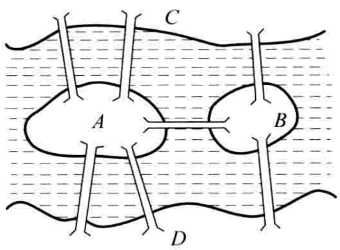
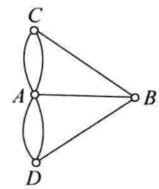
上,数学组和计算机组只有赵一人,如果要求不兼任,赵只能当其中一个组的组长,没有第二个人来任另一个组的组长.

6.4.2 欧拉图

18 世纪,普鲁士的哥尼斯堡城(哥尼斯堡城即现在俄罗斯境内的加里宁格勒)有一条贯穿全城的普雷格尔河,河中有两个岛屿,有七座桥将两岸与岛屿及岛屿之间连接,如图 6.24(a)所示.当时,当地人们热衷于一个难题:一个散步者怎样不重复地走完七桥,最后回到出发点.这就是哥尼斯堡七桥问题.试验者很多,但都没成功.



(a)



(b)

图 6.24

为了寻找答案,瑞士数学家昂哈德·欧拉(Leonhard Euler)对此问题进行研究,他将 4 块陆地抽象成 4 个顶点 A,B,C,D.若两块陆地之间有桥,就在代表它们的顶点之间连边,如图 6.24(b)所示.哥尼斯堡七桥问题就是要寻找经过图中每条边一次且仅一次的简单回路.欧拉在 1736 年的论文中指出,这样的回路是不存在的,从而得出哥尼斯堡七桥问题无解的结论.这就是欧拉回路的来源.

定义 6.21 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是连通图(无向的或有向的).G 中经过每条边一次并且仅一次的通路称作**欧拉通路**;G 中经过每条边一次且仅一次的回路称作**欧拉回路**;具有欧拉回路的图称为**欧拉图**.

注意,只有欧拉通路无欧拉回路的图不是欧拉图.在图 6.25 中,图(a),(d)都既无欧拉回路,也无欧拉通路.图(b),(e)均只有欧拉通路,但无欧拉回路.所以,图(a),(b),(d),(e)4 个图都不是欧拉图.而图(c),(f)中均存在欧拉回路,所以它们都是欧拉图.其中一个是无向欧拉图,一个是有向欧拉图.

下面给出存在欧拉回路和欧拉通路的充分必要条件.

定理 6.10 无向图 G 有欧拉回路,当且仅当 G 是连通图且无奇度顶点.

G 有欧拉通路但无欧拉回路,当且仅当 G 是连通图且恰好有两个奇度顶点.在恰好有两个奇度顶点的连通图中,每条欧拉通路都以这两个奇度顶点为端点.

证明从略.

图 6.24(b)中的 4 个顶点都是奇度的,根据这个定理,它没有欧拉回路,甚至也没有欧拉通路,因此哥尼斯堡七桥问题无解.

例 6.13 判断图 6.26 给出的多个图中,哪些图中有欧拉通路,但无欧拉回路?哪些图是欧拉图?

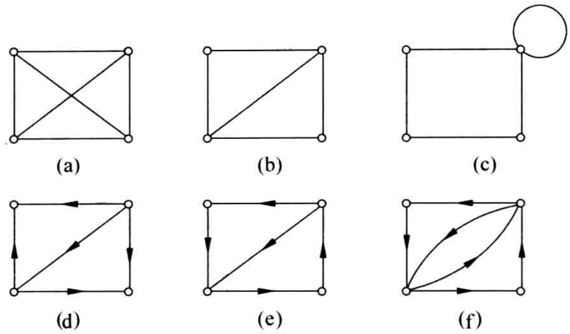


图 6.25

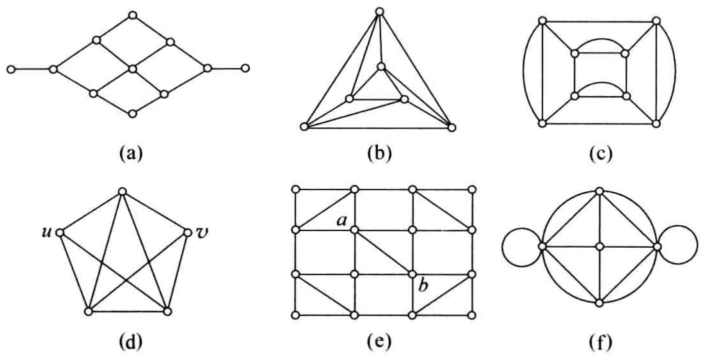


图 6.26

解 图 6.26(d)和(e)两个图均各有两个奇度顶点，因而它们都存在欧拉通路，但无欧拉回路. 图 6.26(a)和(f)两图中的奇度顶点个数分别为 8 和 4，因而不可能存在欧拉通路、更无欧拉回路. 图 6.26(b)和(c)两图中均无奇度顶点，因而都存在欧拉回路，即它们都是欧拉图.

对于连通的有向图是否有欧拉通路或回路由下面定理给出判断.

定理 6.11 有向图 D 有欧拉回路，当且仅当 D 是连通的且所有顶点的入度等于出度.

有向图 D 有欧拉通路但无欧拉回路，当且仅当 D 是连通的，且除了两个例外的顶点外，其余顶点的入度均等于出度，这两个例外的顶点中，一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的入度比出度小 1.

例 6.14 在图 6.27 所示的多个图中，哪些有欧拉通路？哪些是欧拉图？

解 在图 6.27(a)中所有顶点的入度等于出度，所以有欧拉回路，是欧拉图. 图 6.27(d)，(f)中均有一个顶点的入度比出度大 1，还有一个顶点的出度比入度大 1，其余顶点的入度等于出度，所以有欧拉通路但无欧拉回路. 图 6.27(e)为非连通图，因而不可能有欧拉通路，更无欧拉回路. 在图 6.27(b)和(c)中，均存在入度比出度大 2，和出度比入度大 2 的顶点，因而它们都不可能存在欧拉通路，更无欧拉回路.

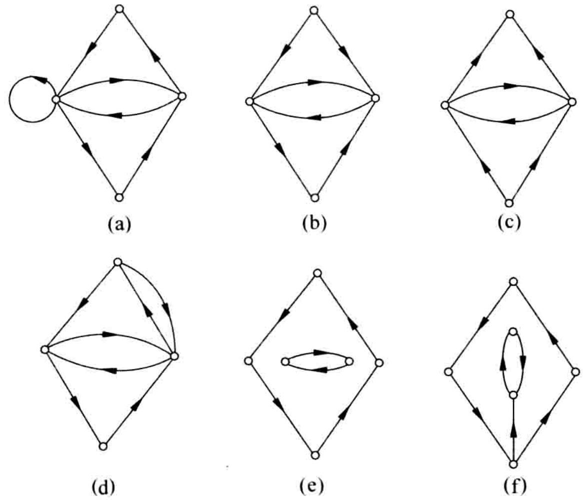


图 6.27

6.4.3 哈密顿图

1859年爱尔兰数学家威廉·哈密顿(William Hamilton)设计出一个在正十二面体上的游戏——周游世界问题.他将20个顶点看作20个城市,每一条棱看作一条公路,要求从一个城市出发,沿着公路经过每一个城市一次且仅一次,最后回到出发的城市.如果把正十二面体投影到平面上,如图6.28所示,就是要在图中找一条经过每一个顶点恰好一次的回路.这就是哈密顿回路的来源.

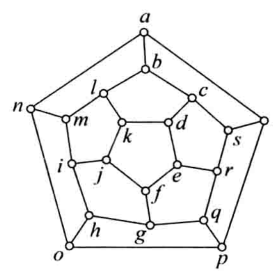


图 6.28

定义 6.22 设$G=\langle V,E\rangle$为一图(无向的或有向的).G中经过每个顶点一次且仅一次的通路称作**哈密顿通路**;G中经过每个顶点一次且仅一次的回路称作**哈密顿回路**;若G中存在哈密顿回路,则称G为**哈密顿图**.

从定义不难看出以下3点:

(1) 存在哈密顿通路(回路)的图一定是连通图;

(2) 哈密顿通路是初级通路,哈密顿回路是初级回路;

(3) 若G中存在哈密顿回路,则它一定存在哈密顿通路,但反之不真.

还应该指出,只有哈密顿通路,无哈密顿回路的图不叫哈密顿图.

图6.28中$abcdefghijklmnopqrsta$是一条哈密顿回路.在图6.26所示的6个无向图中,图(a)只有哈密顿通路,无哈密顿回路,所以它不是哈密顿图.其余各图中均有哈密顿回路(当然也有哈密顿通路),因而它们都是哈密顿图.

在图6.27所示的6个有向图中,除了图(e)外,都有哈密顿通路.其中图(b),(c),(f)只有哈密顿通路,无哈密顿回路,所以它们都不是哈密顿图.而图(a),(d)有哈密顿回路,所以它们都是哈密顿图.

与欧拉图的情况不同,直到目前,人们还没有找到哈密顿图的简单的充要条件,寻找这个条件是图论中的一个难题.目前人们只找到一些判断存在性的充分条件和一些必要条件,