



Resumen I3-I4

Integrantes: Alvaro Romero

Profesor: Vanzi

Auxiliar: Auxiliar 1

Ayudantes:

Fecha de realización: 13 de noviembre de 2022

Fecha de entrega: 13 de noviembre de 2022

Santiago de Chile

Resumen

Este trabajo se genero para el estudio de la interrogacion tres del ramo de señales y sistemas

Índice de Contenidos

1. Conceptos	1
2. Laplace	2
2.1. Propiedades de la transformada de laplace	4
2.2. Transformada inversa de Laplace	6
2.3. Teorema de residuos de cauchy	6
2.4. respuesta de frecuencias y filtros	6
Funcion de transferencia	7
Filtros selectivos de frecuencia	7
3. Señales discretas	11
3.1. Muestreo	11
3.1.1. periodizacion mediante Shah	11
3.2. Interpolacion	12
3.2.1. Teorema del muestreo de Nyquist	15
3.3. Señales y sistemas discretos	16
3.3.1. Señales discretas utiles	16
3.4. Transformaciones de señales discretas	17
3.5. Tipos de convolucion (si tipos..)	17
3.6. Sistemas LTI discretos	18
3.7. Variables de estado (re importante comprenderlas)	19
4. Transformada de fourier en Z	21
4.1. Tiempo discreto DTFT	21
4.2. Frecuencia discreta DFFT	22
4.3. Transformada de Fourier discreta DFT	23
4.3.1. Propiedades y resolucion de frecuencia	27
4.4. Transformada rapida de Fourier FFT	28
5. Transformada Z	30
5.1. Las ROC y convergencia	30
5.2. Propiedades	32
6. Pares de laplace	33
7. Pares de Fourier	34

Índice de Figuras

1. Diferentes tipos de ROC	2
2. Diferentes tipos de ROC	3
3. Derivada en el dominio de Laplace	4
4. Tipos de derivadas en Laplace	5
5. Filtro pasa bajos	8

6.	Filtro pasa altos	9
7.	Filtro pasa altos de segundo orden (rechaza banda)	9
8.	Filtro pasa bandas	10
9.	Funcion Shah de periodo T	11
10.	Muestreo	12
11.	Interpolacion de orden 0	13
12.	Interpolacion de orden 1	14
13.	Interpolacion ideal	14
14.	Teorema de nyquist	15
15.	Sinc en convolucion	16
16.	Convolucion circular	18
17.	Formulacion matricial variables de estado	19
18.	Respuesta total sistema discreto	20
19.	DTFT rect discreto	21
20.	DTFT Exponencial compleja	22
21.	iluminacion DFFT O CTFS	23
22.	Informacion en la DFT	24
23.	FT,DTFT,DFFT y DFT	25
24.	Espectro DFT	26
25.	Matriz DFT	26
26.	Derrame (leaking)	27
27.	Fft N=16	28
28.	fft N=8 a detalle	29
29.	Las ROC en Z	31
30.	diagrama de polos y ceros en Z	31
31.	Pares de laplace Relevantes	33
32.	Pares de Fourier	34

1. Conceptos

1. Ancho de banda limitado = es cuando una señal tiene una frecuencia mínima y una máxima ambas no infinitas. Esta puede ser representada entre la multiplicación entre una transformada de Fourier y un rect correctamente escalado y desplazado
 2. ancho de tiempo limitado = es cuando una señal tiene una duración de tiempo no finita, puede ser modelado mediante la multiplicación de la señal con un rect correctamente escalado y desplazado
- Por ende una señal no puede tener un ancho de tiempo y de banda limitado a la vez.

2. Laplace

La transformada de laplace es de cierta manera muy parecida a Furier, ya que ambos cambian el dominio en el cual se trabaja y entre ellos existe una conexion, ya que Furier trabaja en el dominio de las frecuencias (w) y laplace tambien trabaja dentro del dominio de las frecuencias a exepcion de un termino extra, los reales.

Por ende la gran diferencia es que en Furier ocupamos e^{-iw} siendo $w = 2\pi u$ en cambio en Laplace la transformada es un tanto distinta e^{-st} siendo $s = \sigma + iw$ este pequeño cambio permite que cualquier funcion localmente integrable pueda pasar a la transformada de laplace ,a diferencia de fourier que las funciones debian estar en el dominio L_1

Algunas características de la transformada de Laplace es que esta puede ser unilateral o bilateral. Esto significa que en la integracion no necesariamente tiene que ser de $+\infty$ a menos infinito, tambien permite de 0 a infinito o de $-\infty$ a 0. Dentro de las señales esto es muy relevante ya que en su gran mayoria son unilaterales.

Cabe recalcar que cualquier funcion puede ser unilateral si esta multiplicada por un escalon.

$$L[f](s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} \quad (1)$$

Anteriormente se menciona que toda funcion localmente integrable puede ser transformada mediante laplace, relamente esto no es tan así, necesita cumplir un cierto requisito llamado ROC, esto se denomina la region de convergencia. Si dos señales distintas difren respecto a la region de sus ROCs esta transformada no existe. Si bien la transformada de Furier tiene sentido fisico, laplace no tiene una real interpretacion fisica.

Continuando con la region de convergencia, esta queda definida dependiendo de si es unilateral o bilateral.

de la siguiente manera. Una señal unilateral izquierda, es decir va de $-\infty$ a 0, su ROC queda definida mediante su mayor polo, hacia la izquierda, en una señal unilateral derecha esta esta definida mediante su menor polo hacia la derecha y una señal bilateral esta definida mediante sus polos interiore, ademas de que su zona de convergencia queda encerrada entre los polos.

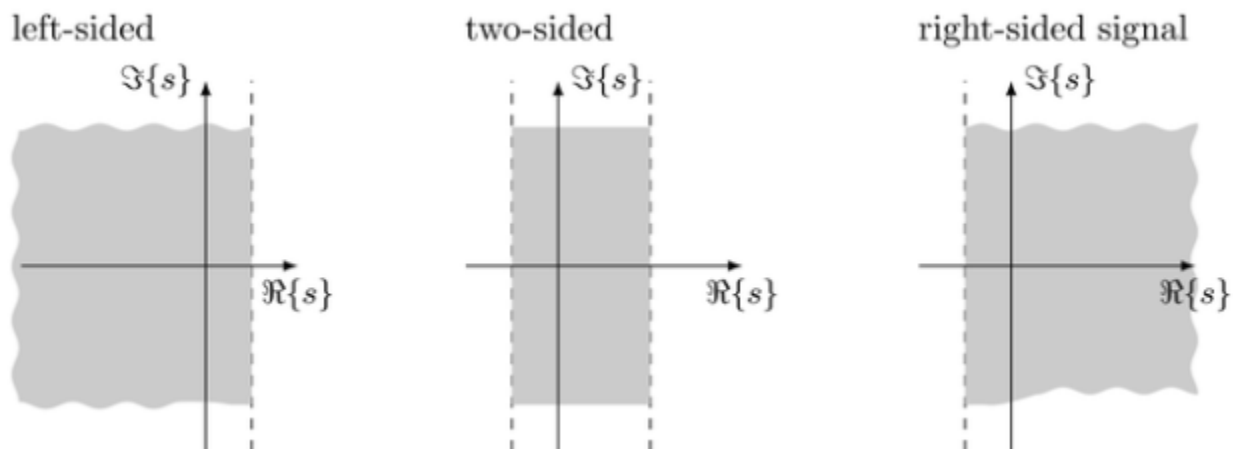


Figura 1: Diferentes tipos de ROC

Siendo las areas grises los valores de s para los cuales la transformada de laplace converge
Algunos ejemplos.

Encuentre $H(s)$ y diga la región de convergencia para $h(t) = e^{-(at)}u(t) + e^{-(bt)}u(-t)$

Al separa esto en dos términos obtenemos que las funciones de transferencia y la respectivas regiones de convergencia de

$$\forall s, \Re(s) > -a : \left(H_1(s) = \frac{1}{s+a} \right)$$

y

$$\forall s, \Re(s) < -b : \left(H_2(s) = \frac{-1}{s+b} \right)$$

Combinando esto obtenemos la región de convergencia de $-b > \Re(s) > -a$. Si $a > b$, podemos representar esto gráficamente. Si no, no abra una región de convergencia.

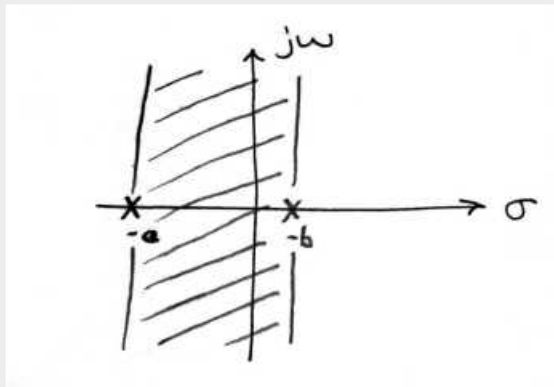


Figura 2: Diferentes tipos de ROC

2.1. Propiedades de la transformada de laplace

Como la transformada de laplace es una aplicacion lineal, podemos deducir varias propiedades tal que Homogeneidad

$$af(t) \rightarrow aF(s) \quad (2)$$

Superposicion

$$f(t) + g(t) \rightarrow F(s) + G(s) \quad (3)$$

Desplazamiento, siempre y cuando ROC $\alpha < \sigma < \beta$

$$L[f(t-a)u(t-a)](s) = e^{-as}L[f](s) \dots y \dots L[e^{-bt}f(t)](s) = L[f](s+b) \quad (4)$$

Ejemplo.

$$L[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{-----} >, L[t^n e^{at}](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (5)$$

Escalamiento, siempre y cuando ROC $\alpha, \frac{\sigma}{a}$

$$L[f_a(t)](s) = \frac{1}{|a|} L[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \quad (6)$$

Derivada existen dos tipos, bajo el dominio de laplace

Derivada en el dominio de Laplace

$$\frac{d^m \mathcal{L}\{f\}(s)}{ds^m} = \int_{\mathbb{R}^+} (-t)^m f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{(-t)^m f\}(s)$$

Figura 3: Derivada en el dominio de Laplace

y la derivada en el dominio del tiempo

$$L[f'(t)](s) = sL[f](s) - f(0^+) \quad (7)$$

Ejemplo importante de ambas.

Consideremos la función $f(t) = te^{-at}$. Su Transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{te^{-at}\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) \quad \text{Re}\{s\} > a$$

En la misma forma, la Transformada de Laplace de $g(t) = t \sin t$ está dada por

$$\mathcal{L}\{t \sin t\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{Re}\{s\} > a$$

Figura 4: Tipos de derivadas en Laplace

Integracion f desaparece en t=0.

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{L[f](s)}{s} \quad (8)$$

Convolucion, suponiendo dos funciones causales f y g

$$L[f * g](s) = L[f](s)L[g](s) \rightarrow F(s)G(s) \quad (9)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{|s| \rightarrow 0^+} sL[f](s) = f(+\infty) \quad (10)$$

y el teorema del valor inicial es lo mismo solo que S tiende al infinito y f a 0

La transformada de laplace de un impulso.

$$L[\delta](s) = 1 \quad (11)$$

Propiedad interesante (al menos para mi)

$$L[D^1\delta](s) = s \quad (12)$$

$$L[D^n\delta](s) = sL[D^{n-1}\delta] = s^n \quad (13)$$

Multiplicacion (relevante recordar siempre, consejo de mi)

$$(fg)(t) = F(s) * G(s) \quad (14)$$

2.2. Transformada inversa de Laplace

Si bien sabemos que se puede pasar al dominio de laplace , tambien se puede devolver al dominio de la frecuencia. Esta se puede resolver de multiples formas, pero su definicion exacta seria la siguiente.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int L[f](s)e^{st} ds \text{ --- } > \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{\omega-iw}^{\omega+iw} L[f](s)e^{st} \quad (15)$$

Esta es la manera de invertir Laplace matematicamente correcto.

Tambien se tiene que siempre la transformada de una funcion podra ser escrita mediante funciones racionales, esto permite la utilizacion de dos metodos, Fracciones parciales y el teorema de residuos de cauchy (personalmente prefiero cauchy ya que sirve en cualquier funcion a diferencia de las fracciones parciales).

Resumen rapido de fracciones parciales

Para utilizar este metodo hay que dividir el polinomio en sus distintos componentes para asi encontrar una solucion de cada termino, las fracciones a utilizar quedan definidas por el numero de polos del polinomio.

2.3. Teorema de residuos de cauchy

Este teorema prove la forma mas general y sencilla de resolver la transformada inversa de Laplace, para esta resolucion se tienen que identificar los polos de la fracion para luego utilizarlos con la formula siguiente

$$\lim_{s \rightarrow s_n} f(s)(s - s_n)e^{st} \quad (16)$$

Polo de orden 1

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \frac{d}{ds} (f(s)(s - s_n))^2 e^{st} \quad (17)$$

Polo de orden 2

2.4. respuesta de frecuencias y filtros

Como primera parte tenemos algo bastante relevante, las exponenciales complejas son autofunciones de cualquier sistema LTI, esto se puede demostrar a continuacion.

$$g(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (18)$$

Esto es un sistema de toda la vida , cierto? bueno remplazemos f(t) con e^{st}

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}^{\text{Laplace}} = e^{st}H(s) \quad (19)$$

Este mismo proceso sirve para furier!! solo hay que remplazar s por iw y listooo!!
las exponenciales son autofunciones de cualquier **sistema LTI**

Funcion de transferencia

Muy parecido a la respuesta de frecuencia de un sistema la funcion de transferencia satisface la misma ecuacion

$$G(s) = F(s)H(s) \quad (20)$$

Donde $H(s)$ es la funcion de transferencia , y por arte de magia si $s=i\omega$ la funcion de transferencia se convierte en la respuesta de frecuencia de un sistemaaaa!

Esta puede ser representada en terminos de su magnitud y fase, tal que

$$H(s) = |H(s)|e^{i\angle H(s)} \quad (21)$$

Esto permite obtener el siguiente analisis

1. La funcion $F(s)$ tiene una magnitud directamente proporcional a la multiplicacion de los vectores 0 y al mismo tiempo inversamente proporcional a la multiplicacion de los vectores polos
2. La funcion $F(s)$ tiene una fase igual a la suma de los angulos de los vectores 0 menos la suma de los angulos de los vectores polos.

Filtros selectivos de frecuencia

He aqui la parte a mi parecer mas "entretenida" de los polos y ceros. ya que al mover estos de forma cautelosa y estudiada, se pueden generar curvas de respuesta de frecuencia especificas. Esto significa que ciertas frecuencias se atenuaran y otras aumentaran. es decir la funcion de transferencia es un filtro selectivo en frecuencia , cuando se restringe al eje imaginario.

Para empezar partiremos con el filtro mas sencillo. Un filtro pasabajos de primer orden, es decir un solo polo o monopolio.

Este se caracteriza por su sencilla forma

$$F(s) = \frac{1}{s + a} \quad (22)$$

Este filtro lo que genera es que genera un polo en $-a$ (cabe recalcar que si el filtro estuviera en $+a$ este seria completamente inestable, ya veremos por que), cual mientras mas cerca este del 0 mas amplificara la frecuencia que este en s . Esto se debe a que como antes se menciono la magnitud es inversamente proporcional a la multiplicacion de los vectores polos, por ende mientras mas pequeño sea el vector del polo mas grande sera la amplificacion de este.

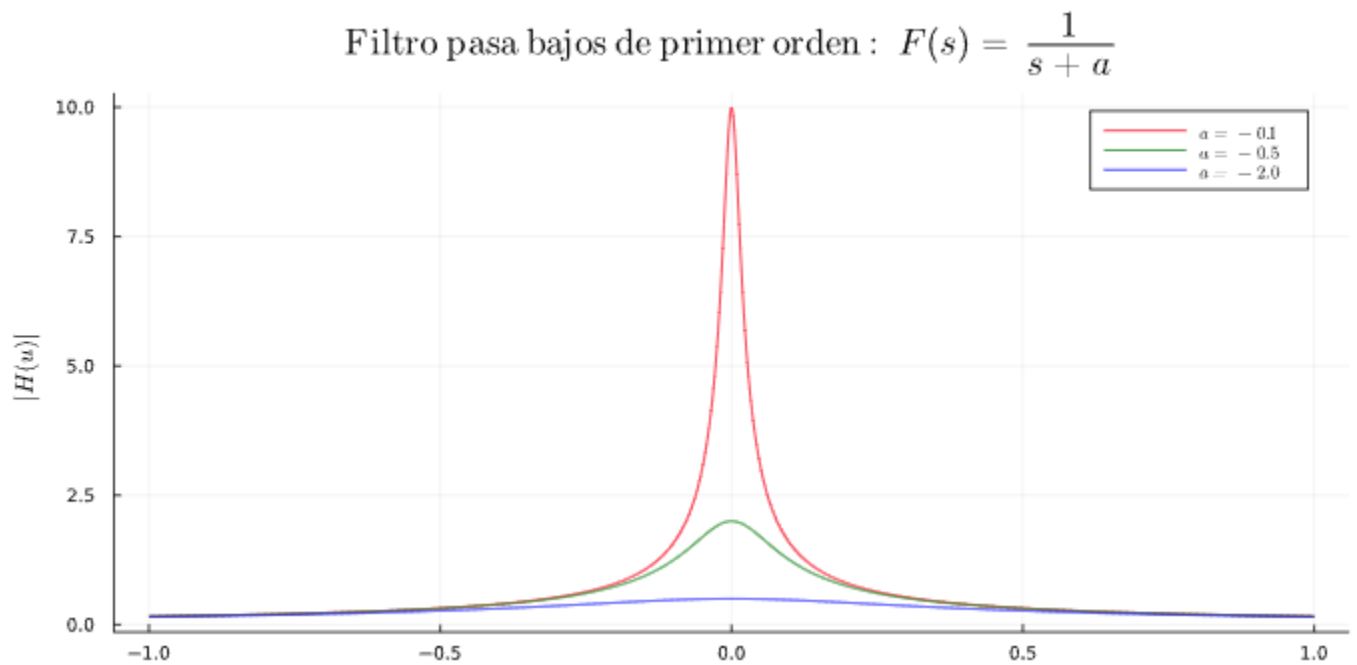


Figura 5: Filtro pasa bajos

Con esta misma logica pero al revez se puede generar un pasa altos de la siguiente manera

$$F(s) = s + a \quad (23)$$

de forma contraria al pasa bajos, este filtro a medida que a se acerca a 0 , las frecuencias se atenúan, ya que cumple con la regla 1 de los filtros de frecuencia, mas cerca al ser un 0 es proporcional.

Filtro pasa altos de primer orden : $F(s) = s + a$

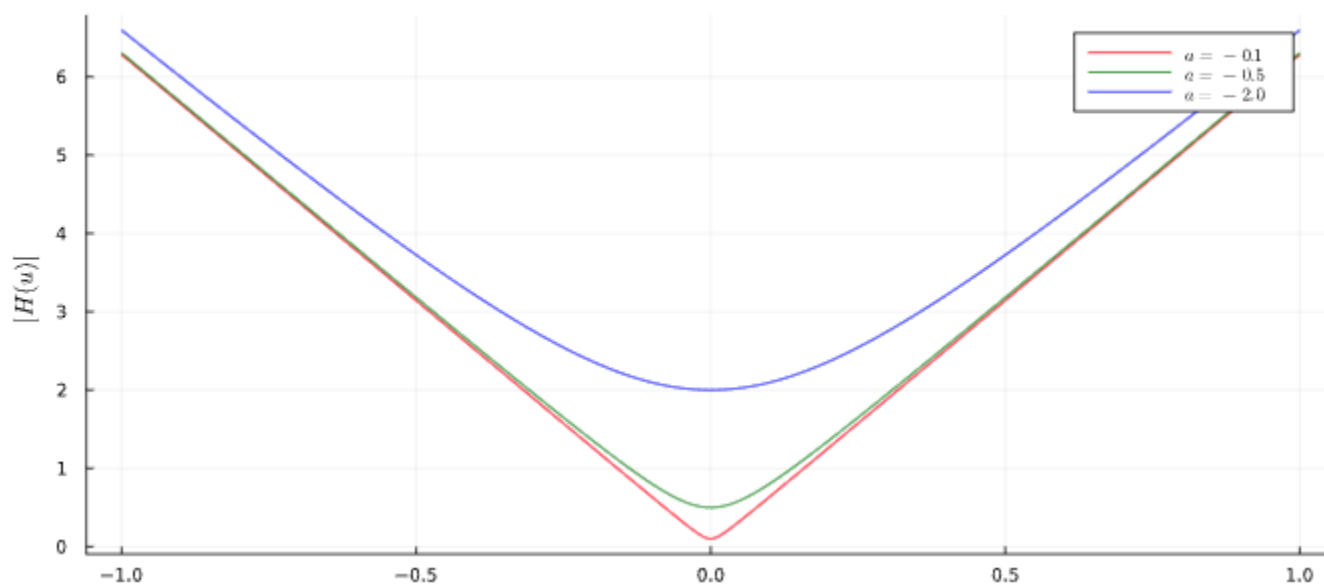


Figura 6: Filtro pasa altos

Si creamos un filtro pasa altos de segundo orden , generamos realmente un filtro rechaza banda.

$$F(s) = (s + c)(s + c^*) \quad (24)$$

Siempre que c pertenezca a los complejos, lo que se genera es una atenuacion de la frecuencia mas cercana a la posicion de los ceros.

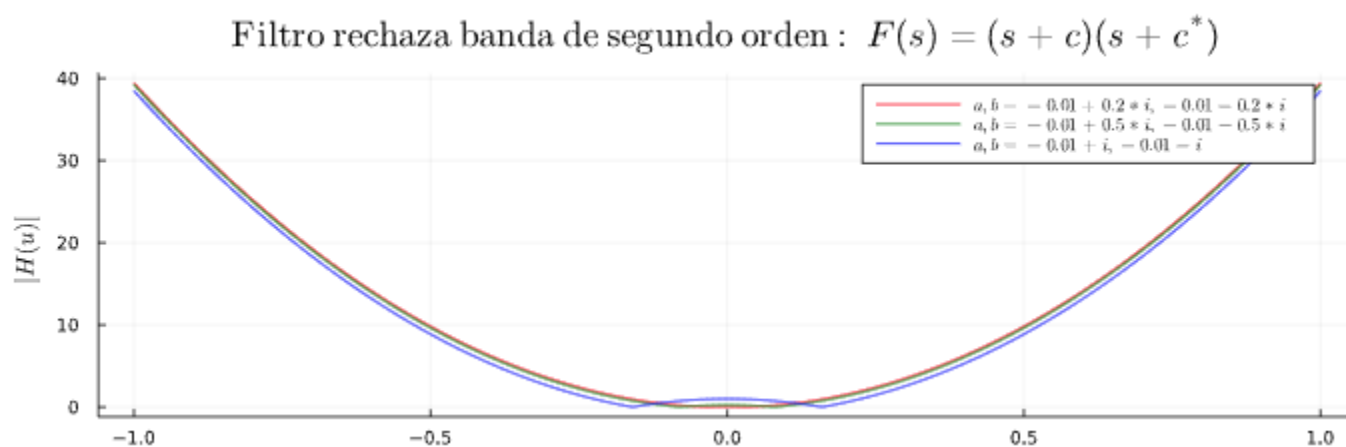


Figura 7: Filtro pasa altos de segundo orden (rechaza banda)

Por ultimo de forma contraria se tiene el filtro pasa banda de segundo orden, este es un filtro que solo tiene polos

$$F(s) = \frac{1}{(s + c)(s + c^*)} \quad (25)$$

Al igual que el anterior c es complejo, este filtro genera una amplificacion en las frecuencias que indica c , Mientras c este mas cerca del origen del eje imaginario, mas se amplifican las frecuencias.

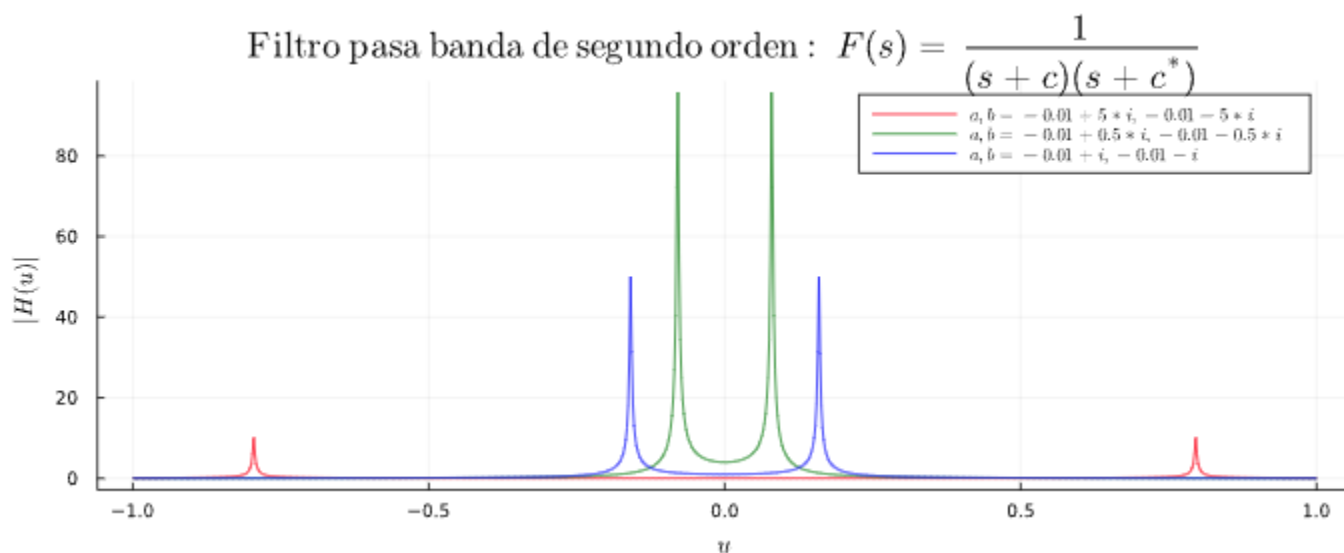


Figura 8: Filtro pasa bandas

Como dato extra un filtro pasa bajos ideal es aquel que multiplica la transformada de furier por un rect, de esta manera solo entra el rango de frecuencias que queremos y si pasamos al dominio del tiempo se obtiene que el filtro perfecto es un sinc, tal que se cumple la siguiente relacion

$$\text{rect}\left(\frac{u}{2u_c}\right) \xrightarrow{F} 2u_c \text{sinc}(2u_c t) \quad (26)$$

3. Señales discretas

3.1. Muestreo

Lo más importante de esta parte es entender muy bien que es la distribución Shah, ya que es la base de el muestreo. Esta es la función más importante para pasar de lo continuo a lo discreto, ya que lo que hace la función Shah es multiplicar la función por impulsos puestos arbitrariamente, de la siguiente forma.

$$\mathbb{I}_{\mathbb{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nT}$$

tal que:

$$\langle \mathbb{I}_{\mathbb{T}}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n - T) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

Figura 9: Función Shah de periodo T

Donde T es el periodo en el cual queremos hacer el muestreo. Cabe mencionar que si ocupamos la propiedad del escalamiento a una distribución tenemos que el Shah pasa a estar multiplicado por su frecuencia y queda muestreo en la frecuencia. Otro dato interesante es que la transformada de un Shah es otro Shah escalado en su periodo, y viceversa.

3.1.1. periodización mediante Shah

Como vimos esta sirve para hacer una señal discreta, también sirve para generar una señal periódica convolucionando con Shah. Para la cual existe una frecuencia exacta, pero que veremos más adelante.

Retomando lo anterior, podemos volver una señal continua en una discreta, tal que al multiplicar con un Shah de periodo T sucede que

$$t = nT = \frac{n}{u_s} \quad (27)$$

u_s es la frecuencia de muestreo, en resumen el periodo a la menos 1. De forma visual sucede esto.

esa interpolacion es centrada en cada muestra , pero tambien existe otra forma

$$g_r(t) = \square\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (30)$$

Si las pasamos al dominio de Fourier estas serian $TSinc(Tu)$ y $Tsinc(Tu)e^{-iT\pi u}$ su reconstruccion no es muy exacta ya que se hace una linea recta hasta el siguiente punto de la funcion discreta.

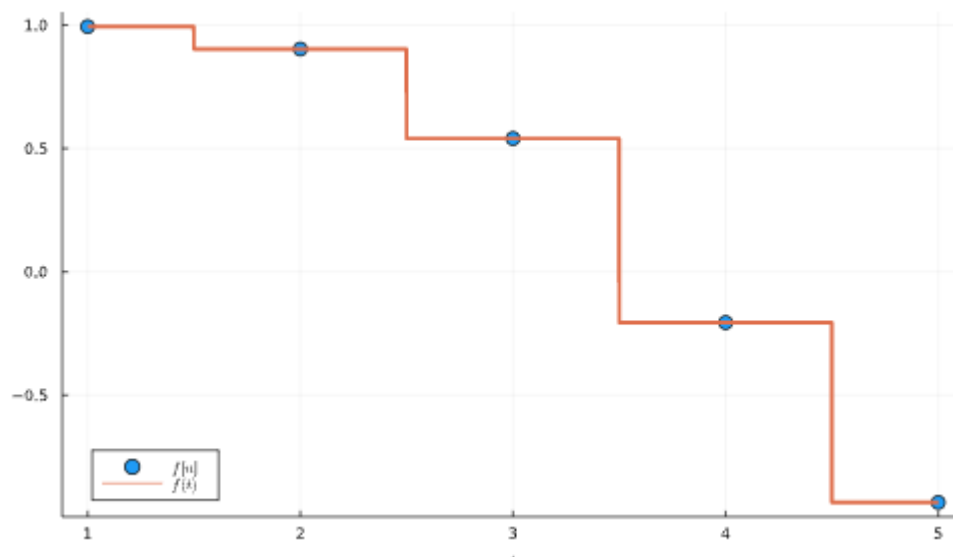


Figura 11: Interpolacion de orden 0

Ahora haremos la interpolacion de orden 1 la cual es simplemente la funcion triangulo (t/T) y su furier es

$$Tsinc^2(Tu)$$

y a diferencia de la orden 0 como esta al cuadrado genera leves curvas las cuales se ven asi

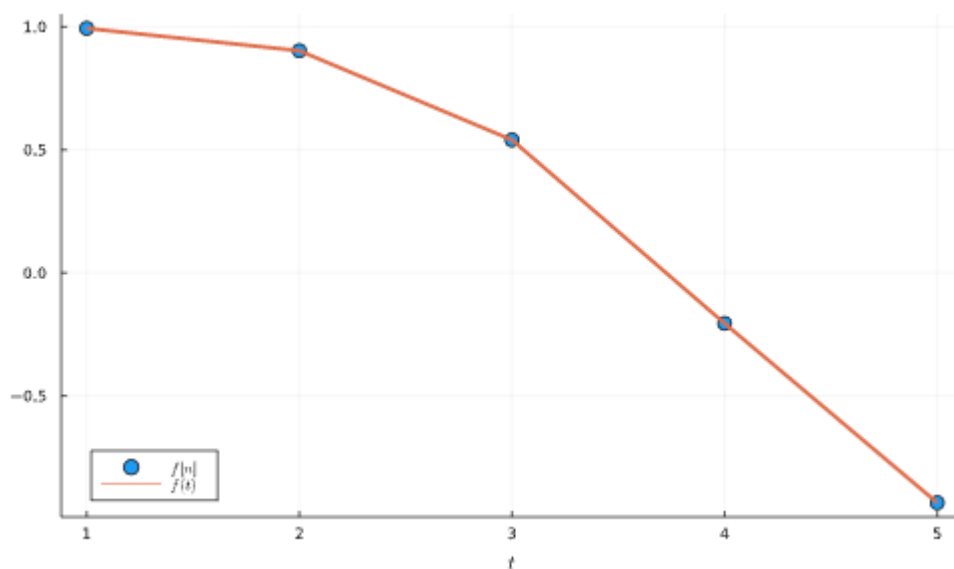


Figura 12: Interpolacion de orden 1

Y ahora la interpolacion mas importante pero que es solo teorica ya que es imposible generar la interpolacion perfecta. Esta es la interpolacion sinc, la cual pensaras, pero hey todas las anteriores tienen el sinc, si pero en el dominio de la frecuencia, esta en cambio es un rect en el dominio de la frecuencia entonces corta exactamente la frecuencia entera y todas su subidas y bajadas ya que si el rect es suficientemente grande absorbe todas las frecuencias. Entonces la funcion seria

$$g_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow G_r(u) = T * \text{rect}(Tu) \quad (31)$$

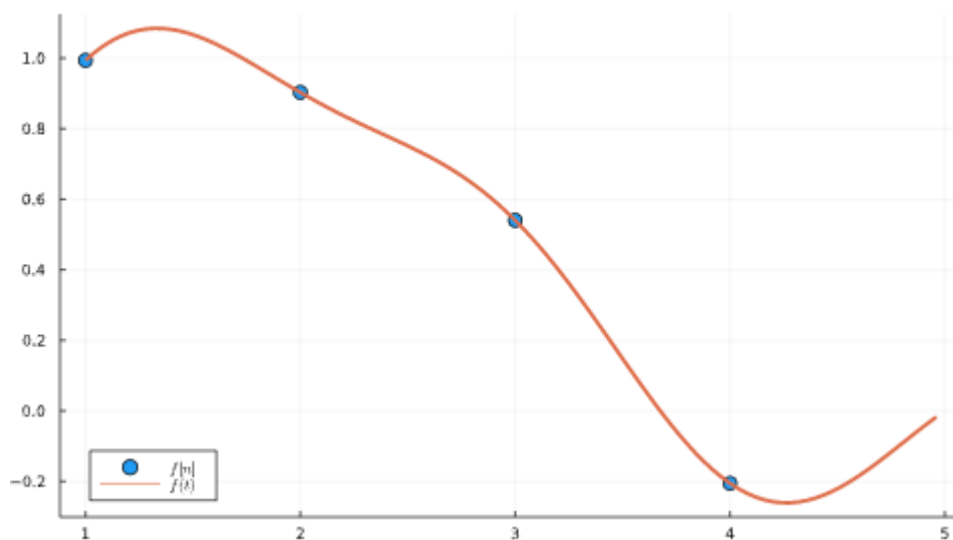


Figura 13: Interpolacion ideal

3.2.1. Teorema del muestreo de Nyquist

Como ya vimos cual es la interpolacion ideal, ahora analizaremos como tiene que ser el periodo para poder reconstruir la funcion o muestrearla sin perder informacion

Si una funcion cuya transformada de furier tiene ancho de banda limitado, existe un

$$u_m$$

llamado frecuencia de nyquist, es decir la frecuencia maxima de la señal

Con esta frecuencia nace el teorema de que

$$u_m < \frac{1}{2T}$$

la señal se puede reconstruir de forma exacta.

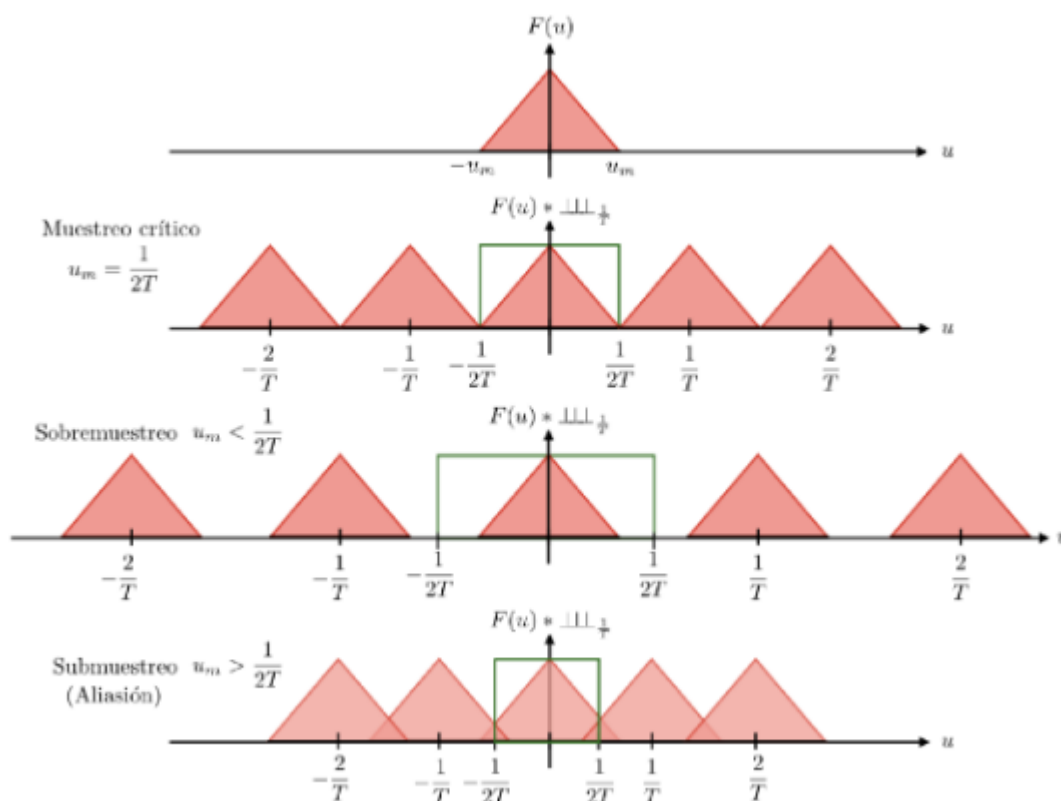


Figura 14: Teorema de nyquist

Entonces si la frecuencia de muestreo es mayor que dos veces la frecuencia de nyquist obtenemos sobre muestreo, en el cual no perdemos informacion, pero tenemos estamos con un sistema que no es optimo, el optimo es cuando la frecuencia de muestreo es igual a dos veces la frecuencia maxima y por ultimo si esta es menor empezamos a perder informacion ya que sucede el aliasing y las señales se sobreponen.

Dato curioso del sinc.

Sinc como identidad de la convolución

$$f(t) * a \operatorname{sinc}(at) = f(t)$$

esto se cumple en el caso que la señal $f(t)$ tenga una Transformada de Fourier de ancho de banda limitado entre $-a/2$ y $a/2$.

Figura 15: Sinc en convolucion

3.3. Señales y sistemas discretos

Como vimos antes aprendimos a volver una funcion discreta , podemos hacer lo mismo con cualquier señal. Asi que suceden las mismas propiedades, pero en las señales existen tipos tales como Señales discretas periodicas

$$f[n] = f[n + N]$$

siendo N el periodo de la funcion

Señales aperiodicas no existen repeticiones de algun tipo y un ejemplo seria el ruido blanco.

Lo demas de simetria y todo sigue las reglas de una señal normal

En los sistemas discretos tambien funciona lo mismo y en estos podemos generar interconecion entre los discretos al continuo, asi como los sistema de ecualizador de audio en el computador, donde una señal continua se discretiza, y se ecualiza digitalmente para luego convertila en una señal continua, ya que en fourier se puede equalizar rapidamente

Estos sistemas tienen las siguientes propiedades, causalidad ,linealidad , invarianza, estabilidad ,memoria e invertibilidad

3.3.1. Señales discretas utiles

Sinusoides discretas

$$x[n] = A \cos wn + \phi \rightarrow x[n] = A \cos w(n + N) + \phi = x[n] = A \cos wn + 2\pi k + \phi \dots -w = w\pi \frac{k}{N} \quad (32)$$

Exponencial compleja

$$x[n] = e^{(\sigma + iw)nT} \quad (33)$$

Este tiene una representacion como magnitud y fase, tal que

$$x[n] = z^n = |e^{\sigma T}| * e^{iwTn} \quad (34)$$

El delta dirac funciona exactamente igual hasta matematicamente esta correcto cuando $n=0$ vale 1 y listo

Ahora entramos con el escalon discreto ahora las cosas si cambian. si bien funciona de la misma manera , puede ser representado como una sumatoria de impulsos hasta n y de forma contraria el impulso se puede representar como $u[n] - u[n-1]$

el rect discerto funciona igual tambien, con la condicion que ahora esta definido mediante el escalon,

tal que un Rect de tamaño N es igual $u[n] - u[n-N]$

3.4. Transformaciones de señales discretas

Una propiedad muy util es que en las senales discretas podemos ocupar la superposicioon, tal que

$$f[n] = Af_1[n] + Bf_2[n] \quad (35)$$

Desplazamiento o desfase, algo muy pero muy utilizado en senales

$$f[n] = s[n - k] \quad (36)$$

Funciona exactamente igual que una funcion comun

Reversion o espejamiento $f[n] = s[k-n]$, sucede que cuando $k=0$ la señal se espeja en torno a $n = \frac{k}{2}$

Escalamiento aqui no existe realmente un escalamiento, ya que no aumentamos la intesidad de la senal, en ves de eso aumentamos la frecuencia de muestreo y si el escalamiento es menor a 1 de forma contraria disminuimos la frecuencia de muestreo

3.5. Tipos de convolucion (si tipos..)

Existe la convolucion discreta lineal la cual funciona exactamente igual solo que con sumatorias

$$(f * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] * h[n - k] \quad (37)$$

Convolucion de toda la vida entera.

Funciona igual, ahora la funcion resultante va a ser la suma de ambos largos de funciones -1, todo bien todo correcto

Pero ahora tambien existen las convoluciones circulares la cual es muy bizarra, si definimos dos funciones discretas y finitias

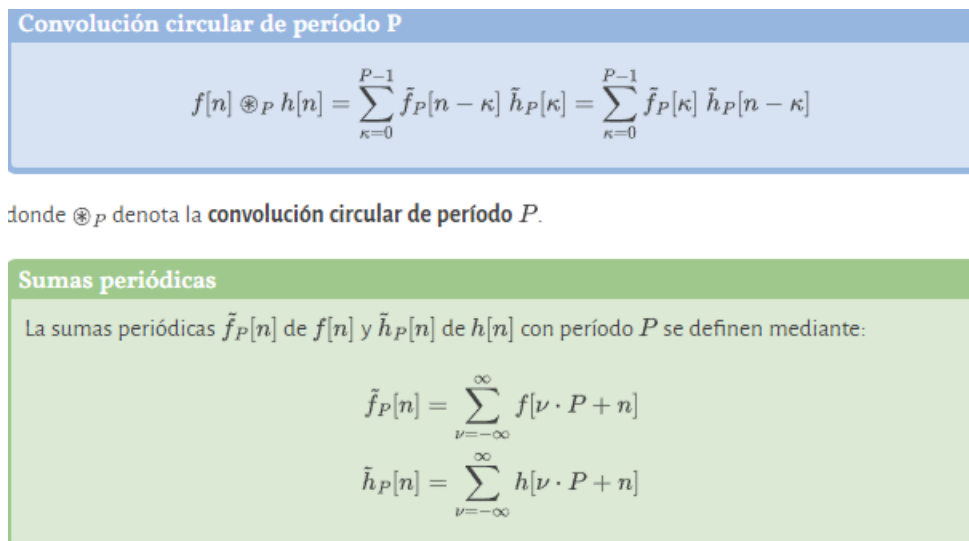


Figura 16: Convolucion circular

Como se puede ver esta convolucion dependera del periodo P que nosotros eligamos, de verdad es re bizarra, pero sucede que cuando el periodo es igual al periodo de la convolucion lineal estas son iguales.

3.6. Sistemas LTI discretos

Como toda senal que se respeta existen los sistemas linealmente invariables discreteos, los cuales sencillamente fuencionan exactamente igual al sistema comun solo que ahora tratamos en sumatoriaas Exactamente de la misma forma que en senales se ocupa la respuesta al impulso aqui funciona igual $g[n] = h[h]**f[n]$ tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] * h[n-k] \quad (38)$$

Precioso , no? al verdad es que si me gusta la convolucion discreta lineal

Algo muy entretenido es que como anteriormente visto podemos hacer ecuaciones de diferencias o EDO, tal que la respuesta al impulso $h[n]$ se pueden determinar sus coeficientes mediante una EDO lineal que describe el sistema

$$\sum_{k=0}^N a_k g[n-k] = \sum_{k=-0}^M b_k f[n-k] \quad (39)$$

Esta es una edo de orden N

Ahora si consideramos $f[n]$ como el impulso podemos reescribir como

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] - \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] \quad (40)$$

Tambien existe la respuesta al impulso finita o FIR

Es decir tenemos un sistema no recursivo con $a_k = 0$ para $n > 0$ y $a_0 = 1$, entonces la respuesta al

impulso esta dada solo por el impulso de la ecuacion anterior.

Como a su vez existe un sistema con respuesta al impulso infinita IIR el cual si tiene recursividad.

3.7. Variables de estado (re importante comprenderlas)

Sabemos de anterioridad que para obtener la respuesta de un sistema es la suma entre la respuesta a estado cero y la respuesta a entrada cero.

Ejemplo si tenemos la siguiente EDO

$$g[n] = -a_1g[n-1] - a_2g[n-2] + b_0f[n] \quad (41)$$

podemos definir las variables de estado $v_1[n] = g[n-2]$ y $v_2[n] = g[n-1]$ gracias a esto podemos pasar a la siguiente matriz

Formulación matricial

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} f[n]$$

$$g[n] = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + b_0 f[n]$$

Figura 17: Formulación matricial variables de estado

Resumiendo lo anterior finalmente obtenemos una forma compacta de

$$v[n+1] = Av[n] + bf[n] \quad \text{---} \quad g[n] = cv[n] + df[n] \quad (42)$$

en el cual $v[n]$ almacena la historia del sistema y se llama vector de estado, y $g[n]$ se denomina ecuación de salida.

Finalmente podemos encontrar la matriz de transición de estados denominada como

$$\phi[n] = A^n$$

la cual es invertible y finalmente todo puede ser representado como

Respuesta total

$$g[n] = \underbrace{\mathbf{c}\Phi[\mathbf{n} - \mathbf{n}_0]\mathbf{v}_0}_{\text{Respuesta a entrada cero}} + \underbrace{\{\mathbf{c}\Phi[\mathbf{n} - \mathbf{1}] * \mathbf{b}f[n]\} + df[n]}_{\text{Respuesta a estado cero}}$$

El término $\mathbf{c}\Phi[\mathbf{n} - \mathbf{n}_0]\mathbf{v}_0$ es la respuesta a entrada cero, mientras que el término $\{\mathbf{c}\Phi[\mathbf{n} - \mathbf{1}] * \mathbf{b}f[n]\} + df[n]$ es la respuesta a estado cero.

Figura 18: Respuesta total sistema discreto

4. Transformada de fourier en Z

Volviendo a la transformada de fourier, oh yes.
Partiremos cooonn

4.1. Tiempo discreto DTFT

Esta se definee comoo

$$DTFT[f](u) = "F"(u) = \sum f(nT)e^{-i2\pi unT} \quad (43)$$

Esta se ocupa cuando tenemos una señal discreta que fue muestreada a partir de una señal continua con un periodo de muestreo T

Si se supone que F(u) es de ancho de banda limitado tennemos que F(u)=0,

$$|u| > \frac{1}{2T}$$

lo que significa que no hay traslape entre las replicas del espectro entonces se puede reconstruir la senal con la siguiente formula

$$IDTFT["F"](n) = f[n] = T \int_0^{\frac{1}{T}} "F"(u) * e^{i2\pi unT} du \quad (44)$$

Lo bonito de esto es que en DTFT el impuslo de dirac es el que todos conocemos 1
Ahora pasaremos a funciones relevantes, tales como un rect discreto(feo re feo)

DTFT de un rect

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\square_L[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \square_L[n] e^{-i2\pi unT} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-i2\pi unT} = \frac{1 - e^{-i2\pi uLT}}{1 - e^{-i2\pi uT}} \\ &= e^{-i2\pi T \frac{L-1}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{L2\pi uT}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi uT}{2}\right)} = e^{-i2\pi T \frac{L-1}{2}} L \operatorname{sinc}_{LT}(u) \end{aligned}$$

Figura 19: DTFT rect discreto

La exponecial compleja es mas fea aun miren.

DTFT de una exponencial compleja

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi u_0 nT} e^{-i2\pi u nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(u-u_0)nT} \\ &= \mathcal{F}\{e^{i2\pi u_0 nT} \text{III}_T\}(u) = \tau_{-u_0} \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}\end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha utilizado la fórmula de la suma de Poisson y la transformada de Fourier de un shah. La DTFT de la señal exponencial es entonces una serie periódica de impulsos de Dirac desplazados.

DTFT de una exponencial compleja

$$\mathcal{F}\{u\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{T} + u_0}$$

Figura 20: DTFT Exponencial compleja

algo entrete es que por la definicion de DTFT se puede concluir que una senal discreta se puede representar como una superposicion de exponenciales armonicas, tal que

$$F(u) * e^{i2\pi u nT} \dots para \dots -\frac{1}{2T} < u < \frac{1}{2T} \quad (45)$$

que a su vez puede ser representado como parte real e imaginaria o en terminos de magnitud y fase

4.2. Frecuencia discreta DFFT

Esta se ocupa en el caso de una senal periodica continua construida mediante la periodizacion de una funcion no periodica

$$F[k] = F(kU) = F\left(\frac{k}{T_0}\right) \quad (46)$$

Siendo U el periodo de muestreo para poder construir F[k]

Se obtiene que la funcion periodizada en el tiempo es

$$f(t) = F^{-1}[F_s](t) = \sum F \frac{k}{T_0} e^{i2\pi t \frac{k}{T_0}} \quad (47)$$

Porque definimos primero la inversa , ya que esta es necesaria para definir la directa ya que primero tenemos que periodizar la señal para luego poder trabajar en ella

ahora definiremos la directa. Anteriormente se construyo la DTFT, entonces si esta suponemos que esta en un tiempo limitado, ya que es periodica su informacion se repite , se puede acotar en $t > \frac{T_0}{2}$ en este caso no existe traslape entre las replicas, ademas de que cuando la senal es muestreada las replicadas quedan escaladas por T_0 . entonces podemos definir la DFFT como

$$DFFT[f](k) = F[k] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i2\pi t \frac{k}{T_0}} dt \quad (48)$$

$$= U \int_{-\frac{1}{2U}}^{\frac{1}{2U}} f(t) e^{-i2\pi t k U} dt \quad (49)$$

*Iluminacion magistral

Si no entendiste como yo , entonces dejame mostrarte una imagen para luego explicar.

Síntesis y análisis de la Serie de Fourier

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i2\pi n t / T}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi n t / T} dt$$

Comparándolas con la DFFT directa e inversa:

DFFT y IDFFT

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi t \frac{k}{T_0}}$$

$$F[k] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{f}(t) e^{-i2\pi t \frac{k}{T_0}} dt$$

Figura 21: iluminacion DFFT O CTFS

WOOOW si WOOOW esto explica todo we, relamente si no entendiste esto deja el ramo. (apaño)

4.3. Transformada de Fourier discreta DFT

Partiremos con su ecuacion para luego explicarla.

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik \frac{2\pi}{N} n} \quad (50)$$

Donde N es la longitud de la DFT

Tenemos que como la señal es periodica tambien es el espectro dado de $F[k]=F[k+vN]$. Tambien tenemos la transformada inversa de fourier como

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{ik \frac{2\pi}{N} n} \quad (51)$$

Esta senal solo tiene sentido para senales discretas y periodicas.

Relacion con la DTFT. Ya que la transformada de fourier de tiempo discreto funciona en una senal causal de longitud finita N , entonces $f[n]=0$ y sucesion discreta. tenemos que su furier es continua, entonces si esta misma señal la pasamos por DFT sucede que si bien determina la misma transformada esta es discreta. Entonces si la transformada DTFT la muestreamos en razon a $u = \frac{k}{NT}$ obtenemos que ambas transformadas son exactamente iguales. ya que ambas serian periodicas de largo finito.

Relacion con la DFFT. Bueno sabemos que esta es la transformada de una frecuencia discreta. de una senal periodica continua y es discreta en la frecuencia al igual que la DFT. entonces si sabemos que la inversa de un DFFT es continua en el tiempo y la inversa de la IDFT es la misma senal pero discreta. Podemos establecer una relacion en el tiempo, ya que si la senal continua de la DFFT la muestreamos en razon a $t = \frac{nT}{N}$ obtenemos la misma funcion.

Lindo si todo lindo (de entender super ejecutar es otro mundo) . Ahora veremos que informacion nos entrega la DFT, curiosamente esta entrega toda la informacion que hay sobre la señal, dado que si calculamos con la DTFT una senal discreta que sabemos que es periodica de periodo $1/T$. esto aplica tambien para una senal discreta de longitud finita osea N obtenemos lo siguiente

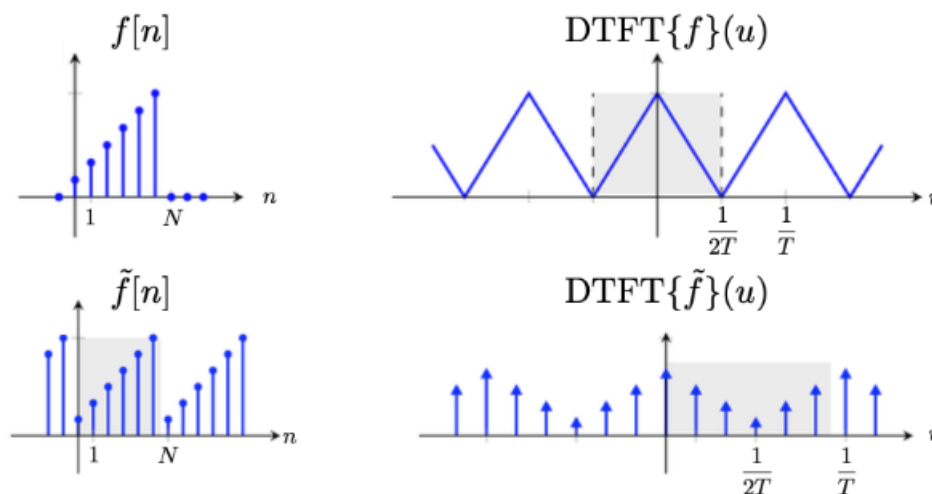


Figura 22: Informacion en la DFT

Lo que vemos que la dft tiene toda la informacion sobre la senal
Ahora mostrare una foto importante que hay que aprenderse como sea, tatuarla si es necesario.

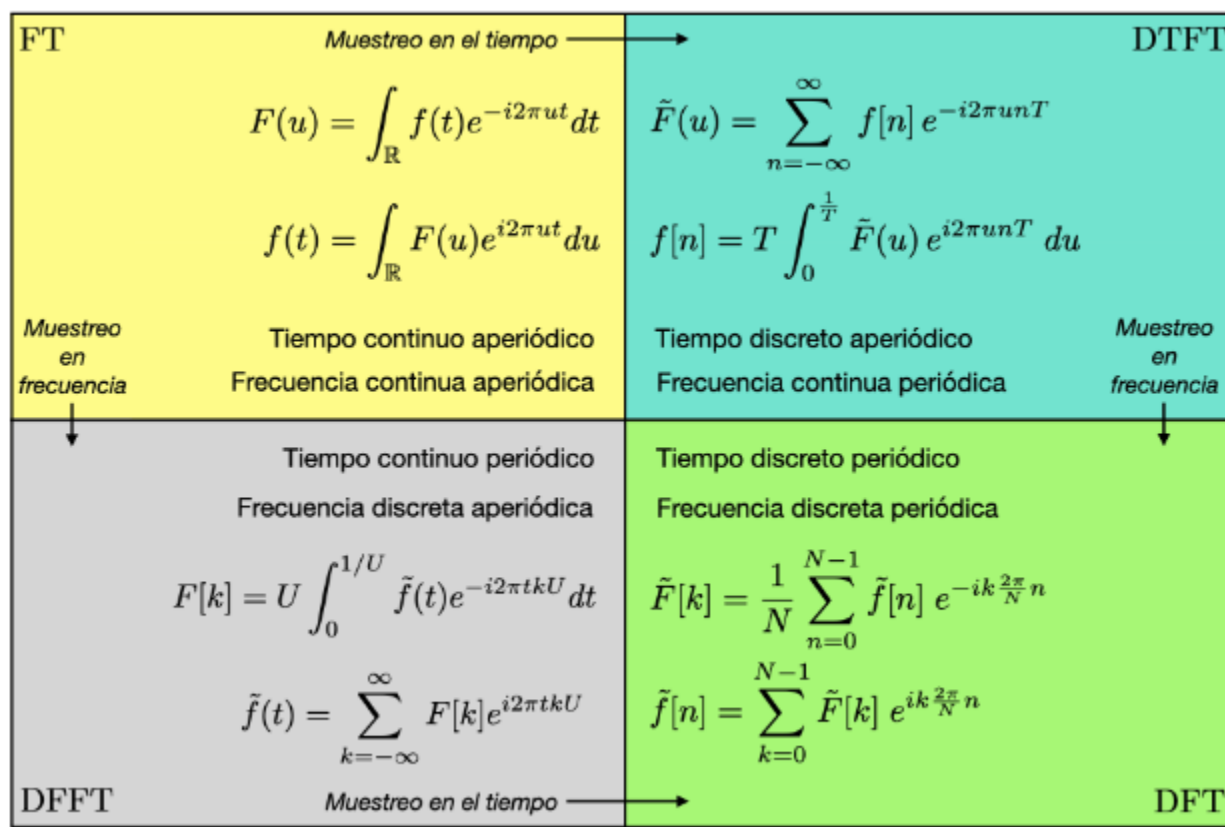


Figura 23: FT,DTFT,DFFT y DFT

Interpretacion del espectro de furier

Como bien se sabe furier es el mundo de las frecuencias, por ende hay que comprender como interpretar las frecuencias de una señal finita de largo N, si el largo es par, espectro es el siguiente.

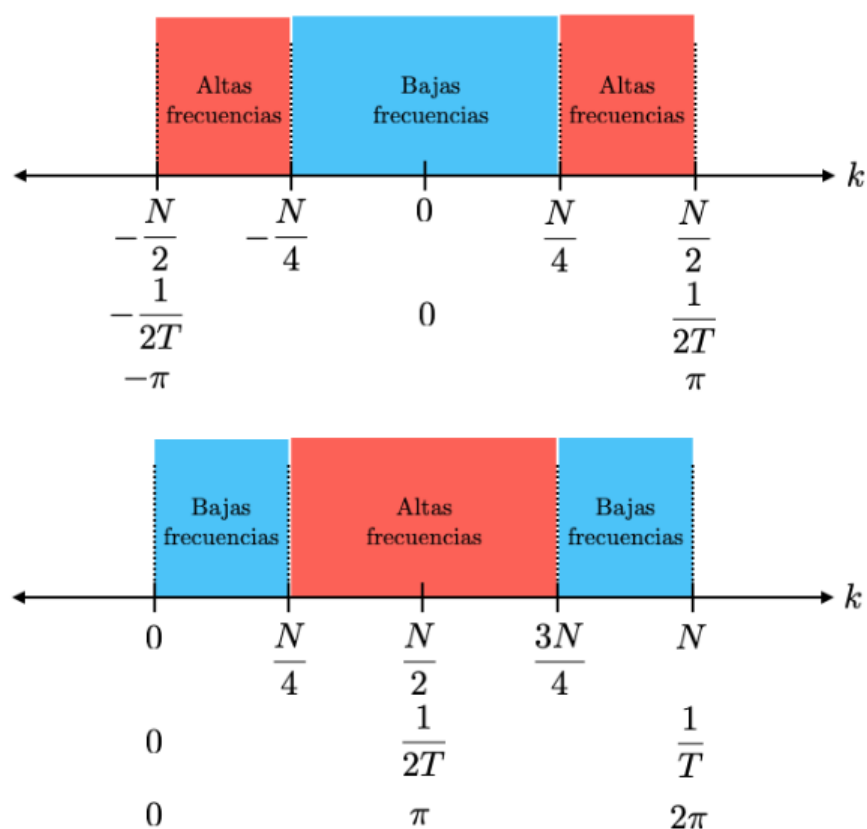


Figura 24: Espectro DFT

Representacion matricial
de una forma distinta se puede representar la DFT Como una matriz de $N \times N$

$$F = \frac{1}{N} * W f \quad (52)$$

siendo W igual a

Matriz DFT

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Figura 25: Matriz DFT

Esta matriz tiene diversos usos ya que se suele ocupar la FFT (la veremos mas adelante), y la

matriz representa la direccion vectorial en el circulo unitario.

Si hacemos el DFT del impulso , nos entrega el impulso dividido en la cantidad de muestras. Por ende todas las frecuencias estan presentes con el mismo peso

4.3.1. Propiedades y resolucion de frecuencia

Dentro de este capitulo hago incapie en recordar la igualdad $NUT = 1$

Apodizacion

Este es una forma de superposicion, se acortan las señales muy largas en "ventanas", para asi analizar ventana por ventana y tener un analisis mas practico y menos tedioso. Esta ventana tiene que cumplir con el NUT. En sencillas cuentas al multiplicar por nuestra ventana en Furier se esta convolucionando por esta misma ventana

Derrame

Esto sucede cuando el largo de la ventana no coincide con el periodo, provocando que la informacion de la dft se derrame hacia los terminos cercanos

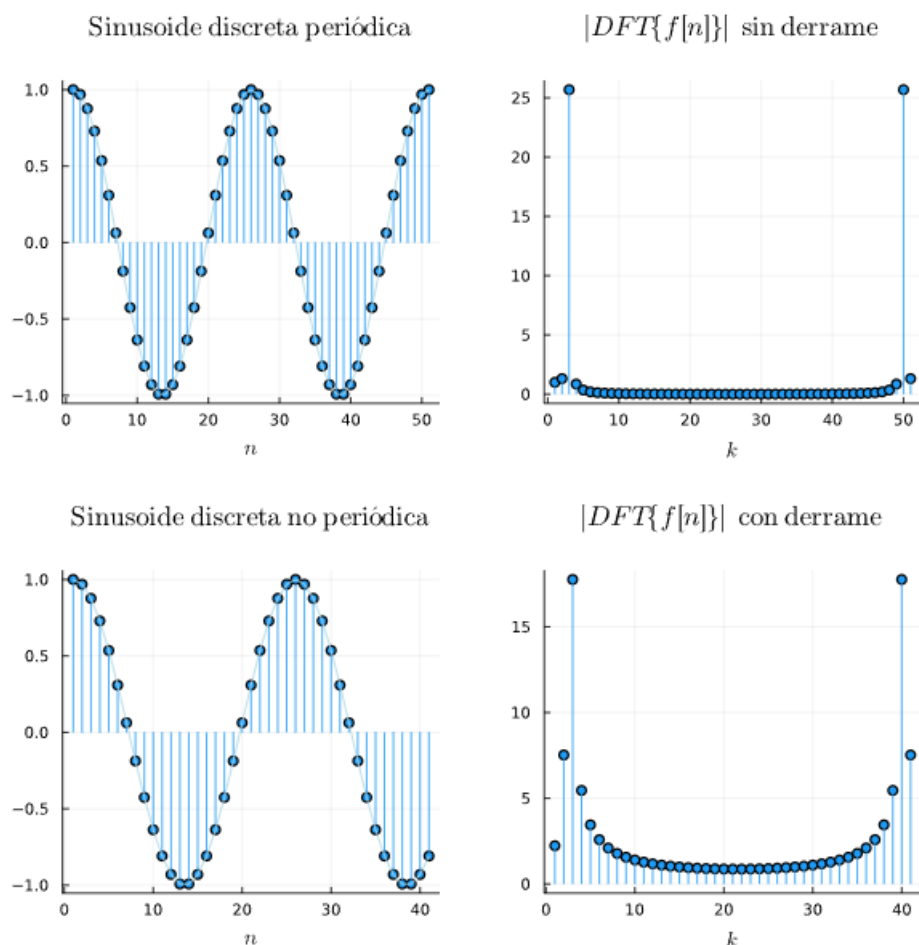


Figura 26: Derrame (leaking)

Para entender la etapa de combinación de la FFT, analicemos el caso de una secuencia de largo 8 en más detalle. Entonces

$$F[k] = \text{DFT}_8\{f[0], f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7]\}$$

Aplicamos ahora, la decimación en el tiempo, para formar dos secuencias de la forma:

$$A[k] = \text{DFT}_4\{f[0], f[2], f[4], f[6]\} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$B[k] = \text{DFT}_4\{f[1], f[3], f[5], f[7]\} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Luego, aplicamos decimación en el tiempo nuevamente:

$$C[k] = \text{DFT}_2\{f[0], f[4]\} \quad k = 0, 1$$

$$D[k] = \text{DFT}_2\{f[2], f[6]\} \quad k = 0, 1$$

$$E[k] = \text{DFT}_2\{f[1], f[5]\} \quad k = 0, 1$$

$$G[k] = \text{DFT}_2\{f[3], f[7]\} \quad k = 0, 1$$

lo que nos permite calcular las respectivas DFT de largo 2. Para combinarlas, hacemos lo siguiente:

$$A[k] = C[k] + W_8^{2k} D[k], \quad k = 0, 1$$

$$A[k+2] = C[k] - W_8^{2k} D[k] \quad k = 0, 1$$

$$B[k] = E[k] + W_8^{2k} G[k], \quad k = 0, 1$$

$$B[k+2] = E[k] - W_8^{2k} G[k] \quad k = 0, 1$$

$$F[k] = A[k] + W_8^k B[k], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$F[k+4] = A[k] - W_8^k B[k] \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Figura 28: fft N=8 a detalle

5. Transformada Z

La gran transformada Z que a gran resumen es laplace pero discreto, Se define $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$, siendo

$$z = e^{\omega + iw}$$

(Suenan a laplace, no?, pues si claramente). Como podemos imaginar la existencia de la transformada Z depende tanto de la frecuencia compleja como de la señal a transformar. Como es laplace en discretos tiene las lindas regiones de convergencia llamadas ROC (SI EXACTAMENTE COMO LAPLACE)

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (57)$$

Transformada Z bilateral

bueno esta es la formula general la cual puede ser unilateral?, si claramente ocupando los mismos metodos de laplace.

Ejemplos

$$Z(\text{rect}_N[k]) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} \Rightarrow z \neq 1 = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, z = 1 \Rightarrow N \quad (58)$$

Y como toda transformada (la verdad en la mayoría) si metemos el impulso sale 1

5.1. Las ROC y convergencia

Si bien la transformada Z se define con una serie infinita, una condicion para la convergencia es que sus elementos sean absolutamente sumables y menores a ∞

Las ROC estan determinadas unicamente por la magnitud de la frecuencia compleja, y su fase no tiene ningun efecto alguno sobre la convergencia.

ROC de una señal derecha

Para una señal derecha de largo infinito $f[n] = 0$ para $n < 0$, la ROC consiste en el lugar geométrico tal que $|z| > a$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Esto es debido al decaimiento de los términos $|z|^{-n}$ para $n \rightarrow \infty$, lo que asegura la convergencia para un a dado. Sin embargo, esto solo se cumple para señales con crecimiento exponencial (*Wikipedia*).

ROC para señales izquierdas y bilaterales

El mismo razonamiento puede aplicarse para señales izquierdas y bilaterales. Las ROC resultantes se pueden ver en la siguiente figura, donde el área en amarillo indica la región de convergencia, es decir las regiones del plano- z donde $F(z)$ converge.

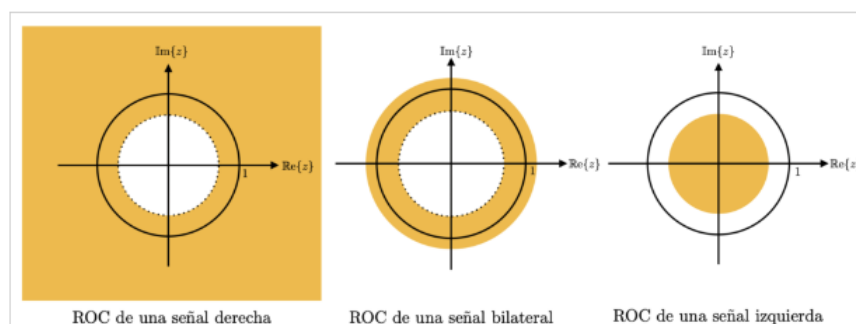


Figura 29: Las ROC en Z

Aquí también existen los polos y ceros por ende existe su diagrama. El cual es bastante distinto al de Laplace, ya que si bien este también tiene el círculo unitario, funcionan de la misma forma y los filtros también, solo que aquí es un poco más diverso.

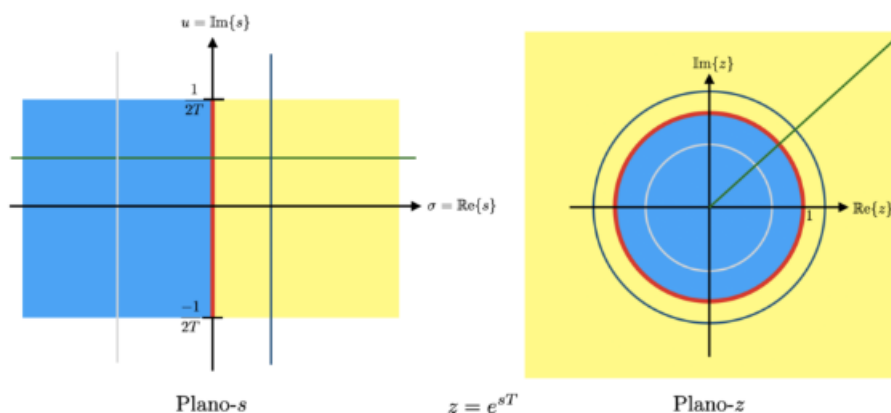


Figura 30: diagrama de polos y ceros en Z

5.2. Propiedades

Si bien la gran mayoría de propiedades son muy parecidas a las de laplace remarcaremos las mas importantes

$$f[n-1] \rightarrow z^{-1}F(z) + f[-1] \Rightarrow f[n+1] \rightarrow zF(z) - zf[0] \quad (59)$$

Desplazamiento unitario de la transformada unilateral

$$f[n-k] \rightarrow z^{-k}F(z) + z^{-k} \sum_{m=1}^k f[-m]z^m \Rightarrow f[n+k] \rightarrow z^kF(z) - z^k \sum_{m=0}^{k-1} f[m]z^{-m} \quad (60)$$

Desplazamiento general de la Transformada Z unilateral

6. Pares de laplace

$\delta \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad \text{ROC: } \forall \sigma$
$\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad \text{ROC: } \sigma > 0$
$e^{-at}\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad \text{ROC: } \sigma > -a$
$t^n \Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{ROC: } \sigma > 0, n > -1$
$\cos(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > 0$
$\sin(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > 0$
$e^{-\alpha t} \cos(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t} \sin(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{(s+\alpha)^2+a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > -\alpha$
$\cosh(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2-a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > \alpha $
$\sinh(at)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{ROC: } \sigma > \alpha $
$\ln(t)\Gamma(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s}[\ln(s) + \gamma] \quad \text{ROC: } \sigma > 0$
$e^{-a t } \xrightarrow{\mathcal{L}_s} \frac{2a}{a^2-s^2} \quad \text{ROC: } -\alpha < \sigma < \alpha$

Figura 31: Pares de laplace Relevantes

7. Pares de Fourier

$$\text{sinc}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \Gamma(u)$$

$$\Lambda(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \text{sinc}^2(u)$$

$$e^{-at}\Gamma(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \left(\frac{1}{a + i2\pi u} \right)$$

$$e^{-a|t|} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \frac{2a}{a^2 + (2\pi u)^2}$$

$$\frac{1}{a + i2\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} e^{au}\Gamma(-u)$$

$$\frac{2a}{a^2 + t^2} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 2\pi e^{-a2\pi|u|}$$

$$\delta \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$$

$$e^{i2\pi at} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta_a$$

$$\cos(2\pi at) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}) = \uparrow_a$$

$$\sin(2\pi at) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a}) = i \uparrow_a$$

$$\Gamma \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \frac{1}{2} \left(\delta + \text{v.p.} \left\{ \frac{1}{u} \right\} \frac{1}{i\pi} \right)$$

$$\text{sgn} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \text{v.p.} \left\{ \frac{1}{u} \right\} \frac{1}{i\pi}$$

$$\frac{1}{a} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \frac{1}{a} \frac{1}{a}$$

Figura 32: Pares de Fourier