

1 Set Theory Cheatsheet

1.1 Терминология и обозначения

- * **Множество** – неупорядоченный набор уникальных элементов. Set
- * Множество может быть задано с помощью:
 - перечисления элементов: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество, состоящее из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n . Urelement
 - Например, $\{\square, \clubsuit, 42\}$ – множество, содержащее квадрат, кошку (или кота) и число 42. 42
 - характеристического свойства: $\{x \mid P(x)\}$ – множество элементов, обладающих **свойством** P . Predicate
 - Например, $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ – простое}\}$ – множество простых чисел. Prime number
- * $\emptyset = \{\}$ – **пустое** множество. Empty set
- * \mathfrak{U} – **универсальное** множество (**универсум**). Universal set
- * $x \in A$ – элемент x **принадлежит** множеству A . Element
- $1 \in \{1, 2, 3\}$ $\square \in \{\Delta, \square, \circlearrowleft\}$ $1.25 \in \mathbb{Q}$ $2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ – простое}\}$
- * $x \notin A$ – элемент x **не принадлежит** множеству A . Subset
- $9 \notin \{1, 2, 3\}$ $\clubsuit \notin \{\square, 42, \{\clubsuit\}\}$ $\pi \notin \mathbb{Q}$ $42 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ – простое}\}$
- * $A \subseteq B$ – множество A является **подмножеством** множества B , т.е. $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$. Subset
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ $\{\{42\}\} \subseteq \{\{42\}\}$ $\{\circlearrowleft, \square\} \not\subseteq \{a, \circlearrowleft, 9\}$ $\{5\} \not\subseteq \{7, \{5\}\}$
- * $A \subset B$ – множество A является **строгим подмножеством** множества B , т.е. $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Strict subset
- $\{c\} \subset \{a, b, c\}$ $\{42\} \not\subset \{42\}$ $\{9, \clubsuit\} \not\subset \{a, \circlearrowleft, 9\}$ $\{5\} \not\subset \{7, \{5\}\}$
- * $A = B$ – множества A и B содержат одинаковые элементы, т.е. $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$. Extensionality
- $\{\Delta, a, \{5\}\} = \{a, \{5\}, \Delta\}$ $\{2, \square, \circlearrowleft, \square\}, 2\} = \{2, \{\square\}\}$ $\{6, \emptyset\} \neq \{6\}$

1.2 Операции над множествами

- * $|A|$ – **мощность** множества A (число элементов). Cardinality
- $|\{4, \square, d\}| = 3$ $|\{1, 9, 9, 9, 1\}| = 2$ $|\{\{a, b, c\}, \{3, 5, 9\}\}| = 2$ $|\{1, \{2, 3, 4, \{5\}\}\}| = 2$
- * $2^A = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ – **булеан** множества A (множество всех подмножеств). Powerset
- $\mathcal{P}(\{1, \square, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\square\}, \{\emptyset\}, \{1, \square\}, \{1, \emptyset\}, \{\square, \emptyset\}, \{1, \square, \emptyset\}\}$
- * $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – **пересечение** множеств A и B . Intersection
- * $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – **объединение** множеств A и B . Union
- * $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – **разность** множеств A и B (дополнение A до B). Set difference
- * $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A = \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin A\}$ – **дополнение** (до универсума) множества A . Complement
- * $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – **симметрическая разность** множеств A и B . Symmetric difference
- * $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ – **декартово произведение** множеств A и B . Cartesian product
- * $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{n \text{ sets}} = \underbrace{\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i \in [1; n]\}}_{n\text{-tuple}}$ – **n -арное декартово произведение** множеств A_1, \dots, A_n .
- * $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i \in [1; n]\}}$ – **декартова степень** множества A . Tuple

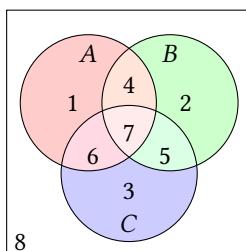
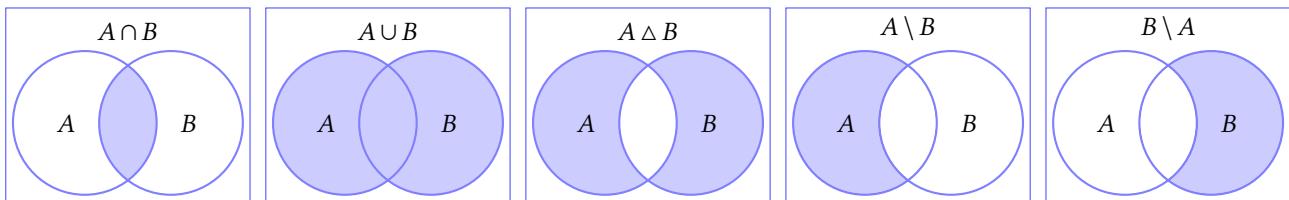
1.3 Некоторые свойства и законы

- * Свойства операций над множествами ($\forall A$):

$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \Delta \emptyset = A$	* Законы де Моргана:
$A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$	$A \cap \mathfrak{U} = A$	$A \Delta \mathfrak{U} = \overline{A}$	◦ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$A \Delta A = \emptyset$	◦ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$A \cup \overline{A} = \mathfrak{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \Delta \overline{A} = \mathfrak{U}$	* Законы поглощения:
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{A} = \mathfrak{U}$	$\overline{\mathfrak{U}} = \emptyset$	◦ $A \cup (A \cap B) = A$
$ \emptyset = 0$	$ 2^A = 2^{ A }$	$ A^n = A ^n$	◦ $A \cap (A \cup B) = A$
$ \mathbb{N} = \mathbb{Q} = \aleph_0$	$ \mathbb{R} = \mathfrak{c} = 2^{\mathbb{N}} = \beth_1$	$ A \times B = A \cdot B $	* Мистические законы:
$\emptyset \subseteq A$	$2^\emptyset = \{\emptyset\}$	$A^0 = \{\emptyset\}$	◦ $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
			◦ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
- * Законы де Моргана: De Morgan's laws
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- * Законы поглощения: Absorption law
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- * Мистические законы: Mystical laws
- $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
- $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

1.4 Диаграммы Венна

Venn diagram



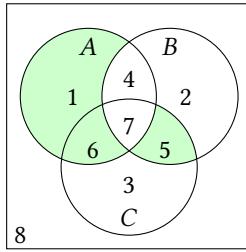
На предоставленной слева диаграмме Венна для трёх множеств A, B, C и универсума \mathfrak{U} области отмечены номерами. Для заданного списка областей нарисуйте диаграмму Венна и составьте соответствующую формулу, используя термы $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и операторы \cup, \cap .

$$1. \underbrace{\mathcal{S}(1, 4, 6, 8) = \mathcal{S}(1, 4, 6) + \mathcal{S}(8)}_{= \mathcal{S}(1, 4, 6) = A \text{ without } ABC} = // \text{Wolfram} //$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{S}(1, 4, 6) = A \text{ without } ABC, \\ &\mathcal{S}(8) = \text{outside of } (A + B + C) = \\ &= (A - ABC) + \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \quad \downarrow \text{правило: } A - B = A\bar{B} \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \quad \downarrow \text{два де Моргана} \\ &= A \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \quad \downarrow \text{раскрываем скобку, сокращаем } A\bar{A} = \emptyset \\ &= \cancel{A\bar{A}} + \bar{A}\bar{B} + A\bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \quad \downarrow \text{выносим } \bar{B} \text{ за скобку} \\ &= \bar{B} \cdot (A + \bar{A} + \bar{C}) + A\bar{C} = \quad \downarrow \text{закон поглощения: } A + \bar{A}B = A + B \\ &= \bar{B} \cdot (A + \bar{C}) + A\bar{C} = \quad \downarrow \text{раскрываем скобку} \\ &= A \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{C} \end{aligned}$$

$$2. \underbrace{\mathcal{S}(1, 5, 6)}_{= \mathcal{S}(1, 5) = A \text{ without } AB, \mathcal{S}(5) = BC \text{ without } ABC} = \mathcal{S}(1, 6) + \mathcal{S}(5) = // \text{Wolfram} //$$

$$\begin{aligned} &= (A - AB) + (BC - ABC) = \quad \downarrow \text{правило: } A - B = A\bar{B} \\ &= \bar{A}\bar{B} + BC\bar{ABC} = \quad \downarrow \text{два де Моргана} \\ &= A \cdot (\bar{A} + \bar{B}) + BC \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = \quad \downarrow \text{раскрываем скобку} \\ &= \cancel{A\bar{A}} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}BC + \cancel{BC\bar{B}} + \cancel{BC\bar{C}} = \quad \downarrow \text{сокращаем } A\bar{A} = \emptyset \\ &= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}BC \end{aligned}$$



1.5 Декартово произведение множеств на плоскости \mathbb{R}^2

\mathbb{R}^2 coordinate space

Декартово произведение двух множеств — множество пар. Если представить, что такие пары — элементы пространства \mathbb{R}^2 (точки на плоскости), то возможна следующая геометрическая интерпретация:

