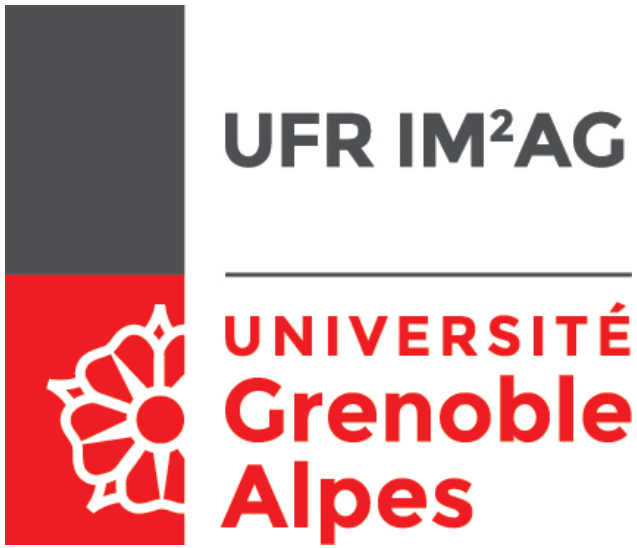
Équations de récurrence et complexité

Le Master Theorem

Jean-Marc.Vincent@imag.fr

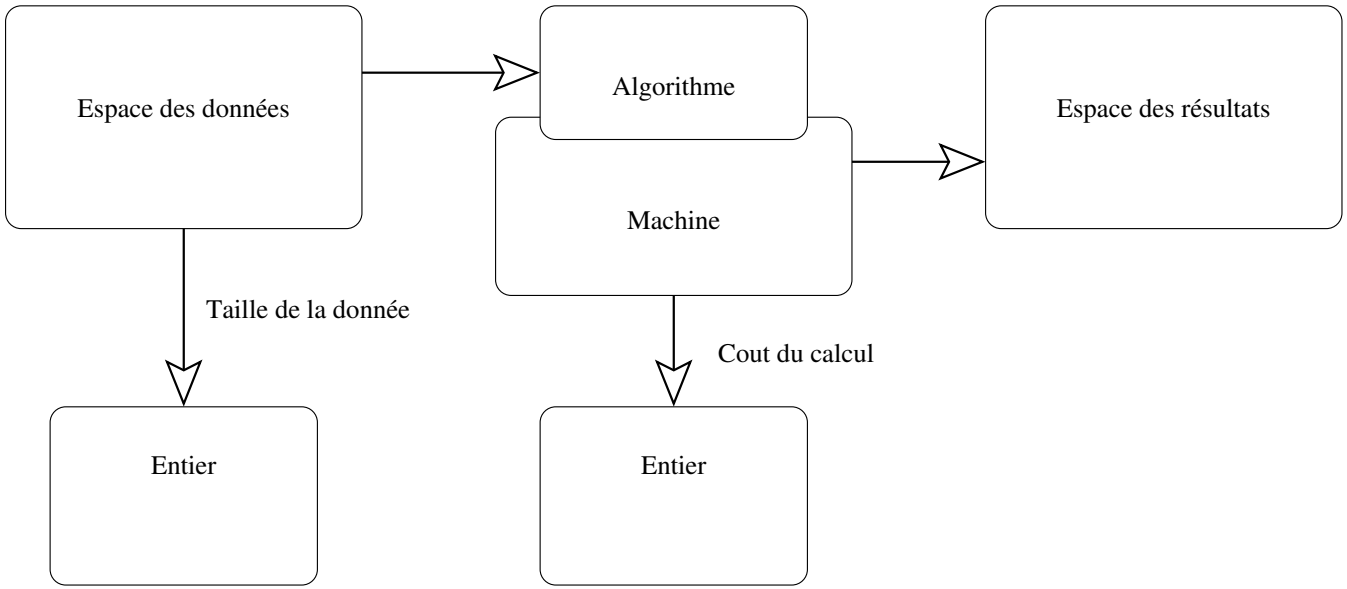
Université de Grenoble-Alpes, UFR IM²AG
L3 Informatique



RÉCURRENCE ET COMPLEXITÉ

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

ÉVALUATION DU COÛT



Coût associé à un algorithme en fonction de la taille n des données en entrée

- **Choix des opérateurs :** donné par le modèle de machine
- **Ordre de grandeur :** échelles logarithmique $\log n$, polynomiale n^k, exponentielle α^n $\mathcal{O}(.)$ (majore asymtotiquement) ou $\Omega(.)$ (minore) ou $\Theta(.)$ (du même ordre).
- **Expression de l'algorithme :** forme itérative ou récursive

Résoudre des équations de récurrence.

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

RÉCURRENCE ET COMPLEXITÉ

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

ÉQUATIONS SIMPLES

$$\begin{cases} T(0) = 0; \\ T(n) = T(n-1) + c(n), \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

où f est une fonction (en général positive).

$$T(n) = T(0) + c(0) + c(1) + \cdots + c(n) = \sum_{i=0}^{n} c(i).$$

Sommes classiques

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n = \Theta(n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2);$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3);$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Theta(n^4);$$

et de manière plus générale

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \mathcal{O}(n^{k+1});$$

Exemples Calcul du coût de l'algorithme de tri par insertion, par sélection,...

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE MULTIPLE

$$\begin{cases} T(0) = t_0, T(1) = t_1 \cdots T(k-1) = t_{k-1}; \\ T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \cdots a_k T(n-k), \text{ pour } n \geqslant k. \end{cases}$$

Ces équations de récurrence linéaires se développent à partir d'une base de solutions de la forme :

$$T(n) = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j) \lambda_i^n; \text{ avec } \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\} \text{ les } p \text{ racines du polynôme}$$

$$P(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_0; \text{ de multiplicité respectives } \{m_1, \cdots, m_p\}.$$

Les constantes $c_{i,j}$ sont fixées par les conditions initiales.

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{m-1} |\lambda_{max}|^n) \text{ avec } \lambda_{max} \text{ la racine de module maximal et de multiplicité } m.$$

C'est à dire que la fonction de coût croit de manière très rapide, au moins exponentiellement.
Exercice : Calculer la valeur de $T(n)$ pour l'équation de récurrence

$$T(0) = T(1) = 1;$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2); \text{ pour } n \geqslant 2.$$

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

RÉCURRENCE ET COMPLEXITÉ

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

ÉQUATIONS DE PARTITION

$$\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = aT(\frac{n}{b}) + c(n), \text{ pour } n \geqslant 1, \end{cases}$$

avec $a \geqslant 1$, $b > 1$ et $c(n)$ une fonction positive de n.

- Attention cette formulation contient déjà une approximation : la fraction $\frac{n}{b}$ n'a pas de raison d'être entière.
- Expression récurrente avec un facteur de division constant
- souvent on a un $\leqslant$ au lieu du $=$

Exemples

- Recherche dichotomique, recherche dans un ABR
- Parcours d'un arbre binaire
- tri rapide, tri partition fusion
- fusion en place
- ...

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE PARTITION

Pour simplifier on suppose que $n = b^k$ et on note $t_k = T(b^k)$ (changement de variable).

$$\begin{array}{rcrcr}
t_k & = & at_{k-1} & + & c(b^k) \\
at_{k-1} & = & a^2 t_{k-2} & + & ac(b^{k-1}) \\
a^2 t_{k-2} & = & a^3 t_{k-3} & + & a^2 c(b^{k-2}) \\
\vdots & = & \vdots & \vdots & \vdots \\
a^{k-1} t_1 & = & a^k t_0 & + & a^{k-1} c(b^0) \\
\hline
t_k & = & a^k t_0 & + & \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(b^{k-i})
\end{array}$$

En utilisant le fait que $t_0 = 1$ et que $a^k = n^{\log_b a}$, le résultat se met sous la forme

$$T(n) = n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(b^{k-i}).$$

En fonction du problème étudié, soit le premier terme l'emporte "le coût de partition" n'est pas prépondérant, soit c'est le deuxième terme qui l'emporte et toute la complexité du calcul est dans le partitionnement.

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE PARTITION (DÉTAILS)

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	si $c(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$;
$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$	si $c(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$T(n) = \Theta(c(n))$	si $c(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$
	pour un $\varepsilon > 0$ et si $c(n) \geq adc(n/b)$ pour $d \geq 1$.

En pratique on recalcule pour bien comprendre le poids de la partition et le poids du calcul de fusion.

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

RÉCURRENCE ET COMPLEXITÉ

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

VADE MECUM

Calcul de coût

1. Spécifier les **opérateurs** de base de votre modèle de machine (coût constant) ;
2. Décrire l'espace des données et sa segmentation (définir la **taille** d'une donnée) ;
3. Écrire l'**expression du coût** à l'aide des règles de composition des coûts élémentaires des opérateurs de base ;
4. Pour une donnée de taille n calculer le coût **maximal** (coût au pire) et le coût minimal (coût au mieux) de l'algorithme ;
5. Étudier l'ensemble des données conduisant au pire ou au meilleur coût (**exemples**) ;
6. Donner l'**ordre de grandeur** du coût (avec les fonctions $\mathcal{O}$ ou Ω) pour le coût au pire d'une donnée de taille n sur une échelle permettant de comparer les algorithmes (classiquement on utilise l'échelle déduite de l'échelle polynomiale, des logarithmes (en base 2) et des exponentielles (puissances de 2) ;

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes