Modèles de Calcul
Contrôle Continu - Machines de Turing
L3 Informatique

14/04/2014

Durée : 1h30 sans document.

1 Questions de cours

Q.1 Enoncez le théorème du point fixe. Donnez une application de ce théorème.

Réponse :

Pour toute fonction f récursive totale, il existe x tel que

$$\forall y. \varphi_x(y) = \varphi_{f(x)}(y)$$

Application : Tout compilateur qui termine est au moins correct sur une entrée.

Q.2 Montrez que l'ensemble $K = \{x \mid \varphi_x(x)\} \downarrow$ est récursivement énumérable mais n'est pas décidable.

Réponse :

Par contradiction en utilisant une diagonalisation.

Supposons que la fonction k décide K. Comme k est une fonction dans R la fonction suivante Ψ est programmable par MT:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } k(x) = 0 \\ \uparrow & \textbf{sinon} \end{cases}$$

En effet pour caculer $\Psi(x)$ il suffit de calculer $k(x)$ si le résultat est 0 on répond 1 sinon on fait boucler la machine. Il existe donc un entier n tel que $\varphi_n(x) = \Psi(x)$. Que vaut $\varphi_n(n)$?

- **Si $\varphi_n(n) = 1$ alors par définition $k(n) = 0$ et n n'est pas dans K ce qui contredit le fait que $\varphi_n(n) = 1$.**
- **Si $\varphi_n(n)$ diverge alors cela signifie que $k(n) = 1$ et donc que n est dans K ce qui est contradictoire également.**

Les deux résultats étant impossibles il n'est pas possible que K soit décidable.

2 Programmation des Machines de Turing

Q.3 Programmez une MT, M telle que $\Psi^2_M(x,y) = max(x,y)$.

Réponse :

L'idée est de retirer par les bords extérieurs les barres qui forment les arguments x et y en remplaçant les barres $|$ par des barres $\not|$. Une fois qu'un des deux arguments passe à 0 (ce que l'on repère par le fait que le blanc de séparation est suivi d'un symbole $\not|$) il faut retirer une barre à l'argument restant (car au départ la bande contient $x+1$ barres suivies d'un blanc et de $y+1$ barres) puis transformer tous les $\not|$ (on notera qu'il n'est pas nécessaire de transformer les $\not|$ de l'autre argument car le résultat est le nombre de $|$ sur la bande). Cela donne l'ensemble de quadruplets suivants :

$$\begin{array}{llll}
(q0, |, \not|, q^{\rightarrow}) & (q^{L\rightarrow}, |, R, q^{L\rightarrow}) & (q^{L\rightarrow}, B, R, q^{R\rightarrow}) & \\
(q^{R\rightarrow}, |, R, q^{R\rightarrow}) & (q^{R\rightarrow}, \not|, L, q^{Ref}) & (q^{R\rightarrow}, B, L, q^{Ref}) & (q^{Ref}, |, \not|, q^{R\leftarrow}) \\
(q^{Ref}, B, L, q_{finx}) & (q^{R\leftarrow}, |, L, q^{R\leftarrow}) & (q^{R\leftarrow}, B, L, q_{tx}) & (q_{tx}, \not|, R, q_{finy}) \\
(q_{tx}, |, L, q^{L\leftarrow}) & (q^{L\leftarrow}, |, L, q^{L\leftarrow}) & (q^{L\leftarrow}, \not|, R, q0) &
\end{array}$$

3 Calculabilité

Q.4 Etant données deux fonctions récursives totales $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ et $g : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$. Est-il possible de construire une machine de Turing M telle que $\psi^{(1)}_M = f$ et $\psi^{(2)}_M = g$? Justifiez précisément votre réponse.

Réponse : Soit M_f, M_g les machines qui calculent respectivement f et g. La machine M est définie comme suit : il suffit de compter les arguments, s'il y en a deux on lance M_g sinon on lance M_f. Cela se fait avec les quadruplets suivants :

$$\begin{array}{llll}
(q_0, 1, R, q_0) & (q_0, B, R, q_2?) & (q_2?, 1, L, q'_f) & (q_2?, B, L, q'_g) \\
(q'_f, B, L, q_f) & (q_f, 1, L, q_f) & (q_f, B, R, q^f_0) & \\
(q'_g, B, L, q_g) & (q_g, 1, L, q_g) & (q_g, B, R, q^g_0) &
\end{array}$$

en notant respectivement q^f_0, q^g_0 les états initiaux des machines f et g. On ajoute également tous les quadruplets de M_f et M_g pour compléter le programme de M.

Q.5 Maintenant supposons que les fonctions f et g de la question précédente soient récursives partielles. Est-il possible de construire une machine de Turing M telle que $\psi^{(1)}_M = f$ et $\psi^{(2)}_M = g$? Justifiez précisément votre réponse.

Réponse :

Le fait que f et g soient récursives partielles ne change rien à la construction précédente. La seule différence est qu'au lieu que M calcule une fonction totale pour un et deux arguments, M sera récursive partielle pour un et deux arguments.

Q.6 Montrez que la fonction suivante est récursive partielle :

$$\Psi(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(y)\downarrow \text{ ou } \varphi_y(z)\downarrow \\ \uparrow & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse :

Pour calculer Ψ il faut lancer la machine x sur y faire un pas de calcul puis lancer la machine y sur z faire un pas de calcul. On alterne les calculs sur les deux machines et si une s'arrête on répond 1 sinon la machine boucle à l'infini.

Q.7 Construisez la fonction g, récursive partielle telle que :

$$\forall x, y \in \mathcal{N}.W_{g(x,y)} = W_x \cup W_z$$

en notant W_x le domaine de φ_x. C'est à dire l'ensemble des valeurs t telles que $\varphi_x(t) \downarrow$.

Réponse :

Modifions légèrement la fonction de la question précédente, on définit Ψ' par :

$$\Psi'(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } \varphi_x(z) \downarrow \textbf{ ou } \varphi_y(z) \downarrow \\ \uparrow & \textbf{sinon} \end{cases}$$

comme nous venons de le voir cette fonction est calculable (même procédure de calcul il suffit juste de changer l'argument qu'on donne à la machine x). Il existe donc un entier n tel que $\varphi_n(x, y, z) = \Psi'(x, y, z)$. Par le théorème s-m-n il existe une fonction totale s_2^1 telle que $\varphi_n(x, y, z) = \varphi_{s_1^2(n,x,y)}(z)$. Posons $g(x, y) = s_1^2(n, x, y)$. il est clair que $\varphi_{g(x,y)}$ converge (en fait répond 1) si et seulement si soit φ_x soit φ_y converge.