MCAL/MT - Théorème de Rice & Preuve de Réduction (2 TD)

Exercice 1 : Formalisation et Théorème de Rice (15min, 4 pt)

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires de machines de Turing.

Q1. (0.25 pt) **Complétez :** Un ensemble de machines de Turing est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\}$ où la condition $\mathcal{C}$ porte sur le langage reconnu par m

Q2. (0.25 pt) **Complétez :** Tout ensemble de Rice non-.............. c'est-à-dire différent de ...... et de .. , est ....

Q3. (1 pt) **Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants**

1. L'ensemble des machines de Turing qui n'acceptent pas le mot m correspondant à leur codage en binaire :

   $L_1 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
2. L'ensemble des machines de Turing dont l'exécution sans paramètre est infinie :

   $L_2 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
3. L'ensemble des machines de Turing qui acceptent tous les mots binaires :

   $L_3 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
4. L'ensemble des machines de Turing équivalentes à la MT $M_\emptyset$ qui reconnaît le langage vide :

   $L_4 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
5. L'ensemble des MT qui rejettent le mot binaire ϵ

   $L_5 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Q4. (1.5 pt) Parmi les ensembles L_1 à L_4, certains sont des ensembles de Rice. Lesquels ? Rédigez votre réponse de la manière suivante en définissant la condition de Rice, $\mathcal{C}$, correspondant à l'ensemble.

> **Indication :** ... est un ensemble de Rice car il peut s'écrire $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ )\}$ avec $\mathcal{C}(L) \stackrel{def}{=} \ldots$

Q5. (1 pt) Expliquez pourquoi les autres ensembles ne sont pas un ensemble de Rice.

Q6. (0.25 pt) Si un ensemble L n'est pas un ensemble de Rice, que peut-on en déduire ?

$4.5\,pt$

Exercice 2 : Applications du Théorème de Rice (4.5 pt)

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires de machines de Turing.

Q7. (0.25 pt) **Complétez :** Un ensemble de machines de Turing est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\}$ où la condition $\mathcal{C}$ porte sur le langage reconnu par m

Q8. (0.25 pt) **Complétez :** Tout ensemble de Rice non-............. c'est-à-dire différent de ...... et de .. , est ....

Q9. (4 pt) Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants et justifiez que ce sont des ensembles de Rice.

1. soit ω un mot de $\{0,1\}^*$, l'ensemble E_1 des MT qui n'acceptent pas le mot binaire ω

   $E_1 = \{m \in \mathcal{M} \mid$ .... $\}$

   est un ensemble de Rice car ce langage correspond à $\{m \in \mathcal{M} \mid \omega$ .... $\}$ qui est de la forme $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}($ .... $)\}$ avec $\mathcal{C}(\dots) \stackrel{def}{=}$

2. L'ensemble E_2 des machines de Turing dont le langage est régulier (*ie.* reconnaissable par un automate (à nombre) d'états fini A)

   $E_2 = \{m \mid \exists A \in$ AEF, ... $\}$

   est un ensemble de Rice car il est de la forme $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}($ .... $)\}$ avec $\mathcal{C}(\dots) \stackrel{def}{=}$

3. L'ensemble E_3 des machines de Turing qui n'acceptent aucun mot

   $E_3 = \{m \mid$ .... $\}$

   est un ensemble de Rice car il est de la forme $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}($ .... $)\}$ avec $\mathcal{C}(\dots) \stackrel{def}{=}$

4. L'ensemble E_4 des machines de Turing dont le langage est fini

   $E_4 = \{m \mid$ .... $\in \mathbb{N}\}$

   est un ensemble de Rice car il est de la forme $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}($ .... $)\}$ avec $\mathcal{C}(\dots) \stackrel{def}{=}$

Exercice 3 : Théorème de Rice, Réduction et Preuve directe

À l'aide d'un raisonnement par contradiction utilisant l'exemple $\mathcal{P}_\omega$ d'application du théorème de Rice (avec $\omega = \epsilon$), montrez que « l'ensemble L des machines de Turing dont l'exécution sans paramètre s'arrête » est indécidable.

Q10. (0.25 pt) Donnez la définition mathématique de L.

Q11. (0.25 pt) L correspond-t'il à un ensemble de Rice $\mathcal{P}_\mathcal{C}$? si oui, donnez la condition $\mathcal{C} : \mathcal{L} \to \mathit{Bool}$, sinon expliquez pourquoi.

Exercice 3.1 Preuve d'indécidabilité par réduction de $\mathcal{P}$ à L.

Q12. (0.75 pt) Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}_\epsilon \stackrel{def}{=} \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(\epsilon) = \mathbb{V}\}$ est indécidable.

Q13. (0.25 pt) Donnez une MT M_∞ qui ne termine jamais quel que soit le ruban.

Démontrons que L est indécidable par réduction de l'ensemble $\mathcal{P}_\epsilon$ à L

On considère la transformation R définie par $R(m) \stackrel{def}{=} [\text{if } U(m)(\epsilon) = \mathbb{V} \text{ then } \to \circledcirc \text{ else } M_\infty]_2$

Q14. (0.5 pt) Complétez le diagramme de réduction .... $\xrightarrow[\textit{traduction}]{M_R}$ ....

$m \in \mathcal{P}_\epsilon$ .... $\in L$

(‡)

Q15. (0.5 pt) Si le diagramme de réduction est correct, que peut-on en conclure ?

Q16. (0.5 pt) Que reste-t'il à montrer pour avoir le droit d'appliquer la réduction ?

Q17. (1 pt) Rédiger la preuve de ($\Rightarrow$) en commençant par expliciter ce qu'on doit montrer.

Q18. (1 pt) Rédiger la preuve de ($\Leftarrow$) en commençant par expliciter ce qu'on doit montrer.

Exercice 3.2 Preuve directe d'indécidabilité

Q19. (1.5 pt) Complétez la preuve directe d'indécidabilité.

Preuve par contradiction: SUPPOSONS L .... , alors il existe une MT M_L telle que

$$M_L(m) = \mathbb{V} \Leftrightarrow \text{............} \overset{\textit{def}}{\Longleftrightarrow} U(m)(\epsilon)\text{..........}$$

$$\textit{et} \quad M_L(m) = \mathbb{F} \Leftrightarrow \text{............} \overset{\textit{def}}{\Longleftrightarrow} U(m)(\epsilon)\text{..........}$$

Utilisons M_L pour construire une MT M_ϵ qui décide $\mathcal{P}_\epsilon$, l'ensemble des machine de Turing qui acceptent le mot ϵ.

Construction de M_ϵ : Notons m, la machine de Turing passée en paramètre à M_ϵ La MT M_ϵ doit décider si m accepte ou non le mot ϵ.
M_L nous permet de tester si une machine m .... sur ϵ. Si c'est le cas alors on peut – sans risquer de .... – exécuter m sur ϵ pour savoir si m .... ϵ ou non. Si M_L nous indique que m ne termine pas sur ϵ, on peut conclure – sans exécuter m – que m n' .... pas le mot . . Notez qu'ainsi construite, M_ϵ termine toujours. Voici la définition de M_ϵ :

$$M_\epsilon(m) \overset{\textit{def}}{=} [\text{ if } \text{..............} \text{ then } U(m)(\epsilon) \text{ else } \rightarrow \otimes\ ]_2$$

Montrons que M_ϵ décide $\mathcal{P}_\epsilon$. Pour cela on doit montrer

$$(i) \quad M_\epsilon(m) = \mathbb{V} \Leftrightarrow \text{.......}\ \mathcal{P}_\epsilon \overset{\textit{def}}{\Longleftrightarrow} U(m)(\epsilon) = \text{....}$$

$$\textit{et} \ (ii) \quad M_\epsilon(m) = \mathbb{F} \Leftrightarrow \text{.......}\ \mathcal{P}_\epsilon \overset{\textit{def}}{\Longleftrightarrow} \text{.................} \ldots \mathbb{V} \ \textit{ie.} \begin{cases} \rightarrow \otimes \\ \rightarrow \infty \end{cases}$$

(i) Si $M_\epsilon(m) = \mathbb{V}$ nécessairement c'est la branche .... du **if** qui a été prise puisque la branche .... rend $\mathbb{F}$. Mais alors $\mathbb{V}$ est le résultat de .... et donc m .... ϵ d'où $m \in \mathcal{P}_\epsilon$.

(ii) Si $M_\epsilon(m) = \mathbb{F}$, cette réponse .... de la branche **then** ou de la branche **else**. Examinons les deux cas :

— Si l'exécution de $M_\epsilon(m)$ a pris la branche .... c'est que le test $M_L(m)$ rend ... et cela signifie que m .... sur ϵ. Et alors on peut conclure que m .... le mot ϵ et donc $m \notin \mathcal{P}_\epsilon$.

— La réponse $\mathbb{F}$ peut aussi provenir de la branche .... mais alors $\mathbb{F}$ est le résultat de .... ce qui signifie que m n'accepte pas ϵ d'où $m \notin \mathcal{P}_\epsilon$.

(i) et (ii) montrent que M_ϵ .... $\mathcal{P}_\epsilon$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{P}_\epsilon$ est ....
: CONTRADICTION.

Conclusion : En supposant .... on aboutit à une contradiction,

donc .... □

Exercice 4 :

Soit $\overline{L}$ un langage indécidable. Appliquez les définitions afin de montrer que L est indécidable.

Exercice 5 : Indécidabilité de l'équivalence de machines de Turing (2.5 pt)

Le théorème de Rice permet de montrer qu'il n'existe pas de MT (*ie.* de programme) capable de dire si deux MTs (ou programmes) fournis en paramètre sont équivalents (c'est-à-dire qu'ils retournent le même résultat sur toutes les entrées possibles).

Q20. (2.5 pt) Étant donnée une MT M', montrez, à l'aide du théorème de Rice, que l'ensemble $\mathcal{P}_{\equiv M'}$ des machines de Turing équivalentes à M' est indécidable

$$\mathcal{P}_{\equiv M'} \stackrel{def}{=} \{m \mid U(m) \equiv M'\}$$