

2021

欧拉回路问题

李嘉文

定义

欧拉通路



通过图中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的通路。

欧拉回路



通过图中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的回路。

无向图判定

欧拉通路



图连通；
图中只有0个或2个度为奇数的节点

欧拉回路



图连通；
图中所有节点度均为偶数

有向图判定

欧拉通路



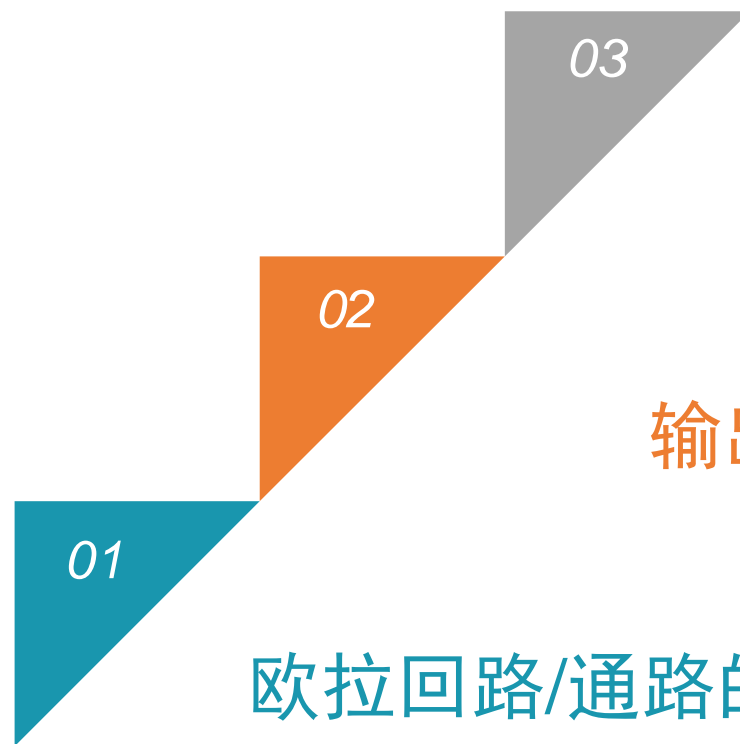
图连通；除2个端点外其余节点入度=出度；
1个端点入度比出度大1一个端点入度比出度小1
或所有节点入度等于出度

欧拉回路



图连通；
所有节点入度等于出度

Problem to
solve



欧拉回路/通路的存在性问题

输出欧拉回路通路

欧拉函数应用题

How to solve

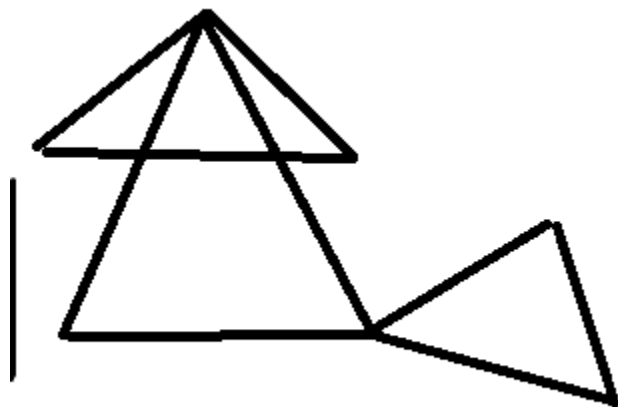


解决问题和欧拉回路相关问题

- 利用并查集判断连通性：并查集处理一遍，然后遍历所有点，找出所有父节点，当 $\text{find}[i]=i$ ，即为父节点，得到父节点的数量，即可得到给定图的连通块数量，若为1，则此图连通。连通性判断完成。
- 关于无向图和有向图第二个判定定理，均可在建图过程中通过计算出入度实现，较为简单不在陈述。
- 利用Fleury输出欧拉回路，实际上一个欧拉回路就类似于：一根橡皮筋，按照把它拧成数字8形状的方法，多拧了几次始终符合，一个本就成了环的线路自然可以一笔画完成，截止到这里对应于判定条件的任意点的入度等于出度的条件；当存在两个奇数度顶点时相当于在橡皮筋上延伸了一条线，自然还是可以一笔画，放在入口和出口处，但在其他环上点位置上就不可以实现，所以它只是欧拉通路。可以尝试一下。fleury算法就建立在这些拧成的环上。

Fleury算法实现输出欧拉回路

- 当把橡皮筋拧成环状的时候，形成的小环之间是以点相连的，我一笔画完这个环（一次找出一个几个点子集形成的欧拉回路），把这些走过的边去掉，判断每一个经过的点，有没有存在于其他点集组成的小欧拉回路里。自己一笔画其实就是一个DFS的过程。那么如何DFS并记录路径？



当一个点没有其他未访问过的边的时候我就把它存下来并且回溯到我之前画到这一步的边的另一节点，若该节点还连接有其他环继续搜下去便可。回溯搜到的应该是个反向的一笔画序列，用栈记录一下。

伪代码

- `Euler_circuit(start);`
- For 顶点的每一个邻接点 v
- 如果 $(start, v)$ 没有被标记过
- 将 $(start, v)$ 做上标记
- $(v, start)$ ///有向图可以省略
- `Euler_circuit(v);`
- 将边 $(start, v)$ 加入栈中
- ///递归，非递归都可以，代码比较简单就不写出来了，并查集，dfs都是已经学习过的基本功，建议各位同学尝试在理解的基础上自己敲一遍。

关于延伸性，应用型问题常用技巧

欧拉通路可以由欧拉回路去掉一条边得到，那么我们在判断是只要将奇数度的边相连，Fleury之后，输出时再去掉即可。补边再去边这种想法，会在很多题中有应用。

对于一个连通块变成一个欧拉图，最小需要多少次：奇数度顶点数量/2。

解决与此相关问题：最重要的应该是模型的转化，如何把一道题转化为可以用欧拉回路解决的问题，上述两条只是技巧，给点提示，希望能降低些A题的难度，在接下来的题目里你们能自己应用上，动脑思考，独立解决问题。

习题

- [\[HDU 1878 欧拉回路\]\(http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1878\)](http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1878)
- [\[HDU 1116 Play on Words\]\(http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1116\)](http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1116)
- [\[HDU 3018 Ant Trip\]\(http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3018\)](http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3018)
- [\[POJ 1041 John's trip\]\(http://poj.org/problem?id=1041\)](http://poj.org/problem?id=1041)

题解

[nefu_ljw的博客](#)

https://blog.csdn.net/ljw_study_in_CSDN/article/details/105568782