

## Задача 1: Проверка утверждений теории множеств

Определите истинность каждого утверждения как **true** или **false**. Приведите краткие обоснования. Считайте, что  $a$  и  $b$  — различные ( $a \neq b$ ) **урэлементы** (атомарные объекты, не являющиеся множествами).

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $a \in \{\{a\}, b\}$                            | 8. $\emptyset \in \emptyset$                         | 15. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$                                 |
| 2. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$                        | 9. $\emptyset \in \{\emptyset\}$                     | 16. $a \in \mathcal{P}(\{a\})$   |
| 3. $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$              | 10. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$                | 17. $\mathcal{P}(\{a, \emptyset\}) \subset \mathcal{P}(\{a, b, \emptyset\})$ |
| 4. $\{a, b\} \in \{a, b\}$                         | 11. $\emptyset \subseteq \emptyset$                  | 18. $\{a, b\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$                               |
| 5. $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$ | 12. $\emptyset \subset \emptyset$                    | 19. $\{a, a\} \in \mathcal{P}(\{a, a\})$                                     |
| 6. $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a\}\}$            | 13. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$          | 20. $\{\{a\}, \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, a\})$                   |
| 7. $\{a, a, a\} \setminus \{a\} = \{a, a\}$        | 14. $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ | 21. $\mathcal{P}(\{a, b\}) \supseteq \{\{a\}, \{\emptyset\}\}$               |

## Задача 2: Операции над множествами

Команда кибербезопасности отслеживает различные типы **сетевых угроз**. Они классифицируют угрозы во множества на основе векторов атак:

- $A = \{\text{malware, phishing, ddos, ransomware, botnet}\}$  (**активно** обнаруживаемые угрозы)
- $P = \{\text{phishing, social-eng, ddos, insider, malware}\}$  (угрозы, направленные на **людей**)
- $N = \{\text{ransomware, cryptojack, ddos, botnet, worm}\}$  (угрозы, требующие **сетевого доступа**)

Универсальное множество  $T = A \cup P \cup N$  содержит все различные типы угроз, упомянутые выше.

**Примечание:** Все дополнения ( $\overline{X}$ ) берутся относительно универсального множества  $T$ .

**Часть (а):** Вычислите следующее и интерпретируйте каждый результат в контексте кибербезопасности:

- |               |                             |                             |                                     |
|---------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1. $A \cap P$ | 3. $(A \cap P) \setminus N$ | 5. $A \triangle P$          | 7. $\mathcal{P}(\{A, P, N\})$       |
| 2. $A \cup N$ | 4. $\overline{A \cap P}$    | 6. $P \setminus (A \cup N)$ | 8. $ (P \cup N) \cap \overline{A} $ |

**Часть (b):** Команде безопасности необходимо эффективно сортировать угрозы по приоритету. Определите **уровни приоритета**:

- Критический:  $C = A \cap P \cap N$  (активные, направленные на людей, сетевые)
- Высокий:  $H = (A \cap P) \setminus N$  (активные и направленные на людей, но не сетевые)
- Средний:  $M = A \setminus (C \cup H)$  (остальные активные угрозы)

1. Вычислите  $C, H, M$ .
2. Определите, является ли  $\{C, H, M\}$  разбиением множества  $A$ .

**Часть (c):** Нарисуйте диаграмму Венна, показывающую множества  $A, P$  и  $N$  со всеми типами угроз, помеченными в соответствующих областях. Используйте цвета для обозначения категорий приоритетов.

### Задача 3: Метрики сходства и расстояния

Стриминговые сервисы используют меры сходства для рекомендации контента.

Будем рассматривать *предпочтения пользователей* как множества жанров, которые им нравятся. Например, если Анна любит запутанные сюжеты, её множество предпочтений:  $A = \{\text{Фантастика, Триллер}\}$ .

	Фантастика	Триллер	Драма	Романтика	Ужасы	Комедия	Боевик	Фэнтези
Анна	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Борис	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Клара	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Диана	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓

**Часть (а):** *Коэффициент сходства Жаккара* измеряет степень пересечения вкусов двух пользователей:

$$\mathcal{J}(X, Y) = \frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|} = \frac{\text{общие предпочтения}}{\text{всего уникальных предпочтений}}$$

с соглашением, что  $\mathcal{J}(\emptyset, \emptyset) = 1$ .

*Расстояние Жаккара* измеряет, насколько различаются пользователи:

$$d_{\mathcal{J}}(X, Y) = 1 - \mathcal{J}(X, Y)$$

1. Вычислите  $\mathcal{J}(X, Y)$  и  $d_{\mathcal{J}}(X, Y)$  для всех пар пользователей.
2. Определите, какая пара наиболее похожа, а какая наиболее различна.
3. Постройте граф с пользователями в качестве вершин и рёбрами, взвешенными по коэффициенту сходства Жаккара, за исключением рёбер с весом 0.
4. Постройте  $G_{0.25}$ : граф с рёбрами, где коэффициент сходства Жаккара  $\geq 0.25$ . Перечислите компоненты связности.

**Часть (б):** *Косинусное сходство* для множеств можно определить<sup>1</sup> как:

$$\mathcal{C}(X, Y) = \frac{|X \cap Y|}{\sqrt{|X| \cdot |Y|}}$$

*Косинусное расстояние* равно  $d_{\mathcal{C}}(X, Y) = 1 - \mathcal{C}(X, Y)$ .

1. Вычислите  $\mathcal{C}(X, Y)$  и  $d_{\mathcal{C}}(X, Y)$  для всех пар пользователей.
2. Определите, какая пара наиболее похожа, а какая наиболее различна.
3. Постройте граф с пользователями в качестве вершин и рёбрами, взвешенными по косинусному сходству.

<sup>1</sup>коэффициент Оцука–Очиай

4. Покажите, что  $\mathcal{J}(X, Y) \leq \mathcal{C}(X, Y)$  для любых непустых конечных множеств  $X$  и  $Y$ .  
Когда выполняется равенство?

**Часть (с):** Докажите, что расстояние Жаккара удовлетворяет неравенству треугольника:

$$d_{\mathcal{J}}(A, C) \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) + d_{\mathcal{J}}(B, C)$$

для любых конечных множеств  $A, B$  и  $C$ .

**Часть (d):** Покажите, что косинусное расстояние НЕ удовлетворяет неравенству треугольника, предоставив конкретный контрпример. Найдите три непустых множества  $X, Y$  и  $Z$  такие, что:

$$d_c(X, Z) > d_c(X, Y) + d_c(Y, Z)$$

**Часть (е):** Новый пользователь присоединяется с предпочтениями  $U = \{\text{thriller, horror}\}$ . Используя коэффициент сходства Жаккара, найдите существующих пользователей со сходством  $\geq 0.25$  для рекомендации как “пользователи со схожими вкусами”.

**Задача повышенной сложности:** Разработайте собственную метрику сходства, которая, по вашему мнению, работала бы лучше коэффициента Жаккара для рекомендаций фильмов. Объясните ваше обоснование.

## Задача 4: Логические и теоретико-множественные тождества

Эта задача связывает теорию множеств и логические рассуждения, подготавливая вас к формальным доказательствам.

**Часть (а):** Переведите каждое утверждение в логику первого порядка с кванторами над универсальным множеством  $U$ :

1.  $A \subseteq B$
2.  $A = B$
3.  $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

**Часть (b):** Докажите следующие тождества, используя как диаграммы Венна, так и символические рассуждения:

1.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. Законы де Моргана:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  и  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3.  $A \subseteq B$  тогда и только тогда, когда  $A \cap B = A$  тогда и только тогда, когда  $A \cup B = B$
4. Распределительный закон:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Часть (с):** Для любого универсального множества  $U$  и множества  $X \subseteq U$  докажите, что оператор дополнения является:

1. **Инволюцией:**  $\overline{\overline{X}} = X$
2. **Обращающим порядок (антимонотонным):** если  $X \subseteq Y$ , то  $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$

## Задача 5: Системы координат

Разработчик игр проектирует 2D-головоломку с различными игровыми зонами. Каждая зона определяется конкретными координатными областями в  $\mathbb{R}^2$ .

**Часть (а):** Изобразите все игровые зоны на координатной плоскости:

- Игровая область:  $G = [0; 8] \times [0; 7]$
- Безопасная зона:  $S = (1; 4) \times (5; 7]$
- Непроходимая стена:  $W = \{\langle x, 4 \rangle \mid 0 \leq x \leq 6\}$
- Зона опасности:  $D = \{\langle x, y \rangle \in G \mid y < x \text{ или } y < 4\}$
- Зоны сокровищ:  $T = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \{1, 2, 3\}, 1 \leq y < 3\}$
- Арена босса:  $B = \{\langle x, y \rangle \in G \mid 16(x - 9)^2 + 25y^2 \leq 400\}$

**Часть (b):** Усиления появляются в узлах решётки (целочисленные координаты) внутри зоны опасности  $D$ , исключая стену  $W$  и границы  $G$ . Подсчитайте количество таких точек.

**Часть (с):** Игрок начинает в позиции  $P_0 = \langle 2, 6 \rangle$  и совершает ровно три перехода согласно векторам  $v_1 = \langle 4, 0 \rangle$ ,  $v_2 = \langle 1, -2 \rangle$  и  $v_3 = \langle -4, -3 \rangle$  (в заданном порядке).

- Вычислите позицию игрока после каждого хода:  $P_i = P_{i-1} + v_i$ , для  $i = 1, 2, 3$ .
- Определите, в каких зонах находится игрок после каждого хода.
- Попадает ли игрок когда-либо в арену босса  $B$ ?

## Задача 6: Самореферентные головоломки с множествами

В информатике рекурсивные структуры данных ссылаются на себя. Следующие математические головоломки исследуют аналогичные самореферентные концепции, которые встречаются в программировании, логике и даже философии.

**Часть (а):** Найдите все множества  $X$  и  $Y$ , которые удовлетворяют данной системе:

$$X = \{1, 2, |Y|\}$$

$$Y = \{|X|, 3, 4\}$$

Начните с определения возможных значений для  $|X|$  и  $|Y|$ , затем проверьте, какие комбинации дают решение.

**Часть (b):** Рассмотрим более сложную систему:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$

$$B = \{2, |A|, |C|\}$$

$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

Найдите все верные решения  $(A, B, C)$ . Объясните, почему некоторые потенциальные решения не работают.

**Часть (с):** Разработайте собственную **нетривиальную** самореферентную систему множеств, содержащую 2–4 множества.

## Задача 7: Нечёткая логика

В реальном мире границы не всегда чёткие. Рост 180 см это высокий? 10°C это тепло? *Нечёткие множества* моделируют эту неопределённость и являются важными в ИИ, машинном обучении и системах управления.

В отличие от классических множеств, где принадлежность бинарна (принадлежит/не принадлежит), нечёткие множества присваивают каждому элементу *степень принадлежности*  $\mu(x) \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$ , представляющую, насколько “сильно” элемент принадлежит множеству.

Рассмотрите два нечётких множества над  $X = \{a, b, c, d, e\}$ :

$$F = \{a : 0.4, b : 0.8, c : 0.2, d : 0.9, e : 0.7\}$$

$$R = \{a : 0.6, b : 0.9, c : 0.4, d : 0.1, e : 0.5\}$$

Например,  $\mu_F(b) = 0.8$  означает, что элемент  $b$  принадлежит нечёткому множеству  $F$  со степенью 0.8.

**Часть (а):** Определите дополнение нечёткого множества  $S$  как  $\mu_{\bar{S}}(x) = 1 - \mu_S(x)$ . Вычислите  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$ .

**Часть (б):** Для объединения определите  $\mu_{S \cup T}(x) = \max\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$ . Вычислите  $F \cup R$ .

**Часть (с):** Для пересечения определите  $\mu_{S \cap T}(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$ . Вычислите  $F \cap R$ .

**Часть (д):** Предложите и обоснуйте определение для  $S \setminus T$ . Вычислите  $F \setminus R$  и  $R \setminus F$ .

**Часть (е):** Один нечёткий аналог сходства Жаккара:

$$\tilde{J}_f(F, R) = \frac{\sum_{x \in X} \min\{\mu_F(x), \mu_R(x)\}}{\sum_{x \in X} \max\{\mu_F(x), \mu_R(x)\}}$$

Вычислите  $\tilde{J}_f(F, R)$  и соответствующее расстояние  $1 - \tilde{J}_f(F, R)$ .

**Часть (ф): Дефаззификация.** Предположим, что система запускает предупреждение, если степень принадлежности элемента к  $F \cup R$  превышает 0.75. Перечислите все элементы, запускающие предупреждение, с их степенями принадлежности, и кратко обсудите, как изменение данного порогового значения влияло бы на чувствительность системы и количество предупреждений.

## Задача 8: Булеаны множеств

Пусть  $A$  и  $B$  — конечные множества. Для каждого утверждения ниже либо приведите *строгое доказательство*, либо найдите *контрпример*, опровергающий данное утверждение.

1. Если  $A \subseteq B$ , то  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2.  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
3.  $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
4.  $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|}$

**Указания по оформлению работы:**

- Для вычислительных задач чётко показывайте все шаги решения и рассуждения.
- Для доказательств сформулируйте, что вы доказываете, приведите ясные логические шаги и завершите сочетанием “ч.т.д.” или символом  $\square$ .
- Для ложных утверждений приведите конкретные контрпримеры.
- Обсуждайте задачи с одноклассниками, но пишите все решения самостоятельно.
- Сдавайте работу в формате PDF с чётко пронумерованными задачами и разборчивым почерком.

**Критерии оценки:**

- Точность вычислений: 50%  
(Получение правильного ответа)
- Математические рассуждения и качество доказательств: 30%  
(Демонстрация ясного логического мышления)
- Оформление и ясность изложения: 20%  
(Удобство восприятия ваших решений)