

## Interro MT – mardi 24 février 2015

### Décidabilité du langage $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (20 pt)

On considère l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1, \#, \$, \square\}$ .

**Q1.** (3 pt) Donnez les transitions d'une MT  $M_{swap}$  qui échange la position du symbole  $\#$  courant avec le symbole binaire suivant.

**Exemple :** 
$$\overline{\infty \square \mid \omega \mid \# \mid 1 \mid \omega' \mid \square \infty} \xrightarrow{M_{swap}} \overline{\infty \square \mid \omega \mid 1 \mid \# \mid \omega' \mid \square \infty}$$

**Indication :** Vous pouvez utiliser des multi-transitions notées  $\frac{s/\dots:\dots}{s \in \{\dots\}} \rightarrow$

#### SOLUTION

$$\begin{aligned} \rightarrow \odot & \xrightarrow{\# : R} \mathbf{q} \xrightarrow[\substack{s/\# : L \\ s \in \{0,1\}}]{\# / s : R} \mathbf{q}_s \xrightarrow{\# / s : R} \odot \\ \mathbf{q} & \xrightarrow{\square} \otimes \end{aligned}$$

**Q2.** (3 pt) Donnez pour chaque multi-transitions de la question précédente, les transitions de bases correspondantes.

#### SOLUTION

$$\begin{aligned} \mathbf{q} & \xrightarrow[\substack{s/\# : L \\ s \in \{0,1\}}]{\# / \# : R} \mathbf{q}_s \text{ donne } \mathbf{q} \xrightarrow{0/\# : L} \mathbf{q}_0 \quad \mathbf{q} \xrightarrow{1/\# : L} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_s & \xrightarrow{\# / s : R} \odot \text{ donne } \mathbf{q}_0 \xrightarrow{\# / 0 : R} \odot \quad \mathbf{q}_1 \xrightarrow{\# / 1 : R} \odot \end{aligned}$$

**Q3.** (3 pt) Donnez une MT  $M_{dec}^{\rightarrow}$  qui à partir d'une configuration où la tête pointe sur le symbole  $\#$ , décale les symboles suivants d'une case vers la gauche et amène le symbole  $\#$  en dernière position avant les  $\square \infty$ .

**Exemple :** 
$$\overline{\infty \square \mid \omega \mid \# \mid s_1 \mid \dots \mid s_n \mid \square \infty} \xrightarrow{M_{dec}^{\rightarrow}} \overline{\infty \square \mid \omega \mid s_1 \mid \dots \mid s_n \mid \# \mid \square \infty}$$

**Indication :** Vous pouvez utiliser la MT  $M_{swap}$  de la question 1 en notant la transition  $\xrightarrow{M_{swap}}$

#### SOLUTION

On itère l'action suivante d'échanger le symbole  $\#$  avec le symbole  $s$  suivant par swap. La MT  $M_{swap}$  effectue l'échange uniquement si le symbole  $s$  n'est pas un  $\square$  et s'arrête sur un  $\square$  lorsqu'elle en rencontre un.

$$\rightarrow \mathbf{q}_1 \xrightarrow{\#} \mathbf{q}_2 \xrightarrow{M_{swap}} \mathbf{q}_2 \xrightarrow{\square : L} \odot$$

Notre objectif est de concevoir une MT  $M_L$  qui décide le langage  $L \stackrel{def}{=} \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  constitué des mots binaires formés de  $n$  symboles 0 suivis de  $n$  symboles 1.

**Q4.** (2 pt) Que signifie que la MT  $M_L$  décide le langage  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  ?

#### SOLUTION

La MT  $M_L$  décide le langage  $L$  si et seulement si elle s'arrête pour tout mot  $\omega$  de  $\{0, 1\}^*$ , sur un état  $\odot$  si  $\omega \in L$ , sur un état  $\otimes$  si  $\omega \notin L$ .

**Q5. (a,b,c,d)(2pt)**

(a) Donnez le ruban initial correspondant à l'appel de  $M_L(0011)$  :

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

|          |           |    |   |   |   |   |           |          |
|----------|-----------|----|---|---|---|---|-----------|----------|
| $\infty$ | $\square$ | \$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $\square$ | $\infty$ |
|          |           | ↑  |   |   |   |   |           |          |

(b) À quel appel correspond le ruban initial  $\infty \square \mid \$ \mid \square \infty$  ?

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

Ce ruban représente le mot  $\epsilon$  et correspond donc à  $M_L(\epsilon)$ .

(c) Que doit donner l'exécution de  $M_L$  sur le ruban ?

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

Le mot  $\epsilon$ , qui correspond au cas  $n = 0$ . Donc la MT  $M_L$  doit accepter le mot, ie. qu'elle s'arrête dans un état accepté  $\odot$ .

(d) Que se passe t'il si on appelle  $M_L(0101)$  ?

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

La MT s'arrête dans un état rejet  $\otimes$ .

**Q6. (4pt)** Donnez les transitions de la MT  $M_L$ .

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow q_0 \xrightarrow{\$ : R} q_1 \xrightarrow{0 : R} q_1 \xrightarrow{1 : L} q_2 \xrightarrow{0/\#} q_3 \xrightarrow{M_{dec}} q_4 \xrightarrow{\#/\square : L} q_5 \xrightarrow{1/\square : L} q_6 \xrightarrow{1 : L} q_6 \xrightarrow{0} q_2 \\
 q_1 \xrightarrow{\square} \odot \quad q_2 \xrightarrow{\$} \otimes \quad q_5 \xrightarrow{\$} \odot \quad q_5 \xrightarrow{0} \otimes
 \end{array}$$

**Q7. (3pt)** Supposons que votre MT démarre dans la configuration suivante :

$$q_{initial} = q_0 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \square \infty \\ \hline \end{array}$$

Donnez l'état du ruban la première fois que l'exécution de votre MT passe dans chaque état.

\_\_\_\_\_ SOLUTION \_\_\_\_\_

$$\begin{array}{l}
 q_0 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_1 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_2 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_3 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & \# & 1 & \dots & 1 & 1 & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_4 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \# & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_5 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \square & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_6 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \square & \square & \square \infty \\ \hline \end{array} \\
 q_2 : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & \square & \$ & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \square & \square & \square \infty \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$