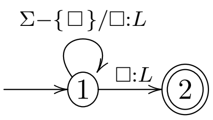
MCAL/MT - série 1 - Machine de Turing (2 TD)

Exercice 1 : Machine de Turing de base

On considére l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \square, \$\}$

Q1. Que fait la MT 

Q2. Dessinez une machine $M_{\overrightarrow{?\square}}$ qui déplace la tête de lecture vers la droite jusqu'au dernier symbole différent de $\square$.

Q3. Dessinez une machine M_{eff} qui efface le ruban et termine, à condition de démarrer sur une partie non vierge du ruban. Pour cela elle remplace tous les symboles par $\square$, tout en respectant la contrainte qui interdit à tout moment d'avoir un ruban de la forme $\;{}^{\infty}\square \mid \omega_1 \mid \square \mid \omega_2 \mid \square^{\infty}$ Comment se comporte votre machine si on l'appelle sur le ruban vierge.

Q4. Dessinez une machine $M_{\overleftarrow{\$}}$ qui déplace la tête de lecture vers la gauche jusqu'à rencontrer le marqueur \$ ou un blanc $\square$. Elle termine dans l'état accepteur ◎ si elle trouve le \$ et dans l'état rejet $\otimes$ sinon.

Q5. Dessinez une transition de MT qui ne fait rien. Par la suite on notera $\circ \xrightarrow{\epsilon} \circ$ ce type de transition.

Q6. Pour chaque MT M précédente donnez sa description sous la forme d'un sextuplet $(\Sigma, \mathscr{Q}, q_I, \delta, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ où Σ est l'alphabet de M, $\mathscr{Q}$ est l'ensemble des états de M, q_i son état initial, $\delta : \mathscr{Q} \times \Sigma \to \Sigma \times \{L, H, R\} \times \mathscr{Q}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états accepteurs, $\mathcal{R} \subseteq \mathscr{Q}$ est l'ensemble des états rejets.

Exercice 2 : Zoom sur les macro-transitions

On considère l'alphabet $\Sigma_4 = \{\$, \square, 0, 1\}$. On note $[n]_2$ l'écriture binaire, de gauche à droite (*ie.* avec les unités à gauche) de l'entier $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $[4]_2 = 001, [5]_2 = 101$.

Q7. Donnez une telle MT M_{inc} qui incrémente de 1 un entier n écrit sur le ruban en binaire. Vous utiliserez un état q_r pour mémoriser la retenue r à propager. On autorise uniquement des transitions de la forme $q \xrightarrow{l/e:d} q'$ qui effectue à la fois une lecture, une écriture, un déplacement.

Q8. On considére un alphabet $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_4\}$. Expliquez comment réaliser les transitions suivantes à l'aide de transitions classiques : $\quad (q) \xrightarrow{\{s_1,s_2\}/s_3} (q') \quad (q) \xrightarrow{\Sigma:d} (q') \quad (q) \xrightarrow[\ell \in \Sigma - \$]{\ell/\square:d} (q')$

Q9. (DS 2014) Comment traduire les transitions $\xrightarrow{s}$ d'un automate (à nombre) d'états fini A en transition de machines de Turing pour obtenir une MT M équivalente à A au sens où $\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}(M)$.

Q10. (Projet 2014) Montrez qu'on peut traduire une MT en une MT avec uniquement les deux formes de transitions écriture ou déplacement.

Q11. (Projet 2014) Appliquez votre transformation sur la MT M_{inc}.

Exercice 3 : L'alphabet minimal Σ_2

Montrez qu'on peut transformer une MT M opérant sur un alphabet $\Sigma_4 = \{\$, \square, 1, 0\}$ en une MT M' équivalente opérant sur l'alphabet $\Sigma_2 = \{\boxed{0}, \boxed{1}\}$.

> **Indication :** On représente les 4 symboles de Σ_4 par des couples de symboles de Σ_2 *ie.* $0 = (\boxed{0}, \boxed{0})$, $1 = (\boxed{1}, \boxed{1})$, $\$ = (\boxed{0}, \boxed{1})$, $\square = (\boxed{1}, \boxed{0})$
> Quand la machine M fait une transition sur un symbole de Σ_4 la machine M' fait deux transitions.

Q12. Transformez la machine $M_{\overrightarrow{?\square}}$ de la question **Q??** en une machine équivalente $M'_{\overrightarrow{?\square}}$ opérant sur Σ_2.

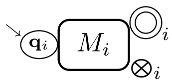
Q13. Transformez la MT M_{effG} de la question **Q??** opérant sur Σ_4 en une machine équivalente M'_{effG} opérant sur Σ_2.

Q14. (à chercher) Donnez une version optimisée de la machine M'_{effG}.

PROJET 2017 L'un des objectifs du projet est d'implanter cette transformation de Σ_4 vers Σ_2 puis de généraliser cette transformation à des MT opérant sur un alphabet Σ_{2^N} contenant 2^N symboles $s_1, \ldots, s_{2^N}$.

Exercice 4 : Exécution séquentielle de deux MT

Étant données deux MT $M_1 = (\Sigma_1, \mathscr{Q}_1, \searrow q_1, \delta_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{R}_1)$ et $M_2 = (\Sigma_2, \mathscr{Q}_2, \searrow q_2, \delta_2, \mathcal{A}_2, \mathcal{R}_2)$, construire la MT notée $[M_1; M_2]$ qui exécute M_1 puis exécute de M_2 à partir de la position où s'est arrêtée M_1.

> **Indication :** On rappelle que les états accepteurs et rejets sont terminaux (pas de transition sortante) et qu'un état $\circledcirc$ indique un succès et $\otimes$ un échec.
>
> On suppose que toutes les MT M_i sont de la forme 

Exercice 5 : Reconnaissance de langages classiques

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Pour chacun des langages suivants, donnez une MT qui le reconnaît $L_1 = \Sigma^*$, $L_2 = \emptyset$, $L_3 = \{\epsilon\}$, $L_4 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_5 = \{\omega.R(\omega) \mid \omega \in \Sigma^*\}$ où R est l'opération qui renverse un mot et donc L_5 est l'ensemble des palindromes de longueur paire sur Σ, $L_6 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 6 : Renversement et Palindrome avec des MT à deux bandes

Les transitions d'une MT à deux bandes sont de la forme $q \xrightarrow[\ell_2/e_2:d_2]{\ell_1/e_1:d_1} q'$. La partie $\ell_1/e_1 : d_1$ concernent la bande B_1 et la partie $\ell_2/e_2 : d_2$ concerne la bande B_2.

Q15. Donnez un MT M_R qui réalise la fonction $R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ qui renverse un mot fourni.

> **Attention :** Dans cette question les bandes comportent un symbole \$ qui sert à indiquer qu'il y a des données à gauche du \$ qu'il ne faut pas écraser.

$$
\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|}
B_1 : & \ldots & \$ & s_1 & \ldots & s_n & \square^\infty \\
 & & \uparrow & & & & \\
B_2 : & \ldots & \$ & \square & \ldots & \square & \square^\infty \\
 & & \uparrow & & & &
\end{array}
\xrightarrow[M_R]{}{}^{*}
\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|}
B_1 : & \ldots & \$ & s_1 & \ldots & s_n & \square^\infty \\
 & & \uparrow & & & & \\
B_2 : & \ldots & \$ & s_n & \ldots & s_1 & \square^\infty \\
 & & \uparrow & & & &
\end{array}
$$

Q16. Donnez une MT à deux bandes M_{eq} qui décide si les mots inscrits sur les bandes sont identiques.

Indication : M_{eq} « décide » signifie que M_{eq} atteint $\circledcirc$ si c'est vrai et atteint $\otimes$ si c'est faux.

Q17. À l'aides des MT précédents, donnez une MT à deux bandes M_{pal} qui accepte uniquement les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

Q18. Donnez une MT à *une seule bande* M'_{pal} qui accepte les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

Q19. Complétez $\mathscr{L}(M_{pal}) =$ ....