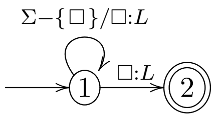
MCAL/MT - série 1 - Machine de Turing (2 TD)

Exercice 1 : Machine de Turing de base

On considére l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \square, \$\}$

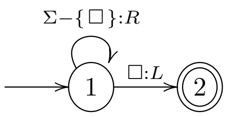
Q1. Que fait la MT 

SOLUTION

Elle efface le ruban vers la gauche à partir de la position courante et jusqu'à rencontrer un $\square$.

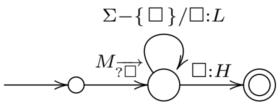
Q2. Dessinez une machine $M_{\overrightarrow{?\square}}$ qui déplace la tête de lecture vers la droite jusqu'au dernier symbole différent de $\square$.

SOLUTION

$M_{\overrightarrow{?\square}} =$ 

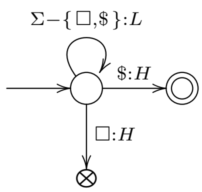
Q3. Dessinez une machine M_{eff} qui efface le ruban et termine, à condition de démarrer sur une partie non vierge du ruban. Pour cela elle remplace tous les symboles par $\square$, tout en respectant la contrainte qui interdit à tout moment d'avoir un ruban de la forme $^{\infty}\square \mid \omega_1 \mid \square \mid \omega_2 \mid \square^{\infty}$ Comment se comporte votre machine si on l'appelle sur le ruban vierge.

SOLUTION

$M_{\mathit{eff}} =$ 

Q4. Dessinez une machine $M_{\overleftarrow{\$}}$ qui déplace la tête de lecture vers la gauche jusqu'à rencontrer le marqueur \$ ou un blanc $\square$. Elle termine dans l'état accepteur ◎ si elle trouve le \$ et dans l'état rejet $\otimes$ sinon.

SOLUTION

$M_{\overleftarrow{\$}} =$ 

Q5. Dessinez une transition de MT qui ne fait rien. Par la suite on notera $\circ \xrightarrow{\epsilon} \circ$ ce type de transition.

SOLUTION

$$\circ \xrightarrow{\epsilon} \circ \equiv \circ \xrightarrow{\Sigma:H} \circ$$

Q6. Pour chaque MT M précédente donnez sa description sous la forme d'un sextuplet $(\Sigma, \mathscr{Q}, q_I, \delta, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ où Σ est l'alphabet de M, $\mathscr{Q}$ est l'ensemble des états de M, q_i son état initial, $\delta : \mathscr{Q} \times \Sigma \to \Sigma \times \{L, H, R\} \times \mathscr{Q}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états accepteurs, $\mathcal{R} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états rejets.

Exercice 2 : Zoom sur les macro-transitions

On considère l'alphabet $\Sigma_4 = \{\$, \Box, 0, 1\}$. On note $[n]_2$ l'écriture binaire, de gauche à droite (*ie.* avec les unités à gauche) de l'entier $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $[4]_2 = 001, [5]_2 = 101$.

Q7. Donnez une telle MT M_{inc} qui incrémente de 1 un entier n écrit sur le ruban en binaire. Vous utiliserez un état q_r pour mémoriser la retenue r à propager. On autorise uniquement des transitions de la forme $q \xrightarrow{l/e:d} q'$ qui effectue à la fois une lecture, une écriture, un déplacement.

Q8. On considére un alphabet $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_4\}$. Expliquez comment réaliser les transitions suivantes à l'aide de transitions classiques : $q \xrightarrow{\{s_1,s_2\}/s_3} q'$ $\quad q \xrightarrow{\Sigma:d} q'$ $\quad q \xrightarrow[\ell \in \Sigma - \$]{\ell/\Box:d} q'$

Q9. (DS 2014) Comment traduire les transitions $\xrightarrow{s}$ d'un automate (à nombre) d'états fini A en transition de machines de Turing pour obtenir une MT M équivalente à A au sens où $\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}(M)$.

Q10. (Projet 2014) Montrez qu'on peut traduire une MT en une MT avec uniquement les deux formes de transitions écriture ou déplacement.

Q11. (Projet 2014) Appliquez votre transformation sur la MT M_{inc}.

Exercice 3 : L'alphabet minimal Σ_2

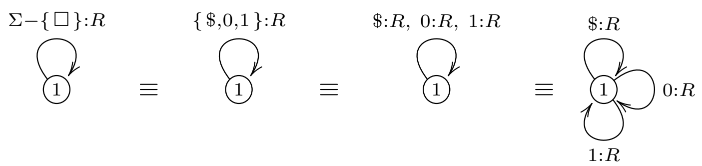
Montrez qu'on peut transformer une MT M opérant sur un alphabet $\Sigma_4 = \{\$, \Box, 1, 0\}$ en une MT M' équivalente opérant sur l'alphabet $\Sigma_2 = \{\boxed{0}, \boxed{1}\}$.

> **Indication :** On représente les 4 symboles de Σ_4 par des couples de symboles de Σ_2 *ie.* $0 = (\boxed{0}, \boxed{0})$, $1 = (\boxed{1}, \boxed{1})$, $\$ = (\boxed{0}, \boxed{1})$, $\Box = (\boxed{1}, \boxed{0})$
> Quand la machine M fait une transition sur un symbole de Σ_4 la machine M' fait deux transitions.

Q12. Transformez la machine $M_{\overrightarrow{?\Box}}$ de la question **Q2** en une machine équivalente $M'_{\overrightarrow{?\Box}}$ opérant sur Σ_2.

SOLUTION

On commence par rendre explicite les macro-*transitions de la* MT $M_{\overrightarrow{\Box}}$.



On traduit ensuite chaque transition.

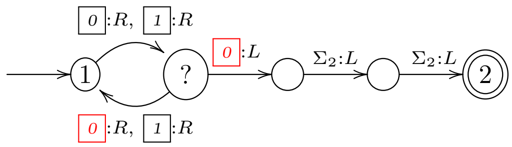
$$\textcircled{1} \xrightarrow{1:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{1}\boxed{1}:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{1}:R} \textcircled{?} \xrightarrow{\boxed{1}:R} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \xrightarrow{\$:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{0}\boxed{1}:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{0}:R} \textcircled{?} \xrightarrow{\boxed{1}:R} \textcircled{1}$$

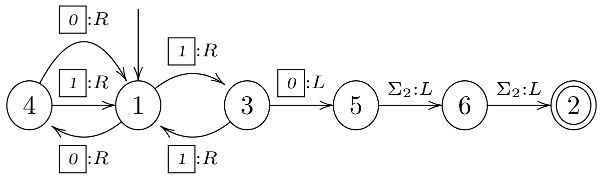
$$\textcircled{1} \xrightarrow{0:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{0}\boxed{0}:R} \textcircled{1} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{0}:R} \textcircled{?} \xrightarrow{\boxed{0}:R} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \xrightarrow{\square:H} \textcircled{2} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{1}\boxed{0}:H} \textcircled{2} \;\rightsquigarrow\; \textcircled{1} \xrightarrow{\boxed{1}:R} \textcircled{?} \xrightarrow{\boxed{0}:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \textcircled{2}$$

Si on choisit le même état pour les états ? *on obtient la* MT non-déterministe *suivante*



Il faut choisir deux états différents : $\xrightarrow{\boxed{1}:R} \textcircled{3}$ *pour les deux premières traductions et* $\xrightarrow{\boxed{0}:R} \textcircled{4}$ *pour les deux suivantes. On obtient au final la* MT *déterministe* M'



Q13. Transformez la MT M_{effG} de la question **Q1** opérant sur Σ_4 en une machine équivalente M'_{effG} opérant sur Σ_2.

SOLUTION

On applique les mêmes principes qu'à la question précédente. Les traductions sont plus délicates pour les transitions qui se déplacent vers la gauche et pour celles qui écrivent.

$$\bigcirc \xrightarrow{1:L} \bigcirc \;\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}\boxed{1}:L} \bigcirc \;\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:R} \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:LLL} \bigcirc$$

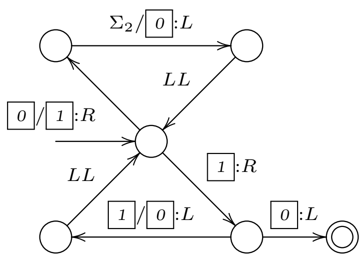
$$\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:R} \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{1/\square:L} \bigcirc \;\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}\boxed{1}/\boxed{1}\boxed{0}:L} \bigcirc \;\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:R} \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}/\boxed{0}:LLL} \bigcirc$$

$$\rightsquigarrow\; \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}:R} \bigcirc \xrightarrow{\boxed{1}/\boxed{0}:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc$$

Q14. (à chercher) Donnez une version optimisée de la machine M'_{effG}.

SOLUTION

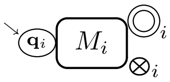


où $\bigcirc \xrightarrow{LL} \bigcirc \equiv \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc \xrightarrow{\Sigma_2:L} \bigcirc$

PROJET 2017 L'un des objectifs du projet est d'implanter cette transformation de Σ_4 vers Σ_2 puis de généraliser cette transformation à des MT opérant sur un alphabet Σ_{2^N} contenant 2^N symboles $s_1, \ldots, s_{2^N}$.

Exercice 4 : Exécution séquentielle de deux MT

Étant données deux MT $M_1 = (\Sigma_1, \mathcal{Q}_1, \mathbf{q_1}, \delta_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{R}_1)$ et $M_2 = (\Sigma_2, \mathcal{Q}_2, \mathbf{q_2}, \delta_2, \mathcal{A}_2, \mathcal{R}_2)$, construire la MT notée $[M_1; M_2]$ qui exécute M_1 puis exécute de M_2 à partir de la position où s'est arrêtée M_1.

> **Indication :** On rappelle que les états accepteurs et rejets sont terminaux (pas de transition sortante) et q'un état $\circledcirc$ indique un succès et $\otimes$ un échec.
>
> On suppose que toutes les MT M_i sont de la forme 
>

SOLUTION

La formulation suivante n'est pas intuitive. On commencera par des dessins. Ensuite on essaie de formaliser, juste pour le « plaisir » de définir précisement ce qu'on a en tête.

$[M_1; M_2] = (\Sigma, \mathcal{Q}, \mathbf{q}, \delta, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ *avec*

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma & = & \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\
\mathcal{Q} & = & 1 \cdot \mathcal{Q}_1 \cup 2 \cdot \mathcal{Q}_2 = \{ 1.q \mid q \in \mathcal{Q}_1 \} \cup \{ 2.q \mid q \in \mathcal{Q}_2 \} \\
\mathbf{q} & = & 1.\mathbf{q}_1 \\
\delta & : & \mathcal{Q} \times \Sigma \to \Sigma \times \{ L, H, R \} \times \mathcal{Q} \\
 & & \begin{array}{rcll}
 \delta(1.q, s) & = & (s, H, 2.\mathbf{q}_2) & \forall s \in \Sigma, \ \textsf{si } q \in \mathcal{A}_1 (\textsf{et donc } q \not\to) \\
 \delta(1.q, s) & = & (e, d, 1.q') & \forall s \in \Sigma_1, \ \textsf{si } q \notin \mathcal{A}_1 \textsf{ et } \delta_1(q, s) = (e, d, q') \\
 \delta(2.q, s) & = & (e, d, 2.q') & \forall s \in \Sigma_2, \ \textsf{si } q \notin \mathcal{R}_2 \textsf{ et } \delta_2(q, s) = (e, d, q') \\
 \delta(2.q, s) & = & 2.\delta_2(q, s) & \forall s \in \Sigma_2
 \end{array} \\
\mathcal{A} & = & \mathcal{A}_2 = \{ \circledcirc_2 \} \\
\mathcal{R} & = & \mathcal{R}_1 = \{ \otimes \}
\end{array}
$$

Supposons $\mathcal{R}_1 = \{ \otimes_1 \}$ *et* $\mathcal{R}_2 = \{ \otimes_2 \}$ *sont les états rejets (uniques) de* M_1 *et* M_2*. Au lieu d'avoir deux états rejets* $1.\otimes_1$ *et* $2.\otimes_2$ *dans* M*, on les identifie. On prend* $\mathcal{R} = \{ \otimes \}$ *avec* $\otimes = 1.\otimes_1 = 2.\otimes_2$.

> **Remarque :** Il est incorrect de fusionner des états qui sont inclus dans un cycle de transitions. Ce n'est pas le cas des états rejets (ni des états accepteurs) car ils n'ont pas de transitions sortantes. On peut les fusionner. Pour les états initiaux qui peuvent appartenir à un cycle, il faut par contre les relier par des ϵ-transitions.

On peut ensuite compléter $[M_1; M_2]$*. S'il manque une transition sur le symbole* s *dans l'état* q *on ajoute* $q \xrightarrow{s:H} \otimes$.

Exercice 5 : Reconnaissance de langages classiques

Soit l'alphabet $\Sigma = \{ a, b \}$. Pour chacun des langages suivants, donnez une MT qui le reconnaît $L_1 = \Sigma^*$, $L_2 = \emptyset$, $L_3 = \{ \epsilon \}$, $L_4 = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, $L_5 = \Sigma \cup \{ \omega.R(\omega) \mid \omega \in \Sigma^* \}$ où R est l'opération qui renverse un mot et donc L_5 est l'ensemble des palindromes de longueur paire sur Σ.

Exercice 6 : Renversement et Palindrome avec des MT à deux bandes

Les transitions d'une MT à deux bandes sont de la forme $\mathbf{q} \xrightarrow[\ell_2/e_2:d_2]{\ell_1/e_1:d_1} \mathbf{q'}$. La partie $\ell_1/e_1 : d_1$ concernent la bande B_1 et la partie $\ell_2/e_2 : d_2$ concerne la bande B_2.

Q15. Donnez un MT M_R qui réalise la fonction $R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ qui renverse un mot fourni.

Attention : Dans cette question les bandes comportent un symbole \$ qui sert à indiquer qu'il y a des données à gauche du \$ qu'il ne faut pas écraser.

$$\begin{array}{l} B_1 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \ldots & \$ & s_1 & \ldots & s_n & \square^\infty \\ \hline & \uparrow & & & & \end{array} \\ B_2 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \ldots & \$ & \square & \ldots & \square & \square^\infty \\ \hline & \uparrow & & & & \end{array} \end{array} \xrightarrow[M_R]{}{}^{*} \begin{array}{l} B_1 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \ldots & \$ & s_1 & \ldots & s_n & \square^\infty \\ \hline & \uparrow & & & & \end{array} \\ B_2 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \ldots & \$ & s_n & \ldots & s_1 & \square^\infty \\ \hline & \uparrow & & & & \end{array} \end{array}$$

Q16. Donnez une MT à deux bandes M_{eq} qui décide si les mots inscrits sur les bandes sont identiques.

Indication : M_{eq} « décide » signifie que M_{eq} atteint ◎ si c'est vrai et atteint $\otimes$ si c'est faux.

Q17. À l'aides des MT précédents, donnez une MT à deux bandes M_{pal} qui accepte uniquement les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

SOLUTION

$$M_{pal} = [M_R \ ; M_{eq}]$$

Q18. Donnez une MT à *une seule bande* M'_{pal} qui accepte les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

SOLUTION

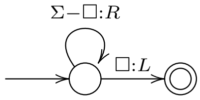
On écrit une MT qui itère la transformation suivante

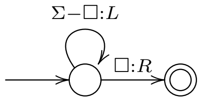
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline {}^\infty\square & \ell & \omega'.R(\omega') & \ell & \square^\infty \\ \hline & \uparrow & & & \end{array} \longrightarrow^* \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline {}^\infty\square & \square & \omega'.R(\omega') & \square & \square^\infty \\ \hline & & \uparrow & & \end{array}$$

et accepte si elle finit par obtenir le ruban. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline {}^\infty\square & \square & \square & \square & \square^\infty \\ \hline & & \uparrow & & \end{array}$

$$M_{pal} \overset{def}{=} \left[\begin{array}{ll|l} \to (\mathbf{q}_1) \xrightarrow{\square:H} ◎ & & \\ (\mathbf{q}_1) \xrightarrow{\ell:R} (\mathbf{q}'_\ell) \xrightarrow{M_{?\overrightarrow{\square}}} & (\mathbf{q}''_\ell) \xrightarrow{\ell/\square:L} (\mathbf{q}_2) \xrightarrow{M_{\overleftarrow{\square ?}}} (\mathbf{q}_1) & \ell \in \Sigma - \{\$, \square\} \\ & (\mathbf{q}''_\ell) \xrightarrow{\overline{\ell}/\square:H} \otimes & \end{array} \right]$$

où $\overline{\ell} \overset{def}{=} \Sigma - \ell$

$M_{?\overrightarrow{\square}} \overset{def}{=}$ 

$M_{\overleftarrow{\square ?}} \overset{def}{=}$ 

Q19. Complétez $\mathscr{L}(M_{pal}) =$ ensemble des palindromes sur Σ