极限计算方法总结

一、极限定义、运算法则和一些结果

1．定义：（各种类型的极限的严格定义参见《高等数学》函授教材，这里不一一叙述）。

说明：（1）一些最简单的数列或函数的极限（极限值可以观察得到）都可以用上面的极限严格定义证明，例如：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{an}=0\ (a,b\text{为常数且}a\neq 0)$；

$\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$；$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=\begin{cases}0，\ \text{当}|q|<1\text{时}\\ \text{不存在，当}|q|\geq 1\text{时}\end{cases}$；等等

（2）在后面求极限时，（1）中提到的简单极限作为已知结果直接运用，而不需再用极限严格定义证明。

2．极限运算法则

定理 **1** 已知 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在，极限值分别为 A，B，则下面极限都存在，

且有 （1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（2）$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$

（3）$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(\text{此时需}B\neq 0\text{成立})$

说明：极限号下面的极限过程是一致的；同时注意法则成立的条件，当条件不满足时，不能用。

3．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

说明：不仅要能够运用这两个重要极限本身，还应能够熟练运用它们的变形形式，

作者简介：靳一东，男，（1964—），副教授。

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}}=e$；等等。

4．等价无穷小

定理 **2** 无穷小与有界函数的乘积仍然是无穷小（即极限是 0）。

定理 **3** 当 $x\to 0$ 时，下列函数都是无穷小（即极限是 0），且相互等价，即有：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1$$ 。

说明：当上面每个函数中的自变量 x 换成 $g(x)$ 时（$g(x)\to 0$），仍有上面的等价关系成立，例如：当 $x\to 0$ 时，$e^{3x}-1 \sim 3x$；$\ln(1-x^2) \sim -x^2$。

定理 **4** 如果函数 $f(x), g(x), f_1(x), g_1(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，则当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且等于 $f(x)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$。

5．洛比达法则

定理 **5** 假设当自变量 x 趋近于某一定值（或无穷大）时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）$f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都是 0 或都是无穷大；

（2）$f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，且 $g(x)$ 的导数不为 0；

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或是无穷大）；

则极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也一定存在，且等于 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，即 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

说明：定理 5 称为洛比达法则，用该法则求极限时，应注意条件是否满足，只要有一条不满足，洛比达法则就不能应用。特别要注意条件（1）是否满足，即验证所求极限是否为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型；条件（2）一般都满足，而条件（3）则在求导完毕后可以知道是否满足。另外，洛比达法则可以连续使用，但每次使用之前都需要注意条件。

6．连续性

定理 **6** 一切连续函数在其定义去间内的点处都连续，即如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义去间内的一点，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

7．极限存在准则

定理 **7**（准则 1） 单调有界数列必有极限。

定理 **8**（准则 2） 已知 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 为三个数列，且满足：

（1）$y_n\le x_n\le z_n, (n=1,2,3,\cdots)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在，且极限值也是 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

二、求极限方法举例

1．用初等方法变形后，再利用极限运算法则求极限

例 1　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\dfrac{3}{4}$　。

注：本题也可以用洛比达法则。

例 2　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}[(n+2)-(n-1)]}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\overset{\text{分子分母同除以}\sqrt{n}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{3}{2}$　。

例 3　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+3^n}{2^n+3^n}$

解：原式$\overset{\text{上下同除以}3^n}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\dfrac{1}{3})^n+1}{(\dfrac{2}{3})^n+1}=1$　。

2．利用函数的连续性（定理　**6**）求极限

例 4　$\lim\limits_{x\to 2}x^2e^{\frac{1}{x}}$

解：因为 $x_0=2$ 是函数 $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ 的一个连续点，

所以　原式$=2^2e^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{e}$　。

3．利用两个重要极限求极限

例 5　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{12\cdot(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{6}$　。

注：本题也可以用洛比达法则。

例 6　$\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{2}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}\cdot\frac{-6\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}}]^{\frac{-6\sin x}{x}}=e^{-6}$ 。

例 7 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-2}{n+1})^{n}$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{-3}{n+1})^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{-3}{n+1})^{\frac{n+1}{-3}}]^{\frac{-3n}{n+1}}=e^{-3}$ 。

4．利用定理 **2** 求极限

例 8 $\lim\limits_{x\to 0}x^{2}\sin\dfrac{1}{x}$

解：原式=0 （定理 2 的结果）。

5．利用等价无穷小代换（定理 **4**）求极限

例 9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{\arctan(x^{2})}$

解：$\because$ $x\to 0$时，$\ln(1+3x)\sim 3x$， $\arctan(x^{2})\sim x^{2}$，

$\therefore$ 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x}{x^{2}}=3$ 。

例 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$ 。

注：下面的解法是错误的 ：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}-1)-(e^{\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\sin x}=1$ 。

正如下面例题解法错误一样 ：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^{3}}=0$ 。

例 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x^{2}\sin\frac{1}{x})}{\sin x}$

解：$\because$当 $x\to 0$ 时，$x^{2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，$\therefore\tan(x^{2}\sin\dfrac{1}{x})$与$x^{2}\sin\dfrac{1}{x}$等价，

所以， 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 。（最后一步用到定理 2）

6．利用洛比达法则求极限

说明：当所求极限中的函数比较复杂时，也可能用到前面的重要极限、等价无穷小代换等方法。同时，洛比达法则还可以连续使用。

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ （例 4）

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ 。（最后一步用到了重要极限）

例 13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{x-1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}{1}=-\dfrac{\pi}{2}$ 。

例 14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ 。（连续用洛比达法则，最后用重要极限）

例 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

例 18 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}]$

解：错误解法：原式$=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}]=0$ 。

正确解法：

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}$$ 。

应该注意，洛比达法则并不是总可以用，如下例 。

例 19 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\sin x}{3x+\cos x}$

解：易见：该极限是“ $\frac{0}{0}$ ”型，但用洛比达法则后得到： $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2\cos x}{3-\sin x}$，此极限不存在，而原来极限却是存在的。正确做法如下：

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2\sin x}{x}}{3+\frac{\cos x}{x}}$$ （分子、分母同时除以 x）

$$= \frac{1}{3}$$ （利用定理 1 和定理 2）

7．利用极限存在准则求极限

例 20 已知 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $(n = 1, 2, \cdots)$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

解：易证：数列 $\{x_n\}$ 单调递增，且有界（ $0< x_n <2$），由准则 1 极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 。对已知的递推公式 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 两边求极限，得：

$a = \sqrt{2+a}$，解得： $a = 2$ 或 $a = -1$（不合题意，舍去）

所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ 。

例 21 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解： 易见： $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$， $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$

所以由准则 2 得： $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}) = 1$ 。

上面对求极限的常用方法进行了比较全面的总结，由此可以看出，求极限方法灵活多

样，而且许多题目不只用到一种方法， 因此，要想熟练掌握各种方法， 必须多做练习，在练习中体会。 另外，求极限还有其它一些方法， 如用定积分求极限等， 由于不常用，这里不作介绍。