

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что a и b – урэлементы, $a \neq b$.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $a \in \{\{a\}, b\}$ | (i) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} = \{a\}$ | (r) $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ |
| (b) $a \in \{a, \{b\}\}$ | (j) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a\}$ | (s) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ |
| (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ | (k) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a, a\}$ | (t) $a \in 2^{\{a\}}$ |
| (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$ | (l) $\{a, a, a\} \setminus \{a, a\} = \{a\}$ | (u) $2^{\{a, \emptyset\}} \subset 2^{\{a, b, \emptyset\}}$ |
| (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ | (m) $\emptyset \in \emptyset$ | (v) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a, b\}}$ |
| (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$ | (n) $\emptyset \subseteq \emptyset$ | (w) $\{a, a\} \in 2^{\{a, a\}}$ |
| (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$ | (o) $\emptyset \subset \emptyset$ | (x) $\{\{a\}, \emptyset\} \subseteq 2^{\{a, a\}}$ |
| (h) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} =$ | (p) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | (y) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a, 2^{\{a\}}\}}$ |
| (a), a, a, a, a, a | (q) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ | (z) $\{\{a, \emptyset\}\} \subseteq 2^{\{a, 2^{\emptyset}\}}$ |

2. Дано множество-универсум¹ $\mathfrak{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$ и его подмножества: $A = \{x \mid x – чётное\}$, $B = \{x \mid x – простое³\}$, $C = \{2, 4, 7, 9\}$. Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы, а затем найдите:

- | | | |
|--------------------------------|---|------------------------------------|
| (a) $B \setminus \overline{C}$ | (c) $\mathfrak{U} \setminus (\overline{C} \cup A)$ | (e) $ 2^{A \setminus C} $ |
| (b) $B \Delta (A \cap C)$ | (d) $ \{A \cup B \cup 2^\emptyset \cup 2^{\mathfrak{U}}\} $ | (f) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$ |

3. Даны следующие множества⁶: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{\square, \clubsuit\} \cup \emptyset$, $C = 2^\emptyset \setminus \{\emptyset\}$, $D = \{4, |2^{\{\emptyset, C\}}|\}$. Внезапно требуется найти:

- | | | |
|------------------|---------------------------|--|
| (a) $A \Delta D$ | (c) $B \cap \overline{A}$ | (e) $D^{ C }$ |
| (b) $C \times B$ | (d) $B \times 2^{\{C\}}$ | (f) $\{D \cap \{A\}\} \times (D \cup \{ D \})$ |

4. Мера Жаккара⁷ $\mathcal{J}(A, B)$ для двух конечных множеств A и B определяет степень их похожести и задаётся следующим образом:

$$\mathcal{J}(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

При этом $\mathcal{J}(\emptyset, \emptyset) = 1$. Расстояние Жаккара $d_{\mathcal{J}}(A, B)$ между двумя множествами A и B определяет степень их различия и задаётся как $d_{\mathcal{J}}(A, B) = 1 - \mathcal{J}(A, B)$.

Докажите следующие утверждения для произвольных конечных множеств A и B .

- (a) $\mathcal{J}(A, A) = 1$ и $d_{\mathcal{J}}(A, A) = 0$.
- (b) $\mathcal{J}(A, B) = \mathcal{J}(B, A)$ и $d_{\mathcal{J}}(A, B) = d_{\mathcal{J}}(B, A)$.
- (c) $\mathcal{J}(A, B) = 1$ и $d_{\mathcal{J}}(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.
- (d) $0 \leq \mathcal{J}(A, B) \leq 1$ и $0 \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) \leq 1$.
- (e) Для произвольных множеств A, B и C выполняется неравенство треугольника⁸:

$$d_{\mathcal{J}}(A, C) \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) + d_{\mathcal{J}}(B, C)$$

5. Изобразите на графиках \mathbb{R}^2 следующие множества точек:

- | | |
|---|--|
| (a) $\{1, 2, 3\} \times (1; 3]$ | (d) $\{\langle x, y \rangle \mid y \in \{1, \dots, 5\}, x \in [1; 6 - y]\}$ |
| (b) $[1; 5) \times (1; 4] \setminus \{\langle 2, 3 \rangle\}$ | (e) $\{\langle x, y \rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y \geq x) \vee (x > 4)\}$ |
| (c) $[1; 7] \times (1; 5] \setminus (1; 4) \times (1; 3)$ | (f) $\{\langle x, y \rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 \leq 36\}$ |

¹ Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэлементов. Считайте, что $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A$.

⁵ Считайте, что 1 не является простым числом.

⁶ \square – самый обычный квадрат, \clubsuit – самый обычный кот.

⁷ Jaccard index

⁸ Из (a)-(c) и (e) следует, что $d_{\mathcal{J}}$ является метрикой, что крайне интересно и полезно... для некоторых.

6. Найдите все множества A , B и C , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$

$$B = \{2, |A|, |C|\}$$

$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

7. Нечёткие множества⁹ — обобщение множеств для случаев, когда необходимо описать *вероятностный* или *частичный* характер нахождения элементов во множестве. Каждому элементу $x \in X$ заданного универсума X сопоставляется *степень принадлежности* $\mu(x) \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$, задаваемая в виде действительного числа от 0 до 1. Нечёткие множества задаются с помощью перечисления элементов вместе со степенями принадлежности, например, $F = \{a : 0.4, b : 0.8, c : 0.2, d : 0.9, e : 0.7\}$ и $R = \{a : 0.6, b : 0.9, c : 0.4, d : 0.1, e : 0.5\}$.

- (a) Дополнение нечёткого множества S обозначается \bar{S} и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента равна $\mu_{\bar{S}}(x) = 1 - \mu_S(x)$. Найдите \bar{F} и \bar{R} .
- (b) Объединение нечётких множеств S и T обозначается $S \cup T$ и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента есть *максимум* из степеней принадлежности данного элемента в двух исходных множествах S и T . Найдите $F \cup R$.
- (c) Пересечение нечётких множеств $S \cap T$ задаётся аналогично объединению: $\mu_{S \cap T}(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$. Найдите $F \cap R$.
- (d) Самостоятельно придумайте определение для разности нечётких множеств $S \setminus T$. Найдите $F \setminus R$ и $R \setminus F$.

8. Определите счётность или несчётность следующих множеств:

- (a) Множество рациональных¹⁰ чисел \mathbb{Q} .
- (b) Булево множество натуральных чисел $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (c) Множество всех функций вида $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (d) Объединение *счётного* числа счётных множеств.
- (e) Множество действительных корней всех уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ с целочисленными коэффициентами a , b и c .

9. Докажите или опровергните следующие утверждения:

- (a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
- (b) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
- (c) $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$, то есть множества комплексных и действительных чисел равномощны.
- (d) $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$ при использовании определения упорядоченной пары по Куратовскому: $\langle x, y \rangle_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

⁹ Fuzzy sets

¹⁰ Рациональное число можно представить в виде дроби m/n , где $m \in \mathbb{Z}$ — целое, а $n \in \mathbb{N}$ — натуральное.