20212108010 刘研

No: Date:

设 $T(n)=aT(\frac{n}{b})+cn^k$，$n>1$，$T(1)=1$. 证明.

$$T(n)=\begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a>b^k \\ O(n^k\log_b n) & a=b^k \\ O(n^k) & a<b^k \end{cases}$$

证：$T(n)=aT(\frac{n}{b})+cn^k=a(aT(\frac{n}{b^2})+c(\frac{n}{b})^k)+cn^k$

$=\cdots$

$=a^tT(\frac{n}{b^t})+a^{t-1}\cdot c\cdot(\frac{n}{b^{t-1}})^k+\cdots+ac(\frac{n}{b})^k+cn^k$

$=a^tT(\frac{n}{b^t})+c\sum_{i=0}^{t-1}a^i\cdot(\frac{n}{b^i})^k$

① 当 $\frac{n}{b^t}=1$ 时. $n=b^t$，$t=\log_b n$. $\therefore a^t=a^{\log_b n}$

$T(n)=a^{\log_b n}T(1)+c\sum_{i=0}^{t-1}a^i(\frac{n}{b^i})^k$

当 $a=b^k$ 时. $T(n)=(b^k)^{\log_b n}+c\sum_{i=0}^{t-1}b^{ki}\cdot\frac{n^k}{b^{ik}}$

$=(b^k)^{\log_b n}+c\cdot n^k\cdot t=n^{\log_b b^k}+cn^kt=n^k(1+ct)$

$=n^k(1+c\cdot\log_b n)$

$\therefore$ 当 $a=b^k$ 时. $T(n)=O(n^k\cdot\log_b n)$

② 当 $a\neq b^k$ 时. $T(n)=a^{\log_b n}T(1)+c\cdot n^k\sum_{i=0}^{t-1}\frac{a^i}{(b^k)^i}$

$=a^{\log_b n}+cn^k\frac{1-\frac{a^t}{b^{kt}}}{1-\frac{a}{b^k}}=n^{\log_b a}+\frac{cn^k(b^k-\frac{a^t\cdot b^k}{(b^t)^k})}{b^k-a}$

$=n^{\log_b a}+\frac{cb^k}{b^k-a}n^k+\frac{cn^k\cdot\frac{a^{\log_b n}}{n^k}\cdot b^k}{a-b^k}$

$=n^{\log_b a}+\frac{cb^k}{b^k-a}n^k+\frac{ca^{\log_b n}\cdot b^k}{a-b^k}$

$=(1+\frac{c\cdot b^k}{a-b^k})n^{\log_b a}+\frac{cb^k}{b^k-a}n^k$

当 $a<b^k$ 时 $\log_b a<\log_b b^k=k$ 即 $n^{\log_b a}<n^k$

$\therefore$ 当 $a<b^k$ 时. $T(n)=O(n^k)$.

当 $a>b^k$ 时. $\log_b a>\log_b b^k=k$. 即. $n^{\log_b a}>n^k$

$\therefore$ 当 $a>b^k$ 时. $T(n)=O(n^{\log_b a})$.

综上：
$$T(n)=\begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a>b^k \\ O(n^k\log_b n) & a=b^k \\ O(n^k) & a<b^k \end{cases}$$