

# Dsu on tree

陈思睿

# 简介

- 是一种树上搜索
- 功能与树上启发式合并基本相同，有时能得到更优的复杂度。

# 功能

- 对于有根树内的所有节点
  - 统计以此节点为根的子树内点的信息
  - 统计以此节点为lca的链的信息

# 基本格式

```
//一些全局数组，因题而异
void sack(int now, bool clr) { //now为目前节点，clr为函数完毕是否要复原全局数组
    //对于任意的now，函数开始时全局数组都应为初始状态
    for (s:all light sons of now) {
        sack(s, 1);
    }
    if (son[now] exists) { //son[now]: now的重儿子
        sack(son[now], 0);
        //加入轻子树的信息（并更新答案）
    }
    //加入now节点的信息（并更新答案）
    //（统计答案）
    if (clr == 1) {
        //复原全局数组
    }
}

void init() {
    //初始化全局数组
}
```

- 代码右侧的注释是对本行代码的解释。
- 单行的注释是接下来要做的事。
- 是否加入小括号中的内容与sack的功能有关
- 若统计子树信息，则最后统计答案
- 若统计链信息，则边加点边更新答案

# 统计子树信息

- $n$ 个点的有根树，节点 $i$ 的颜色为 $c[i]$ ， $m$ 次询问，询问 $x$   $y$ 代表以 $x$ 为根的子树内颜色为 $y$ 的节点数量。
- $n, m \leq 5e5$

# 统计链信息

- $n$ 个节点的有根树，每条无向边上有一个权值 $a[i]$ ，给定一个 $x$ ，输出 $n$ 个数，第 $i$ 个数表示以 $i$ 号点为lca的简单路径中有多少条异或和为 $x$ 。
- $n, m \leq 5e5, x \leq 1e9$

# 其他做法

- 如果只需输出一个数，代表整棵树有多少条简单路径满足异或和为 $x$ 呢？
- 点分治
- 在一些情况下，点分治比dsu on tree复杂度更优（然而更难写）
- 如 ioi2011 race

# 时间复杂度证明

- 本质上是轻重链剖分
- 一棵 $n$ 个节点的树，每个点到根节点的简单路径经过的重链数量不超过 $\log_2 n$ 条
- 对于每个节点到根的路径，只有在两条重链的接头处，此节点所在的子树是轻儿子，此节点会被循环到。
- 每个节点被循环到的次数是 $O(\log n)$ 级的。



# 新鲜热乎的例题

- ccpc2020长春站F题
- 给定一棵n个节点的有根树，每个节点有权值 $a[i]$ ，求
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n [a_i \oplus a_j = a_{lca(i,j)}] \times (i \oplus j)$

# Solution

- 枚举节点编号的二进制位，对每位进行一次dsu on tree。
- Dsu on tree时 $\text{cnt}[x][2]$ 记录 $a[i]=x$ 的节点编号在枚举到的二进制位上0和1的个数
- 不能用普通的平衡树启发式合并，会TLE

# References

- [Tutorial] Sack (dsu on tree) （给出了几种写法的伪代码，博客后有题单） <https://codeforces.com/blog/entry/44351>
- ccpc2020长春 <https://codeforces.com/gym/102832/problem/F>
- ioi2011 race <https://www.luogu.com.cn/problem/P4149>

The background is white and features several faint, light gray geometric shapes and symbols scattered across it. These include a small circle at the top center, a diamond shape in the upper right, a triangle on the left, a curved line on the right, a hexagon in the lower right, a lightning bolt symbol in the bottom right corner, a rectangle in the bottom left, and various other lines and angles. The word "Thanks" is centered in a large, black, sans-serif font.

Thanks