Sistemas Mecánicos no Lineales

Frank ALberto Piz Torriente Abel de la Noval Pérez
Josué Javier Senarega Claro Ronald Cabrera
Marlon Rolando Cuellar García

Enero 2024

1 Introducción

Un sistema mecánico no lineal es aquel en el que las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos no siguen una relación lineal. En los sistemas lineales, la fuerza y el desplazamiento son directamente proporcionales. En los sistemas no lineales, esto no sucede; en cambio, las respuestas pueden variar de manera no proporcional.

2 Expresión de la fuerza

La fuerza ejercida por un resorte real no siempre sigue la Ley de Hooke ($F = -kx$) , ya que los resortes presentan comportamientos no lineales debido a su naturaleza física. Para modelar esta no linealidad, se utiliza la serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

que permite aproximar una función diferenciable cerca de un punto , en este caso

$$F(x) = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots \tag{2}$$

Dado que $\mathbf{F(0) = 0}$ y que la fuerza del resorte es simétrica respecto a los desplazamientos positivos y negativos $F(-x) = -F(x)$, significa que es una función impar. Esto implica que los coeficientes de los términos de orden par son cero y el término no lineal más bajo que contribuye es βx^3. Por lo tanto un modelo más simple para la fuerza del resorte es:

$$F(x) = -kx + \beta x^3 \tag{3}$$

. Este truncamiento de la serie un margen de error que depende de la magnitud de los demás términos,para desplazamientos pequeños el error es mínimo y aceptable. El modelo truncado evita operaciones innecesarias que podrían amplificar errores de redondeo,como cancelaciones catastróficas en el caso de que la resta de términos que de resultados muy cercanos a 0, garantizando una mejor estabilidad al trabajar con sistemas físicos.

3 Ecuación del Movimiento

La segunda ley de Newton establece que la fuerza neta es igual al producto de la masa y la aceleración (segunda derivada del desplazamiento):

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación anterior quedaría:

$$m\ddot{x} = -kx + \beta x^3 \tag{5}$$

Esta ecuación describe cómo se mueve la masa **m** bajo el efecto del resorte no lineal.

4 Plano de fase posición-velocidad

Se define la velocidad como la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{6}$$

Esto convierte la ecuación original de segundo orden en un sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ m\frac{dy}{dt} &= -kx + \beta x^3 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones representan un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, que describen la posición (x) y la velocidad (y) de la masa en función del tiempo. Una trayectoria del plano de fase de este sistema es una gráfica de posición-velocidad que ilustra el movimiento de la masa en el resorte. De manera explícita pueden obtenerse las trayectorias de este sistema escribiendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{7}$$

Reemplazamos $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$ usando las ecuaciones diferenciales dadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-kx + \beta x^3}{my} \tag{8}$$

luego agrupando

$$my\,dy + (kx - \beta x^3)\,dx = 0 \tag{9}$$

. Notese que esta ecuación se resuelve por el método de exactas, el cálculo se lo dejamos al lector teniendo como resultado.

$$\frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 = E \tag{10}$$

Donde E es la constante de integración, esta ecuación representa la conservación de energía para el movimiento no amortiguado de una masa en un resorte, debido a que

$$PE = \frac{1}{2}my^2 \tag{11}$$

es la energía cinética de la masa con velocidad y, y es natural definir

$$PE = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 \tag{12}$$

como la energía potencial del resorte. Sustituyendo las 2 ecuaciones mencionadas con antelación obtenemos:

$$KE + PE = E \tag{13}$$

de tal manera que la constante E resulta ser la energía total del sistema masa-resorte.

5 Comportamiento de la masa en la ecuación del resorte

$$F(x) = -kx + \beta x^3 \tag{14}$$

El comportamiento de la masa depende del signo del término no lineal en la ecuación. El resorte se llama duro si $\beta < 0$ y suave si $\beta > 0$.

Comportamiento de la masa

1. Resorte duro

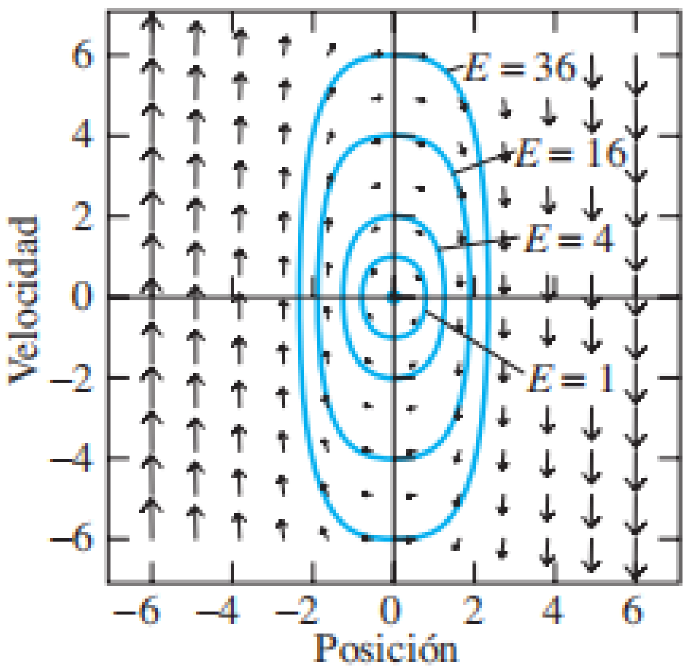
$\beta < 0$**:**

- Oscilaciones en un resorte duro: La segunda ecuación del sistema toma la forma:

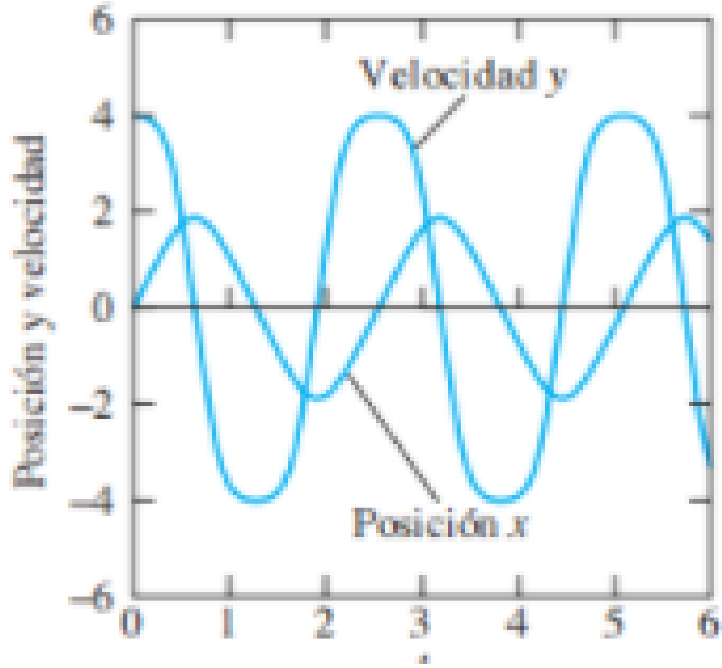
$$m\dot{y} = -x(|\beta|\, x^2 + k)$$

- Único punto crítico: $(0, 0)$ y es un centro estable.

- Cada trayectoria es una curva cerrada oval, como se muestra en la figura:



- A medida que el punto $(x(t), y(t))$ recorre una trayectoria en la dirección de las manecillas del reloj, la posición $x(t)$ y la velocidad $y(t)$ de la masa oscilan al-



ternadamente, como se ilustra en la imagen:

- La masa se mueve hacia la derecha (x incrementándose) cuando $y > 0$, y hacia la izquierda cuando $y < 0$.

- Ecuación del resorte duro:

$$m\ddot{x} = kx - |\beta|x^3$$

Sistema de ecuaciones equivalente:

$$x' = y, \quad y' = -\frac{k}{m}x - \frac{|\beta|}{m}x^3$$

Matriz Jacobiana:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -3\frac{|\beta|}{m}x^2 \end{bmatrix}$$

En el punto crítico $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde $k/m = \omega^2$. Ecuación característica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Valores propios: $\lambda = \pm i\omega$. Por tanto, el sistema linealizado:

$$x' = y, \quad y' = -\omega^2 x$$

Tiene un centro estable en el punto crítico $(0, 0)$.

2. Resorte suave

$\beta > 0$:

- Oscilaciones en un resorte suave: La segunda ecuación del sistema toma la forma:

$$my' = x(\beta x^2 - k)$$

El sistema tiene 2 puntos críticos:

$$(\pm\sqrt{k/\beta}, 0)$$

Además del punto crítico $(0,0)$. Estos 3 puntos críticos son las únicas soluciones para las cuales la masa se puede mantener en reposo.

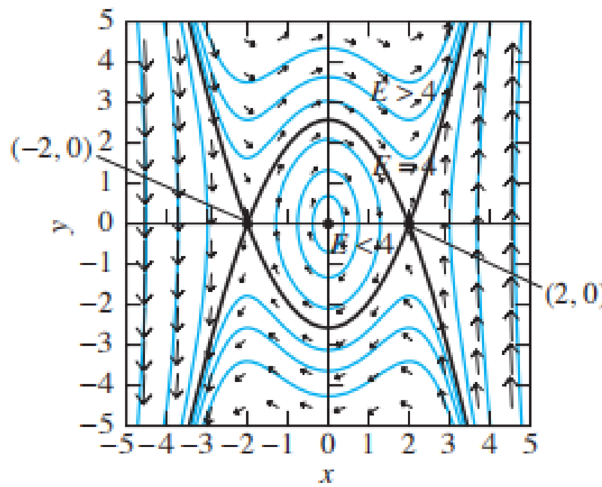


FIGURA 6.4.4. Plano de fase posición-velocidad para el sistema masa y resorte suave con $m = 1$, $k = 4$ y $\beta = 1 > 0$. Se marcan las separatrices (en negro).

- Trayectoria en el plano de fase:
- Las trayectorias pueden ser acotadas o no acotadas. Sin embargo, cuando las trayectorias exceden la capacidad de expansión del resorte sin romperse, dejan de ser físicamente realistas.

6 Vibraciones no lineales amortiguadas

Supóngase ahora que la masa unida al resorte está conectada también a un amortiguador que ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad $y = dx/dt$ de la masa.Si el resorte se considera no lineal entonces la ecuación de movimiento de la masa es $m\ddot{x} = -cx' - kx + \beta x^3$. Con $c > 0$ y $\beta > 0$ Sistema de primer orden equivalente:

$$\frac{dx}{dt} = y \tag{15}$$

,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-kx - cy + \beta x^3}{m} \tag{16}$$

Puntos críticos $(0, 0)$ y

$$(\pm\sqrt{\frac{k}{\beta}}, 0) \tag{17}$$

Matriz Jacobiana $J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} + 3\frac{\beta}{m}x^2 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$ Matriz Jacobiana del origen: $J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$ Ecuación característica: $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ Valores propios: $\lambda = \frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}$ por tanto el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo convergente si la resistencia es tan grande que $c^2 > 4km$ con valores propios negativos y diferentes, y una espiral convergente si $c^2 < 4km$ con valores propios complejos conjugados con parte real negativa.

7 Péndulo no lineal

Ecuación general no lineal del péndulo: $\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$ Cuando no está amortiguado $(c = 0)$, con $x(t) = \theta(t)$ y $y(t) = \dot{\theta}(t)$ el sistema de primer orden equivalente es: $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x$ Nótese que para valores de x cercanos a 0, $\sin x \approx x$ y por tanto podrían ocurrir cancelaciones catastróficas, lo cual corregiremos haciendo la transformación: $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + g(x)$ donde $g(x) = -\omega^2 \sin x - x$ aproximando $sinx$ por la serie de Taylor , $g(x) = \omega^2(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + ...)$ Puntos críticos del sistema: $(n\pi, 0)$ con n entero Matriz Jacobiana: $J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{bmatrix}$ La naturaleza del punto crítico depende de la paridad de n. Para n par: $\cos n\pi = 1$ por tanto la matriz quedaría $J(2m\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ ecuación característica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ valores propios imaginarios puros $\pm\omega i$ El sistema linealizado en $(n\pi, 0)$sería: $\frac{du}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = -\omega^2 u$ tiene $(0, 0)$ como centro estable encerrado por trayectorias elípticas,también $(2m\pi, 0)$ es centro estable. Para n impar: $\cos(n\pi) = -1$ Matriz Jacobiana: $J((2m + 1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ Ecuación característica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ Valores propios reales: $\pm\omega$ Sistema linealizado : $\frac{du}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \omega^2 u$ con $(0, 0)$ punto silla y el punto crítico $((2m+1)\pi, 0)$ tambiénes punto silla. Trayectorias del plano de fase:$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}$ integrando desde $x = 0$ hasta $x = x$ se obtiene: $\frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = E$, con E siendo la constante de integración,representando esta ecuación la conservación de la energía mecánica para el péndulo no amortiguado, debido a que las unidades físicas se escogen de tal manera que $m = L = 1$, entonces el primer término en el lado izquierdo es la energía cinética y el segundo término la energía potencial de la masa al final del péndulo. Así, E es la energía mecánica total. Resolviendo la ecuación y aplicando la identidad trigonométrica $1 - \cos x = 2\sin^2(x)$, la cual sale de el desarrollo de el coseno de la suma de ángulos, se obtiene: $y = \pm\sqrt{2E - 4\omega^2 \sin^2(x/2)}$ que define las trayectorias del plano de fase y la función está bien condicionada para $E > 2\omega^2$

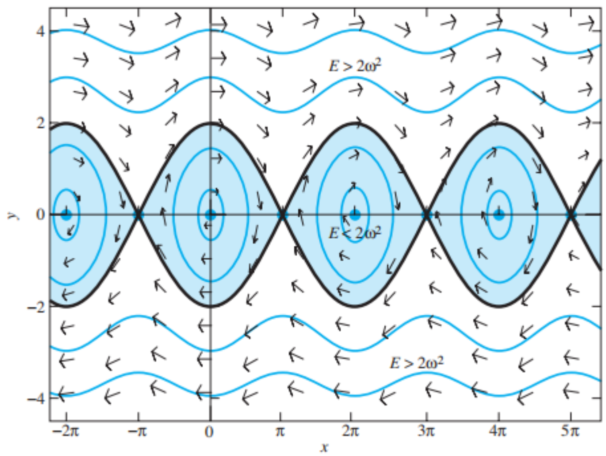


FIGURA 6.4.8. Plano de fase, posición velocidad, para el sistema del péndulo no amortiguado $x' = y$, $y' = -$ sen x. Las saparatrices están realzadas (marcadas en negro). Las separatrices marcadas en la figura 6.4.8 corresponden al valor crítico $E = 2\omega^2$ de energía: éstas tienden y se alejan de los puntos críticos inestables $(n\pi, 0)$ siendo n un número impar . Siguiendo las flechas a lo largo de una separatriz, teóricamente el péndulo se aproxima a la posición vertical balanceada $\theta = x = (2m+1)\pi$ con energía suficiente justo para alcanzarla pero no suficiente para "ir más allá de este punto". La inestabilidad de esta posición de equilibrio indica que este comportamiento ¡tal vez nunca pueda observarse en la práctica!. Las trayectorias cerradas simples circulando los puntos críticos estables ,todos los cuales corresponden a la posición hacia abajo $\theta = 0$. Éstas corresponden a energías $E < 2\omega^2$ representan movimientos giratorios del péndulo en el que éste pasa repetidamente por la parte más alta en la dirección de las manecillas del reloj si $y(t)$ permanece positiva, en dirección contraria si $y(t)$ es negativa.

8 Período de Oscilaciones no amortiguadas

Si el péndulo se libera partiendo del reposo con condiciones iniciales $x(0) = \theta(0) = \alpha$ $y(0) = \theta'(0) = 0$
entonces la ecuación de la conservación de la energía mecánica para el péndulo no amortiguado con $t = 0$ dese reduce a :
$\omega^2(1 - \cos(\alpha)) = E$
Por tanto $E < 2\omega^2$ si $0 < \alpha < \pi$,
lo que representa una oscilación períodica del péndulo. Para determinar el período de esta oscilación :
$\frac{1}{2}(\frac{d\theta}{dt})^2 = \omega^2(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$
El período T de tiempo requerido para completar una oscilación es cuatro veces

la cantidad de tiempo requerido para que θ disminuya desde $\theta = \alpha$ a $\theta = 0$ un cuarto de oscilación.
Por tanto, se resuelve la ecuación para $\frac{dt}{d\theta}$ y se integra para obtener

$$T = \frac{4}{\omega\sqrt{2}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \tag{18}$$

Para tratar de evaluar esta integral se utiliza primero la identidad $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ para obtener

$$T = \frac{2}{\omega} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \tag{19}$$

donde $k = \sin(\frac{\alpha}{2})$
la sustitución $u = (1/k)\sin(\theta/2)$ obtiene

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{20}$$

Sustituyendo $u = \sin(\phi)$
resulta en

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \tag{21}$$

Esta es una integral elíptica de primera clase que frecuentemente se representa por $F(k, \pi/2)$. Puesto que las integrales elípticas normalmente no pueden evaluarse en forma cerrada, esta integral puede aproximarse numéricamente como sigue. Utilícese primero la serie binomial

$$\frac{1}{\sqrt{i-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * 3 \ldots (2n-1)}{2 * 4 \ldots (2n)} x^n \tag{22}$$

con $x = k^2\sin^2(\phi) < 1$ para desarrollar el integrando, se toma término a término usando una tabla de integrales

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 n(\phi) d\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{1 * 3 * \ldots (2n-1)}{2 * 4 \ldots (2n)} \tag{23}$$

El resultado final es la fórmula

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^2 k^{2n}\right] \tag{24}$$

$$= T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right] \tag{25}$$

para el período T del péndulo no lineal liberado desde la posición de reposo con ángulo inicial $\theta(0) = \alpha$, en términos del período linealizado $T_0 = 2\pi/\omega$ y $k = \sin(\alpha/2)$, La serie infinita dentro del segundo par de paréntesis cuadrados en la ecuación proporciona el factor T/T_0 por el cual el período no lineal T es más largo que el período linealizado. T/T_0 aumenta a medida que α incrementa. El error numérico causado por las aproximaciones es considerablemente grande, lo que hace que el modelo linealizado no sea recomendable.

9 Oscilaciones amortiguadas del péndulo

El sistema de primer orden casi lineal equivalente a la ecuación de movimiento del péndulo amortiguado es:

$$\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin(x) - cy \tag{26}$$

Puntos críticos: $(n\pi, 0)$ con n entero. Si n es impar, entonces el punto crítico es un punto de silla inestable,como en el caso del péndulo no amortiguado. Si n es par y $c^2 > 4\omega^2$, entonces el punto crítico es un nodo convergente. Si n es par y $c^2 < 4\omega^2$, entonces el punto crítico es un punto espiral convergente.

Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh es un tipo de oscilador no lineal que se utiliza para modelar sistemas con fricción dependiente de la velocidad. La forma general de la ecuación es:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \tag{27}$$

donde:

- x es la variable dependiente del tiempo,
- μ es un parámetro de control positivo,
- $\ddot{x}$ es la aceleración, y
- $\dot{x}$ es la velocidad.

Ecuación de van der Pol

La ecuación de van der Pol es otro oscilador no lineal famoso que modela sistemas con resistencia negativa dependiente de la amplitud. Se usa comúnmente para describir circuitos electrónicos y sistemas biológicos. Su forma general es:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{28}$$

donde:

- x es la variable dependiente del tiempo,
- μ es un parámetro de control positivo,
- $\ddot{x}$ es la aceleración, y
- $\dot{x}$ es la velocidad.

Comparación y Aplicaciones

- **Ecuación de Rayleigh**: Modela sistemas con fricción dependiente de la velocidad, como ciertas vibraciones en estructuras mecánicas.
- **Ecuación de van der Pol**: Modela sistemas con resistencia negativa, lo cual es útil para describir fenómenos en circuitos electrónicos y oscilaciones biológicas como el ritmo cardíaco.

Ambas ecuaciones son ejemplos clásicos de sistemas no lineales que pueden exhibir comportamientos complejos como ciclos límite, bifurcaciones y caos bajo ciertas condiciones.

10 Ejercicio 17

Modelación de la Suspensión de un Automóvil con $\beta = -\frac{5}{4}$

Contexto

Un ingeniero automotriz está diseñando el sistema de suspensión de un nuevo modelo de automóvil. El objetivo es modelar el comportamiento de la suspensión cuando el automóvil pasa por un bache en la carretera. La suspensión debe absorber las vibraciones para proporcionar un viaje suave y seguro. En este caso, se considera un sistema masa-resorte duro con $\beta = -\frac{5}{4}$.

Parámetros del Sistema

- **Masa (m):** 1 kg (simplificación para el modelo).
- **Constante del resorte (k):** 5 N/m.
- **Coeficiente de amortiguamiento (c):** 2 N·s/m.
- **Parámetro β:** $-\frac{5}{4}$.

Ecuación del Movimiento

La ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema de suspensión es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = 0$$

Sustituyendo los valores dados:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x - \frac{5}{4}x^3 = 0$$

Análisis del Sistema

Esta ecuación es no lineal debido al término $-\frac{5}{4}x^3$, lo que complica su solución analítica. Sin embargo, podemos analizar el comportamiento cualitativo del sistema.

Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se encuentran resolviendo $\ddot{x} = 0$ y $\dot{x} = 0$:

$$5x - \frac{5}{4}x^3 = 0$$

$$x(5 - \frac{5}{4}x^2) = 0$$

Las soluciones son:

- $x = 0$
- $x = \pm 2$

Estabilidad

- En $x = 0$, el sistema es inestable debido al término negativo en β.
- En $x = \pm 2$, el sistema puede ser estable dependiendo de las condiciones iniciales y la disipación de energía.

Solución Aproximada

Para pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio, podemos linealizar la ecuación. Sin embargo, para oscilaciones mayores, se requieren métodos numéricos o perturbativos.

Interpretación del Resultado

- **Comportamiento No Lineal:** El término cúbico introduce no linealidades que pueden causar comportamientos complejos como bifurcaciones y caos en ciertas condiciones.
- **Amortiguamiento:** El término $2\dot{x}$ asegura que las oscilaciones se amortigüen con el tiempo, aunque la no linealidad puede afectar la tasa de amortiguamiento.

11 Ejercicio 18

Un ejemplo interesante es el movimiento de un paracaidista al caer. Al caer, su movimiento está influenciado por la fuerza gravitacional, la fuerza del resorte (si estuviera unido por alguna razón), y una resistencia proporcional al cuadrado de su velocidad. La ecuación general para un sistema masa-resorte con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad es:

$$mx''(t) + c|x'(t)|x'(t) + kx(t) = 0$$

Donde:

- m es la masa del paracaidista ($m = 1$ kg).
- c es el coeficiente de resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad ($c = 2$).
- k es la constante del resorte ($k = 5$).
- $x(t)$ es la posición del paracaidista respecto al punto de equilibrio.

Sistema sustituido

Sustituyendo los valores dados:

$$x''(t) + 2|x'(t)|x'(t) + 5x(t) = 0$$

Explicación Física

- El término $2|x'(t)|x'(t)$ modela la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, que es una aproximación razonable en situaciones de caída libre con resistencia del aire.
- El término $5x(t)$ corresponde a la fuerza de un resorte ideal que intenta devolver al sistema a su posición de equilibrio.

Consideración del término gravitacional

En presencia de la gravedad, la ecuación se modifica a:

$$x''(t) + 2|x'(t)|x'(t) + 5x(t) = g$$

Si se redefine la posición para compensar la gravedad ($x(t) = X(t) - x_0$ con $x_0 = \frac{mg}{k}$), se elimina el término gravitacional y se vuelve al sistema homogéneo original.

12 Análisis de fuerzas

- $x''(t)$: Representa la aceleración del paracaidista.
- $2|x'(t)|x'(t)$: Modela la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad. Cuando la velocidad es positiva o negativa, este término siempre tiene un signo que se opone al movimiento, frenando al paracaidista.
- $5x(t)$: Fuerza restauradora del resorte que busca llevar al sistema de vuelta a la posición de equilibrio.

Estabilidad del Sistema

Equilibrio

El sistema tiene una posición de equilibrio en $x(t) = 0$. Si el paracaidista llega a esa posición, las fuerzas del resorte y la resistencia del aire tienden a mantenerlo cerca de ahí.

Estabilidad del Equilibrio

Si el paracaidista se desplaza de la posición de equilibrio, la fuerza restauradora del resorte tenderá a regresarlo. Sin embargo, debido al término cuadrático de la velocidad, el sistema no tendrá oscilaciones constantes sino que el movimiento se amortiguará más rápidamente.

Comportamiento en el Tiempo

Fase Inicial (Velocidad Baja)

Al principio, el paracaidista puede experimentar una rápida aceleración hacia abajo debido a la ausencia de resistencia significativa del aire.

Fase Intermedia (Velocidad Alta)

A medida que aumenta la velocidad, el término $2|x'(t)|x'(t)$ comienza a dominar y frena el movimiento. Esto hace que el sistema tenga un amortiguamiento fuerte.

Fase Final (Cerca del Equilibrio)

La velocidad disminuye progresivamente, el movimiento se estabiliza y el paracaidista puede oscilar débilmente alrededor de la posición de equilibrio debido a la fuerza restauradora del resorte.

Comparación con Amortiguamiento Lineal

En un sistema con amortiguamiento lineal ($cx'(t)$ en lugar de $c|x'(t)|x'(t)$), el amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Esto permite oscilaciones suaves y más duraderas. Con amortiguamiento cuadrático, la resistencia del aire aumenta rápidamente, haciendo que el sistema se estabilice mucho más rápido.

13 Problema 19

Modelación del Movimiento de un Barco con $\beta = -\frac{5}{4}$

Contexto

Se modela el movimiento de un barco pequeño de masa $m = 1$ tonelada (normalizado para simplificar) que se mueve en aguas turbulentas. El agua ejerce una fuerza de resistencia hidrodinámica proporcional al cuadrado de la velocidad del barco, con un coeficiente de resistencia $c = 2$ N·s²/m². El barco está equipado con un sistema de amarre (como un resorte o un cable elástico) que lo mantiene cerca de una posición de equilibrio, con una constante elástica $k = 5$ N/m. El parámetro $\beta = -\frac{5}{4}$ está relacionado con la relación entre la resistencia del agua y la fuerza restauradora del sistema de amarre.

Ecuación Diferencial

La ecuación que describe el movimiento horizontal del barco es:

$$mx'' + cx'|x'| + kx + \beta x^3 = 0$$

Sustituyendo los valores dados ($m = 1$, $c = 2$, $k = 5$, $\beta = -\frac{5}{4}$):

$$1 \cdot x'' + 2x'|x'| + 5x - \frac{5}{4}x^3 = 0$$

Simplificando, obtenemos:

$$x'' + 2x'|x'| + 5x - \frac{5}{4}x^3 = 0$$

Donde:

- $x(t)$ es la posición horizontal del barco en función del tiempo t.
- $x'(t)$ es la velocidad del barco.
- $x''(t)$ es la aceleración del barco.

Condiciones Iniciales

- El barco comienza su movimiento desde una posición $x(0) = 5$ metros.
- Inicialmente, el barco tiene una velocidad $x'(0) = 0$ m/s (en reposo).

Análisis de Estabilidad

Paso 1: Reescribir como un sistema de primer orden

Definimos:

$$y_1 = x \quad \text{(posición)}$$
$$y_2 = x' \quad \text{(velocidad)}$$

Entonces, el sistema se convierte en:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -2y_2|y_2| - 5y_1 + \frac{5}{4}y_1^3$$

Paso 2: Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio ocurren cuando $y_1' = 0$ y $y_2' = 0$. Resolviendo:

$$y_2 = 0$$

$$-2y_2|y_2| - 5y_1 + \frac{5}{4}y_1^3 = 0$$

Sustituyendo $y_2 = 0$ en la segunda ecuación:

$$-5y_1 + \frac{5}{4}y_1^3 = 0$$

$$y_1\left(-5 + \frac{5}{4}y_1^2\right) = 0$$

Las soluciones son:

- $y_1 = 0$
- $y_1 = \pm 2$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio son:

$$(y_1, y_2) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad (-2, 0)$$

Paso 3: Linealización

El término $y_2|y_2|$ no es diferenciable en $y_2 = 0$, por lo que no podemos linealizar directamente. En su lugar, analizamos el comportamiento cualitativo.

Paso 4: Análisis cualitativo

- **Término de resistencia ($2y_2|y_2|$):**
  - Siempre es positivo cuando $y_2 \neq 0$.
  - Actúa como una fuerza de amortiguación (disipación de energía).
- **Término de restauración ($5y_1 - \frac{5}{4}y_1^3$):**
  - Representa una fuerza restauradora no lineal.
  - Intenta devolver el sistema a su posición de equilibrio, pero con un comportamiento no lineal.
- **Comportamiento del sistema:**
  - La combinación de resistencia y restauración no lineal sugiere que el sistema tenderá a disipar energía y a regresar al punto de equilibrio, pero con posibles oscilaciones no lineales.
  - El término cúbico introduce la posibilidad de múltiples equilibrios y comportamientos dinámicos complejos.

Conclusión

Con $\beta = -\frac{5}{4}$, el sistema de amarre del barco exhibe un comportamiento no lineal más complejo. La introducción del término cúbico negativo puede llevar a múltiples puntos de equilibrio y comportamientos dinámicos ricos, como oscilaciones no lineales y posibles inestabilidades. El ingeniero debe considerar estos efectos al diseñar el sistema de amarre para garantizar la estabilidad y seguridad del barco en aguas turbulentas.