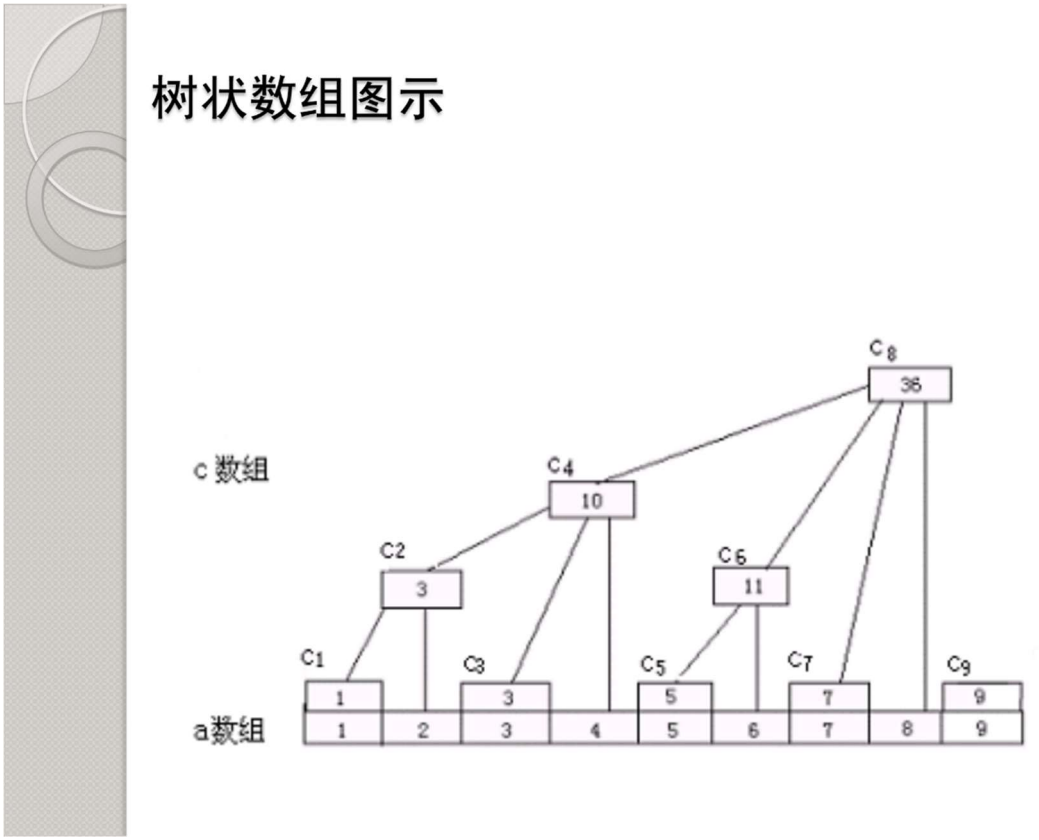
数状数组学习笔记-------林大 CHENYU

树状数组或者二叉索引树也称作 Binary Indexed Tree，又叫做 BIT；它的查询和修改的时间复杂度都是 log(n)，空间复杂度则为 O(n)，这是因为树状数组通过将线性结构转化成树状结构，从而进行跳跃式扫描。通常使用在高效的计算数列的前缀和，区间和。

BIT 是一个好东西，代码段，复杂度低，但是要理解透了才行!



先弄懂原理，我就喜欢死扣原理!

通过上面的图发现：奇数下标的 a[i]就是自己本身的值！偶数下标的 a[i]存放的不是自己本身，而是几个数的和！ 到底是几个数呢？ 二分的思想，下标等于 2^n 的 时候，存储的是左边的所有和。而对于下标=6 来说，a[6]只能存（a[5]+a[6]的和）；貌似 a[10]也只能存储 a[9]+a[10]

我们就可以自己在纸上画出任意下标的树状数组的图了！ 画 a[9]-----a[16]

那么 a[10]的下一个元素的下标是啥呢？？？？？？？

10 后面的最近的 2^n 是 16，

10 对应的 2 进制为 1010

各位取反 0101

末尾+1 0110 （-10）

10 和（-10）做一下&运算：0010 =2

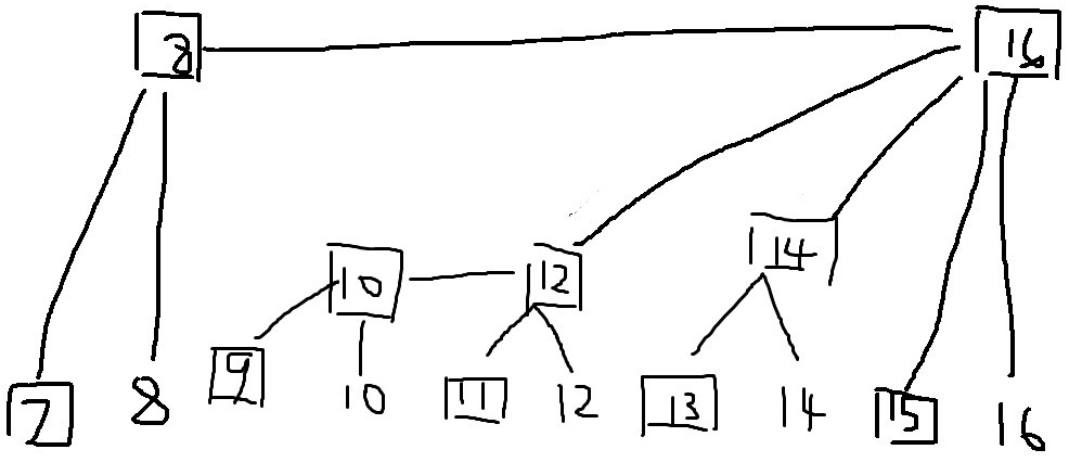
所以 10 的下一个点为 12；

1&1=1 0&0=0 1&0=0 0&1=0---------够细致了吧！

12 的 2 进制是：1100，

各位取反：　　0011
末尾+1：　　0100　（-12）
12 和-12 做&运算：　0100　=4；
所以 12 的下一位是 16！
12 是 8 和 16 的中间点，所以说这里是二分的思想（白书里有说）
同理 14 的下一位也是 16！

结论：（i&-i）就是每个元素往前和往后的**下标增量**；
下面是我手工画的图（用画笔），是不是画得很漂亮啊！



以上是关于 lowbit 的产生，就此打住！

一个理解问题：a[7]的值，就存在 a[7]里，但 a[8]里存的可不是第 8 个输入的值啊！
　　偶数下标的值，全部丢失，后面通过单点查询才可以求出来！
这里有 2 个序列：1 个是原始输入的序列，1 个是 BIT（树状数组）维护的序列，就是我画图的序列，而刚开始输入的原始序列基本上输入完就消失了，没存储。一切的一切要根据维护的序列来工作。

单点更新和区间查询：
　　这里没啥好讲的，直接做模版题就好！单点更新后一般是没操作的，一般都跟着区间查询，那就查询一下就可以了！

区间更新和单点查询：
　　这个好像复杂一点点，也就是我们说的**差分**，注意概念，就是差分！
　　说一下差分：
现在我们有一个从小到大的数列 a[]
a 1 3 6 8 9
然后还有一个差分数组 b[]
b 1 2 3 2 1　　对应：　1，3-1,6-3,8-6,9-8,
相信某些同学绝已经看出端倪了..这里 b[i]=a[i]-a[i-1]，我令 a[0]=0，故 b[1]=a[1]。

A 数组中的 8 等于 B 数组 前 4 项的和；同理：A 数组中的 6 等于 B 数组中前 3 项的和，于是单点查询变成了 B 数组的 BIT 求和问题，用模版即可！
然后把差分后的序列扔到树状数组里：

```
For(int i=1;i<=5;i++)
{
   Update(i,b[i]);

}
```

再说区间修改..
我们知道，树状数组对于单点值的修改十分方便（不懂的去看树状数组 1），对于区间的修改就比较尴尬..而我们又不想敲死长的线段树..怎么办呢，这时候差分就显出优势
还是上面的 a[]和 b[]，现在我们使区间[2,4]的所有数均+2，则 a[]/b[]变为
a 1 5 8 10 9
b 1 4 3 2 -1
事实上，这里只有 b[2]和 b[5]发生了变化，因为区间内元素均增加了同一个值，所以 b[3]，b[4]是不会变化的。
这里我们就有了第二个式子：对于区间[x,y]的修改（增加值为 d）在 b 数组内引起变化的只有 b[x]+=d，b[y+1]-=d。（这个也很好推的..）
这样，我们就把树状数组的软肋用差分解决了。

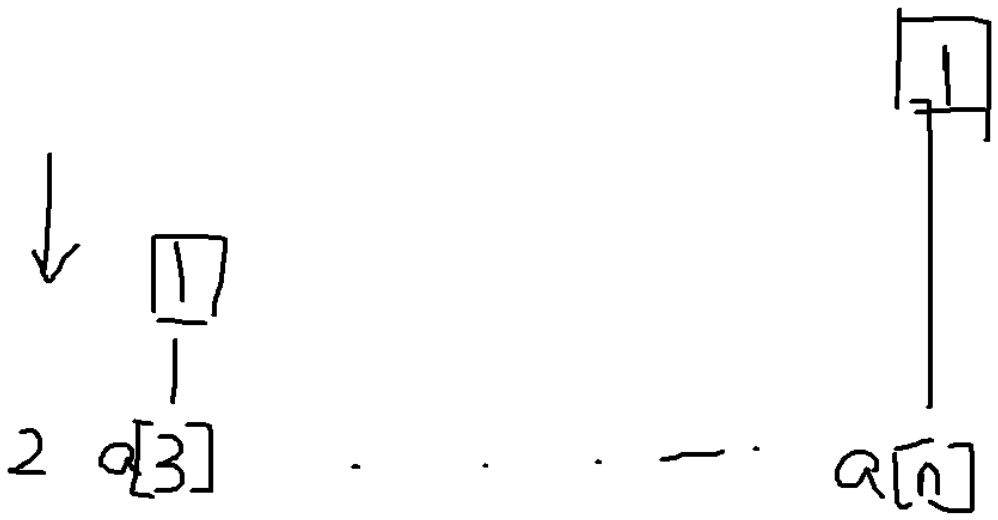
树状数组的应用

把问题转化成用 BIT 能解决的思路是有难度的，这里的练习，对于我们过几天学线段树有大帮助， 会加快我们学习线段树的周期。
第一种：类似洛谷【小鱼比可爱】和 POJ 和林大【数星星】的题目，计算我左边比我小的数有多少？
是按照输入的顺序计算左边比我小的个数有多少？这里的误区在于区分整个序列里有多少比我小（用前缀和计算），而输入的顺序比我小的数用 BIT；题目的变化还有【比我小或者小于等于我】，这是要弄清楚的！
【比我小】：sum(x-1);-------然后在 update(x,1);
[小于等于我]:sum(x)---------然后在 update(x,1)
因为谁告诉你数据没有重复呢？ 做数星星的那道题，在纸上好好画画~~

第二种：就是以前做过的“逆序对”的题目，以前是归并排序做的，现在看来归并大法还是好啊，因为动态逆序对—归并还可以做，而 BIT 则就不行了，但这题是 BIT 的菜，板子题；先把题目转化一下思想：

3 2 5 1 这组数，把这 4 个值看做下标，记住是下标
在 BIT 的图里，下标是顺序的，但输入的顺序是不一样的，update(x,1)的时间是按照输入的顺序更新的！
3
2 这时候，3 已经更新了，也就是在 2 的后面的和里，已经有一个 1 了！
大脑考虑这个 1（3 产生的）其实一直叠加到 a[n]里，n 是 x 下标的最大值！

当 2 进来时，时下面的图：a[3]里已经有值了，3 在 2 的后面（BIT 里）



所以计算逆序对，就看 a[x+1]----- a[n]的和就行！（sum(n)-sum(x)）
这里的 n 不是代表数组的个数，绝对不是，是下标的最大值，否则 RE
下面说一下昨天我在群里说的离散化问题：
【离散化】：
因为是把输入的序列值当做 BIT 的下标，所以 x 的值能达到 INT 的最大值！
定义 BIT 数组的时候是没办法开这么大的数组的，只能离散化！
树状数组的下标不能为 0，所以输入的 X 要+1！

输入数据可能为 0，所以输入值要加 1；

10 12 9 15
1 2 3 4 结构体 2 个变量

然后根据第一行从小到大排序：结果：
9 10 12 15
3 1 2 4
然后把第一行换成 1 2 3 4 （因为第一行的数很大，能到 100000000）
1 2 3 4
3 1 2 4
如果第一行有重复的数字，要注意：
9 9 12 15
3 1 2 4
则要换成：

1 1 2 3
3 1 2 4
然后按照第 2 行从小到大的顺序再排序：
2 3 1 4

1　　2　　3　　4

这是第一行的数字，就是离散后的结果，把这个结果扔进树状数组，就可以计算逆序数了！

逆序对代码：

```
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <algorithm>
using namespace std;
int a[40004],b[40004],c[40004],d[40004];
int n,pp;
struct sa
{
    int big;//大的数
    int sm;//离散化后的数
}vis[40004];
int cmp(const sa &a1,const sa &b1)
{
    return a1.big < b1.big;
}
int cmp1(const sa &a,const sa &b)
{
    return a.sm < b.sm;
}
int update(int i,int x)
{
    while(i<=n)
    {
        a[i]+=x;
        i+=(i&-i);
    }

    return 0;
}
int sum(int i)
{
    int ans=0;
    while(i>0)
    {

        ans+=a[i];
        i-=(i&-i);
```

```
        }
        return ans;

}
int main()
{ memset(a,0,sizeof(a));
    memset(b,0,sizeof(b));
    memset(c,0,sizeof(c));
    memset(d,0,sizeof(d));
    int ans=0,tmp;
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
          scanf("%d",&b[i]);
          c[i]=i;
          vis[i]={b[i],c[i]};
    }
      sort(vis+1,vis+1+n,cmp);
            int num=0;
             for(int i=1;i<=n;i++)
        {
             if (vis[i].big!=vis[i-1].big)
                   d[i]=(++num);
             else
                   d[i]=d[i-1];

        }

        for(int i=1;i<=n;i++) vis[i].big=d[i];
        sort(vis+1,vis+1+n,cmp1);

  for(int i=1;i<=n;i++)
  {
        update(vis[i].big,1);
        ans+=(sum(n)-sum(vis[i].big));

  }

        cout <<ans << endl;
        return 0;
}
```

【数星星】代码：

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <string.h>
const int maxn=32000+10;
int a[maxn],d[maxn];
int n;
int update(int i,int x)
{
	while(i<=maxn)
	{
		a[i]+=x;
		i+=(i&-i);
	}
}

int sum(int i)
{
	int ans=0;
	while(i)
	{
		ans+=a[i];
		i-=(i&-i);
	}
	return ans;
}

using namespace std;

int main()

{	ios::sync_with_stdio(false);
	while(cin>>n)
	{memset(a,0,sizeof(a));
	  memset(d,0,sizeof(d));
	int x,y;


	for(int i=1;i<=n;i++)
	{
		cin>>x>>y;
		x++;

		int tmp=sum(x);
		update(x,1);
```

```
            d[tmp]++;

        }


        for(int i=0;i<n;i++)
            cout<<d[i]<<endl;
        }

        return 0;
    }
```

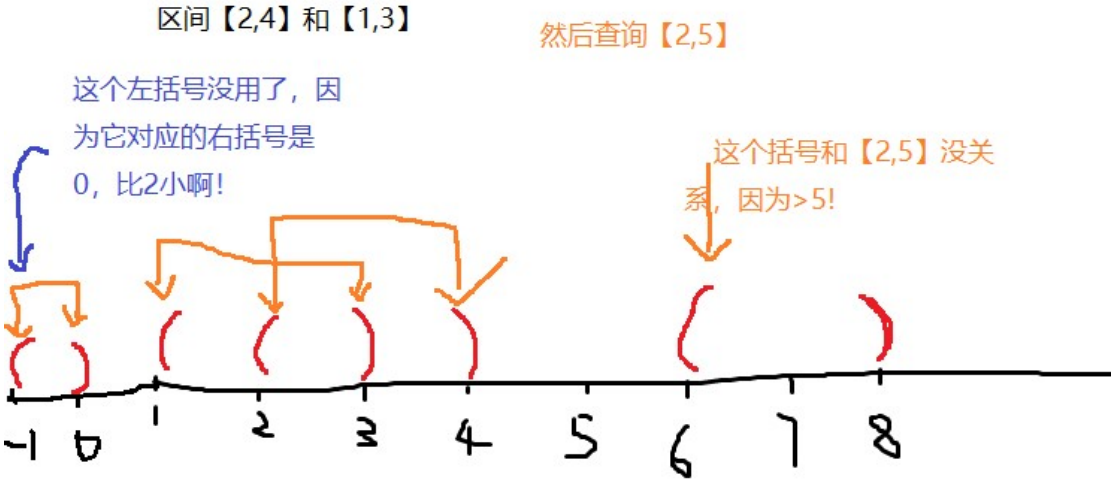
【小鱼比可爱】代码:

```
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <algorithm>
using namespace std;
int n;
int a[10000],b[10000],c[10000],d[10000];
struct sa
{
    int big;
    int sm;
}vis[105];
int cmp(const sa &a,const sa &b )
{
    return a.big <b.big;
}
int cmp1(const sa &a,const sa &b)
{
    return a.sm <b.sm;
}
int update(int i,int x)
{
    while(i<=105)
    {
        a[i]+=x;
        i+=(i&-i);
    }
}
int sum(int i)
{
    int ans=0;
    while(i)
```

```
    {
        ans+=a[i];
        i-=(i&-i);

    }

    return ans;

}
int main()
{  memset(a,0,sizeof(a));

   cin>>n;
   for(int i=1;i<=n;i++)
   {
       cin>>b[i];
       //c[i]=i;
       vis[i]={b[i]+1,i};
   }


    sort(vis+1,vis+1+n,cmp); //第一次排序

    int num=0;

    for(int i=1;i<=n;i++)  //计算把第一行换成 1 2 3 4 。。。。
的数组

    {
        if (vis[i].big!=vis[i-1].big)
            c[i]=++num;
        else

            c[i]=c[i-1]; //重复的处理


    }

    for(int i=1;i<=n;i++) //把第一行换成 1 2 3 4

        vis[i].big=c[i];

    sort(vis+1,vis+1+n,cmp1);//第 2 次排序


    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
```

```
        d[i]=sum(vis[i].big-1);//本题是说比自己满意度小的，所以
是-1;如果是小于等于自己的，则不能-1;
        update(vis[i].big,1);
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
        cout<<d[i]<<" ";

    return 0;
}
```

林大 OJ 1465 【门前的树】这题
这题直接做是不行的，这题是在纸上反复画就可以了。
误区一：简单的认为可以区间更新+1，然后再找最大值就行，这是不对的！
比如：【2,4】区间更新+1，　　【7,10】区间更新+1;
然后询问 【3,8】的树的种类，区间最大值还是 1，并不是 2!
所以区间更新-----求最大值得思路就死心吧-------即使可以的话，计算最大值也会 TLE 的!
正确思路：
在纸上 起点---就画 （ 括号;
终点---就画 ） 括号;
然后自己---------看-----看------看----------发现……..咦：



根据这个图，发现对于区间【2,5】，5 前面所有的 （括号所产生的区间有可能都在【2,5】范围内!
而 5 后面的（括号，都没用!
但 5 前面（包括 5）有很多(括号对应的区间在 2 之前就结束了，例如-1 点的(括号，它对应的 ）点是 0，比 2 小啊!
结论：5 点（包括 5）左边的所有左括号-----减去 2 左边失效的左括号-----就是答案!
2 左边失效的左括号等于 -----2 左边的右括号!

使用 2 个树状数组，分别存储 左括号和右括号，然后 sum(终点：左括号数组)-sum(起点-1：右括号数组) 就可以了！

Nefu-1465 代码：

```
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <cstdio>
using namespace std;
const int maxn=1e5;
int a[maxn],b[maxn];
int n,m;
int update1(int i,int x)
{    while(i<=n)
      {a[i]+=x;
       i+=(i&-i);
      }
   return 0;
}
int update2(int i,int x)
{    while(i<=n)
      {b[i]+=x;
       i+=(i&-i);
      }
   return 0;
}
int sum1(int i)
{int ans=0;
      while(i)
      {
            ans+=a[i];
            i-=(i&-i);
      }
     return ans;

}
int sum2(int i)
{int ans=0;
      while(i)
      {
            ans+=b[i];
            i-=(i&-i);
      }
     return ans;

}
```

```
int main()
{    int k,x,y;
     scanf("%d%d",&n,&m);
     for(int i=1;i<=m;i++)
     {
          scanf("%d%d%d",&k,&x,&y);
          if (k==1)
          {
               update1(x,1);
               update2(y,1);
          }
          if (k==2)
          {
               int ans=sum1(y)-sum2(x-1);
               printf("%d\n",ans);
          }
     }

     return 0;
}
```

洛谷 2345　【奶牛集会】

本题最开始暴力 AC 掉了，4e8 的数据量啊！按道理应该卡住的，必须 n*logn 的算法。

在纸上推导了很久，发现如果 v 要是不重复就好了，只建一个 BIT 数组就可以，可以参考差分的做法，但后来发现 vi 和 vj 是可以重复的，只好放弃，果断使用 2 个 BIT 数组，先按照 V 从小到大排序，保证助理时 V 的值都是比当前 V 小。

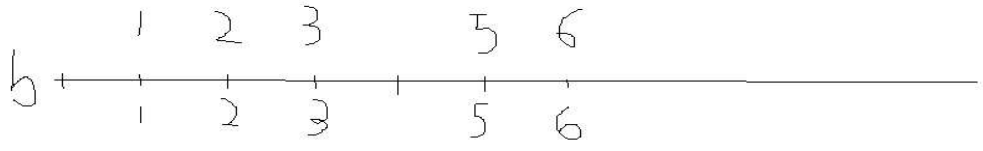
然后就是 X 的问题了，建立 a[],存放 x[i]的个数 update(a,1),统计比 x[i]小的有几个，比 x[i]大的有几个!

建立 b[],统计小于 x[i]的和；还统计大于 x[i]的和，这 2 个 BIT 数组的下标都是 x[i];

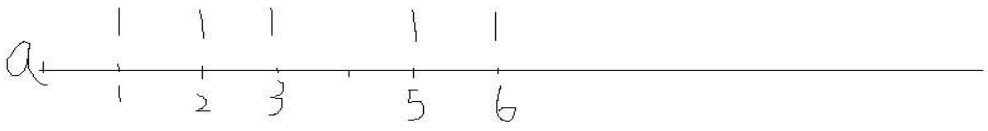
例如 x 值:

6　5　1　2　3

b数组记录x的值，下标也为x，可以统计小于x的和；大于x的和！



a数组的记录个数，下标为x,更新方式update(x,1)



比 3 小的有 2 个；比 3 小的和等于 3；2*3-3=3；
比 3 大的有 2 个；比 3 大的和等于 11；11-2*3=5；
3 对应的 V ； 答案=v*(2*3-3+11-2*3);
树状数组先查询，然后计算后再更新；

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int N=20005;
typedef long long LL;
LL a[N],b[N];
struct sa
{
	int v;
	int x;
}vis[N];
int n,tp;
int cmp(const sa &a,const sa &b)
{
	return a.v<b.v;
}
int update(LL *p,int i,int x)
{
	while(i<=tp)//这里是 tp，不能是 n;
	{
		p[i]+=x;
		i+=(i&-i);
	}
}
LL sum(LL *p,int i)
{   LL ans=0;
	while(i)
	{
		ans+=p[i];
		i-=(i&-i);
	}
	return ans;
}
int main()
{    LL num1,num2,ans=0;
LL add1,add2;
```

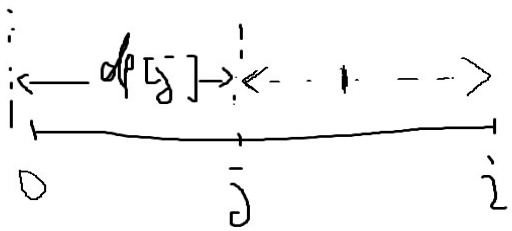
```
 tp=0;
      scanf("%d",&n);
      for(int i=1;i<=n;i++)
      {
            scanf("%d%d",&vis[i].v,&vis[i].x);
            tp=max(tp,vis[i].x);
      }
      sort(vis+1,vis+1+n,cmp);
      for(int i=1;i<=n;i++)
      { int r=vis[i].x;
        num1=sum(a,r);//小于 x 的个数;
        num2=sum(a,tp)-sum(a,r);//大于 x 的个数;
        add1=sum(b,r);//小于 x 的和;
        add2=sum(b,tp)-sum(b,r);//大于 x 的和;
        ans+=vis[i].v*(num1*r-add1+add2-num2*r);
        update(a,r,1);
        update(b,r,r);

      }
      printf("%lld\n",ans);
      return 0;
}
```

洛谷　【2344】奶牛抗议

从题目描述，典型的 DP 题，写出入门级的 DP 代码：

```
  For   (i=1;i<=n;i++)
          For( int j=i-1;j>=0;j--)
            If   (sum[i]>=sum[j])   dp[i]=dp[i]+dp[j];
```

这里 sum[i] 代表奶牛的前缀和；
DP 的初始值 dp[0]=1;



dp[j]表示长度为j的合法分类数，范围0-j;而j+1-----i区间，表示的是已经增序排列的一个区间了！就是区间和>0
根据乘法原理：方法数=dp[j]*1;连续区间的方法数=1

用图说一下 DP 的含义：

所以本题是用树状数组来维护 DP ，这种题这两年也很常见到，唯一的区别在于
更新的时候要更新查询的和；

```
Ans=sum(i);
Res+=ans;
Update(l,ans);
```

本题另外一个问题在于：dp[0]=1;
而 num[i]只有 n 个，dp[0]放到哪里呢？
把 0 和 num[i]一起，共 n+1 个值，然后开始离散化，最后把第一数（也就是 0 离散化后的值），把他更新成 1，因为 dp[0]=1;
本题的困惑在 sum[i]有正数和负数，所以 0 和这些数离散化的时候，0 就不是最小的了！
代码：

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <algorithm>
#include <string.h>
using namespace std;
const int N=1e5+50;
const int mod=1000000009;
int a[N],d[N],h[N];
struct sa
{
	int big;
	int sm;
}vis[N];
int cmp(const sa &a,const sa &b)
{
	return a.big<b.big;
}
int cmp1(const sa &a,const sa &b)
{
	return a.sm<b.sm;
}
int n,tp;
int update(int i,int x)
{
	while(i<=tp+10)
	{
		a[i]=(a[i]+x)%mod;

		i+=(i&-i);
	}
	return 0;
}
int sum(int i)
```

```
{

        int ans=0;
        while(i)
        {
                ans=(ans+a[i])%mod;

                i-=(i&-i);
        }
        return ans;
}
int main()
{     int ans,num=1;
        scanf("%d",&n);
        vis[0].big=0;
        vis[0].sm=0;;
        for(int i=1;i<=n;i++)
        {
                scanf("%d",&h[i]);
                vis[i].big=vis[i-1].big+h[i];
                vis[i].sm=i;
        }
        sort(vis,vis+1+n,cmp);
        d[0]=0;
        for(int i=0;i<=n;i++)
        {
                if (vis[i].big!=vis[i-1].big)
                        d[i]=(++num);
                else
                        d[i]=num;
        }
        tp=num;


        for(int i=0;i<=n;i++)
                vis[i].big=d[i];
                //vis[0].big=1;
        sort(vis,vis+1+n,cmp1);

        ans=0;
        update(vis[0].big,1);
        for(int i=1;i<=n;i++)
        {
                ans=sum(vis[i].big);
```

```
            update(vis[i].big,ans);
        }
        cout <<ans<<endl;
        return 0;
}
```