MCAL/MT - Indécidabilité de la terminaison de la réécriture (1 TD)

Exercice 1 : Terminaison de programmes GAMMA

On considère divers programmes GAMMA dont on va étudier la terminaison. Pour chacun d'eux donnez

1. un ensemble de départ telle que l'exécution qui termine
2. un ensemble de départ telle que l'exécution qui ne termine pas

Lorsque l'un est impossible, expliquez pourquoi.

Donnée manipulées Les programmes suivantes opèrent sur des constructeurs à un arguments A(.) et B(.) et un constructeur sans argument O qui correspondent au type CAML :

```
type data = O | A of data | B of data
```

Q1. Donnez 5 éléments de type `data`.

Q2. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_1 \stackrel{def}{=} \quad \mathrm{A}(\mathrm{O}) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{B}(\mathrm{O}) \;\; || \;\; \mathrm{B}(x) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

Q3. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_3 \stackrel{def}{=} \quad \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(\mathrm{B}(x)) \;\; || \;\; \mathrm{B}(\mathrm{A}(x)) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

Q4. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_4 \stackrel{def}{=} \quad \mathrm{A}(\mathrm{B}(x)) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{B}(\mathrm{B}(x)) \;\; || \;\; \mathrm{B}(\mathrm{B}(x)) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

Q5. Donnez un programme constitué d'une seule règle qui ne termine jamais quel que soit le multi-ensemble de départ ...

(a) Γ_{5a} fait grandir le multi-ensemble

(b) Γ_{5b} fait grandir l'élément mais pas le multi-ensemble

Q6. Étudiez la terminaison du programme $\Gamma_6 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x)$

Q7. Ajoutez une règle au programme Γ_6 afin qu'il termine pour tout multi-ensemble de départ

Q8. Étudiez la terminaison du programme $\Gamma_7 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \;\; || \;\; \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_2]{} \_$

Exercice 2 : Réduction du PCP au problème de terminaison d'un programme Gamma (40min, 6.5 pt)

Le but de cet exercice est de démontrer que la terminaison d'un programme Gamma est un problème indécidable. Pour le prouver on va réduire le Problème de Correspondance de Post (PCP) – connu pour être indécidable – au problème de la terminaison de programmes Gamma.

Problèmes de Correspondance de Post et exécutions de programmes Gamma (20min, 3.5 pt)

On considére l'alphabet $\{ a, c, f, i, \ell \}$ et ε désigne le mot vide (*ie.* le "" des chaînes de caractères).

Q9. (0.25 pt) **Complétez :** *Soit D un ensemble de domino* PCP(D) *e* .... *de domino* D *telle que* .... *obtenu par concaténation* .... *de* .... *au* .... *obtenu par concaténation* .... *de domino*

Exemple : Considérons l'ensemble de dominos $D_1 = \left\{ \underset{d_1}{\boxed{\frac{f}{fac}}}, \underset{d_2}{\boxed{\frac{i\ell}{i\ell}}}, \underset{d_3}{\boxed{\frac{ac}{\varepsilon}}} \right\}$. La séquence $d_1.d_3.d_2$ est une solution puisqu'on obtient .... en haut et .... en bas. La séquence réduite à ..... est aussi une solution puisqu'on obtient .... en haut et en bas.

Exécutions de programmes Gamma On considére les constructeurs Gamma suivants A(.), I(.), C(.), F(.), L(.) qui prennent tous un argument, ainsi qu'un constructeur Gamma sans argument (*ie.* une constante) ε.
À l'aide des constantes et constructeurs précédents on peut représenter les mots écrits sur l'alphabet $\Sigma = \{ a, c, f, i, \ell \}$. On désigne par $[\ \omega\ ]_\Gamma$ la représentation en Gamma d'un mot $\omega \in \Sigma^*$.

Q10. (0.25 pt) Donnez la représentation en Γ du mot *facil* : $[\ faci\ell\ ]_\Gamma =$

Q11. (0.25 pt) Donnez l'exécution du programme Gamma Γ_{D_1} ci-dessous sur l'ensemble réduit à l'élément $\mathrm{G}(\ [\ faci\ell\ ]_\Gamma\ ,\ [\ faci\ell\ ]_\Gamma\ )$

$$\Gamma_{D_1} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{G}(\ \mathrm{F}(x)\ ,\ \mathrm{F}(\mathrm{A}(\mathrm{C}(y)))\ ) & \xrightarrow[r_1]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \\ \mathrm{G}(\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(x))\ ,\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(y))\ ) & \xrightarrow[r_2]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \\ \mathrm{G}(\ \mathrm{A}(\mathrm{C}(x))\ ,\ y\ ) & \xrightarrow[r_3]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \end{array} \right.$$

Q12. (0.25 pt) Donnez l'exécution du programme Γ_{D_1} sur l'ensemble réduit à l'élément $\mathrm{G}(\ [\ acfaci\ell\ ]_\Gamma\ ,\ [\ acfaci\ell\ ]_\Gamma\ )$

Q13. (0.5 pt) On souhaite ajouter une règle (r_0) au programme Γ_{D_1} afin qu'il **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $\mathrm{G}(\ [\ faci\ell\ ]_\Gamma\ ,\ [\ faci\ell\ ]_\Gamma\ )$. Complétez la régle ($r_0$).

$$\mathrm{G}(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ) \xrightarrow[r_0]{} \mathrm{G}(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ )$$

Généralisation Dans les questions précédentes on a raisonné sur *la solution « $faci\ell$ »* du PCP(D_1) ; on veut maintenant généraliser le raisonnement à toute solution du PCP(D_1).

Q14. (1 pt) En vous inspirant fortement du programme Γ_{D_1} donnez un programme Γ'_{D_1} qui **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $\mathrm{G}'(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ [\ \omega\ ]_\Gamma\ )$ quel que soit le mot ω correspondant à une solution du PCP(D_1). Pour cela on utilise un constructeur $\mathrm{G}'(\ .\ ,\ .\ ,\ .\ )$ à trois arguments au lieu de $\mathrm{G}(\ .\ ,\ .\ )$.

Programme Gamma associé à un PCP : application à un autre ensemble de dominos

Q15. (0.5 pt) Donnez une séquence de dominos de l'ensemble D_2 ci-dessous qui soit une solution du PCP(D_2) et donnez le mot correspondant à cette solution.

$$D_2 = \left\{ \underset{d_1}{\boxed{\frac{ia}{a}}}, \underset{d_2}{\boxed{\frac{acc}{ci}}}, \underset{d_3}{\boxed{\frac{f}{fac}}} \right\}$$

Q16. (0.5 pt) Donnez un programme Γ'_{D_2} qui **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $G'(\,\varepsilon\,,\,\varepsilon\,,\,[\,\omega\,]_\Gamma\,)$ où ω est le mot correspondant à une solution du problème PCP(D_2).

Indécidabilité de la terminaison de programmes Gamma (20min, 3 pt)

- On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de tous les ensembles de dominos possibles sur l'alphabet Σ. Ainsi, $D \in \mathscr{D}$ est un ensemble de dominos.
- PCPSAT désigne l'ensemble des ensembles D de dominos pour lesquels PCP(D) a une solution. Autrement dit, $D \in$ PCPSAT si et seulement si PCP(D) admet une solution.
- *Gamma* désigne l'ensemble de tous les programmes Gamma possibles.
- On note GTT l'ensemble de programmes $\Gamma \in \mathcal{G}amma$ dont l'exécution se termine quel que soit l'ensemble E sur lequel on l'exécute. Autrement dit, $\Gamma \in$ GTT signifie que Γ termine toujours.

$$\text{GTT} = \{\Gamma \in \mathcal{G}amma \mid \forall E,\ \Gamma(E) \not\to \infty\} \quad \textit{et} \quad \overline{\text{GTT}} = \mathcal{G}amma \setminus \text{GTT}.$$

Q17. (0.25 pt) **Complétez :** $\Gamma \in \overline{\text{GTT}}$ signifie qu' .... ensemble E tel que $\Gamma(E)$........... autrement dit l'exécution de Γ sur E ....

Q18. (0.25 pt) **Complétez le diagramme de réduction et les « on doit montrer »**

$$\begin{array}{ccc}
D \in \mathscr{D} & \xrightarrow[\textit{traduction}]{M_R} & \Gamma'_D \in \mathcal{G}amma \\
\underbrace{D \in \text{PCPSAT}} & \underset{(\ddagger)}{\ldots\ldots\ldots} & \underbrace{\Gamma'_D \in \ \ldots\ldots\ldots} \\
\textit{indécidable} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Pour montrer l'indécidabilité de la terminaison de programmes Gamma que doit-on faire ?

(a) On doit montrer qu'il .... tout ensemble de domino D en un programme Γ'_D

(b) On doit montrer .... ($\ddagger$).

Q19. (0.5 pt) **(a) Complétez la définition de la traduction**

Un domino $\boxed{\frac{u}{v}} \in D$ peut être vu comme un .... que l'on peut inscrire sur la bande 1 d'une MT. Un ensemble D de domino re ....

....

. Il e MT M_R à .... qui effectue la .... : elle parcourt le chaque domino d_i re (u, v), elle inscrit la règle Gamma .... $\xrightarrow[r_i]{}$ .... sur la bande 2.

On ajoute ensuite à la bande 2, la règle (r_0); ainsi la bande 2 contient le programme Γ'_D tel qu'on l'a défini dans la première partie de cet exercice.

Q20. (0.5 pt) **(b) Complétez la preuve de** (‡)

($\Rightarrow$) On doit montrer que si $D \in$ PCPSAT alors le programme Γ'_D construit par $M_R(D)$ .... Il suffit donc de trouver un ensemble E sur lequel l'exécution de Γ'_D .... Puisque $D \in$ PCPSAT, le problème PCP(D) .... ; notons ω le mot corre montré dans la première partie de l'exercice que Γ'_D .... si on l'exécute sur l'ensemble .... Il suffit donc de prendre cet ensemble pour E.

Q21. (0.5 pt) **(b) Complétez la preuve de** (‡)

($\Leftarrow$) Montrons la .... : On doit montrer que si .... tel que $\Gamma'_D(E)$ .... alors il existe une solution au PCP(D) (et donc $D \in$ PCPSAT).

À l'exce (r_0), toute Γ'_D appliquée G′($\omega_1, \omega_2, \omega$) font .... le mot ω_1 ou le mot ω_2 (ou le d'appliquer ce .... fois. Ainsi, si $\Gamma_D(E)$ a une exécution infinie il e .... régulièrement car c'e .... le ω_1 et ω_2. Une exécution infinie contient donc .... applications .... Elle aura donc forcément la forme $\ldots \xrightarrow[r_0]{}$ G′(....., ..., ...) $\xrightarrow[r_{i_1}]{} \ldots \xrightarrow[r_{i_k}]{}$ G′($\epsilon, \epsilon, \omega$) $\xrightarrow[r_0]{} \ldots$

On constate sur cette portion d'exécution que le $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ consomment .... le ω. Puisque chacune .... domino cela signifie que .... solution au PCP(D).

Q22. (0.5 pt) **Complétez la conclusion :** On a montré par réduction que la terminaison de programmes Gamma est indécidable.

SUPPOSONS LE CONTRAIRE ET MONTRONS UNE CONTRADICTION : Suppo existe un algorithme capable de décider .... alors on pourrait savoir si un .... solution. Pour cela, étant donné un .... il suffirait de construire le programme .... au moyen de .... e

- si ....
  alors .... solution
- s'il existe ....
  alors .... solution

On serait donc capable de .... le

Po CONTRADICTION.