NOM .... PRÉNOM .... GROUPE ......

MCAL MT – DS – Sujet B

Durée : 1h30, sans document

- Si vous répondez sur le sujet, n'oubliez pas d'indiquer **Nom et Prénom** sur le sujet puis glissez le dans votre copie à la fin de l'épreuve.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles.
- Respectez les notations du cours.
- Le sujet est sur 22.5 points et comporte 4 exercices indépendants.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.

Exercice 1 : Codage des automates (à nombre) d'états fini en machines de Turing (15min, 5 pt)

L'objectif de l'exercice est de simuler un automate (à nombre) d'états fini (AEF) par une machine de Turing à une bande. Le mot ω à reconnaître sera inscrit sur la bande.

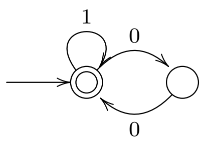
Q1. (0.75 pt) Rappelez la définition de **l'acceptation** d'un mot ω par un AEF. Autrement dit, donnez les conditions à satisfaire pour qu'un mot ω soit accepté par un AEF.

Des exemples d'automates (à nombre) d'états fini. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ pour les automates (à nombre) d'états fini et $\Sigma' = \{\Box, \$, 0, 1\}$ pour les machines de Turing.

Q2. (0.25 pt) On considère le langage L_1 constitué des mots binaires formés d'un nombre quelconque de 1 (éventuellement aucun) et terminés par un 0. Donnez trois mots binaires qui appartiennent au langage L_1 et trois mots binaires qui n'appartiennent pas à L_1.

Q3. (0.5 pt) Donnez un AEF A_1 qui reconnaît le langage L_1.

Q4. (0.25 pt) Décrivez en français le langage reconnu par l'AEF A_2 =



Q5. (0.25 pt) Donnez la traduction en MT d'une transition $q \xrightarrow{\ell} q'$ d'un AEF A.

Q6. (1 pt) Donnez les transitions de MT qui traduisent **(a)** l'effet d'un état accepteur q de l'AEF, et **(b)** l'effet d'un état non-accepteur q de l'AEF.

Q7. (1 pt) Donnez la MT M_2 équivalente à l'AEF A_2, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_2.

Q8. (1 pt) Donnez la MT M_1 équivalente à l'AEF A_1, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_1.

Exercice 2 : Machines de Turing à 3.. 2.. 1 bande(s) (30min, 7 pt)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, \$, 1, 0, \S\}$. Le symbole § servira de marqueur. On s'intéresse à l'opération $S : \{0,1\}^* \to 1^*0^*$ qui prend en paramètre un mot binaire $\omega \in \{0,1\}^*$ et range tous les 1 du mot avant les 0.

Exemple : $S(000111) = 111000$ et $S(10101) = 11100$ et $S(\epsilon) = \epsilon$

Le but de cet exercice est de réaliser l'opération S de trois façons : avec une MT à 3 bandes (B_1, B_2, B_3), puis à 2 bandes (B_1, B_2), puis à une seule bande (B_1). Au départ le mot ω est inscrit sur la bande B_1 ; les autres bandes contiennent juste un \$; la tête de lecture/écriture de chaque bande est positionnée sur le \$. À la fin de l'exécution, la bande B_1 doit contenir le mot $S(\omega)$.

Indication : On indiquera devant l'action $\ell/e : d$ le numéro de la bande concernée. Les transitions qui ont des actions simultanées sur plusieurs bandes seront notées : $(q) \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ (2)\ell_2/e_2:d_2\ (3)\ell_3/e_3:d_3} (q')$.
Si une transition n'a pas d'action sur la bande B_2, on ne décrit pas d'action (2)..., on se contentera d'indiquer les actions sur B_1 et B_3 : $(q) \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ (3)\ell_3/e_3:d_3} (q')$.

Q9. (0.5 pt) Donnez une MT $M_{\overrightarrow{\S}}$ qui recherche le symbole § vers la droite et ramène la tête de lecture/écriture de B_1 sur le §.

Q10. (1 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec une MT M_3 à 3 bandes (B_1, B_2, B_3) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_3(10101)$.

Q11. (1 pt) Donnez les transitions de la MT M_3 à trois bandes qui réalise S.

Q12. (1.25 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_2 à 2 bandes (B_1, B_2) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_2(10101)$.

Q13. (1.25 pt) Donnez les transitions de la MT M_2 à deux bandes qui réalise S.

Q14. (1 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_1 à une bande (B_1) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_1(10101)$.

Q15. (1 pt) Donnez les transitions de la MT M_1 à une bande qui réalise S.

Exercice 3 : Génération de graphes en Gamma (30min, 5.5 pt)

Q16. (1 pt) Exécutez le programme Gamma Γ_1 ci-dessous sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,8)\}\!\!\}$ où $\div$ est la division entière, c'est-à-dire $5 \div 2 = 2$.

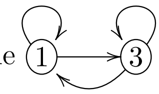
$$\Gamma_1 \stackrel{def}{=} \begin{cases} \textsc{Itv}(x,y) & \xrightarrow{x \le y+1} \quad \textsc{Itv}(x,\ (x+y) \div 2),\quad \textsc{Itv}(1 + (x+y) \div 2,\ y) \\ \textsc{Itv}(x,x) & \longrightarrow \quad \mathrm{N}(x) \end{cases}$$

Q17. (0.5 pt) **(a)** Combien d'applications de règles sont nécessaires avant d'arriver à la stabilité du multi-ensemble ? **(b)** En combien d'étapes[1] atteint-on la stabilité ?

Q18. Généralisation (1 pt) **(a)** Expliquez l'effet du programme Γ_1 sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,n)\}\!\!\}$ où n est un entier > 1. **(b)** En combien d'applications de règles et combien d'étapes obtient-on la stabilité ?

1. une étape = une application en parallèle des règles

Représentation d'un graphe par un multi-ensemble On peut décrire un graphe par l'ensemble de ses arcs. On notera $\text{Arc}(i, j)$ un arc entre le nœud i et le nœud j.

Q19. (0.5 pt) **(a)** Donnez le multi-ensemble correspondant au graphe  et **(b)** dessinez le graphe correspondant au multi-ensemble $\{\!|\text{Arc}(1,1), \text{Arc}(2,3)|\!\}$

Q20. (1.25 pt) On considère un multi-ensemble $\mathcal{M}$ qui contient des nœuds $\text{N}(i)$ numérotés de 1 à n. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}$ et de l'atome $G(p) \in \mathcal{M}$ – construit un graphe à *exactement* p arcs *différents* entre des nœuds de $\mathcal{M}$.

> **Indication :** L'atome $G(..)$ de $\mathcal{M}$ qui sert à contrôler l'arrêt de la réaction.

Q21. (1.25 pt) Notre but est d'adapter le programme précédent pour garantir qu'on construit un **graphe connexe** c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de sous-graphes disjoints[2]. Cette fois on commence avec un atome $G'(p)$ dans un multi-ensemble $\mathcal{M}'$ de nœuds primés, notés $\text{N}'(i)$ pour indiquer qu'il ne font pas partie du graphe connexe. L'idée est de changer un noeud $\text{N}'(i)$ en $\text{N}(i)$ lorsqu'il se trouve connecté au graphe. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}'$ et de l'atome $G'(p)$ – construit un *graphe connexe* à exactement p arcs différents entre des nœuds de $\mathcal{M}'$.

Exercice 4 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable (15min, 5.5 pt)

Q22. Complétez (1 pt) On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e ....
de .... à un argument .... , c'e
.... associent un .... : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid$ ....$\}$.
Considérons un .... P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il e .... par un tableau $[0...\mathbb{N}[$ qui indique pour chaque entier i la valeur .... $P(i)$ associée.

Q23. (0.75 pt) Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

Q24. (0.75 pt) Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

Q25. Complétez la preuve (3 pt) On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e
d'une preuve par .... :

> S.................................... que l'ensemble $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e .... avec $\mathbb{N}$. Alors il existe une .... entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, ... le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger .... le $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ à la manière de George .... en plaçant sur la .... ℓ le .... du prédicat .... On peut donc re $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son .... de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

2. Un nœud $\text{N}(i)$ sans arc ne constitue pas un graphe.

Considérons la .... du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient .... prédicat $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{def}{=}$ .... doit .... tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc P................

Exemple : Le prédicat P correspond à la .... de la .... du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \ldots,\ P(1) = \ldots,\ P(2) = \ldots,\ P(3) = \ldots, \textit{etc}$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) =$ .... puisque ....; mais, par ailleurs,

$P(\ell) =$ .... par .... : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ .... , on aboutit à .... , donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ....

.