1. Слабая сходимость вероятностных мер и характеристические функции.

1.1. **Оценка модуля интеграла комплекснозначной функции.** Кратко обсудим оценку модуля интеграла комплекснозначной функции, которую мы уже использовали (*лекция 8*). Мы используем частный случай, рассматривая:

$$\int_a^b h(t)\,dt, \text{ где } h(t) = u(t) + iv(t),\ t \in [a,b],\ i^2 = -1$$

Пусть $a < b$. Тогда этот интеграл мы понимаем, как:

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Определение 1.1. Функция $h(t)$ *измерима по мере Лебега*, если измеримы функции u и v, т.е.

$$h \in L^1(\text{по мере Лебега}), \text{ если } u, v \in L^1$$

NB! 1.1. Если $a > b$, то, по определению

$$\int_a^b h(t)\,dt = -\int_a^b h(t)\,dt$$

Лемма 1.1. *Пусть* $h \in L^1$, $a < b$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |h(t)|\,dt$$

Т.е. перепишем, использую действительную и мнимую часть:

$$\left(\left(\int_a^b u(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_a^b \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}\,dt$$

Доказательство. Рассмотрим 2 случая:

(1) $z = \int_a^b h(t)\,dt = 0$. Тогда очевидно верно
(2) $z \neq 0$. Тогда $z = re^{-i\theta}$, $r > 0 \quad (\theta = arctg(z))$. Тогда

$$r = ze^{-i\theta} \implies r = e^{-i\theta}\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\theta}h(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b Re(e^{-i\theta}h(t))\,dt + i\int_a^b Im(e^{-i\theta}h(t))\,dt$$

Поскольку $r > 0$, то

$$\int_a^b Im(e^{-i\theta}h(t))\,dt = 0 \implies r = \int_a^b Re(e^{-i\theta}h(t))\,dt$$

Очевидно, что $|Re(w)| \leqslant |w|$. Тогда, т.к. $w = v + is$

$$|z| = r \leqslant \int_a^b \left|Re(e^{-i\theta}h(t)\right|\,dt \leqslant \int_a^b |e^{-i\theta}h(t)|\,dt = \int_a^b |h(t)|\,dt$$

Это так, потому что $|e^{-i\theta}| = 1$, точка на окружности.

□

Следствие 1.1. $|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$$\int_a^\alpha e^{it}\,dt = \int_0^\alpha \cos t\,dt + i\int_0^\alpha \sin t\,dt = \sin t\,\Big|_0^\alpha - i\cos t\,\Big|_0^\alpha = -i(e^{i\alpha}-1)$$
Тогда
$$\left|\int_0^\alpha e^{it}\,dt\right| = \left|-i(e^{i\alpha}-1)\right| = \left|e^{i\alpha}-1\right|$$
По лемме 1.1 выше
$$\left|\int_0^\alpha e^{it}\,dt\right| = \left|\int_0^{|\alpha|} e^{it}\,dt\right| \le \int_0^{|\alpha|} \left|e^{it}\right|\,dt = |\alpha|$$
Итак, мы можем написать, что (по формуле Эйлера)

$$\begin{gathered}\left|\int_0^w e^{it}\,dt\right| = \left|\int_a^w \cos t\,dt + i\int_0^w \sin t\,dt\right| = \left|-i(e^{iw}-1)\right| \implies \\ \implies \left|\int_0^w e^{it}\,dt\right| = |e^{iw}-1| \implies \textit{(по лемме 1.1)} \\ \implies \left|\int_0^w e^{iw}\,dt\right| = \left|\int_0^{|w|} e^{it}\,dt\right| \leqslant \int_0^{|w|} \left|e^{iw}\right|\,dt = |w| \implies \\ \implies \left|e^{iw}-1\right| \leqslant |\alpha|, \quad \alpha\in\mathbb{R}\end{gathered}$$
И это то неравенство, которое мы использовали раньше. □

1.2. **Следствие формулы обращения.** У нас была формула, которая позволяла по характеристической функции восстанавливать меру. Напомним, в более общей постановке, что было сделано.

Если дано пространство $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ и мера Q на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, то характеристической функцией $\varphi_Q(t)$ называется (по определению **??**)
$$\varphi_Q(t) \overset{def}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\,Q(dx), \qquad t\in\mathbb{R}^d$$
Здесь и далее (в этой лекции), запись (t,x) означает *скалярное произведение*:
$$(t,x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^n t_k x_k$$
NB! 1.2. Если $x=(x_1,\dots,x_d)$ — случайный вектор, то
$$\varphi_X(t) \overset{def}{=} \varphi_{P_X}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\,P_X(dx) = \mathbb{E}e^{i(t,x)}$$

Теорема 1.1 (Единственность). *Пусть $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$, $d=1$. Тогда функция*
$$F_X(x) = F_Y(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$
Иначе говоря, между характеристическими функциями и функциями распределения (а значит, и распределениями) существует взаимно-однозначное соответствие.

Доказательство. Пусть $D = C(F_X)\cap C(F_Y)$, $C(F_X)$ — точки непрерывности. Множество точек разрыва любой монотонной функции — *не более чем счётно.*

Тогда D получается из $\mathbb{R}$ удалением не более чем счетного числа точек. Тогда, для $a,\ b\in D$, $a\leqslant b$, получаем
$$F_X(b) - F_x(a) = F_Y(b) - F_Y(a)$$

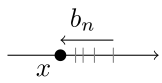
Это так по формуле обращения:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt,\quad \varphi_X(t)=\varphi_Y(t)$$

Устремляем $a\to-\infty,\ a\in D$. Тогда функция распределения сходится к нулю. Тогда

$$F_X(b)=F_Y(b)\quad \forall b\in D$$

Так как D получается выкидыванием не более чем счетного множества точек, то для любой точки x найдем последовательность точек $b_n\in D$, которая справа сходится к x.



Но функция распределения *непрерывна справа*. Значит,

$$F_X(x)=F_Y(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\square$

Теорема 1.2. *Если $\varphi_X(\cdot)\in L^1(\mathbb{R})$, т.е. $\int_{\mathbb{R}}|\varphi_X(t)|dt<\infty$, то случайная величина X имеет непрерывную плотность, которая задается с помощью обратного преобразования Фурье:*

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\varphi_x(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

Доказательство. Заметим, что p — непрерывная функция (это доказывается аналогично тому, как мы доказывали аналогичное утверждение для характеристической функции, когда вместо φ было P. Возьмем $a,b,\in C(F_X)$.

По теореме Фубини

$$\int_a^b p(x)\,dx=\int_a^b\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\varphi_X(t)\int_a^b e^{-itx}dx\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_X(t)\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\varphi_X(t)\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\,dt=F_X(b)-F_X(a)$$

Пояснение.

$$\left|\varphi_X(t)\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right|\leqslant\underbrace{|\varphi_X(t)|}_{\leqslant 1}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right|$$

$$\left|\frac{e^{ita}=e^{-itb}}{it}\right|=\left|\frac{e^{iat}(1-e^{-ibt+iat})}{t}\right|=\frac{\left|e^{-it(b-a)}-1\right|}{|t|}\leqslant\frac{|t(b-a)|}{|t|}=|b-a|$$

Выше мы применили предыдущую лемму 1.1. Значит, функция интегрируема и применение теоремы Фубини законно. Итак, мы доказали, что

$$\forall a,b\in C(F_X):\quad \int_a^b p(x)dx=F_X(b)-F_X(a)\implies$$

$$\implies\int_x^y p(s)ds=F_X(y)-F_X(x)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}\qquad(1.1)$$

NB! 1.3. $p(s)>0$

Доказательство. Предположим, в некоторой точке x_0 $p(x_0)<0$. Тогда в окрестности этой точки функция тоже будет строго меньше 0.

Возьмем $x,y,\ x<y$ из этой окрестности

$$\int_x^y p(s)ds=F_X(y)-F_X(x)<0$$

Это невозможно, так как $x<y$, функция $F_X(t)$ не убывает. $\square$

Итак, по теореме о монотонной сходимости:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} p(s)ds = 1$$

Введем меру $Q(B) = \int_B p(s)\,dx$, где B — борелевское. Тем самым Q — вероятность. Значит

$$Q = P_X \text{ на } \{(a,b], -\infty < a \leqslant b < \infty\}$$

Но множество полуинтервалов— π-система $\implies$ $Q = P_X$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\square$

NB! 1.4. Это формула, в отличие от общей, действует ***не всегда***, так как функция может быть и не интегрируема.

Если $d > 1$, $(a,b] = (a_1,b_1] \times \ldots \times (a_d,b_d]$. Исключим из $\mathbb{R}^d$ вдоль каждой оси не более чем счетное множество точек таких, что P_X от каждой гиперплоскости равно 0. Пусть D полученное множество точек для которых мера положительна. Тогда также получим

$$P_X((a,b]) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-c,c]} \prod_{k=1}^{d} \frac{e^{it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \varphi_X(t)\,dt$$

Аналогично теореме 1.2:

Если $\varphi_X(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то $\exists$ непрерывная плотность

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(tx)} \varphi_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Теорема 1.3. *Для случайного вектора $X = (X_1,\ldots,X_d)$ формула*

$$\varphi_X(t) = \prod_{x=1}^{d} \varphi_{X_k}(t_k)$$

справедлива $\forall t = (t_1,\ldots,t_d) \in \mathbb{R}^d$ в том и только том случае, когда $X_1,\ldots,X_d$ — независимые величины.

Доказательство. **($\implies$)** Пусть $z_1,\ldots,z_d$ — независимые комплекснозначные величины, т.е. $z_k = u_k + iv_k, \quad k = 1,\ldots,d$, и независимы $(u_1,v_1),\ldots,(u_d,v_d)$

Если $z_1,\ldots,z_d$ независимы и $z_k \in L^1(\Omega)$, $k = 1,\ldots,d$, то

$$\mathbb{E}(z_1,\ldots z_d) = \mathbb{E}((u_1+iv_1)\cdot\ldots\cdot(u_d+iv_d)) = \mathbb{E}z_1\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}z_d$$

Если раскрыть скобки в произведении, то получатся слагаемые вида $w_1\cdot\ldots\cdot w_d$, где $w_k = (u_k$ либо $iv_k)$. По лемме о группировке

$$\mathbb{E}(w_1\cdot\ldots\cdot w_d) = \mathbb{E}w_1\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}w_d \qquad \mathbb{E}(v_1\cdot\ldots\cdot v_d) = \mathbb{E}v_1\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}v_d \implies$$
$$\implies (\mathbb{E}u_1 + i\mathbb{E}v_1)\ldots(\mathbb{E}u_d + i\mathbb{E}v_d)$$

Независимость $x_1,\ldots,x_d$ влечет независимость величин

$$\cos t_1x_1 + i\sin t_1x_1,\ \ldots,\ \cos t_dx_d + i\sin t_dx_d$$

Тогда $\varphi_x(t) = \mathbb{E}e^{i(t,x)} = \mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{d} e^{it_kx_k}\right) = \prod\limits_{k=1}^{d}\mathbb{E}e^{it_kx_k} = \prod\limits_{k=1}^{d}\varphi_{x_k}(t_k)$

($\impliedby$) Возьмем независимые $Y_1,\ldots,Y_d$ такие, что распределения совпадают:

$$P_{Y_k} = P_{x_k},\ k = 1,\ldots,d$$

Это возможно по теореме Ламницкого-Улема. Тогда, так как распрделения совпадают:

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{d}\varphi_{Y_k}(t) = \prod_{k=1}^{d}\varphi_{x_k}(t) = \varphi_x(t)$$

По теореме единственности

$$P_X = P_Y = P_{Y_1} \times \ldots \times P_{Y_d} = P_{X_1} \times \ldots \times P_{X_d} \implies x_1, \ldots x_d - \text{независимы}$$

□

Лемма 1.2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^m$. Тогда*

$$\varphi_{x_1+\ldots+x_n}(t) = \prod_1^n \varphi_{x_k}(t), \quad t \in R^m$$

Доказательство. Сами. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы 1.3, экспонента распадается в произведение экспонент. □

NB! 1.5. Обратное не верно.

1.3. Фундаментальная теорема Прохорова.

Определение 1.2. Семейство вероятностных мер $\{Q_n, n \in T\}$ заданных на метрическом пространстве $(S, \mathcal{B}(S))$ называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $(Q'_n)_{n'\in\mathbb{N}}$ к некоторой мере Q.

NB! 1.6. Эта мера Q автоматически вероятностная, но не обязана входить в рассматриваемое семейство.

Определение 1.3. Вероятностные меры Q_n *сходятся слабо* к Q ($Q_n \Rightarrow Q$) на метрическом пространстве $(S, \mathcal{B}(S))$, если $\forall f \colon S \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{B}(S)|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, непрерывной и ограниченной:

$$\int_A f\, dQ_n \to \int_S f\, dQ$$

Определение 1.4. Семейство вероятностных мер $\{Q_n, n \in T\}$ называется *плотными*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ компакт } K_\varepsilon \subset S \colon Q_k(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon \quad \forall u \in T$$

Теорема 1.4 (Прохоров). *Плотное семейство вероятностных мер является слабо отностительно компактным. Если пространство S польское (полное, сепарабельное), то любое слабо отностительно компактное семейство вероятностных мер является плотным.*

Таким образом, на польском пространстве семейство вероятностных мер плотно тогда и только тогда, когда оно слабо относительно компактно.

1.4. Критерий слабой сходимости вероятностных мер.

Лемма 1.3. *Пусть $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — плотное семейство вероятностных мер. Если* ***каждая*** *слабо сходящаяся подпоследовательность $(Q_{n'})$ сходится к одному и тому же пределу Q, то и $Q_n \Rightarrow Q$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $Q_n \not\Rightarrow Q$. Тогда $\exists$ непрерывная и ограниченная $f \colon S \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\int_S f\, dQ_n \not\to \int_S f\, dQ$$

Тогда существует $\varepsilon >$ и подпоследовательность (n') такие, что

$$\left| \int_S f\, dQ_n - \int_S f\, dQ \right| > \varepsilon$$

По теореме Прохорова 1.4 находим подпоследовательность $(n'') \subset (n')$, что

$$Q_{n''} \Rightarrow \widetilde{Q}$$

По условию, $\widetilde{Q} = Q$. Следовательно,

$$\left| \int_S f(x)\, Q_{n''}(dx) - \int_S f(x)\, Q(dx) \right| \to 0$$

Приходим к противоречию. $\square$

Лемма 1.4. *Пусть (Q_n) — плотное семейство мер на $\{\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ Тогда последовательность (Q_n) имеет слабый предел в том и только том случае, когда*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$$

Доказательство. Если $Q_n \Rightarrow Q$, то мы уже видели, что $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$

Обратно. Пусть $\varphi_n(t) \to \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d,\ n \to \infty$.

Поскольку семейство Q_n плотно по условию, найдется подпоследовательность (n') такая, что $Q_{n'} \Rightarrow Q$, где Q некоторая вероятностная мера.

Предположим, что Q_n не имеет слабого предела. Тогда по лемме 1.3 найдется подпоследовательность $(n'') \subset (n')$ такая, что $Q_{n''} \Rightarrow \widetilde{Q}, \quad \widetilde{Q} \neq Q$.

Тогда по условию $\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \exists \lim \varphi_n(t)$, поэтому:

$$\lim_{n'\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\, Q_{n'}(dx) = \lim_{n''\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t,x)}\, Q_{n''}(dx) \implies$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\, Q(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\, \widetilde{Q}(dx)$$

По теореме единственности 1.1, получаем, что $Q = \widetilde{Q}$. Противоречие. $\square$

Дальнейшее было рассказано на консультации.

Не знаю, войдет ли всё в экзамен. Скорее всего — да.

Лемма 1.5. *Пусть φ — характеристическая функция меры Q на $\{\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Тогда $\forall a > 0$*

$$Q\left(\mathbb{R}^d \setminus \left[-\frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right]^d\right) \leqslant \frac{2}{(2a)^d} \int\limits_{[-a,a]^d} (1 - Re(\varphi(t))\, dt$$

Доказательство. Будем доказывать для $d = 1$.

$$Re(\varphi(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos tx\, Q(dx)$$

По теореме Фубини

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} (1 - Re\,\varphi(t))\, dt = \frac{1}{2a} \int\limits_{[-a,a]} \int\limits_{\mathbb{R}} (1 - \cos tx)\, Q(dx)\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} (1 - \cos tx)\, dt\, Q(dx)$$

$$\int_{-a}^{a} \cos tx\, dt = \frac{\sin tx}{x}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{2\sin ax}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Теорему Фубини применять корректно, так как подынтегральная функция ограничена, а значит — интегрируема.

Итак,

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(1-Re\,\varphi(t))\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin ax}{ax}\right)\,Q(dx)\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{2}{a},\frac{2}{a}\right]}\left(1-\frac{\sin ax}{ax}\right)\,Q(dx)\geqslant\frac{1}{2}Q\left(\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{2}{a},\frac{2}{a}\right]\right)$$

Пояснение

$$\left|\frac{\sin u}{u}\right|\leqslant\frac{1}{|u|}\leqslant\frac{1}{2},\qquad |u|\geqslant 2$$

□

Теорема 1.5 (непрерывность, Леви)**.** *Пусть* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность вероятностных мер на* $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)),(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность характеристических функций этих мер. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- *Если* $Q_n\Rightarrow Q$, *то* $\varphi_n(t)\to\varphi(t),\ n\to\infty\quad\forall t\in\mathbb{R}^d$, *где* φ — *характеристическая функция* Q
- *Если* $\varphi_n(t)\to\varphi(t)\quad\forall t\in\mathbb{R}^d,\ n\to\infty$ *и* φ *непрерывна в точке* $0\in\mathbb{R}^d$, *то* φ *является характеристической функцией некоторой вероятностной меры* Q *и* $Q_n\Rightarrow Q,\ n\to\infty$.

Доказательство. Утверждение 1 *очевидно*, так как

$$\varphi_n(t)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i(t,x)}\,Q_n(dx)\to\int_{\mathbb{R}^d}e^{(t,x)}\,Q(dx)=\varphi(t)\qquad\forall t\in\mathbb{R}^d$$

Для доказательства второго утверждения понадобятся 3 предыдущие леммы (леммы 1.3, 1.4 и 1.5).

Все будем доказывать для случая $d=1$.

$$\varphi_n(t)|\leqslant 1\implies|\varphi|\leqslant 1$$

Заметим, что φ измеримо как предел измеримых функций. Значит, φ — интегрируема. φ непрерывно в точке 0. Значит,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists a=a(\varepsilon)\colon 0\leqslant 1-Re\,\varphi(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$$

NB! 1.7. Комплекснозначная функция непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывны её комплексная и вещественная часть.

Заметим, что $\varphi(0)=1$, так как $\varphi_n(0)=1$.
Тогда

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\underbrace{(1-Re\,\varphi(t))}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{4}}\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-Re\,\varphi_n(t))\,dt\to\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-Re\,\varphi(t))\,dt$$

Значит, $\forall n\geqslant N_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-Re\,\varphi_n(t))\,dt\leqslant\varepsilon$$

Тогда по лемме 1.5

$$Q\left(\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{2}{a},\frac{2}{a}\right]\right)<\varepsilon,\qquad n>N_0$$

Для любой вероятностной меры на $\{\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ верно

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b = b(\varepsilon)\colon P(\mathbb{R} \setminus [-b, b] < \varepsilon$$

Здесь мы воспользовались тем, что $[-b, b] \to \mathbb{R}$ и непрерывностью вероятностной меры.

У нас есть конечное число мер $Q_{n_1}, \ldots, Q_{N_0}$. Найдем $b_n = b_n(\varepsilon)$ такое, что

$$Q_n(\mathbb{R} \setminus [-b_n, b_n]) < \varepsilon, \qquad n = 1, \ldots, N_0$$

Возьмем

$$b_0 = \max\left\{\frac{2}{a(\varepsilon)}, b_1(\varepsilon), \ldots, b_{N_0}(\varepsilon)\right\}$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n(\mathbb{R} \setminus [-b_0, b_0]) < \varepsilon$. Плотность семейства мер Q_n установлена.

По лемме 1.4 получаем, что существует слабый предел $Q_n - Q$. Тогда

$$\psi(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

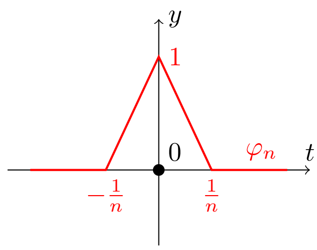
где ψ — характеристическая функция меры Q. Следовательно, φ — характеристическая функция меры Q и $Q_n \Rightarrow Q$ □

Следствие 1.2. *Если Q, Q_n — вероятностные меры, то $Q_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(t) \to \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$*

Пример 1.1. *Условие непрерывности в теореме Леви существенно.*

Возьмем характеристические функции такого вида (см. рис.). Это будут характеристические функции, так как:

Доказательство. Если бы φ_n *была* характеристической функций, то она была бы интегрируема. А значит, существует плотность (и она задается преобразованием Фурье). Эта плотность неотрицательна и интеграл равен 1. Значит, это плотность и мы нашли распределение, которому отвечает φ_n. □



Заметим, что

$$\varphi_n(t) \to \begin{cases} 1, & \text{if } t = 0 \\ 0, & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

Но предельная функция — не характеристическая, так как не непрерывна.