NOM .... PRÉNOM .... GROUPE ......

MCAL MT – DS – Sujet B

Durée : 1h30, sans document

— Si vous répondez sur le sujet, n'oubliez pas d'indiquer **Nom et Prénom** sur le sujet puis glissez le dans votre copie à la fin de l'épreuve.

— Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles.

— Respectez les notations du cours.

— Le sujet est sur 22.5 points et comporte 4 exercices indépendants.

— Le barème est donné à titre indicatif.

— Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.

Exercice 1 : Codage des automates (à nombre) d'états fini en machines de Turing (15min, 5 pt)

L'objectif de l'exercice est de simuler un automate (à nombre) d'états fini (AEF) par une machine de Turing à une bande. Le mot ω à reconnaître sera inscrit sur la bande.

Q1. (0.75 pt) Rappelez la définition de **l'acceptation** d'un mot ω par un AEF. Autrement dit, donnez les conditions à satisfaire pour qu'un mot ω soit accepté par un AEF.

SOLUTION

*Un automate A accepte un mot ω si **il existe** une **exécution** de A qui (i) commence dans l'**état initial** de A ; (ii) **consomme toutes** les lettres du mot ; (iii) s'arrête dans un **état accepteur**.*

Des exemples d'automates (à nombre) d'états fini. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ pour les automates (à nombre) d'états fini et $\Sigma' = \{\Box, \$, 0, 1\}$ pour les machines de Turing.

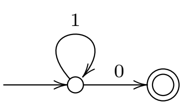
Q2. (0.25 pt) On considère le langage L_1 constitué des mots binaires formés d'un nombre quelconque de 1 (éventuellement aucun) et terminés par un 0. Donnez trois mots binaires qui appartiennent au langage L_1 et trois mots binaires qui n'appartiennent pas à L_1.

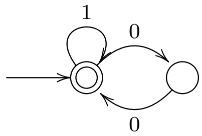
SOLUTION

$$0, 10, 110 \in L$$
$$1, 11, 111 \notin L$$

Q3. (0.5 pt) Donnez un AEF A_1 qui reconnaît le langage L_1.

SOLUTION

$A_1 =$ 

Q4. (0.25 pt) Décrivez en français le langage reconnu par l'AEF $A_2 =$ 

SOLUTION

L'automate A_2 reconnaît l'ensemble des mots binaires formés de combinaisons de 1 et de 0.0. Autrement dit, les mots binaires dans lesquels les 0 apparaissent toujours par deux.

Q5. (0.25 pt) Donnez la traduction en MT d'une transition $q \xrightarrow{\ell} q'$ d'un AEF A.

SOLUTION

$$q \xrightarrow{\ell/\ell:R} q'$$

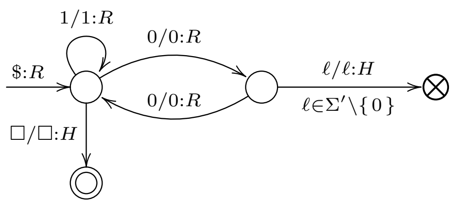
Q6. (1 pt) Donnez les transitions de MT qui traduisent **(a)** l'effet d'un état accepteur q de l'AEF, et **(b)** l'effet d'un état non-accepteur q de l'AEF.

SOLUTION

- *Un état accepteur q de l'AUP est traduit en un état q dans la* MT *à laquelle on ajoute la transition suivante $q \xrightarrow{\square/\square:H} \bigcirc$ qui vérifie qu'on a consommé toutes les lettres de ω.*
- *Les états non-accepteurs q sont laissés tel quel et on ajoute la transition $q \xrightarrow{\ell/\ell:H} \otimes$ sur tous les symboles ℓ pour lequel l'*AEF *n'a pas de transition sortante de q.*

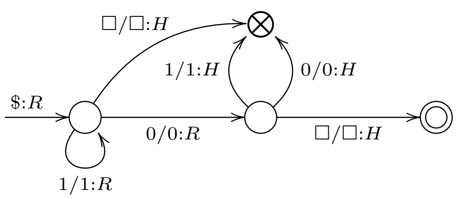
Q7. (1 pt) Donnez la MT M_2 équivalente à l'AEF A_2, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_2.

SOLUTION

$M_2 =$ 

Q8. (1 pt) Donnez la MT M_1 équivalente à l'AEF A_1, c'est-à-dire qu'elle reconnaît le langage L_1.

SOLUTION

$M_1 =$ 

Exercice 2 : Machines de Turing à 3.. 2.. 1 bande(s) (30min, 7 pt)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\square, \$, 1, 0, \S\}$. Le symbole § servira de marqueur. On s'intéresse à l'opération $S : \{0,1\}^* \to 1^*0^*$ qui prend en paramètre un mot binaire $\omega \in \{0,1\}^*$ et range tous les 1 du mot avant les 0.

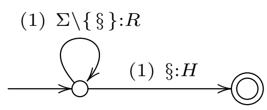
Exemple : $S(000111) = 111000$ et $S(10101) = 11100$ et $S(\epsilon) = \epsilon$

Le but de cet exercice est de réaliser l'opération S de trois façons : avec une MT à 3 bandes (B_1, B_2, B_3), puis à 2 bandes (B_1, B_2), puis à une seule bande (B_1). Au départ le mot ω est inscrit sur la bande B_1 ; les autres bandes contiennent juste un \$; la tête de lecture/écriture de chaque bande est positionnée sur le \$. À la fin de l'exécution, la bande B_1 doit contenir le mot $S(\omega)$.

Indication : On indiquera devant l'action $\ell/e : d$ le numéro de la bande concernée. Les transitions qui ont des actions simultanées sur plusieurs bandes seront notées : $(q) \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ \ (2)\ell_2/e_2:d_2\ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} (q')$.
Si une transition n'a pas d'action sur la bande B_2, on ne décrit pas d'action $(2)\ldots$, on se contentera d'indiquer les actions sur B_1 et B_3 : $(q) \xrightarrow{(1)\ell_1/e_1:d_1\ \ (3)\ell_3/e_3:d_3} (q')$.

Q9. (0.5 pt) Donnez une MT $M_{\overrightarrow{\S}}$ qui recherche le symbole § vers la droite et ramène la tête de lecture/écriture de B_1 sur le §.

SOLUTION



Q10. (1 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec une MT M_3 à 3 bandes (B_1, B_2, B_3) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_3(10101)$.

SOLUTION

1. *Au départ les tête de lecture/écriture de B_1, B_2 et B_3 sont placées sur le \$*
2. *On parcourt B_1 de la gauche vers la droite : lorsqu'on rencontre un 0, on le recopie sur B_2 ; lorsqu'on rencontre un 1, on le recopie sur B_3. On inscrit un § à la fin du mot ω sur B_1. On obtient*

$$B_1 = \$10101\underset{\uparrow}{\square} \quad B_2 = \$0\underset{\uparrow}{0} \quad B_3 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

3. *On recopie B_2 sur B_1 en se déplaçant vers la gauche. Au passage on efface B_2. On obtient*

$$B_1 = \$10\underset{\uparrow}{1}00 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$} \quad B_3 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

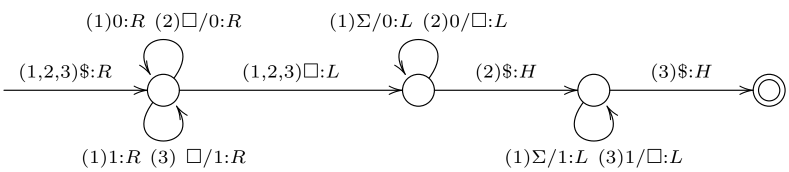
4. *On recopie B_3 sur B_1 en se déplaçant vers la gauche. Au passage on efface B_3. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}11100 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$} \quad B_3 = \underset{\uparrow}{\$}$$

Q11. (1 pt) Donnez les transitions de la MT M_3 à trois bandes qui réalise S.

SOLUTION

$M_3 =$



Q12. (1.25 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_2 à 2 bandes (B_1, B_2) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_2(10101)$.

SOLUTION

1. *Au départ les tête de lecture/écriture de B_1 et B_2 sont placées sur le* \$
2. *On parcourt B_1 de la gauche vers la droite, lorsqu'on rencontre un 0, on le recopie sur B_2. On inscrit un § à la fin du mot ω sur B_1.*

$$B_1 = \$10101\underset{\uparrow}{\S} \quad B_2 = \$0\underset{\uparrow}{0}$$

3. *On lit B_2 de droite à gauche et on recopie les 0 de B_2 sur B_1 au-delà du §. Au passage on efface B_2. On se replace sur § de B_1. On obtient*

$$B_1 = \$10101\underset{\uparrow}{\S}00 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$}$$

4. *On parcours B_1 de droite à gauche et on écrit les 1 qu'on rencontre sur B_2. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}10101\S00 \quad B_2 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

5. *On se replace sur § de B_1. Au passage on efface B_1, y compris le \$. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\S}00 \quad B_2 = \$11\underset{\uparrow}{1}$$

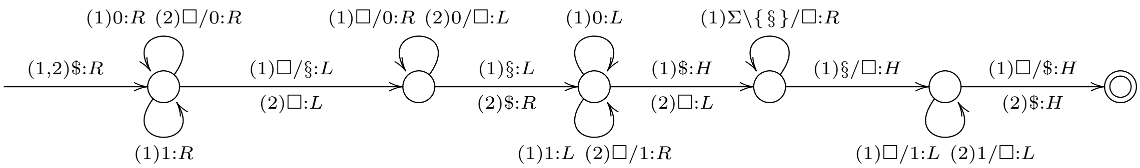
6. *On recopie B_2 sur B_1 sur § puis vers la gauche. Lorsqu'on s'arrête, on inscrit \$ sur B_1. On obtient*

$$B_1 = \underset{\uparrow}{\$}11100 \quad B_2 = \underset{\uparrow}{\$}111$$

Q13. (1.25 pt) Donnez les transitions de la MT M_2 à deux bandes qui réalise S.

SOLUTION

$M_2 =$



Q14. (1 pt) **(a)** Décrivez en français, étape par étape, l'algorithme qui réalise l'opération S avec un MT M_1 à une bande (B_1) et **(b)** donnez l'état des bandes et la position des tête de lecture/écriture à la fin de chaque étape lorsqu'on exécute $M_1(10101)$.

SOLUTION

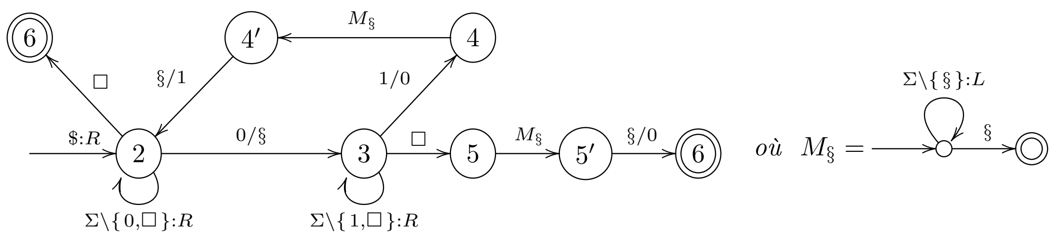
1. *Au départ la tête de lecture/écriture est sur* \$
2. *On parcourt B_1 vers la droite à la recherche d'un 0 qu'on remplace par §.*
3. *On parcourt B_1 vers la droite à la recherche d'un 1 qu'on remplace par le 0 qu'on a supprimé. Si on arrive sur □ sans avoir rencontré de 1, on passe à l'étape 5.*
4. *On parcourt B_1 vers la gauche à la recherche du § qu'on remplace par le 1 qu'on vient de supprimer. On reprend à l'étape 2.*
5. *On parcourt B_1 vers la gauche à la recherche du § qu'on remplace par 0 et on s'arrête.*

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1 & B_1 = \underset{\uparrow}{\$}10101 \\
2 & B_1 = \$1\underset{\uparrow}{\S}101 \\
3 & B_1 = \$1\S\underset{\uparrow}{0}01 \\
4 & B_1 = \$1\underset{\uparrow}{1}001 \\
2 & B_1 = \$11\underset{\uparrow}{\S}01 \\
3 & B_1 = \$11\S0\underset{\uparrow}{0} \\
4 & B_1 = \$11\underset{\uparrow}{1}00 \\
2 & B_1 = \$111\underset{\uparrow}{\S}0 \\
3 & B_1 = \$111\S0\underset{\uparrow}{\square} \\
5 & B_1 = \$111\underset{\uparrow}{0}0
\end{array}
$$

Q15. (1 pt) Donnez les transitions de la MT M_1 à une bande qui réalise S.

SOLUTION



Exercice 3 : Génération de graphes en Gamma (30min, 5.5 pt)

Q16. (1 pt) Exécutez le programme Gamma Γ_1 ci-dessous sur le multi-ensemble $\{\!|\mathrm{I\small TV}(1,8)|\!\}$ où $\div$ est la division entière, c'est-à-dire $5 \div 2 = 2$.

$$
\Gamma_1 \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{lcl}
\mathrm{Itv}(x,y) & \xrightarrow{x \leq y+1} & \mathrm{Itv}(x,\ (x+y)\div 2),\quad \mathrm{Itv}(1+(x+y)\div 2,\ y) \\
\mathrm{Itv}(x,x) & \longrightarrow & \mathrm{N}(x)
\end{array} \right.
$$

SOLUTION

étape 1. $\mathrm{Itv}(1,8) \to \mathrm{Itv}(1,4),\ \mathrm{Itv}(5,8)$
étape 2. $\mathrm{Itv}(1,4) \to \mathrm{Itv}(1,2),\ \mathrm{Itv}(3,4)$
étape 2. $\mathrm{Itv}(5,8) \to \mathrm{Itv}(5,6),\ \mathrm{Itv}(7,8)$
étape 3. $\mathrm{Itv}(1,2) \to \mathrm{Itv}(1,1),\ \mathrm{Itv}(2,2)$
étape 3. $\mathrm{Itv}(3,4) \to \mathrm{Itv}(3,3),\ \mathrm{Itv}(4,4)$
étape 3. $\mathrm{Itv}(5,6) \to \mathrm{Itv}(5,5),\ \mathrm{Itv}(6,6)$
étape 3. $\mathrm{Itv}(7,8) \to \mathrm{Itv}(7,7),\ \mathrm{Itv}(8,8)$
étape 4. $\mathrm{Itv}(1,1) \to \mathrm{N}(1),\quad \mathrm{Itv}(2,2) \to \mathrm{N}(2),\ \ldots,\ \mathrm{Itv}(8,8) \to \mathrm{N}(8)$

Q17. (0.5 pt) **(a)** Combien d'applications de règles sont nécessaires avant d'arriver à la stabilité du multi-ensemble ? **(b)** En combien d'étapes[1] atteint-on la stabilité ?

SOLUTION

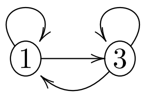
On applique 7 fois la première règle et 8 fois la seconde. On atteint la stabilité en 4 étapes.

Q18. Généralisation (1 pt) **(a)** Expliquez l'effet du programme Γ_1 sur le multi-ensemble $\{\!|\textsc{Itv}(1,n)|\!\}$ où n est un entier > 1. **(b)** En combien d'applications de règles et combien d'étapes obtient-on la stabilité ?

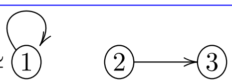
SOLUTION

Il produit le multi-ensemble constitué des entiers de 1 à n annotés par le constructeur N. *On obtient* $\{\!|\mathrm{N}(1),\ldots,\ \mathrm{N}(n)|\!\}$ *en $n-1$ applications de la première règle et n applications de la seconde règle, le tout en $1+\log_2(n)$ étapes.*

Représentation d'un graphe par un multi-ensemble On peut décrire un graphe par l'ensemble de ses arcs. On notera $\textsc{Arc}(i,j)$ un arc entre le nœud i et le nœud j.

Q19. (0.5 pt) **(a)** Donnez le multi-ensemble correspondant au graphe  et **(b)** dessinez le graphe correspondant au multi-ensemble $\{\!|\textsc{Arc}(1,1),\textsc{Arc}(2,3)|\!\}$

SOLUTION

$G \simeq \{\!|\textsc{Arc}(1,1),\textsc{Arc}(1,3),\textsc{Arc}(3,1),\textsc{Arc}(3,3)|\!\}$ *et* $\mathcal{M} \simeq$ 

Q20. (1.25 pt) On considère un multi-ensemble $\mathcal{M}$ qui contient des nœuds $\mathrm{N}(i)$ numérotés de 1 à n. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}$ et de l'atome $G(p) \in \mathcal{M}$ – construit un graphe à *exactement* p arcs *différents* entre des nœuds de $\mathcal{M}$.

> **Indication :** L'atome $G(..)$ de $\mathcal{M}$ qui sert à contrôler l'arrêt de la réaction.

SOLUTION

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p) & \xrightarrow[(1)]{p>0} & \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p-1),\ \textsc{Arc}(i,j) \\ \textsc{Arc}(i,j),\ G(p),\ \textsc{Arc}(i,j) & \xrightarrow[(2)]{} & \textsc{Arc}(i,j),\ G(p+1) \end{array}\right.$$

Q21. (1.25 pt) Notre but est d'adapter le programme précédent pour garantir qu'on construit un **graphe connexe** c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de sous-graphes disjoints[2]. Cette fois on commence avec un atome $G'(p)$ dans un multi-ensemble $\mathcal{M}'$ de nœuds primés, notés $\mathrm{N}'(i)$ pour indiquer qu'il ne font pas partie du graphe connexe. L'idée est de changer un noeud $\mathrm{N}'(i)$ en $\mathrm{N}(i)$ lorsqu'il se trouve connecté au graphe. Donnez un programme Gamma qui – à partir des nœuds de $\mathcal{M}'$ et de l'atome $G'(p)$ – construit un *graphe connexe* à exactement p arcs différents entre des nœuds de $\mathcal{M}'$.

SOLUTION

On conserve les deux règles du programme précédent. La règle (3) permet d'ajouter un nœud $\mathrm{N}(j)$*, non connecté, dans le graphe. La règle (4) permet de créer un nœud initial dans le graphe ; elle ne s'applique qu'une fois puisqu'elle transforme l'atome G' en G utilisé par les autres règles.*

---

1. une étape = une application en parallèle des règles
2. Un nœud $\mathrm{N}(i)$ sans arc ne constitue pas un graphe.

$$\begin{cases} \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p) & \xrightarrow[(1)]{p>0} & \mathrm{N}(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p-1),\ \textsc{Arc}(i,j) \\ \textsc{Arc}(i,j),\ G(p),\ \textsc{Arc}(i,j) & \xrightarrow[(2)]{} & \textsc{Arc}(i,j),\ G(p+1) \\ \mathrm{N}'(i),\ \mathrm{N}(j),\ G(p) & \xrightarrow[(3)]{p>0} & \mathrm{N}'(i),\ \mathrm{N}'(j),\ G(p-1),\ \textsc{Arc}(i,j) \\ \mathrm{N}'(i), G'(p) & \xrightarrow[(4)]{p>0} & \mathrm{N}(i),\ G(p) \end{cases}$$

Exercice 4 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable (15min, 5.5 pt)

Q22. Complétez (1 pt) On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e

prédicat

booléen : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid i \in \mathbb{N},\ P(i) \in \mathbb{B}\}$. Considérons un prédicat P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il e complètement défini par un tableau $[0...\mathbb{N}[$ qui indique pour chaque entier i la valeur booléene $P(i)$ associée.

Q23. (0.75 pt) Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

SOLUTION

	$\mathbb{N}$	$\to$	$\mathbb{B}$	
P_0 :	i	$\mapsto$	$\mathbb{F}$	*la fonction constante, qui vaut toujours faux*
P_1 :	i	$\mapsto$	$\mathbb{V}$	*la fonction constante, qui vaut toujours vrai*
P_2 :	i	$\mapsto$	$i \stackrel{?}{=} 0$	*le test de nullité*
P_3 :	i	$\mapsto$	$i \bmod 2 \stackrel{?}{=} 0$	*le test de parité*

Q24. (0.75 pt) Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

SOLUTION

$\mathbb{N} =$	0	1	2	3	4	5	...
P_0	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_1	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	...
P_2	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_3	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	...

Q25. Complétez la preuve (3 pt) On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e d'une preuve par contradiction :

Suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, associe le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger tous le $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ à la manière de George ℓ le P_ℓ. On peut donc re $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son numéro de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la diagonale du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient tous le $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{def}{=} \neg(P_i(i))$ doit apparaître dans le tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc $P = P_\ell$.

Exemple : Le prédicat P correspond à la négation de la diagonale du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \mathbb{V},\ P(1) = \mathbb{F},\ P(2) = \mathbb{V},\ P(3) = \mathbb{V}, \textit{etc}$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) = \quad P_\ell(\ell)$ *puisque* $P = P_\ell$*; mais, par ailleurs,*

$P(\ell) = \neg(P_\ell(\ell))$ par *définition de* P : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ dénombrable, on aboutit à une contradiction, donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ *n'e*