MCAL/MT - série 3 - (1 TD)
Ensemble non-dénombrable et Programmation chimique

Exercice 1 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable

Q1. Complétez On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e
prédicat
booléen : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid i \in \mathbb{N},\ P(i) \in \mathbb{B}\}$. Considérons un prédicat P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il e complètement défini par un tableau $[0...\mathbb{N}[$ qui indique pour chaque entier i la valeur booléene $P(i)$ associée.

Q2. Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

SOLUTION

$$
\begin{array}{lcclll}
 & \mathbb{N} & \to & \mathbb{B} & & \\
P_0 : & i & \mapsto & \mathbb{F} & & \textit{la fonction constante, qui vaut toujours faux} \\
P_1 : & i & \mapsto & \mathbb{V} & & \textit{la fonction constante, qui vaut toujours vrai} \\
P_2 : & i & \mapsto & i \stackrel{?}{=} 0 & & \textit{le test de nullité} \\
P_3 : & i & \mapsto & i \mathbin{mod} 2 \stackrel{?}{=} 0 & & \textit{le test de parité}
\end{array}
$$

Q3. Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

SOLUTION

$\mathbb{N} =$	0	1	2	3	4	5	...
P_0	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_1	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	...
P_2	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_3	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	...

Q4. Complétez la preuve On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e
preuve par contradiction :

Suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e
$\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, associe le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger tous le $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$
à la manière de George ℓ le
P_ℓ. On peut donc re $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son numéro de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la diagonale du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient tous le $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(P_i(i))$ doit apparaître dans le tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc $P = P_\ell$.

> **Exemple :** Le prédicat P correspond à la négation de la diagonale du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait
>
> $$P(0) = \mathbb{V},\ P(1) = \mathbb{F},\ P(2) = \mathbb{V},\ P(3) = \mathbb{V}, \textit{etc}$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) = \ \ P_\ell(\ell)$ *puisque* $P = P_\ell$ *; mais, par ailleurs,*

$P(\ell) = \neg(P_\ell(\ell))$ *par définition de* P : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ dénombrable, on aboutit à une contradiction, donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ n'e

Exercice 2 : Génération de graphes en Gamma

Q5. Exécutez le programme Gamma Γ_1 ci-dessous sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,8)\}\!\!\}$ où $\div$ est la division entière, c'est-à-dire $5 \div 2 = 2$.

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \textsc{Itv}(x,y) \xrightarrow{x \leq y+1} \textsc{Itv}(x,\ (x+y) \div 2),\ \ \textsc{Itv}(1+(x+y) \div 2,\ y) \\ \textsc{Itv}(x,x) \longrightarrow \mathrm{N}(x) \end{cases}$$

SOLUTION

étape 1. $\textsc{Itv}(1,8) \to \textsc{Itv}(1,4),\ \textsc{Itv}(5,8)$
étape 2. $\textsc{Itv}(1,4) \to \textsc{Itv}(1,2),\ \textsc{Itv}(3,4)$
étape 2. $\textsc{Itv}(5,8) \to \textsc{Itv}(5,6),\ \textsc{Itv}(7,8)$
étape 3. $\textsc{Itv}(1,2) \to \textsc{Itv}(1,1),\ \textsc{Itv}(2,2)$
étape 3. $\textsc{Itv}(3,4) \to \textsc{Itv}(3,3),\ \textsc{Itv}(4,4)$
étape 3. $\textsc{Itv}(5,6) \to \textsc{Itv}(5,5),\ \textsc{Itv}(6,6)$
étape 3. $\textsc{Itv}(7,8) \to \textsc{Itv}(7,7),\ \textsc{Itv}(8,8)$
étape 4. $\textsc{Itv}(1,1) \to \mathrm{N}(1),\ \ \textsc{Itv}(2,2) \to \mathrm{N}(2),\ \ldots,\ \textsc{Itv}(8,8) \to \mathrm{N}(8)$

Q6. **(a)** Combien d'applications de règles sont nécessaires avant d'arriver à la stabilité du multi-ensemble ? **(b)** En combien d'étapes[1] atteint-on la stabilité ?

SOLUTION

On applique 7 fois la première règle et 8 fois la seconde. On atteint la stabilité en 4 étapes.

Q7. Généralisation **(a)** Expliquez l'effet du programme Γ_1 sur le multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Itv}(1,n)\}\!\!\}$ où n est un entier > 1. **(b)** En combien d'applications de règles et combien d'étapes obtient-on la stabilité ?

SOLUTION

Il produit le multi-ensemble constitué des entiers de 1 à n *annotés par le constructeur* N. *On obtient* $\{\!\!\{\mathrm{N}(1), \ldots,\ \mathrm{N}(n)\}\!\!\}$ *en ? ? ? applications de la première règle et* n *applications de la seconde règle, le tout en* $1 + \log_2(n)$ *étapes.*

1. une étape = une application en parallèle des règles

Représentation d'un graphe par un multi-ensemble On peut décrire un graphe par l'ensemble de ses arcs. On notera $\textsc{Arc}(i,j)$ un arc entre le nœud i et le nœud j.

Q8. **(a)** Donnez le multi-ensemble correspondant au graphe $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r] & 3 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$ et **(b)** dessinez le graphe correspondant au multi-ensemble $\{\!\!\{\textsc{Arc}(1,1), \textsc{Arc}(2,3)\}\!\!\}$

SOLUTION

$$G \simeq \{\!\!\{\textsc{Arc}(1,1), \textsc{Arc}(1,3), \textsc{Arc}(3,1), \textsc{Arc}(3,3)\}\!\!\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{M} \simeq \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] & 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

Q9. On considère un multi-ensemble $\mathcal{M}$ qui contient des nœuds $\mathrm{N}(i)$ numérotés de 1 à n. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}$ et de l'atome $G(p) \in \mathcal{M}$ – construit un graphe à *exactement* p arcs *différents* entre des nœuds de $\mathcal{M}$.

Indication : L'atome $G(..)$ de $\mathcal{M}$ qui sert à contrôler l'arrêt de la réaction.

SOLUTION

$$\begin{cases} \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p) \xrightarrow[(1)]{p>0} \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ \textsc{Arc}(i,j),\ \underbrace{G(p-1)}_{ou\ G((p-1)\div 2),\ G(p\div 2)} \\ \textsc{Arc}(i,j),\ \textsc{Arc}(i,j) \xrightarrow[(2)]{} \textsc{Arc}(i,j),\ G(1) \end{cases}$$

La version $G(p-1)$ est séquentielle et donne un algorithme en p étapes ; tandis que la version $G((p-1)\div 2)$, $G(p \div 2)$ est parallèlle et permet d'obtenir un algorithme en $\log_2(p)$ étapes.

Q10. Notre but est d'adapter le programme précédent pour garantir qu'on construit un **graphe connexe** c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de sous-graphes disjoints [2]. Cette fois on commence avec un atome $G'(p)$ dans un multi-ensemble $\mathcal{M}'$ de nœuds primés, notés $\mathrm{N}'(i)$ pour indiquer qu'il ne font pas partie du graphe connexe. L'idée est de changer un noeud $\mathrm{N}'(i)$ en $\mathrm{N}(i)$ lorsqu'il se trouve connecté au graphe. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}'$ et de l'atome $G'(p)$ – construit un *graphe connexe* à exactement p arcs différents entre des nœuds de $\mathcal{M}'$.

SOLUTION

On conserve les deux règles du programme précédent. La règle (3) permet de créer un nœud initial dans le graphe ; elle ne s'applique qu'une fois puisqu'elle transforme l'atome G' en G utilisé par les autres règles. La règle (4) permet d'ajouter un nœud $\mathrm{N}(j)$, non connecté, dans le graphe.

$$\begin{cases} \mathrm{N}'(i), G'(p) \xrightarrow[(3)]{p>0} \mathrm{N}(i),\ G(p) \\ \mathrm{N}'(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p) \xrightarrow[(4)]{p>0} \mathrm{N}'(i),\ \mathrm{N}'(j),\ \textsc{Arc}(i,j),\ G((p-1)\div 2),\ G(p \div 2) \end{cases}$$

Exercice 3 : Machines de Turing à 3.. 2.. 1 bande(s)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, \$, 1, 0, \S\}$. Le symbole § servira de marqueur. On s'intéresse à l'opération $S : \{0,1\}^* \to 1^*0^*$ qui prend en paramètre un mot binaire $\omega \in \{0,1\}^*$ et range tous les 1 du mot avant les 0.

Exemple : $S(000111) = 111000$ et $S(10101) = 11100$ et $S(\epsilon) = \epsilon$

Le but de cet exercice est de réaliser l'opération S de trois façons : avec une MT à 3 bandes (B_1, B_2, B_3), puis à 2 bandes (B_1, B_2), puis à une seule bande (B_1). Au départ le mot ω est inscrit sur la bande B_1 ; les autres bandes contiennent juste un \$; la tête de lecture/écriture de chaque bande est positionnée sur le \$. À la fin de l'exécution, la bande B_1 doit contenir le mot $S(\omega)$.

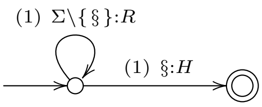
2. Un nœud $\mathrm{N}(i)$ sans arc ne constitue pas un graphe.

Indication : On indiquera devant l'action $\ell/e : d$ le numéro de la bande concernée. Les transitions qui ont des actions simultanées sur plusieurs bandes seront notées : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ (2)\ell_2/e_2:d_2\ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.

Si une transition n'a pas d'action sur la bande B_2, on ne décrit pas d'action $(2)\ldots$, on se contentera d'indiquer les actions sur B_1 et B_3 : $q \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ (3)\ell_3/e_3:d_3} q'$.

Q11. Donnez une MT $M_{\overrightarrow{\S}}$ qui recherche le symbole § vers la droite et ramène la tête de lecture/écriture de B_1 sur le §.

SOLUTION



Q12. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec une MT M_3 à 3 bandes (B_1, B_2, B_3) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_3(10101)$.

SOLUTION

1. *Au départ les tête de lecture/écriture de B_1, B_2 et B_3 sont placées sur le \$*
2. *On parcourt B_1 de la gauche vers la droite : lorsqu'on rencontre un 0, on le recopie sur B_2 ; lorsqu'on rencontre un 1, on le recopie sur B_3. On inscrit un § à la fin du mot ω sur B_1. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$10101\Box} \quad B_2 = \$0\underset{\uparrow}{0} \quad B_3 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

3. *On recopie B_2 sur B_1 en se déplaçant vers la gauche. Au passage on efface B_2. On obtient*

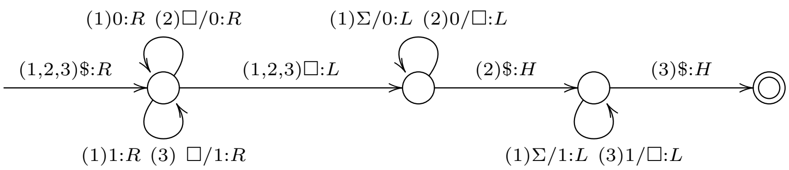
$$B_1 = \$10\underset{\uparrow}{1}00 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$} \quad B_3 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

4. *On recopie B_3 sur B_1 en se déplaçant vers la gauche. Au passage on efface B_3. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}11100 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$} \quad B_3 = \underset{\uparrow}{\$}$$

Q13. Donnez les transitions de la MT M_3 à trois bandes qui réalise S.

SOLUTION

$M_3 =$ 

Q14. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_2 à 2 bandes (B_1, B_2) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_2(10101)$.

SOLUTION

1. *Au départ les tête de lecture/écriture de B_1 et B_2 sont placées sur le \$*
2. *On parcourt B_1 de la gauche vers la droite, lorsqu'on rencontre un 0, on le recopie sur B_2. On inscrit un § à la fin du mot ω sur B_1.*

$$B_1 = \$10101\underset{\uparrow}{\S} \quad B_2 = \$0\underset{\uparrow}{0}$$

3. *On lit B_2 de droite à gauche et on recopie les 0 de B_2 sur B_1 au-delà du §. Au passage on efface B_2. On se replace sur § de B_1. On obtient*

$$B_1 = \$10101\underset{\uparrow}{\S}00 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$}$$

4. *On parcours B_1 de droite à gauche et on écrit les 1 qu'on rencontre sur B_2. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}10101\S00 \quad B_2 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

5. *On se replace sur § de B_1. Au passage on efface B_1, y compris le \$. On obtient*

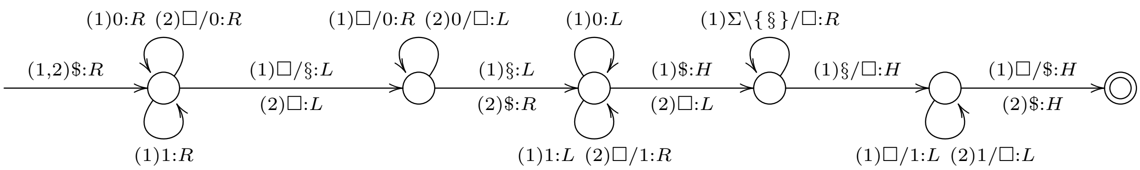
$$B_1 = \underset{\uparrow}{\S}00 \quad B_2 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

6. *On recopie B_2 sur B_1 sur § puis vers la gauche. Lorsqu'on s'arrête, on inscrit \$ sur B_1. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}11100 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$}111$$

Q15. Donnez les transitions de la MT M_2 à deux bandes qui réalise S.

SOLUTION

$M_2 =$ 

Q16. **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_1 à une bande (B_1) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_1(10101)$.

SOLUTION

1. *Au départ la tête de lecture/écriture est sur \$*
2. *On parcourt B_1 vers la droite à la recherche d'un 0 qu'on remplace par §.*
3. *On parcourt B_1 vers la droite à la recherche d'un 1 qu'on remplace par le 0 qu'on a supprimé. Si on arrive sur □ sans avoir rencontré de 1, on passe à l'étape 5.*
4. *On parcourt B_1 vers la gauche à la recherche du § qu'on remplace par le 1 qu'on vient de supprimer. On reprend à l'étape 2.*
5. *On parcourt B_1 vers la gauche à la recherche du § qu'on remplace par 0 et on s'arrête.*

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1 & B_1 = \$10101 \\
 & \quad\;\;\;\;\uparrow \\
2 & B_1 = \$1\S101 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
3 & B_1 = \$1\S001 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
4 & B_1 = \$11001 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
2 & B_1 = \$11\S01 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
3 & B_1 = \$11\S00 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
4 & B_1 = \$11100 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
2 & B_1 = \$111\S0 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
3 & B_1 = \$111\S0\square \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\uparrow \\
5 & B_1 = \$11100 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\uparrow
\end{array}
$$

Q17. Donnez les transitions de la MT M_1 à une bande qui réalise S.

SOLUTION