Тема: Интерполирование данных

В практических расчетах чаще всего используют интерполяционные многочлены не высоких степеней. Многочлен Лагранжа должен иметь степень, на единицу меньшую числа точек интерполяционной таблицы. Обычно по исходным данным именно такой многочлен и восстанавливается. По найденному многочлену находят приближенные значения функции для любых значений аргумента, лежащих между узлами заданной сетки.

<u>*Пример1:*</u> Найти многочлен наименьшей степени, принимающей в данных точках заданные значения:

i	0	1	2
x	1.45	1.36	1.14
y	3.14	4.15	5.65

Здесь заданы лишь три узла сетки. Следовательно, можно восстановить многочлен Лагранжа второго порядка:

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Вычислим в начале коэффициенты:

$$L_{20}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1.36)(x-1.14)}{(1.45-1.36)(1.45-1.14)} = \frac{x^2-2.5x+1.55}{0.0279}$$

$$L_{21}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1.45)(x-1.14)}{(1.36-1.45)(1.36-1.14)} =$$

$$= \frac{x^2-2.59x+1.653}{-0.0198};$$

$$L_{22}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1.45)(x-1.36)}{(1.14-1.45)(1.14-1.36)} =$$

$$= \frac{x^2-2.81x+1.972}{0.0682}.$$

Тогда

$$L_2(x) = 112.5448(x^2-2.5x+1.55) - 209.5960(x^2-2.59x+1.653) +$$
$$+82.8446(x^2-2.81x+1.972) = -14.2066x^2+28.6983x-8.6483.$$

<u>*Пример2.*</u>

Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Заданная точка $x^* = 0.955.$

Исходная функция задана в табличном виде:

x	0.68	0.73	0.80	0.88	0.93	0.99
y	0.80866	0.89492	1.02964	1.2066	1.34087	1.52368

Приближенное значение функции будем искать по формуле:

$$f(x) = \Pi_{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i},$$

$$\Pi_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n);\ D_i = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n).$$

Составим таблицу:

	Разности						D_i
i	0	1	2	3	4	5	
0	0.275	-0.05	-0.12	-0.20	-0.25	-0.31	$-2.5575\cdot10^{-5}$
1	0.05	0.225	-0.07	-0.15	-0.2	-0.26	$6.1425\cdot10^{-6}$
2	0.12	0.07	0.155	-0.08	-0.13	-0.19	$-2.5728\cdot10^{-6}$
3	0.20	0.15	0.08	0.075	-0.05	-0.11	$9.900\cdot10^{-7}$
4	0.25	0.2	0.13	0.05	0.025	-0.06	$-4.875\cdot10^{-7}$
5	0.31	0.26	0.19	0.11	0.06	-0.035	$-3.5375\cdot10^{-6}$

i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	-31619.159
1	145693.122
2	-400209.892
3	1221878.788
4	-2750502.564
5	-430718.609

$\sum_{i=0}^{5} \frac{y_i}{D_i} = -2245478.314, \qquad \Pi_{n+1} = -6.2939 \cdot 10^{-7};$

$f(0.955) \approx -2245478.314 \cdot (-6.2939 \cdot 10^{-7}) = 1.41327.$

Ответ: $f(0.955) \approx 1{,}141327.$

Пример3. Пусть известны значения функции $y = \sqrt{x}$ в точках $14; 16; 19; 21$. Вычислить с максимальной точностью $\sqrt{15}$ и оценить погрешность результата.

Решение: Будем использовать интерполяционный многочлен Лагранжа, т.к. $h \neq const\ (16 - 14 \neq 19 - 16 \neq 21 - 19)$.

Найдем множители Лагранжа:

$$L_3(x_0) = \frac{(15-16)(15-19)(15-21)}{(14-16)(14-19)(14-21)} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35};$$

$$L_3(x_1) = \frac{(15-14)(15-19)(15-21)}{(16-14)(16-19)(16-21)} = \frac{4}{5};$$

$$L_3(x_2) = \frac{(15-14)(15-16)(15-21)}{(19-14)(19-16)(19-21)} = -\frac{1}{5};$$

$$L_3(x_3) = \frac{(15-14)(15-16)(15-19)}{(21-14)(21-16)(21-19)} = \frac{2}{35}.$$

Проверим выполнение свойства множителей Лагранжа:

$$\sum_{i=0}^{3} L_3(x_i) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} + \frac{12}{35} + \frac{2}{35} = 1$$

свойство выполняется.

Чтобы найти значение функции с максимальной точностью нужно определить, с какой точностью следует знать значение $y = \sqrt{x}$ в узлах. Для этого определим погрешность метода Δ_1:

$$\Delta_1 \leq \frac{M_4}{4!} |(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)|;$$

$$M_4 = \max_{[14,21]} |f^{(4)}(x)|;$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}; f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}};$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}; f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}}.$$

$$\Delta_1 \leq \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{14^7} \cdot 24} |(15-14)(15-16)(15-19)(15-21)| = 0.00009.$$

Минимально возможная погрешность результата $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0{,}0001$.

Отсюда $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1 = 0{,}0001 - \Delta_1$, где Δ_2 вычислительная погрешность. Но

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{3} |L_3(x_i)| \Delta y_i = \left(\frac{12}{35} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{35}\right) \Delta y_i = \frac{7}{5} \Delta y_i.$$

Отсюда $\Delta y_i = \frac{5\Delta_2}{7} = 0.71 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, значение функции в узлах нужно взять с пятью знаками после запятой.

x_i	14	16	19	21
y_i	3.74166	4.00000	4.35890	4.58258

$L_3(15) = \frac{12}{35}3.74166 + \frac{4}{5}4 + \left(-\frac{1}{5}\right)4.3589 + \frac{2}{35}4.58258 = 3.87294.$

Ответ: $\sqrt{15} = 3{,}8729 \pm (0{,}0001 + 0{,}0004)$, где $0{,}0004 = \Delta_3$ погрешность округления.

Пример4. По заданной таблице функции $y = f(x)$ определить значение x^*, для которого $f(x^*) = 10.$

x_i	10	15	17	20
y_i	3	7	11	17

Решение: Функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[10,20]$, следовательно, существует обратная функция $x = g(y)$. Построим для нее интерполяционный многочлен Лагранжа $L_3(y)$ и вычислим $L_3(10)$.

$$x^* = L_3(10) = \sum_{i=0}^{3} L_3(y_i)x_i =$$

$$= \left(-\frac{3}{16}\right)\cdot 10 + \left(\frac{7}{40}\right)\cdot 15 + \left(\frac{49}{80}\right)\cdot 17 + \left(-\frac{1}{40}\right)\cdot 20 = 16.648.$$

Задачи для самостоятельного решения

1) Зная значение функции $y = \sqrt{x}$ в точках $4; 9; 16; 25$, найти значение функции в точке 11. Оценить погрешность.
2) Восстановить многочлен Лагранжа, удовлетворяющий исходным данным.

1.	i	0	1	2	3	4
	x	0	1	2	5	
	y	2	3	12	147	
2.	i	0	1	2	3	
	x	-2	1	2	4	
	y	25	-8	-15	-23	
3.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	6	0	2	0	6
4.	i	0	1	2	3	
	x	0	1	2	5	
	y	3	4	13	148	
5.	i	0	1	2	3	
	x	-2	1	2	4	
	y	26	-7	-14	-22	
6.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	5	0	1	0	5
7.	i	0	1	2	3	
	x	-1	0	1	4	
	y	2	3	12	147	
8.	i	0	1	2	3	
	x	1	2	3	6	

	y	2	3	12	147	
9.	i	0	1	2	3	
	x	-3	0	1	3	
	y	25	-8	-15	-23	
10.	i	0	1	2	3	
	x	-1	2	3	5	
	y	25	-8	-15	-23	
11.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	5	0	1	0	5
12.	i	0	1	2	3	4
	x	-1	0	1	2	3
	y	6	0	2	0	6
13.	i	0	1	2	3	
	x	2	3	4	7	
	y	2	3	12	147	
14.	i	0	1	2	3	
	x	-2	-1	0	3	
	y	2	3	12	147	
15.	i	0	1	2	3	
	x	-4	-1	0	2	
	y	25	-8	-15	-23	
16.	i	0	1	2	3	
	x	0	3	4	6	
	y	25	-8	-15	-23	
17.	i	0	1	2	3	
	x	1	0	1	4	
	y	3	4	13	148	
18.	i	0	1	2	3	
	x	1	2	4	6	
	y	1	2	34	146	
19.	i	0	1	2	3	
	x	-3	0	1	3	
	y	26	-7	-14	-22	
20.	i	0	1	2	3	
	x	-1	2	3	5	
	y	26	-7	-14	-22	
21.	i	0	1	2	3	4
	x	-3	-2	-1	0	1
	y	7	1	3	1	7

22.	i	0	1	2	3	4
	x	-1	0	1	2	3
	y	5	-1	1	-1	5
23.	i	0	1	2	3	4
	x	-1	0	1	2	3
	y	2	1	0	1	10
24.	i	0	1	2	3	
	x	-2	-1	0	1	
	y	1	6	5	4	
25.	i	0	1	2	3	
	x	-3	-2	-1	0	
	y	40	27	12	1	
26.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	-27	-4	-1	-6	-7
27.	i	0	1	2	3	
	x	-1	0	1	2	
	y	-5	-10	-1	34	
28.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	16	-1	0	1	8
29.	i	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2
	y	-23	-6	1	-2	9
30.	i	0	1	2	3	
	x	1	2	3	4	
	y	1	2	13	40	