MCAL/MT - série 3 - (1 TD)
Ensemble non-dénombrable et Programmation chimique

Exercice 1 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable

Q1. Complétez On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e .... de .... à un argument ...., c'e .... associent un .... : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid$ ....$\}$. Considérons un .... P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il e .... par un tableau [0...$\mathbb{N}$[qui indique pour chaque entier i la valeur .... $P(i)$ associée.

Q2. Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

Q3. Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

Q4. Complétez la preuve On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e preuve par .... :

S.................................... que l'ensemble $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e .... avec $\mathbb{N}$. Alors il existe une .... entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, ... le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger .... le dans un tableau $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ à la manière de George .... en plaçant sur la .... ℓ le .... du prédicat .... On peut donc re un élément de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son .... de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la .... du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient .... prédicat $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{def}{=}$ .... doit .... tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc P................

Exemple : Le prédicat P correspond à la .... de la .... du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \ldots, \; P(1) = \ldots, \; P(2) = \ldots, \; P(3) = \ldots, etc$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) =$ .... *puisque* ....; *mais, par ailleurs,*

$P(\ell) =$ .... *par* .... : *Contradiction.*

Conclusion : *En suppo* $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ...., *on aboutit à* ...., *donc* $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ....

Exercice 2 : Génération de graphes en Gamma

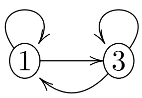
Q5. Exécutez le programme Gamma Γ_1 ci-dessous sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,8)\}\!\!\}$ où $\div$ est la division entière, c'est-à-dire $5 \div 2 = 2$.

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \textsc{Itv}(x,y) & \xrightarrow{x \leq y+1} \quad \textsc{Itv}(x,\ (x+y) \div 2), \quad \textsc{Itv}(1+(x+y)\div 2,\ y) \\ \textsc{Itv}(x,x) & \longrightarrow \quad \mathrm{N}(x) \end{cases}$$

Q6. **(a)** Combien d'applications de règles sont nécessaires avant d'arriver à la stabilité du multi-ensemble ? **(b)** En combien d'étapes[1] atteint-on la stabilité ?

Q7. Généralisation **(a)** Expliquez l'effet du programme Γ_1 sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,n)\}\!\!\}$ où n est un entier > 1. **(b)** En combien d'applications de règles et combien d'étapes obtient-on la stabilité ?

Représentation d'un graphe par un multi-ensemble On peut décrire un graphe par l'ensemble de ses arcs. On notera $\textsc{Arc}(i,j)$ un arc entre le nœud i et le nœud j.

Q8. **(a)** Donnez le multi-ensemble correspondant au graphe 

et **(b)** dessinez le graphe correspondant au multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Arc}(1,1), \textsc{Arc}(2,3)\}\!\!\}$

Q9. On considère un multi-ensemble $\mathcal{M}$ qui contient des nœuds $\mathrm{N}(i)$ numérotés de 1 à n. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}$ et de l'atome $G(p) \in \mathcal{M}$ – construit un graphe à *exactement* p arcs *différents* entre des nœuds de $\mathcal{M}$.

> **Indication :** L'atome $G(..)$ de $\mathcal{M}$ qui sert à contrôler l'arrêt de la réaction.

Q10. Notre but est d'adapter le programme précédent pour garantir qu'on construit un **graphe connexe** c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de sous-graphes disjoints[2]. Cette fois on commence avec un atome $G'(p)$ dans un multi-ensemble $\mathcal{M}'$ de nœuds primés, notés $\mathrm{N}'(i)$ pour indiquer qu'il ne font pas partie du graphe connexe. L'idée est de changer un noeud $\mathrm{N}'(i)$ en $\mathrm{N}(i)$ lorsqu'il se trouve connecté au graphe. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}'$ et de l'atome $G'(p)$ – construit un *graphe connexe* à exactement p arcs différents entre des nœuds de $\mathcal{M}'$.

Exercice 3 : Machines de Turing à 3.. 2.. 1 bande(s)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, \$, 1, 0, \S\}$. Le symbole § servira de marqueur. On s'intéresse à l'opération $S : \{0,1\}^* \to 1^*0^*$ qui prend en paramètre un mot binaire $\omega \in \{0,1\}^*$ et range tous les 1 du mot avant les 0.

> **Exemple :** $S(000111) = 111000$ et $S(10101) = 11100$ et $S(\epsilon) = \epsilon$

1. une étape = une application en parallèle des règles
2. Un nœud $\mathrm{N}(i)$ sans arc ne constitue pas un graphe.

Le but de cet exercice est de réaliser l'opération S de trois façons : avec une MT à 3 bandes (B_1, B_2, B_3), puis à 2 bandes (B_1, B_2), puis à une seule bande (B_1). Au départ le mot ω est inscrit sur la bande B_1 ; les autres bandes contiennent juste un \$; la tête de lecture/écriture de chaque bande est positionnée sur le \$. À la fin de l'exécution, la bande B_1 doit contenir le mot $S(\omega)$.

> **Indication :** On indiquera devant l'action $\ell/e : d$ le numéro de la bande concernée. Les transitions qui ont des actions simultanées sur plusieurs bandes seront notées : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1 \ \ (2)\ell_2/e_2:d_2 \ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.
> Si une transition n'a pas d'action sur la bande B_2, on ne décrit pas d'action $(2)\ldots$, on se contentera d'indiquer les actions sur B_1 et B_3 : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1 \ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.

Q11. Donnez une MT $M_{\overrightarrow{\S}}$ qui recherche le symbole § vers la droite et ramène la tête de lecture/écriture de B_1 sur le §.

Q12. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec une MT M_3 à 3 bandes (B_1, B_2, B_3) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_3(10101)$.

Q13. Donnez les transitions de la MT M_3 à trois bandes qui réalise S.

Q14. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_2 à 2 bandes (B_1, B_2) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_2(10101)$.

Q15. Donnez les transitions de la MT M_2 à deux bandes qui réalise S.

Q16. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_1 à une bande (B_1) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_1(10101)$.

Q17. Donnez les transitions de la MT M_1 à une bande qui réalise S.