MCAL/MT - série 2 - Machines de Turing Complexes (1.5 TD)

Exercice 1 : Machines multi-bandes

On considère le cas d'une MT M à k bandes $B_1, \ldots, B_k$ avec chacune sa propre tête de lecture/écriture, notées $T_1, \ldots, T_k$.

— Une transition de M à k bandes est de la forme

$$\delta(\mathbf{q},\ (\ell_1, \cdots, \ell_k)\ ) = (\mathbf{q}',\ (e_1, \cdots, e_k),\ (d_1, \cdots, d_k)\ )$$

où les ℓ_i sont des symboles lus, les e_i les symboles écrits et les d_i sont les déplacements.
Elle s'effectue simultanément sur les k bandes, à condition que le vecteur des symboles lus par les k tête de lecture/écriture sur les k bande correspondent aux symboles $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ attendus par la transition. Si c'est le cas, la machine change d'état, elle écrit chaque symbole e_i sur la bande B_i et effectue le déplacement d_i de la tête de lecture/écriture T_i ; ceci sur chacune des bandes d'après la fonction de transition δ de M :

— Pour simplifier, au démarrage, seule la bande B_1 contient l'entrée $\$.\omega$ de la MT M, les autres bandes sont de la forme

$^\infty\Box$	$\$$	$\Box^\infty$

Le but du TD est de montrer le résultat suivant pour $k = 2$ qu'on peut ensuite généraliser à $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1 *Une machine de Turing à k bandes utilisant un alphabet Σ peut être simulée par une machine de Turing à* ***une seule bande*** *utilisant un alphabet plus riche.*

Principe de la simulation pour $k = 2$

On considère une machine de Turing M à 2 bandes opérant sur Σ.

— les transitions de M sont de la forme $\textcircled{q} \xrightarrow[\ell_2/e_2:d_2]{\ell_1/e_1:d_1} \textcircled{q'}$.
La partie $\ell_1/e_1 : d_1$ concernent la bande B_1 et la partie $\ell_2/e_2 : d_2$ concerne la bande B_2.

— Supposons qu'**à un instant de l'exécution de** M, la bande B_1 contient le mot \$.1.0.1.1 avec T_1 positionnée sur 0 et la bande B_2 contient le mot \$.0.1.0.1.0.1 avec T_2 positionnée sur le dernier caractère.
On peut superposer les bandes B_1 et B_2 en alignant les \$ et ajouter deux bandes fictives T_1 et T_2 comportant un unique symoble $\uparrow$ à la position de la tête de lecture/écriture. L'empilement des bandes forment un tableau infini qui modélise le contenu des bandes B_1, B_2 et la position des têtes T_1, T_2 :

B_1 :	$^\infty\Box$	$\$$	1	0	1	1	$\Box$	$\Box$	$\Box^\infty$
T_1 :	$^\infty\Box$	$\Box$	$\Box$	$\uparrow$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box^\infty$
B_2 :	$^\infty\Box$	$\$$	0	1	0	1	0	1	$\Box^\infty$
T_2 :	$^\infty\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\uparrow$	$\Box^\infty$

Q1. On suppose que M est dans l'état $\mathbf{q}$, donnez l'effet de chacune des transitions sur le tableau précédent (a) $\textcircled{q} \xrightarrow[0/1:L]{1/0:R} \textcircled{q'}$ (b) $\textcircled{q} \xrightarrow[1/0:L]{0/1:R} \textcircled{q'}$ (c) $\textcircled{q} \xrightarrow[0/1:R]{0/1:R} \textcircled{q'}$ (d) $\textcircled{q} \xrightarrow[1/1:H]{0/0:H} \textcircled{q'}$

Pour remplacer les 2 bandes par une seule, on considère chaque colonne du tableau comme un symbole de la machine M' à **une seule bande** qui doit simuler le comportement de M.
Un symbole de M' est un vecteur de symboles de la forme (s_1, t_1, s_2, t_2) où $t_1 = \uparrow$ indique la présence de la tête de lecture/écriture sur le symbole s_1 et $t_2 = \Box$ indique que la tête de lecture/écriture de B_2 n'est pas sur s_2.

Q2. Interprétez les vecteurs de symboles suivants correspondant à une colonne du tableau.

Exemples :

- $(0, \uparrow, 1, \uparrow)$

SOLUTION

la tête T_1 pointe sur le symbole 0 et que la tête T_2 pointe sur le symbole 1. De plus la tête de la bande 1 et celle de la bande 2 sont à la même position.

- $(0, \square, 1, \square)$

SOLUTION

à cette position le bande 1 contient un 0 et la bande 2 contient un 1 mais les têtes de lecture ne sont pas à cette position.

- $(0, \uparrow, 1, \square)$

SOLUTION

à cette position la bande 1 contient un 0 et la bande 2 contient un 1. La tête de la bande 1 est à cette position et lit donc le 0 inscrit sur la bande 1.

Q3. Donnez le ruban R de la MT M' correspondant au tableau.

Q4. Soit $\Sigma = \{0, 1, \$, \square\}$ l'alphabet de la machine M. Donnez l'alphabet Σ' sur lequel travaillera la machine M' et indiquez sa taille. Généralisez au cas Σ_k où la MT m' simule une MT M à k bandes.

SOLUTION

$$\begin{array}{rcl} \Sigma' & = & \Sigma \times \{\square, \uparrow\} \times \Sigma \times \{\square, \uparrow\} \\ & = & \{(s_1, t_1, s_2, t_2) \mid s_1, s_2 \in \Sigma, t_1, t_2 \in \{\square, \uparrow\}\} \\ \textit{et donc } |\Sigma'| & = & 4 \times 2 \times 4 \times 2 = 64 \textit{ symboles} \end{array}$$

Généralisation : $\Sigma_k = (\Sigma \times \{\square, \uparrow\})^k$ *et* $|\Sigma_k| = (4 \times 2)^k = 2^{3k}$ *soit 512 symboles pour un* MT *à* $k = 3$ *bandes.*

Construction de la MT à une bande équivalente à la MT à deux bandes

Considérons la MT à deux bandes $M = (\Sigma, \mathscr{Q}, \mathbf{q}, \delta, \mathcal{A}, \mathcal{R})$. **Notre objectif** est de contruite une MT $M' = (\Sigma', \mathscr{Q}', \mathbf{q}', \delta', \mathcal{A}', \mathcal{R}')$ à une bande qui simule la machine M à 2 bandes. La MT M' travaillera sur des symboles (s_1, t_1, s_2, t_2) qui encodent les contenus des rubans de M et la position des têtes.

Considérons une transition $\mathbf{q} \xrightarrow[\ell_2/e_2:d_2]{\ell_1/e_1:d_1} \mathbf{q}'$ de M.

Pour simuler une transition de la machine M à 2 bandes, il faut connaître le symbole courant sur lesquel pointe chaque tête puis simuler les actions de la transitions. Pour cela,

1. dans un premier parcours de gauche à droite du ruban, on détermine la position de chaque tête de lecture/écriture et les symboles ℓ_1, ℓ_2 lus afin de déterminer la transition de la machine d'origine à exécuter.
2. dans un deuxième parcours de droite à gauche du ruban, la machine effectue les écritures e_1, e_2 et les déplacements d_1, d_2 correspondant aux actions de la machine d'origine.

On distingue deux phases dans le fonctionnement de la MT M' :

1. la recherche du symbole courant (ℓ_1, ℓ_2) de M : c'est la tâche de la MT M_{lect}
2. la réalisation des actions de la transition τ de M associée à cette lecture : c'est la tâche de la MT M_τ

Q5. Complétez. Les états de M_{lect} sont de la forme $\mathbf{q}_{(s_1,s_2)}$ où $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ et $s_1, s_2 \in \Sigma \cup \{?\}$. L'ensemble $\mathcal{Q}_{lect}$ des états de la MT M_{lect} est donc $\mathcal{Q} \times (\Sigma \cup \{?\}) \times (\Sigma \cup \{?\})$ et $|\mathcal{Q}_{lect}| = |\mathcal{Q}| \times (|\Sigma| + 1)^2$.

> **Indication :** On note $\mathbf{q}_{(?,?)}$ l'état initial de M_{lect} qui évolue en $\mathbf{q}_{(\ell_1,?)}$ lorsque qu'elle a trouvé le symbole ℓ_1 pointé par la tête de lecture sur la bande B_1 puis évolue en $q_{(\ell_1,\ell_2)}$ lorsqu'elle a trouvé le symbole ℓ_2 pointé par la tête de lecture sur la bande B_2

Q6. Donnez une MT M_{lect} qui effectue un parcours de gauche à droite du ruban et trouve le symbole lu par chaque tête de M. Commencez par considérer les transitions de l'état initial $\mathbf{q}_{(?,?)}$ puis généralisez à un état quelconque de la forme $\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \in \mathcal{Q}_{lect}$.

SOLUTION

— *Depuis l'état initial on avance vers la droite tant qu'on ne trouve pas de tête de lecture :*

$$\mathbf{q}_{(?,?)} \xrightarrow[\ell_1,\ell_2\in\Sigma]{(\ell_1,\square,\ell_2,\square):R} \mathbf{q}_{(?,?)}$$

En fait, on peut généraliser cette transition à tout état $\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \in \mathcal{Q}_{lect}$ *:*

$$\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \xrightarrow[\ell_1,\ell_2\in\Sigma]{(\ell_1,\square,\ell_2,\square):R} \mathbf{q}_{(s_1,s_2)}$$

— *Depuis l'état initial on met à jour les symboles lus lorsqu'on trouve les têtes de lecture*

$$\mathbf{q}_{(?,?)} \xrightarrow[\ell_1,\ell_2\in\Sigma]{(\ell_1,\uparrow,\ell_2,\uparrow):H} \mathbf{q}_{(\ell_1,\ell_2)}$$

En fait, on peut généraliser cette transition à tout état $\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \in \mathcal{Q}_{lect}$ *:*

$$\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \xrightarrow[\ell_1,\ell_2\in\Sigma]{(\ell_1,\uparrow,\ell_2,\uparrow):H} \mathbf{q}_{(\ell_1,\ell_2)}$$

— *Depuis l'état initial on met à jour un symbole lorsqu'on trouve une tête de lecture*

$$\mathbf{q}_{(?,?)} \xrightarrow[\ell_1\in\Sigma]{(\ell_1,\uparrow,\Sigma,\square):R} \mathbf{q}_{(\ell_1,?)}$$
$$\mathbf{q}_{(?,?)} \xrightarrow[\ell_2\in\Sigma]{(\Sigma,\square,\ell_2,\uparrow):R} \mathbf{q}_{(?,\ell_2)}$$

En fait, on peut généraliser cette transition à tout état $\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \in \mathcal{Q}_{lect}$ *:*

$$\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \xrightarrow[\ell_1\in\Sigma]{(\ell_1,\uparrow,\Sigma,\square):R} \mathbf{q}_{(\ell_1,s_2)}$$
$$\mathbf{q}_{(s_1,s_2)} \xrightarrow[\ell_2\in\Sigma]{(\Sigma,\square,\ell_2,\uparrow):R} \mathbf{q}_{(s_1,\ell_2)}$$

Remarque Si on adopte la convention que la MT M démarre dans l'état initial $\mathbf{q}$ sur le $(\$,\$)$ alors la première phase – et donc la machine M_{lect} – sont inutiles. C'était juste pour s'échauffer. En réalité on peut se passer de M_{lect} et faire démarrer M' dans l'état $\mathbf{q}_{(\$,\$)}$. Il est alors inutile de rechercher les caractères pointés par les têtes, il suffit de les mémoriser au moment du déplacement des têtes. Il faudra malgré tout chercher les têtes pour effectuer les écritures et les déplacements.

Simultation des transitions de M

Considérons la transition suivante de M : $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q} \xrightarrow[\ell_2/e_2\ :\ d_2]{\ell_1/e_1\ :\ d_1} \mathbf{q}'$ qui lit *simultanément* ℓ_1 sur la bande 1 et ℓ_2 sur la bande 2, écrit e_1 sur la bande 1 et e_2 sur la bande 2, puis effectue le déplacement d_1 (resp. d_2) de la tête de la bande 1 (resp. 2).

Q7. Complétez les pointillés Un état de M_τ est de la forme $\mathbf{q}^{e_1:d_1,e_2:d_2}_{(\ell_1,\ell_2)}$ où (ℓ_1,ℓ_2) indique les symboles lus par les deux têtes de M et $e1 : d_1, e_2 : d_2$ indique les actions qu'ils restent à effectuer. Le symbole $\bullet$ sera utilisé pour indiquer qu'une action a été réalisée. Ainsi,

$$\mathbf{q}^{e_1:d_1,e_2:d_2}_{(s_1,s_2)} \in \mathscr{Q}_\tau \subseteq \underbrace{\mathscr{Q}}_{\mathbf{q}} \times \underbrace{\Sigma\cup\{?\}}_{s_1} \times \underbrace{\Sigma\cup\{?\}}_{s_2} \times \Big(\underbrace{\Sigma\cup\{\bullet\}}_{e_i} \times \underbrace{\{L,H,R,\uparrow,\bullet\}}_{d_i}\Big)^2$$

et

$$|\mathscr{Q}_\tau| \leq |\mathscr{Q}| \times |\Sigma|+1 \times |\Sigma|+1 \times \big((|\Sigma|+1) \times 5 \big)^2$$

Indication : On passe dans un état $\mathbf{q}^{\bullet:\uparrow,e_2:d_2}_{(e_1,\ell_2)}$ lorsqu'on a effectué l'écriture e_1 et le déplacement d_1 et qu'il reste à inscrire le symbole $\uparrow$ indiquant la position de la tête 1. On passe dans un état $\mathbf{q}^{\bullet:\bullet,e_2:d_2}_{(e_1,\ell_2)}$ lorsqu'on a effectué les actions qui concerne la bande 1. On passera dans un état $\mathbf{q}'_{(s_1,s_2)}$ quand on aura effectué toutes les actions de la transition τ.

SOLUTION

Solution : *une fois τ effectuer on revient systématiquement sur le symbole $(\Box, t_1, \Box, t_2)$ le plus à gauche. On sait alors qu'il faut chercher les têtes vers la droite.*
Optimisation, à étudier : *On passe dans un état $\overrightarrow{\mathbf{q}'}_{(s_1,s_2)}$ s'il faut chercher les têtes en explorant le ruban vers la droite et dans un état $\overleftarrow{\mathbf{q}'}_{(s_1,s_2)}$ s'il faut chercher les têtes en explorant le ruban vers la gauche.*

Q8. Complétez les pointillés Complétez les transitions suivantes qui effectuent les actions $e_1 : d_1, e_2 : d_2$ en découvrant tout d'abord la tête 1 puis la tête 2.

1. on effectue l'écriture e_1 et on efface la flêche $\uparrow$ qui indique la position de la tête T_1

$$\mathbf{q}^{e_1:d_1,e_2:d_2}_{(\ell_1,\ell_2)} \xrightarrow[\forall s_1,s_2\in\Sigma,\ \ \forall t_2\in\{\Box,\uparrow\},]{(s_1,\uparrow,s_2,t_2)/(e_1,\Box,s_2,t_2)\ :\ d_1} \mathbf{q}^{\bullet:\uparrow,e_2:d_2}_{(?,\ell_2)}$$

2. on inscrit la flêche $\uparrow$ qui indique la position de la tête T_1

$$\mathbf{q}^{\bullet:\uparrow,e_2:d_2}_{(?,\ell_2)} \xrightarrow[\forall s_1,s_2\in\Sigma,\ \ \forall t_2\in\{\Box,\uparrow\},]{(s_1,\Box,s_2,t_2)/(s_1,\uparrow,s_2,t_2)\ :\ H} \mathbf{q}^{\bullet:\bullet,e_2:d_2}_{(s_1,\ell_2)}$$

3. on effectue l'écriture e_2 et on efface la flêche $\uparrow$ qui indique la position de la tête T_2

$$\mathbf{q}^{\bullet:\bullet,e_2:d_2}_{(s_1,\ell_2)} \xrightarrow[\forall c_1,c_2\in\Sigma,\ \ \forall t_1\in\{\Box,\uparrow\},]{(c_1,t_1,c_2,\uparrow)/(c_1,t_1,e_2,\Box)\ :\ d_2} \mathbf{q}^{\bullet:\bullet,\bullet:\uparrow}_{(s_1,?)}$$

4. on effectue l'écriture e_2 et on efface la flêche $\uparrow$ qui indique la position de la tête T_2

$$\mathbf{q}^{\bullet:\bullet,\bullet:\uparrow}_{(s_1,?)} \xrightarrow[\forall c_1,c_2\in\Sigma,\ \ \forall t_1\in\{\Box,\uparrow\},]{(c_1,t_1,c_2,\Box)/(c_1,t_1,c_2,\uparrow)\ :\ H} \mathbf{q}^{\bullet:\bullet,\bullet:\bullet}_{(s_1,c_2)} \equiv \mathbf{q}'_{(s_1,c_2)}$$

En supposant que la machine M comporte la transition $\mathbf{q}' \xrightarrow[s_2/e'_2\ :\ d'_2]{s_1/e'_1\ :\ d'_1} \mathbf{q}''$, complétez l'état $\mathbf{q}'$ en indiquant en indice les symboles en face des têtes de M et en exposant les prochaines actions à effectuer.

Q9. Complétez les transitions Les transitions précédentes ne sont pas complètes : il manque les transitions qui font avancer M_τ à la recherche d'une tête de lecture.

Q10. Complétez les transitions Les transitions précédentes ne sont pas complètes : il manque les cas où l'on trouve d'abord la tête 2 avant la tête 1.

Conclusion Vous comprenez que la traduction d'une MT à 2 bandes en une MT à 1 bande est fastidieuse. Plutôt que de l'effectuer à la main il est préférable de la programmer. Ce sera l'objectif du projet dans les années à venir.

Exercice 2 : Machine à pile, à compteurs

Machine à une pile

Une machine à une pile dont les transitions possibles sont les suivantes :

- q_i : `empiler (a)` $l/e : d$; goto q_j
- q_i : `depiler` $l/e : d$; goto q_j
- q_i : `if sommet=a` then goto q_1 else goto q_2
- Un état initial, q_0 et un état terminale q_t

Machine à n compteurs

Une machine à n compteurs et une machine comportant n variables $x_1, \cdots, x_n$. Les transitions possibles sont les suivantes

- $q_i : x := x + 1; l/e : d;$ `goto` q_j
- $q_i : x := x - 1; l/e : d;$ `goto` q_j
- q_i : `if` $x = 0$ `then goto` q_1 `else goto` q_2
- Un état initial, q_0 et un état terminale q_t

Questions

Q1 Simuler une bande par deux piles

Q2 Simuler une machine à 2 compteurs par une machine à 2 piles.

Q3 Simuler une machine à 2 piles par une machine à 2 compteurs.