



6 pt

Exercice 1 : Question de cours et preuve (15 min)

On considère l'alphabet $\{0, 1, \square, \$\}$.



1 pt

Q1. Expliquez la différence entre une MT M_D qui **décide** le langage L et une MT M_R qui **reconnaît** le langage L .



0.5 pt

Q2. Donnez une MT qui **décide** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



0.5 pt

Q3. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



0.5 pt

Q4. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\overline{\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$



1.5 pt

Q5. Considérons un langage L .

Si une MT M_1 décide le langage L alors le langage \bar{L} est décidable.

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.



2 pt

Q6. Considérons un langage L .

Si une MT M_1 reconnaît mais ne décide pas le langage L et si une MT M_2 reconnaît mais ne décide pas le langage \bar{L} alors on peut conclure que le langage L est décidable.

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.



4.5 pt

Exercice 2 : Opérations sur les booléens (10 min)

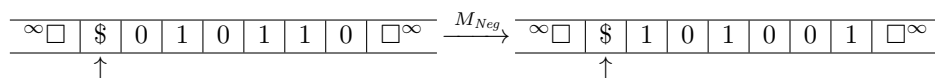
On considère l'alphabet $\{0, 1, \square, \$\}$ et on adopte la convention que 0 représente le booléen *faux* et 1 représente *vrai*. Un mot binaire $\omega \in \{0, 1\}^*$ représente une suite de booléens.



1.25 pt

Q7. Donnez une MT M_{Neg} qui effectue la négation des booléens de ω puis se replace sur le symbole $\$$

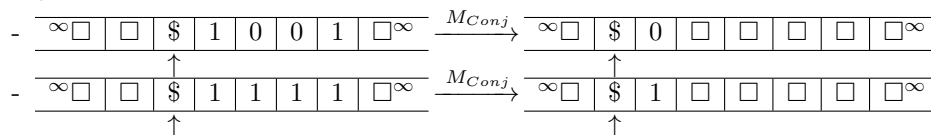
Exemple :



2 pt

Q8. Donnez une MT M_{Conj} qui effectue la conjonction des booléens de ω , efface les booléens au fur et à mesure, inscrit 1 puis se replace sur le symbole $\$$ et termine dans un état \odot si la conjonction vaut \mathbb{V} , inscrit 0 puis se replace sur le symbole $\$$ et termine dans un état \otimes si la conjonction vaut \mathbb{F} .

Exemples :



1.25 pt

Q9. Exploitez le loi de DeMorgan $\neg(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n) = \neg b_1 \wedge \neg b_2 \wedge \dots \wedge \neg b_n$ pour construire à une MT M_{Disj} telle que

$$M_{Disj}(\underbrace{b_1 b_2 \dots b_n}_{\omega}) = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$$

M_{Disj} doit effacer le ruban, inscrire le résultat sur le ruban, se replacer sur $\$$ et terminer dans un état correspond au résultat \odot pour \mathbb{V} , \otimes pour \mathbb{F}



3.5 pt

Exercice 3 : Tableaux et tri en Gamma (10 min)

En Gamma un tableau $\frac{i}{\mathbf{t}[i]} \parallel \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 521 & 3 & 42 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$ est représenté par le multi-ensemble

$$\mathcal{M} = \{T(0, 2), T(1, 521), T(2, 3), T(3, 42), T(4, 4), T(5, 2)\}$$

où les éléments $T(\text{indice}, \text{valeur})$ flottent dans la solution chimique.



0.5 pt

Q10. Donnez la propriété logique qui caractérise le fait que le tableau $\mathbf{t}[0..N]$ est trié dans l'ordre croissant sous la forme d'une formule commençant par \forall .



0.5 pt

Q11. Donnez le multi-ensemble qui correspond au tableau T trié dans l'ordre croissant.



1 pt

Q12. Donnez la/les règle(s) Gamma qui permettent d'obtenir un multi-ensemble d'éléments $T(\text{indice}, \text{valeur})$ trié dans l'ordre croissant.



0.5 pt

Q13. Donnez la propriété logique qui caractérise le fait que le multi-ensemble \mathcal{M} d'éléments $T(\text{indice}, \text{valeur})$ est trié dans l'ordre croissant sous la forme d'une formule commençant par \forall .



1 pt

Q14.

- Donnez l'exécution la plus efficace de cet algorithme sur le multi-ensemble \mathcal{M} de l'exemple.
- Combien d'applications des règles sont nécessaires pour obtenir un multi-ensemble trié ;
- Combien d'étapes sont nécessaires pour obtenir le multi-ensemble trié.



8 pt

Exercice 4 : Codage des Automates à une pile en machines de Turing

(25 min)

L'objectif de l'exercice est de simuler un automate à une pile (AUP) par une machine de Turing à deux bandes. Le mot ω à reconnaître sera inscrit sur la bande B_1 et la pile de l'automate sera représentée par la bande B_2 .



0.75 pt

Q15. Rappelez la définition de **l'acceptation sur pile vide**. Autrement dit, donnez les conditions à satisfaire pour qu'un mot ω soit accepté par un AUP.

Autant de 0 que de 1 On considère le langage L formé des mots binaires qui ont autant de 0 que de 1 (sans tenir compte de l'ordre de 0 et des 1).



0.5 pt

Q16. Donnez trois mots binaires qui appartiennent au langage L et trois mots binaires qui n'appartiennent pas à L . En particulier, que dire du mot ϵ ?



2 pt

Q17. Donnez un AUP qui reconnaît le langage L . Respectez les notations indiquées ci-après.

Indication : On notera $\mathbf{q} \xrightarrow[\gamma/\gamma']{\ell} \mathbf{q}'$ une transition d'AUP où ℓ est le symbole lu, γ l'état de la pile avant la transition et γ' l'état de la pile après la transition. Une transition peut effectuer l'une opérations suivantes sur la pile :

- empiler un symbole : $\gamma/\frac{s}{\gamma}$
- lire le sommet de la pile sans modifier la pile : $\frac{s}{\gamma}/\frac{s}{\gamma}$
- dépiler le sommet : $\frac{s}{\gamma}/\gamma$
- lire le sommet et empiler un symbole $\frac{s}{\gamma}/\frac{s'}{\frac{s}{\gamma}}$

Exemples :

- La transition $q \xrightarrow{\ell/\frac{s}{\gamma}} q'$ lit le symbole ℓ et empile le symbole s
- La transition $q \xrightarrow{\frac{s}{\gamma}/\ell} q'$ lit le symbole ℓ et dépile le symbole s à condition que le symbole s soit en sommet de pile.
- La transition $q \xrightarrow{\frac{\ell}{\gamma}/\frac{\ell}{\gamma}} q'$ lit le symbole ℓ et vérifie que le symbole en sommet de pile est le même que le symbole lu.



0.25 pt

Q18. Dessinez la bande B_2 correspondant à une pile vide.



1.5 pt

Q19. Donnez la traduction en MT de chacune des trois transitions d'AUP suivantes :

1. $q \xrightarrow{\ell/\gamma} q'$ 2. $q \xrightarrow{\frac{s}{\gamma}/\ell} q'$ 3. $q \xrightarrow{\frac{\ell}{\gamma}/\frac{\ell}{\gamma}} q''$. Respectez les notations indiquées ci-après.

Indication : On notera les transitions de la MT à deux bandes de la manière suivante $q \xrightarrow{\ell_1/e_1:d_1/\ell_2/e_2:d_2} q'$, c'est-à-dire au dessus de la flèche la *lecture/écriture :déplacement* sur la bande 1 et sous la flèche la *lecture/écriture :déplacement* sur la bande 2.



1.5 pt

Q20. Donnez les traductions en MT : (1) d'un état accepteur $\textcircled{\textcircled{q}}$ de l'AUP, et (2) d'un état non-accepteur \textcircled{q} de l'AUP de manière à simuler l'acceptation sur pile vide.



1.5 pt

Q21. Expliquez comment une MT peut simuler l'exécution d'un AUP A sur un mot ω de manière à accepter ω si A reconnaît ω .

Indication : Vous pouvez faire référence aux questions précédentes dans vos explications.