



# Modèles probabilistes pour l'informatique

Massih-Reza Amini

Université Grenoble Alpes (UGA)  
Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG)



# A quoi nous servent les probabilités?

## Probabilités et Informatique

Les probabilités interviennent aujourd'hui dans tous les secteurs d'activité d'un informaticien qui les utilise aussi bien

- ☐ En Intelligence Artificielle,
- ☐ qu'en Décision,
- ☐ qu'en Réseaux informatique,
- ☐ qu'en traitement de l'image ou en bioinformatique,
- ...

## L'objectif de ces cours

Ces cours ont pour objectif de vous familiariser avec les notions de bases en probabilité et en statistique.

# A quoi nous servent les statistiques?

## Statistique d'après E. Universalis

Le mot *statistique* désigne à la fois **un ensemble de données d'observation** et l'activité qui consiste dans **leur recueil, leur traitement et leur interprétation**.

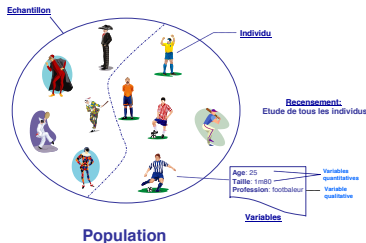
## Exemples

Nous étudions par exemple, des fiches concernant 100000 sportifs et gens de spectacles. Ces fiches décrivent entre autre, les gains individuels, leur performance, ... Ces fihces constituent une **statistique**.

Faire de **statistique** sur ces données consiste par exemple, à:

- ☐ Calculer la moyenne des gains d'un individu,
- ☐ Prévoir ses performances pour une saison donnée, etc.

# Notions de Bases



## Définitions

- ❑ L'analyse statistique trouve sa justification dans la **variabilité**,
- ❑ On cherche à étudier cette variabilité (description), à la prévoir (estimation) et à l'expliquer (modelisation)

# Organisation

## Infos pratiques

- ☐ Le site du cours

<http://ama.liglab.fr/~amini/Cours/L3/>

- ☐ Les intervenants:

- ☐ AMINI, Massih-Reza (<http://ama.liglab.fr/~amini>)
- ☐ GAST, Nicolas  
(<http://mescal.imag.fr/membres/nicolas.gast/>)

## Validation

- ☐ 2 projets (30%)
- ☐ un examen final (70%)

# Introduction

## Généralités

- ❑ Le terme *probabilité* (du latin *probare*) signifie *prouver*,
- ❑ Ce terme est passé dans le langage courant et a parfois une connotation liée à la chance,
- ❑ D'autres termes du calcul des probabilités montrent leur lien avec les jeux de hasard
  - ❑ Par exemple, celui d'**espérance mathématiques** qui correspond à l'**espérance du gain**.

## Historique

- ❑ Les premières traces d'une théorie de la probabilité remontent au 17<sup>ème</sup> siècle en liaison avec des jeux de hasard,
- ❑ Les premiers résultats mathématiques sont obtenus par Pascal et Fermat,
- ❑ Huyghens, Bernoulli, de Moivre, Bayes, Laplace, Borel, ... apportent de nouveaux concepts,
- ❑ Ce cours est basé sur les axiomatiques de **Kolmogorov**.

# Expérience aléatoire, événements aléatoires

- ❑ Une **expérience** est qualifiée d'**aléatoire** si on ne peut pas prévoir par avance son résultat et si répétée dans les mêmes conditions, elles donnent des résultats différents.
- ❑ Exemples
  - ❑ Lancé de dé,
  - ❑ La roue de la fortune,
- ❑ Les résultats possibles de cette expérience constituent **l'ensemble fondamental**  $\Omega$  appelé aussi **univers des possibles**.
- ❑ Un **événement aléatoire** est un résultat parmi d'autre de l'ensemble  $\Omega$

## Exemple

Dans le lancer simultané de deux dés, les résultats obtenus sur les faces supérieures, l'ensemble fondamental  $\Omega$  est

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

# Algèbre des événements

Nous allons nous référer à des propriétés ensemblistes usuelles:

- ❑ À tout événement  $E$ , on associe son contraire  $\bar{E}$ ,
- ❑ Aux événements  $E$  et  $F$ , on associe  $E \cup F$ , ou  $E \cap F$ ,
- ❑ L'événement certain est représenté par  $\Omega$ ,
- ❑ L'événement impossible est représenté par  $\emptyset$

Ce qui nous amène aux définitions suivantes:

- ❑ On appelle **tribu de parties d'un ensemble**  $\Omega$  un ensemble  $C$  de parties de  $\Omega$  vérifiant:
  - ❑  $\Omega \in C$ ,
  - ❑  $\forall E \in C, \bar{E} \in C$ ,
  - ❑ Pour tout ensemble fini ou dénombrable de parties  $E_i$  de  $C$ ,  $\bigcup_{i \in I} E_i \in C$
- ❑ On appelle **espace probabilisable** un couple  $(\Omega, C)$  où  $C$  est une **tribu** de parties de l'ensemble  $\Omega$ ,
- ❑  $E$  et  $F$  sont deux **événements incompatibles** si la réalisation de l'un exclut celle de l'autre, (i.e.  $E \cap F = \emptyset$ )
- ❑  $E_1, \dots, E_n$  forment un **système complets d'événements** si elles constituent une partition de  $\Omega$



# Probabilité

On appelle **probabilité sur l'espace probabilisable**  $(\Omega, C)$ , une application  $P$  de  $C$  dans  $[0, 1]$  telle que:

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout ensemble dénombrable  $E_1, \dots, E_n$  d'événements incompatibles:

$$P(\cup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$$

- Le triplet  $(\Omega, C, P)$  est appelé **espace probabilisé**



## Propriétés

- ❑  $P(\emptyset) = 0,$
- ❑  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
- ❑  $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$
- ❑  $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
- ❑  $P(\cup_i E_i) \leq \sum_i P(E_i)$

# Théorème des probabilités totales

## Théorème des probabilités totales

Soit  $(F_i)_i$  un système complet d'événements de  $\Omega$ , alors:

$$\forall E \in \Omega, P(E) = \sum_i P(E \cap F_i)$$

## Espaces probabilisés élémentaires

- ❑ Considérons un espace  $\Omega$  fini ou dénombrable, A tout élément  $e$  de  $\Omega$ , on associe un nombre réel positif ou nul  $P(e)$  tel que

$$\sum_e P(e) = 1$$

- ❑ À toute partie  $E$  de  $\Omega$  on associe alors le nombre  $P(E) = \sum_{e \in E} P(e)$
- ❑ Si on attribue le même poids à chaque événement élémentaire de  $\Omega$ :  $P(e) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$
- ❑ Avec une probabilité uniforme sur  $\Omega$ , la probabilité d'une partie  $E \subset \Omega$  :  $P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$

# Espaces probabilisés élémentaires

## Exemple

Avec le lancer des deux dés, La probabilité de l'événement  $E$  = La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 5 est

$$P_E = \frac{10}{36}$$

L'ensemble correspondant à l'événement  $E$  est en effet:

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

## Exemple

Toujours avec l'exemple précédent

$F$  = Au moins un des chiffres est supérieur ou égal à 5 est

$$P_F = \frac{26}{36}$$

## Rappels élémentaires d'analyse combinatoire

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis, avec  $\text{card}(E) = k$  et  $\text{card}(F) = n$ . Le dénombrement de certaines applications de  $E \rightarrow F$  donnent

- ❑ Nombre d'applications quelconques:  $n^k$ ,
- ❑ Nombre d'applications injectives:  $A_n^k = (n - k + 1) \dots (n - 1)n$ ,
- ❑ Nombre de bijections (cas  $n = k$ ):  $n! = 1 \dots (n - 1)n$

### Suite ...

- ❑ soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , Le nombre de sous-ensembles distincts de cardinal  $k$  contenus dans  $E$ :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- ❑ Remarque

$$C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^n = C_n^0 = 1 \Rightarrow 0! = 1$$

- ❑ Formule du binôme de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

## Rappels élémentaires d'analyse combinatoire

### Conséquence

Si  $E$  est un ensemble de cardinal  $n$ , on a  
 $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$

### Exemple

Tirer deux cartes, sans remise, dans un jeu de 52 cartes.  
L'ensemble de tous les événements:

$$\Omega = \{ \{a, b\} \mid a \text{ et } b \text{ sont deux cartes du jeu} \}$$

Tous les sous-ensembles de  $\Omega$  sont équiprobables

$$P(\{a, b\}) = \frac{1}{1326}, \forall \{a, b\} \in \Omega$$

$E$  = La probabilité d'obtenir une dame au moins

$$P(E) = 1 - \frac{C_{48}^2}{1326}$$

# Problème du Prince de Toscane

## Exemple

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux?

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid i \in \{1, \dots, 6\}, j \in \{1, \dots, 6\}, k \in \{1, \dots, 6\}\}$$

Le cardinal de  $\Omega$ ,  $\text{card}(\Omega) = 6^3 = 216$  et comme tous les résultats sont équiprobables

$$P((i, j, k)) = \frac{1}{216}, \forall (i, j, k) \in \Omega$$

Pour un lancé de  $\{i, j, k\}$  donné on a les cas suivants:

- ❑  $i \neq j \neq k \neq i$  dans ce cas,  $P(\{i, j, k\}) = \frac{6}{216}$
- ❑  $i = j \neq k$ , dans ce cas,  $P(\{i, j, k\}) = \frac{3}{216}$
- ❑  $i = j = k$ , dans ce cas,  $P(\{i, j, k\}) = \frac{1}{216}$

$$\text{On a alors } P(\{\text{total}9\}) = \frac{25}{216} \text{ et } P(\{\text{total}10\}) = \frac{27}{216}$$

## Lois Conditionnelles

Considérons deux événements  $E$  et  $F$ , Supposons qu'on ne s'intéresse à la réalisation de  $E$ , étant donné la réalisation de  $F$ . Cela revient à estimer la réalisation de  $E \cap F$  par rapport à  $F$

### Définition

Soit  $(\Omega, C, P)$  un espace probabilisé et  $F$  un événement de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle sachant  $F$**  l'application:

$$P(. | F) : C \rightarrow [0, 1]$$

définie par

$$\forall E \in C, P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cette application définit bien une probabilité sur le même espace probabilisé.

## Lois Conditionnelles (2)

### Remarques

- Pour tout événement  $E$ , nous avons

$$P(E | \Omega) = P(E) \text{ et } P(E | E) = 1$$

### Formule de Bayes

événements réalisables, nous avons alors:

$$P(E \cap F) = P(F | E) \times P(E) = P(E | F) \times P(F), \text{ soit}$$

$$P(E | F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}$$

La formule précédente s'étend à un nombre quelconque d'événements: Soient  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ,  $n$  événements aléatoires de  $\Omega$ , on a alors

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^n P(E_i | E_1, \dots, E_{i-1})$$



## Lois Conditionnelles (3)

### Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise?

Posons

- $R_i$  = La  $i^{\text{eme}}$  boule tirée est rouge,  $i \in \{1, 2, 3\}$
- $B_i$  = La  $i^{\text{eme}}$  boule tirée est bleue,  $i \in \{1, 2, 3\}$

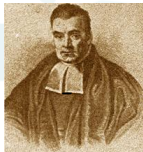
On a alors,

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \text{ et } P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$$

# Formule de Bayes

Soient  $(\Omega, C, P)$  un espace probabilisé et  $B$  un événement réalisable de  $C$ . Soit  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{I} \subset \mathbb{N}}$  un système complet d'événements, on a alors :

$$\forall j \in \mathbb{I}, P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i \in \mathbb{I}} P(B | A_i) \times P(A_i)}$$



## Exemple

Il manque une carte dans un jeu de 52 cartes et on ignore laquelle. On tire au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un coeur. Quelle est alors la probabilité pour que la carte perdue soit un coeur?

Soient les événements élémentaires suivants:

- $CP$ : La carte perdue est un coeur,  $TC$ : Tirer un coeur du jeu incomplet

Nous avons alors  $P(CP) = \frac{1}{4}$  et  $P(TC | CP) = \frac{12}{51}$

$TC$  peut s'écrire comme:  $TC = (TC \cap CP) \cup (TC \cap \bar{C}P)$  et

$$P(CP | TC) = \frac{P(TC | CP) \times P(CP)}{P(TC | CP) \times P(CP) + P(TC | \bar{C}P) \times P(\bar{C}P)} = \frac{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4}}{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{51}$$

# Indépendance

## Définition

- L'événement  $E$  est **indépendant** de l'événement  $F$  si:

$$P(E \mid F) = P(E)$$

- Conséquence:

- $E$  et  $F$  sont **indépendants** si et seulement si

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

## Indépendance mutuelle

Les événements  $E_1, \dots, E_n$  sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie  $\mathbb{I}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ :

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

# Indépendance

## Exemple

On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne le résultat  $\{1\}$  pour la première fois.

$$\Omega = \{(\underbrace{\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}}_{k-1}, 1) \cup (\bar{1}, \dots, \bar{1}, \dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*\}$$

Les probabilités des événements suivants sont:

- $E_k$  = Obtenir le résultat 1 pour la 1<sup>ère</sup> fois au  $k^{ième}$  lancer

$$P(E_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$$

- $E$  = Obtenir le résultat 1

$$P(E) = \sum_{k \geq 1} P(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 1$$

- $J$  Ne jamais obtenir 1

$$P(J) = 1 - P(E) = 0$$