exp\{\lambda_1(P_1(z) - 1) + \lambda_2(P_2(z) - 1)\}.$$

Чтобы получившееся распределение было составным пуассоновским необходимо и достаточно чтобы

$$\lambda_1(P_1(z) - 1) + \lambda_2(P_2(z) - 1) = \lambda(P(z) - 1),$$

для некоторой MGF $P(z)$ и некоторого $\lambda > 0$. Пусть $P_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^i z^k$, $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$. Тогда

$$\begin{cases} \lambda_1 p_k^1 + \lambda_2 p_k^2 - \lambda p_k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots \\ \lambda_1 p_0^1 + \lambda_2 p_0^2 - \lambda p_0 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda \\ p_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2 \dots \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \\ \lambda > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

откуда находим

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\lambda_1 p_k^1 + \lambda_2 p_k^2}{\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \lambda = \dfrac{\lambda_1(1 - p_0^1) + \lambda_2(1 - p_0^2)}{1 - p_0}. \end{cases}$$

Откуда видно, что $\lambda > 0$, если $p_0^1 < 1$ или $p_0^2 < 1$. В этом случае и все $p_k \geq 0$. Осталось проверить условие, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_0 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_1 p_k^1 + \lambda_2 p_k^2\right) = p_0 + \frac{\lambda_1(1 - p_0^1) + \lambda_2(1 - p_0^2)}{\frac{\lambda_1(1-p_0^1)+\lambda_2(1-p_0^2)}{1-p_0}} = 1.$$

Итак, зафиксировав $p_0 < 1$ мы однозначно найдем производящую функцию $P(z)$ и $\lambda > 0$ из системы (4.1), если $p_0^1 < 1$ и $p_0^2 < 1$. Если же $p_0^1 = p_0^2 = 1$, то подойдет $P(z) = 1$ и произвольное $\lambda > 0$. В любом случае, получаемя, что свертка составных пуассоновских распределений есть составное пуассоновское распределение.

Задача 3.

Проверить, что отрицательное биномиальное распределение - это пуассоновско-логарифмическое распределение.

Решение

Логарифмическое распределение определяется следующим образом

$$p_k = \frac{\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}}{k \ln(1+\beta)}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Найдем производящую функцию логарифмического распределения. Пусть $z \leq 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}}{k \ln(1+\beta)} z^k = \frac{\beta}{(1+\beta)\ln(1+\beta)} \int\limits_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi\beta}{1+\beta}\right)^k d\xi =$$
$$= \frac{\beta}{(1+\beta)\ln(1+\beta)} \int\limits_0^z \frac{1}{1 - \frac{\xi\beta}{1+\beta}} d\xi = -\frac{\ln(1 - \frac{z\beta}{1+\beta})}{\ln(1+\beta)}.$$

Тогда производящая функция пуассоновско-логарифмического распределения выглядит следующим образом:

$$\exp\left\{\lambda\left(-\frac{\ln(1-\frac{z\beta}{1+\beta})}{\ln(1+\beta)}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lambda\left(-\frac{\ln(1+\beta-z\beta)}{\ln(1+\beta)}\right)\right\}=(1+\beta-z\beta)^{-\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}}.$$

Производящая функция отрицательного биномиального распределения $NB(a,b)$ имеет следующий вид:

$$(1+b+bz)^{-a}.$$

Положив $\beta=b,\lambda=a\ln(1+b)$ получаем, что отрицательное биномиальное распределение является пуассоновско-логарифмическим.

Задача 4.

Показать, что для составного пуассоновского распределения

$$g_n=\frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n} jf_jg_{n-j}.$$

Решение

Пуассоновское распределение $Pois(\lambda)$ принадлежит классу $(a,b,0)$ с $a=0,b=\lambda,p_0=e^{-\lambda}$. Пусть вторичное распределение задано $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда по теореме Панджера имеем

$$g_n=\frac{1}{1-af_0}\sum_{j=1}^{n}(a+\frac{bj}{n})f_jg_{n-j}=\frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n}jf_jg_{n-j}.$$

Задача 5.

Если первичное распределение принадлежит классу $(a,b,1)$, то справедливо соотношение:

$$g_n=\frac{[p_1-(a+b)p_0]f_n+\sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{bj}{n}\right)f_jg_{n-j}}{1-af_0}.$$

Решение

Рассуждения аналогичные доказательству теоремы Панджера. А именно: перепишем рекурентное соотношение в виде

$$kp_k=a(k-1)p_{k-1}+(a+b)p_{k-1},\quad k=2,3,\ldots.$$

Умножим обе части это равенства на $[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z)$ и просуммируем по k начная с $k=2$:

$$\sum_{k=2}^{\infty}kp_k[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z)=a\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_{k-1}[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z)+(a+b)\sum_{k=2}^{\infty}p_{k-1}[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z). \tag{4.2}$$

Учитывая, что $P(z) = P_1(P_2(z)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k[P_2(z)]^k$, получаем, что 4.2 переписывается в виде:

$$P'(z) - p_1 P_2'(z) = aP_2(z)P'(z) + (a+b)\left[P(z)P_2'(z) - p_0 P_2'(z)\right].$$

Раскладывая левую и правую части в ряд и приравнивая коэффициенты при z^{n-1} получаем:

$$ng_n - np_1 f_n = a\sum_{j=0}^{n}(n-j)f_j g_{n-j} + (a+b)\left[\sum_{j=0}^{n} j f_j g_{n-j} - np_0 f_n\right].$$

Перенося в левую часть все слагаемы связаные с g_n и группируя остальные получаем :

$$g_n(n - anf_0) = nf_n[p_1 - (a+b)p_0] + \sum_{j=1}^{n}(an+bj)f_j g_{n-j}.$$

Разделив обе части на $(n - anf_0)$ окончательно получаем:

$$g_n = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^{n}\left(a + \frac{bj}{n}\right)f_j g_{n-j}}{1 - af_0}.$$

ДЗ 5

Выпуклый порядок. Свойства инвариантности стоп-лосса. Сравнение биномиальной, пуассоновской и отрицательной биномиальной моделей.

Задача 1.

Пусть $<_b$ - полный порядок всех рисков для лица b из некоторого множества B лиц, принимающих решения. Определим бинарное отношение $<_a$ на множестве рисков следующим образом: $X <_a Y$ тогда и только тогда, когда $X <_b Y$ для всех $b \in B$. Доказать, что $<_a$ - частичный порядок, (отражающий предпочтения всех лиц из мн-ва B).

Решение

Необходимо проверить свойства рефлексивности, транзитивности и антисимметричности.

Рефлексивность $X < X$. Возьмем произвольное $b \in B$. $X <_b X$ - поскольку $<_b$ - рефлексивно. В силу произвольности $b \in B$ получаем, что $X <_a X$.

Транзитивность $X < Y,\ Y < Z \Rightarrow X < Z$. Пусть $X <_a Y,\ Y <_a Z$. Значит $X <_b Y\ \forall b \in B$ и $Y <_b Z\ \forall b \in B$. Возьмем произвольное $b \in B$. Тогда, поскольку $<_b$ - полный порядок на множестве рисков для лица b, то $X <_b Z$ по транзитивности для порядка $<_b$. В силу произвольности $b \in B$ получаем, что $X <_a Z$.

Антисимм-ть $X < Y,\ Y < X\ \Rightarrow X = Y$. Пусть $X <_a Y$ и $Y <_a X$. Т.е. $X <_b Y$ и $Y <_b X$ $\forall b \in B$. Возьмем произвольное $b \in B$. Из $X <_b Y$ и $Y <_b X$ следует, что $X = Y$ из антисимметричности $<_b$. В силу произвольности $b \in B$ получаем, что из $X <_a Y$ и $Y <_a X$ следует, что $X = Y$.

Итак, мы доказали, что отношение $<_a$ обладает свойствами транзитивности, рефлексивности и антисимметричности. Значит отношение $<_a$ является частичным порядком на множестве всех рисков, который учитывает предпочтения всех лиц b из множества B.

Задача 2.

Предположим, что $X_1 <_{st} X_2$. Можно ли (на том же самом вероятностном пространстве) найти такую случайную величину X_2', чтобы $X_1 <_1 X_2'$ и $X_2 \stackrel{d}{=} X_2'$?

Решение

Определим вероятностное пространство следующим образом: $\Omega = \{0,1\},\ \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{3}{4}, \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\varnothing) = 0$. Определим случайные величины как $X_2 = \mathbf{1}_{\{0\}}(\omega),\ X_1 = \mathbf{1}_{\{1\}}(\omega)$, где $\mathbf{1}_{\{i\}}(\omega)$ - индикатор точки i. Легко видеть, что $X_1 <_{st} X_2$. Однако, не существует $X_2' \stackrel{d}{=} X_2$, т.ч. $X_1 <_1 X_2'$. Действительно, пусть существует. Тогда $X_2'(1) \geq 1 = X_1(1)$. Поскольку $\mathbb{P}(X_2' = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{4}$ то $X_2'(1) = 0$, так как $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ A = \{1\}$. Противоречие.

Задача 3.

Доказать свойство 3° непосредственно, пользуясь определением свертки. Будут ли выполнены свойства $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ для стохастического порядка?

Решение

Свойство 3°: $F_1 \prec F_2,\ G:\ F_k * G \in B_{\prec},\ k = 1,2 \ \Rightarrow\ F_1 * G \prec F_2 * G$.

Пусть $F_1 <_{st} F_2$. Тогда $F_1(t) \geq F_2(t),\ \forall t$. Тогда получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x+y \leq t) dF_1(x) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x+y \leq t) dF_2(x),\ \forall y \in \mathbb{R},$$

поскольку вариация функции $F_1(t)$ с учетом знака на луче $(-\infty, z]$ больше или равна вариации функции $F_2(t)$ на том же луче $\forall z \in \mathbb{R}$. Поскольку $G(t)$ - монотонно неубывает на всей прямой, то интеграл римана-стилтьесса сохраняет неравенства, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x+y \leq t) dF_1(x) dG(y) \geq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x+y \leq t) dF_2(x) dG(y),\ \forall y \in \mathbb{R},$$

что равносильно

$$G * F_1 <_{st} G * F_2.$$

Задача 4.

Сохраняется ли стохастический порядок при взятии составных распределений?

Решение

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ - н.о.р., N - неотрицательная, целочисленная случайная величина не зависящая от $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $p_k = \mathbb{P}(N = k)$. $S_n = \sum_{k=1}^{n},\ S_0 = 0$. Тогда

$$P(S_N \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{P}(S_k \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x).$$

Из задачи 2 и замечания к задаче 2 следует, что если $F_1 <_{st} F_2$, то $F_1^{*k} <_{st} F_2^{*k}$. Действительно, для $k = 1$ - это верно. Пусть верно для $k = n - 1$, докажем для $k = n$.

$$F_1^{*(n-1)} <_{st} F_2^{*(n-1)} \implies F_1^{*(n-1)} * F_2 <_{st} F_2^{*n}.$$

$$F_1 <_{st} F_2 \implies F_1^{*n} <_{st} F_1^{*(n-1)} * F_2$$

Пользуясь транзитивностью стохастического порядка получаем требуемое утверждение.

Из определения стохастического порядка видно, что если $\sum_{k=0}^n p_k^n = 1,\ p_k^n \geqslant 0$ и $F_{1,k}k <_{st} F_{2,k}\ \forall k$, то $\sum_{k=0}^n p_k^n F_{1,k} <_{st} \sum_{k=0}^n p_k^n F_{2,k}$, или, что тоже самое (по определению стохастического порядка)

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^n F_{1,k}(t) \geq \sum_{k=0}^{n} p_k^n F_{2,k}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Переходя к пределу по n в последнем неравенстве, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k F_{1,k}(t) \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_{2,k}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

или, равносильно

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k F_{1,k} <_{st} \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_{2,k}.$$

Применяя все написаное выше непосредственно к нашей задаче, получаем: если $F_1 <_{st} F_2$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k F_1^{*k} <_{st} \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_2^{*k}.$$

Итак, получаем следующее утверждение: пусть $\{X_k^i\}_{k=1}^\infty$ - н.о.р. с функцией распределения $F_i(x)$, $i = 1, 2$, N - неотрицательная целочисленная с.в. . Пусть также $F_1 <_{st} F_2$. Определим $S_n^i = \sum_{k=1}^n,\ S_0^i = 0$, $G_i(x) = \mathbb{P}(S_N \leq x),\ i = 1, 2$. Тогда $G_1 <_{st} G_2$, т.е. взятие составного распределения сохраняет стохастический порядок.

Задача 5.

Если $\mathbb{E}X = m$, то $m <_{sl} X$.

Решение

Покажем, что $\mathbb{E}\max(d, m) \leq \mathbb{E}\max(d, X)$, что эквивалентно $m <_{sl} X$. Пусть $d > m$. Тогда $\max(d, m) = m$. Тогда $d \leq \max(d, X)$ и, следовательно $\mathbb{E}d \leq \mathbb{E}\max(d, X)$. Пусть $m \geq d$. Тогда, поскольку $X \leq \max(d, X)$ и $\max(m, d) = m$,то $m = \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}\max(X, d)$. Итак, получили что $\forall d \in \mathbb{R}\quad \mathbb{E}\max(d, m) \leq \mathbb{E}\max(d, X)$, т.е. $m <_{sl} X$.

ДЗ 6

Тарифный принцип, нагрузка в явном и неявном виде. Порядок отношения правдоподобия и экспоненциальный порядок.

Задача 1.

Пусть число наступления событий N имеет распределение Пуассона с параметром λ. События классифицируются на m групп, причем каждое из них, независимо от остальных, принадлежит i-й группе с вероятностью p_i. Тогда случайные величины N_i, $i = \overline{1, m}$, независимые пуассоновские с параметрами $p_i\lambda$. (N_i - число событий в группе i.)

Решение

Пусть η_k – номер класса события k. Тогда

$$\mathbb{P}(\eta_k = i) = p_i. \tag{6.1}$$

Из условия задачи имеем

$$N_i = \sum_{k:\ \eta_k = i} 1 = \sum_k \mathbb{1}(\eta_k = i). \tag{6.2}$$

Найдем искомое распределение:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_i = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k, \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k, \sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k\right) \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{k} \mathbb{1}(\eta_k = i) = n\right) = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \binom{k}{n} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{n!(k-n)!} p_i^n (1-p_i)^{k-n} = \\ = \frac{p_i^n e^{\lambda} \lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_i))^k}{k!} = \frac{(\lambda p_i)^n}{n!} e^{-\lambda p_i}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Получили искомое распределение. Остается проверить независимость. Это свойство очевидно следует из независимости η_k.

Задача 2.

Проверить, что биномиальные распределения с параметрами n и p растут стохастически по p при фиксированном n и стохастически растут по n при фиксированном p.

Решение

1. Фиксируем n. Пусть $p_1 < p_2$. Тогда хотим

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \geq \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} = P(X_2 = k). \tag{6.4}$$

На биномиальный коэффициент можно не обращать внимания, так как он не зависит от p. Тогда нужно проверить неравенство

$$p_1^k (1-p_1)^{n-k} \geq p_2^k (1-p_2)^{n-k}. \tag{6.5}$$

Обозначим $a = p_2/p_1 > 1, p_1 = p$. Имеем:

$$\underbrace{a^k}_{<1} \left(\frac{1-ap}{1-p}\right)^{n-k} < \dots? \tag{6.6}$$

$$\frac{1-ap}{1-p} \; ? \; 1 \tag{6.7}$$

$$1 - ap \ ? \ 1 - p \tag{6.8}$$

Отсюда следует, что $?$ это $<$. Таким образом, в (6.6) можно поставить 1 вместо многоточия, и имеем стохастическую монотонность.

2. Фиксируем p. Пусть $n_1 < n_2$. Тогда хотим

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1 - k} \geq \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2 - k} = P(X_2 = k). \tag{6.9}$$

Хотим

$$\frac{n_1!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1} \geq \frac{n_2!}{(n_2 - k)!}(1-p)^{n_2} \tag{6.10}$$

Хотим

$$\frac{n_1!}{n_2!}\frac{(n_2 - k)!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1 - n_2} \geq 1 \tag{6.11}$$

Имеем

$$\frac{n_1!}{n_2!}\frac{(n_2 - k)!}{(n_1 - k)!}(1-p)^{n_1 - n_2} \geq \frac{n_1!}{n_2!}\frac{(n_2 - n_1)!}{1}(1-p)^{n_1 - n_2} > 1 \tag{6.12}$$

Задача 3.

Верно ли, что $DY \geq DX$, если $X <_v Y$?

Решение

Пусть $X <_v Y$. По определению это означает, что $\exists Z\colon \mathbb{E}\left[Z|X\right] \overset{\text{a.s.}}{\geq} 0$ и $X + Z \overset{\text{law}}{=} Y$. Более того, знаем, что $X <_v Y \iff X <_{sl} Y, X <_{st} Y$. А отсюда следует необходимость данного стохастического порядка. Рассмотрим

(a) $X \sim U[1,3]$, $\operatorname{var} X = 1/3$;

(b) $Y \sim U[3,4]$, $\operatorname{var} Y = 1/12$.

Есть стохастический и стоп-лосс, а значит, выполнено $X <_v Y$. Но $\operatorname{var} X > \operatorname{var} Y$, что противоречит условию.

Задача 4.

Пусть риск X равномерно распределен на $[0,2]$, а Y имеет показательное распределение с параметром 1, тогда $X <_{sl} Y$.

Решение

Пусть $0 < d < 2$.

$$\mathbb{E}\left[(X-d)^+\right] = 0.5\int_d^2 (x-d)dx = 0.5\frac{4-d^2}{2} + 0.5(d-2)d = 1 - d + 0.25d^2, \tag{6.13}$$

$$\mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right] = \int_d^\infty (y-d)e^{-(y-d)-d}dy = e^{-d}\int_0^\infty ye^{-y}dy = e^{-d}. \tag{6.14}$$

Очевидно, что когда $d \geq 2$, то $0 = \mathbb{E}\left[(X-d)^+\right] < \mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right]$. Таким образом, $X <_{sl} Y$.

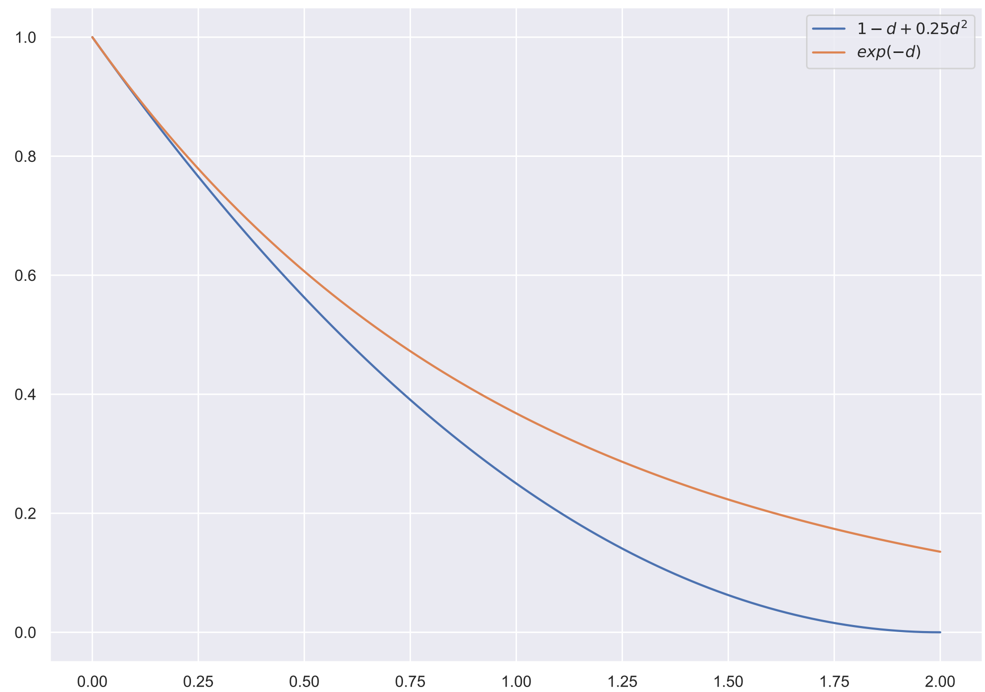

Рис. 6.1: Графики функций $\mathbb{E}\left[(X-d)^+\right]$ и $\mathbb{E}\left[(Y-d)^+\right]$ при $d \in [0,2]$

ДЗ 7

Порядок Лоренца. Операции, ослабляющие и сохраняющие порядок. Взвешивание и смеси.

Задача 1.

Стохастический порядок не сохраняется для премии Эсшера. Пример: совместное распределение двух рисков X и Y задается следующим образом при некотором $h > 0$: $P(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $P(X = 0, Y = 2/(3h)) = 1/3$, $P(X = 3/h, Y = 3/h) = 1/3$.
Необходимо проверить, что $X <_{st} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

Решение

Премия Эсшера:

$$\Pi(X,h) = \Pi_X = \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{hX}\right]}{g_X(h)} = \frac{g_X'(h)}{g_X(h)} \tag{7.1}$$

Из условия следуют совместные распределения X и Y:

x	0	$3/h$
$P(X=x)$	$2/3$	$1/3$

y	0	$2/(3h)$	$3/h$
$P(Y=y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

По определению стохастического порядка получаем, что $X <_{st} Y$ (см. рис. 7). Теперь сравним соотвествующие премии:

$$g_X(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t}, \qquad g_X'(t) = \frac{1}{h}e^{\frac{3}{h}t}; \tag{7.2}$$

$$g_Y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3h}t}, \qquad g_Y'(t) = \frac{1}{h}e^{\frac{3}{h}t} + \frac{2}{9h}e^{\frac{2}{3h}t}. \tag{7.3}$$

Отсюда получаем

$$\Pi_X = \frac{\frac{1}{h}e^3}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{h}t}}; \tag{7.4}$$

$$\Pi_Y = \frac{\frac{1}{h}e^3 + \frac{2}{9h}e^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}}. \tag{7.5}$$

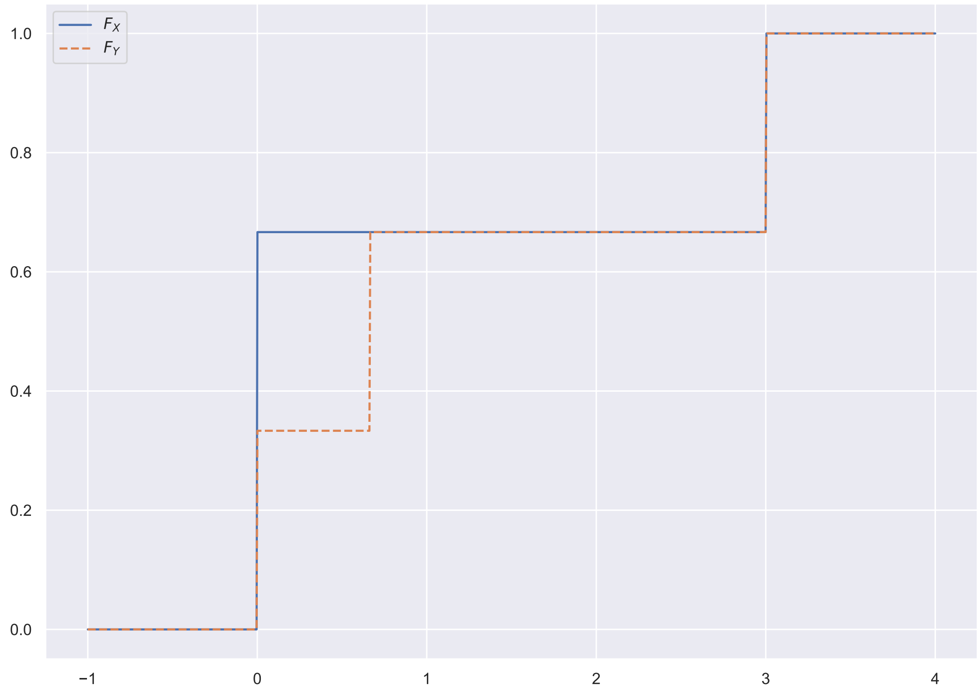

Рис. 7.1: Функции распределения X и Y

Посчитаем отношение премий:

$$\frac{\Pi_X}{\Pi_Y} \approx 1.02091201055381, \tag{7.6}$$

что означает, что $\Pi_X > \Pi_Y$.

Задача 2.

Сохраняется ли стохастический порядок рисков при подсчете премий по принципу среднего квадратичного?

Решение

Премия, посчитанная по принципу среднего квадратичного:

$$H(X) = \mathbb{E}[X] + \beta \operatorname{std} X. \tag{7.7}$$

Пусть $X \sim Be(0.5)$, $Y \equiv 1$, $\beta = 2$. Тогда

- $\mathbb{E}[X] = 0.5$, $\operatorname{std} X = 0.5$, $H(X) = 1.5$;
- $\mathbb{E}[Y] = 1$, $\operatorname{std} Y = 0$, $H(Y) = 1$.

Но $X <_{st} Y$. Значит, не сохраняется.

Задача 3.

Всегда ли принцип нулевой полезности обеспечивает премию с нагрузкой?

Решение

Пусть экономический агент обладает склонностью к риску ($MU(x)$ не убывает). Тогда его функция полезности будет выпуклой. По неравенству Йенсена имеем

$$\mathbb{E}\left[U(X)\right] \geq U\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right). \tag{7.8}$$

Премия, рассчитанная по принципу нулевой полезности, будет равна

$$P: \quad \mathbb{E}\left[U(P-X)\right] = U(0). \tag{7.9}$$

Из уравнений (7.8) и (7.9) следует, что

$$U(0) = \mathbb{E}\left[U(P-X)\right] \geq U\left(\mathbb{E}\left[P-X\right]\right) = U\left(P - \mathbb{E}\left[X\right]\right) \tag{7.10}$$

Из монотонности полезности имеем, что

$$0 \geq P - \mathbb{E}\left[X\right] \implies P \leq \mathbb{E}\left[X\right]. \tag{7.11}$$

Поэтому эта премия не будет обеспечивать нагрузку.

Задача 4.

Как меняется в смысле порядка $<_e$ семейство показательных распределений при росте параметра?

Решение

По определению: $X \leq_e Y$, если $\forall \alpha > 0 \quad \mathbb{E}\left[e^{\alpha X}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha Y}\right]$.

$$\mathrm{MGF}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha-\lambda} & \alpha < \lambda, \\ \infty & \alpha \geq \lambda. \end{cases} \tag{7.12}$$

Очевидно, что по обоим аргументам функция строго монотонна на области определения. Поэтому экспоненциальный порядок сохраняет порядок на параметрах экспоненциального распределения.

Задача 5.

Экспоненциальный порядок не является полным порядком. Пример: X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, а Y - это смесь двух распределений, сосредоточенного в нуле и экспоненциального с параметром $1/2$, веса равны соответственно $2/3$ и $1/3$. Проверить, что нельзя упорядочить указанные величины в смысле экспоненциального порядка.

Решение

$$\mathrm{MGF}_X(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1, \\ \infty & \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{7.13}$$

$$\mathrm{MGF}_Y(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{3-6\alpha} & \alpha < \frac{1}{2}, \\ \infty & \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{7.14}$$

Отсюда видим, что распределения несравнимы в экспоненциальном смысле.

	MGF_X	MGF_Y
MGF	$\frac{1}{\alpha-1}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3-6\alpha}$
$\alpha = 1/6$	$6/5$	$7/6$
$\alpha = 1/3$	$3/2$	$5/3$

ДЗ 8

Виды и механизмы перестрахования. Пропорциональное перестрахование, квотный договор. Уравновешенность договора, экономические и финансовые условия

Задача 1.

Нарисовать кривую Лоренца для распределения Парето с $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Решение

Найдем квантильную функцию распределения F:

$$y = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha} \;\Rightarrow\; x = \sigma(1-y)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$\int_0^u \sigma(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}} dt = \int_{1-u}^1 \sigma s^{-\frac{1}{\alpha}} ds = \sigma \frac{\alpha - 1}{\alpha}\left(1 - (1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right).$$

Следовательно

$$L_X(u) = 1 - (1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

См Рис 8.1.

Задача 2.

Проверить, что если $X \prec_{Lor} Y$, то $CV(X) \leq CV(Y)$. Верно ли обратное утверждение?

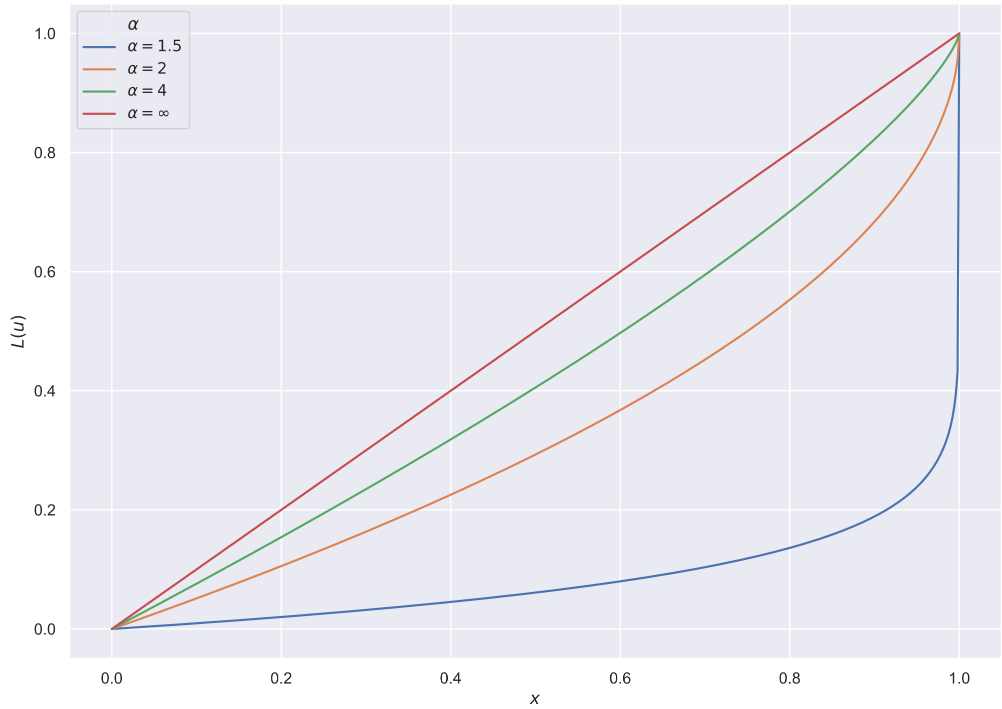

Рис. 8.1: Кривая Лоренца для распределения Парето с разными параметрами

Решение

$$X \prec_{Lor} Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \frac{X}{\mathbb{E}[X]} <_{cx} \frac{Y}{\mathbb{E}[Y]}$$

Имеем:

$$\mathbb{E}[X^2]/(\mathbb{E}[X])^2 \le \mathbb{E}[Y^2]/(\mathbb{E}[Y])^2, \tag{8.1}$$

$$(\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2)/(\mathbb{E}[X])^2 \le (\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2)/(\mathbb{E}[Y])^2. \tag{8.2}$$

Взяв квадратный корень от обеих частей получаем требуемое утверждение. Чтобы показать, что обратное неверно, возьмем случайные величины X, Y со средним, равным 1, $X < C = const$ п.н., Y - неограничена, и $\operatorname{var} X > \operatorname{var} Y$. Подойдут например $X : \mathbb{P}(X = 0) = 2/3, \mathbb{P}(X = 3) = 1/3$ и $Y \sim Exp(1)$. Тогда $\sqrt{2} = CV(X) > CV(Y) = 1$. Но $\mathbb{E}(X-3)^+ = 0 < \mathbb{E}(Y-3)^+ = e^{-3}$. Значит, либо $X <_{cx} Y$ либо X и Y - несравнимы.

Задача 3.

Пусть X и Z - независимые случайные величины, $X \sim \Gamma(1, \lambda^{-1})$, $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. Проверить, что $Y = X/Z$ имеет распределение Парето с функцией распределения $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \ge \sigma > 0$.

Решение

$$\iint_{x/y\le t} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_{x/y\le t} f_X(x)f_Y(y)dxdy =$$

$$= [x/y=u, x=v] = \int_{u\le t}\int_{v\in\mathbb{R}} f_X(v)f_Y(v/u)\frac{|v|}{u^2}dvdu =$$

$$= \int_{0\le u\le t}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{v/\lambda}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha-1} e^{-v/u}\frac{v}{u^2}dvdu =$$

$$= \int_{0\le u\le t}\frac{1}{\Gamma(\alpha)u^{\alpha+1}\lambda}\int_0^{+\infty} v^\alpha \exp\left(-(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{u})v\right)dvdu =$$

$$= \int_{0\le u\le t}\frac{(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{u})^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha)u^{\alpha+1}\lambda}\int_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s\right)dsdu =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_{0\le u\le t}\left(\frac{u}{\lambda}+1\right)^{-\alpha-1}du = \alpha\int_1^{1+t/\lambda} s^{-\alpha-1}ds =$$

$$= 1-(1+t/\lambda)^{-\alpha}.$$

Задача 4.

Показать, что $X <_{st} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(1,2)$, где $U(a,b)$ - равномерное распределение на (a,b).)

Решение

Рассмотрим предложенные случайные величины. $X^* = X/\mathbb{E}[X] = X, Y^* = Y/\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3}Y$. Для любого t $F_X(t) \ge F_Y(t) \iff X <_{st} Y$. Однако, $\frac{2}{3}Y \sim U(2/3, 4/3)$ и $\mathbb{E}[(X^*-4/3)^+] = 1/3 > \mathbb{E}[(Y^*-4/3)^+] = 0$. Следовательно, X^* и Y^* либо несравнимы, либо $Y^* <_{sl} X^*$. Осталось вспомнить, что $Y^* <_{sl} X^* \Leftrightarrow Y <_k X_k$.

Задача 5.

Показать, что $X <_k Y \not\Rightarrow X <_{st} Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$, где $Exp(a)$ - показательное распределение с параметром a.)

Решение

Рассмотрим предложенные случайные величины. $X^* = X/\mathbb{E}X = X,\ Y^* = Y/\mathbb{E}Y = 2Y \sim X \Rightarrow X^* <_{sl} Y^*$, но $\bar{F}_Y(x) = e^{-2x} < e^{-x} = \bar{F}_X(x),\ x \ge 0 \Rightarrow Y <_{st} X$.

Задача 6.

Проверить, что гамма-распределение с $\alpha \ge 1$ и равномерное имеют тип IFR.

Решение

(a) Случай гамма распределения. Для простоты будем рассматривать $1/\lambda(x)$. Необходимо показать, что $1/\lambda(x)$ - убывает по x.

$$1/\lambda(x) = \left(\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{-1} \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} dt = [t - x = u, dt = du] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{x} + 1\right)^{\alpha-1} e^{-\beta u} du$$

не возрастает по x при $\alpha \geq 1$.

(b) Случай равномерного распределения $U(a, b)$.

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{b-a}}{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \frac{1}{b-x},$$

Это выражение возрастает по x.

Задача 7.

Показать, что если $X_i <_{mor} Y_i$, $i \geq 1$, то $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

Решение

Напомним, что $F_{\min_i X_i}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. Действительно, $\mathbb{P}(\min_i X_i < x)$ означает, что хотя бы 1 из X_i меньше либо равен x. Это тоже самое, что

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x, X_{(k+1)} > x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F^k(x)(1 - F(x))^{n-k} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Отсюда, поскольку $\frac{1-F_X(x)}{1-F_Y(x)}$ убывает по x, то

$$\frac{1 - F_{\min_i X_i}(x)}{1 - F_{\min_i Y_i}(x)} = \left(\frac{1 - F_X(x)}{1 - F_Y(x)}\right)^n$$

убывает по x и, следовательно, $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

ДЗ 9

Непропорциональное страхование. Экцедент убытка по риску/катастрофе. Финансовые и экономические условия.

Задача 1.

Рассматривается договор эксцедента убытка по риску XL: $5\,xs\,2$. Предполагается, что возможны 4 возобновления. Добавочные премии за возобновление полосы: 25%, 50%, 100%, 200%. Произошло 8 убытков, их размеры: 5, 10, 7, 4, 6, 8, 3, 9. Первоначальная премия равна 4. Подсчитать размер добавочных премий. Все размеры в млн.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min\{5, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $L = 5 \cdot (4+1) = 25$ – максимальное значение гарантий перестраховщика, $Y = \sum_{i=1}^{8} Y_i$ – суммарные выплаты по обязательствам перестраховщика.

i	X_i	Y_i	Y	XL	добавочная премия
1	3	3	3	3	0.6
2	10	5	8	5	1.6
3	7	5	13	5	3.2
4	4	2	15	2	1.6
5	6	4	19	4	6.4
6	8	5	24	5	1.6
7	3	1	25	1	—
8	9	5	30	—	—

Добавочные премии закончились на 7-м убытке, т.к. мы достигли максимальных гарантий перестраховщика.

Задача 2.

Подсчитать, чему равна премия по договору $3\,xs\,2$ (млн.), если размеры последовательных убытков равнялись 3, 3.4, 3.2, 4.8, 4.4, 7. Предполагается, что применяется скользящая ставка премии от 2% до 5% (при коэффициенте надбавки $100/80$ убытков на гарантии перестраховщика, уже оплаченных или еще не урегулированных). Премия прямого страховщика равна $200 \cdot 10^6$.

Решение

Пусть X_i – указанные убытки, $Y := \min\{3, (X_i - 2)_+\}$ – перестраховое покрытие, $Y = \sum_{i=1}^{6} Y_i = 11.8$.

$$r = \min\{\underbrace{r_{\max}}_{5\%}, \underbrace{\max\{\underbrace{r_{\min}}_{2\%}, \underbrace{\frac{dY}{A}}_{=\frac{100\times 11.8}{8\times 200}=73.75\%}\}}_{73.75\%}\} = 5\%. \tag{9.1}$$

Итого, $P = rA = .05 \times 200 = 10$.

ДЗ 10

Оптимальное перестрахование. Порядки рационального перестраховщика, эксцедента богатства и рассеивания.

ДЗ 11

Апостериорная тарификация. Теория ограниченных флуктуаций. Модель Бюлмана.

Задача 1.

Найти наилучшее приближение X_{t+1} с помощью неоднородной линейной комбинации $X_1, \ldots, X_t$.

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{X}_{t+1} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [1, X_1, X_2, \ldots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_0, \ldots, \beta_t], \tag{11.1}$$

$$\forall s = 0, \ldots, t \quad \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = 0 \tag{11.2}$$

Очевидно, что из $X_0 = 1$ следует несмещенность оценки и выражение β_0 через другие коэффициенты:

$$\beta_0 = \left(1 - \sum_{s=1}^{t} \beta_s\right) m. \tag{11.3}$$

В частности,

$$0 = \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}\right) X_s\right]. \tag{11.4}$$

Итого,

$$\operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = \operatorname{cov}\left[X_{t+1}, X_s\right] - \sum_{u=0}^{t} \beta_u \operatorname{cov}\left[X_u, X_s\right] =$$

$$= a - \sum_{u=1, u \neq s}^{t} \beta_u a - \beta_s(a + s^2) = 0, \tag{11.5}$$

откуда имеем

$$\forall i = 1, \ldots, t \quad \beta_i s^2 = a\left(1 - \sum_{s=1}^{t} \beta_s\right) \implies \forall i = 1, \ldots, t \quad \beta_i = \frac{a}{at + s^2}. \tag{11.6}$$

Задача 2.

Найти наилучшее приближение $\mu(\Theta)$ с помощью однородной линейной комбинации $X_1, \ldots, X_t$.

Решение

Ищем оценку в следующем виде:

$$\hat{\mu} = \beta \cdot \mathbb{X}_t, \quad \mathbb{X}_t = [X_1, X_2, \ldots, X_t]^T, \quad \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_t], \tag{11.7}$$

$$\forall s = 0, \ldots, t \quad \operatorname{cov}\left[X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}, X_s\right] = 0. \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\mu(\theta) - \hat{\mu}\right) X_s\right] &= \operatorname{cov}\left[\mu(\theta) - \hat{\mu}, X_s\right] = \operatorname{cov}\left[\mu(\theta), X_s\right] - \operatorname{cov}\left[\hat{\mu}, X_s\right] = \\ &= \operatorname{cov}\left[\mu(\theta), X_s\right] - \sum_{u=1}^{t} \beta_u \operatorname{cov}\left[X_u, X_s\right] + \mathbb{E}[X_s]\left(\mathbb{E}\left[\mu(\theta)\right] - \sum_{u=1}^{t} \beta_u \mathbb{E}\left[X_u\right]\right) = \\ &= a - \sum_{u=1}^{t} \beta_u a - \beta_s s^2 + m^2\left(1 - \sum_{u=1}^{t} \beta_u\right) = 0\end{aligned} \tag{11.9}$$

Итого,

$$\beta_{\ldots} = \frac{a + m^2}{(a + m^2)t + s^2} \tag{11.10}$$

Задача 3.

Проверить, пользуясь тем, что X_{t+1} и $X_1, \ldots, X_t$ условно независимы при данной Θ, равенство

$$E(X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t) = E(\mu(\Theta)|X_1, \ldots, X_t).$$

Решение

$\mu(\Theta) := \mathbb{E}\left[X_i|\Theta\right]$. Знаем, что

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t, \Theta\right] = \mathbb{E}\left[X_{t+1}|\Theta\right] = \mu(\Theta). \tag{11.11}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mu(\Theta)|X_1, \ldots, X_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t+1}|\Theta\right]|X_1, \ldots, X_t\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t, \Theta\right]|X_1, \ldots, X_t\right] \overset{\text{iterated expectations}}{=} \mathbb{E}\left[X_{t+1}|X_1, \ldots, X_t\right]\end{aligned} \tag{11.12}$$

ДЗ 12

Оценка структурных параметров и модель Бюлмана-Штрауба

Задача 1.

Верны следующие соотношения

(a) $\mathrm{cov}(\mu(\Theta_k), X_{pl}) = a\delta_{kp}$,

(b) $\mathrm{cov}(X_{ki}, X_{pl}) = (a + s^2\delta_{il})\delta_{kp}$,

(c) $\mathrm{cov}(\bar{X}_{k\cdot}(t), \bar{X}_{p\cdot}(t)) = (a + \frac{s^2}{t})\delta_{kp}$, где $\bar{X}_{j\cdot}(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_{ji}$.

Решение

Задача 2.

При выполнении гипотез $(BS1)$ и $(BS2)$ установить следующие соотношения (где δ_{ij} - символ Кронекера):

(a) $\mathrm{cov}(\mu(\Theta_k), X_{pi}) = a\delta_{kp}$,

(b) $\mathrm{cov}(X_{ki}, X_{pj}) = (a + \delta_{ij}\frac{s^2}{W_{ki}})\delta_{kp}$,

(c) $\mathrm{cov}(X_{ki}, X^W_{k.}) = cov(X^W_{k.}, X^W_{k.}) = a + \frac{s^2}{W_{k.}}$,

(d) $\mathrm{cov}(X_{ki}, X^W_{..}) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}}$,

(e) $\mathrm{cov}(X^W_{k.}, X^W_{..}) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\frac{W_{k.}}{W_{..}}$,

(f) $\mathrm{cov}(X^W_{..}, X^W_{..}) = \frac{s^2}{W_{..}} + a\sum_{k=1}^{n}(\frac{W_{k.}}{W_{..}})^2$.

Решение