组合数和排列数

- $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- 普遍求法
  - 当n和m都不大时$(0 < n, m < 1e4)$我们可以利用组合数的性质

    $$C_n^m = C_n^{n-m} = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

    也就是杨辉三角的形在二维数组中打出组合数的表

```
void init(){
    a[0][0] = 1;
    for(int i = 0; i <= N; ++ i){
        a[i][0] = a[i][i] = 1;
        for(int j = 1; j <= i / 2; ++ j){
            a[i][j] = a[i][i - j] = add(a[i - 1][j - 
1], a[i - 1][j]);
        }
    }
}
```

  - 当n和m都较大$(0 < n, m < 1e18)$的时候可以用$Lucas$定理来求解

    $$C_n^m = lucas(n, m) = C_{n \bmod p}^{m \bmod p} \times lucas(\frac{n}{p}, \frac{m}{p}) \ (mod\ p)$$

    大组合数取模拆分小组合数取模，小组合数的计算用乘法逆元实现即可，调用函数递归下去就可以求解n和m较大的组合数

```
LL C(LL n, LL m, LL p){
    return m > n ? 0 : mul(fac[n], mul(finv[m],
finv[n - m]));
}
LL lucas(LL n, LL m, LL p){
    if(n < m) return 0;
    if(n == m || m == 0) return 1;
    else{
        return (C(n % p, m % p, p) * lucas(n / p, m
/ p, p));
    }
}
```

- 套组合数和排列数公式，适合$(0 < n, m < 1e6)$

  我们先对阶乘打表，再对阶乘逆元打表，即把阶乘和阶乘逆元预处理出来，两者皆可线性时间求出

```
void init(){
    fac[0] = 1;
    for(int i = 1; i <= N; ++ i){
        fac[i] = mul(fac[i - 1], i);
    }
    finv[N] = qm(fac[N], mod - 2, mod);
    for(int i = N - 1; i >= 1; -- i){
        finv[i] = mul(finv[i + 1], i + 1);
    }
}
LL C(LL n, LL m, LL p){
    return m > n ? 0 : mul(fac[n], mul(finv[m],
finv[n - m]));
}
```