

EL FILTRO DE KALMAN

Introducción

En el siguiente documento se explicará un método para estimar los estados de un sistema estocástico. El método fue descrito por Rudolf E. Kalman en 1958.

En un sistema determinístico trabajaríamos de la siguiente forma: En primer lugar, construiríamos un modelo del sistema a partir de las leyes físicas que definen las dinámicas. En segundo lugar, estudiaríamos su estructura y su respuesta. Por último, y si fuera necesario, se diseñarían compensadores para alterar las características del sistema o bien reguladores. Para ello tendríamos además un amplio conjunto de experiencias que han sido aplicadas con anterioridad sobre estos sistemas. En la realidad ocurre que los sistemas determinísticos son aproximaciones de lo que realmente son, principalmente por tres motivos:

- No existe un modelo matemático perfecto de un sistema real.
- Existen perturbaciones que no se pueden modelar de una forma determinística.
- Los sensores no son perfectos.

Esto nos lleva a plantearnos una serie de preguntas:

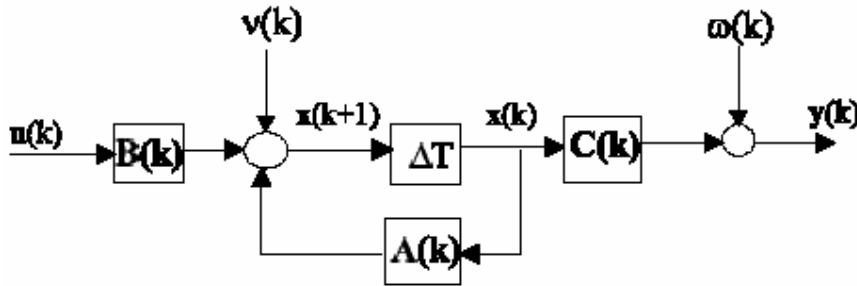
- Cómo desarrollar modelos de sistemas que tengan en cuenta las incertidumbres.
- Cómo estimo de una forma óptima los datos que me interesan de un sistema mal modelado y con datos alterados por el ruido.
- Cómo control de una forma óptima sistemas estocásticos.

Qué es el Filtro de Kalman

Es un algoritmo de procesamiento de datos óptimo recursivo. Óptimo porque minimiza un criterio determinado y porque incorpora toda la información que se le suministra para determinar el filtrado. Recursivo porque no precisa mantener los datos previos, lo que facilita su implementación en sistemas de procesamiento en tiempo real. Por último, algoritmo de procesamiento de datos, ya que es un filtro, pensado para sistemas discretos.

El objetivo del filtro de Kalman es estimar los estados de una manera óptima, de manera que se minimiza el índice del error cuadrático medio.

Un sistema lineal se puede representar así:



De manera que su evolución es expresada en espacio de estados por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + w(k) \end{aligned}$$

Siendo:

$x(k)$ Estado

$y(k)$ Salida u observación del sistema.

$w(k)$ proceso estocástico asociado a la medida

$v(k)$ proceso estocásticas asociado al sistema

A, B, C matrices determinísticas que definen la dinámica del sistema

Se deben asumir las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} E[x(0)] &= x_0 \\ E[w(k)] &= 0 \quad \forall k \\ E[v(k)] &= 0 \quad \forall k \\ E[x(0), w(k)] &= 0 \quad \forall k \\ E[x(0), v(k)] &= 0 \quad \forall k \\ E[v(k), w(j)] &= 0 \quad \forall k \\ E[w(k), w(k)] &= R(k) \\ E[w(k), w(k)] &= 0 \quad \forall k \neq j \\ E[v(k), v(k)] &= Q(k) \\ E[w(k), w(j)] &= 0 \quad \forall k \neq j \\ E[x(0), x(k)] &= P_0 \quad \forall k \end{aligned}$$

Las matrices de covarianza $Q(k)$ y $R(k)$ son diagonales y por tanto simétricas.

En el sistema real podremos observar el valor de $y(k)$ de manera directa con los sensores adecuados. Esta medida incorporará una serie de incertidumbres asociadas: la incertidumbre del sensor y la del sistema. Por otro lado solo podremos acceder al valor $y(k)$. En caso de necesitar la evolución completa del estado $x(k)$ y/o de precisar el valor de la observación ajena a las variaciones provocadas a la incertidumbre, tendremos que estimar de alguna manera indirecta sus valores.

El filtro de Kalman propone un método para obtener un estimador óptimo del estado. Si suponemos que $\hat{x}(k)$ es la estimación en el instante k del estado. El filtro de Kalman buscará obtener ese valor de estimación de manera que se minimice el error cuadrático medio. Definiendo el error como la diferencia entre el valor real del estado y la estimación:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) . \quad [1]$$

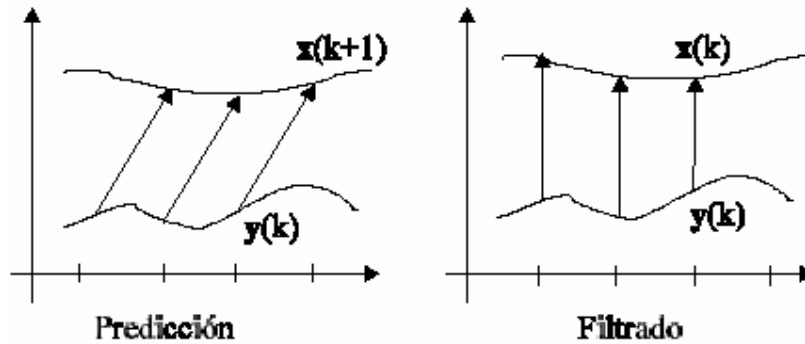
El objetivo por tanto será minimizar

$$P(n) = E\{e(n).e^T(n)\} . \quad [2]$$

A la matriz $P(n)$ se la conoce como matriz de covarianza del error. Dependiendo del valor que tome n en [2], tendremos distintas representaciones del filtro de Kalman:

Si $n = k+1$, el filtrado será de predicción.

Si $n = k$, el filtrado será de alisado.



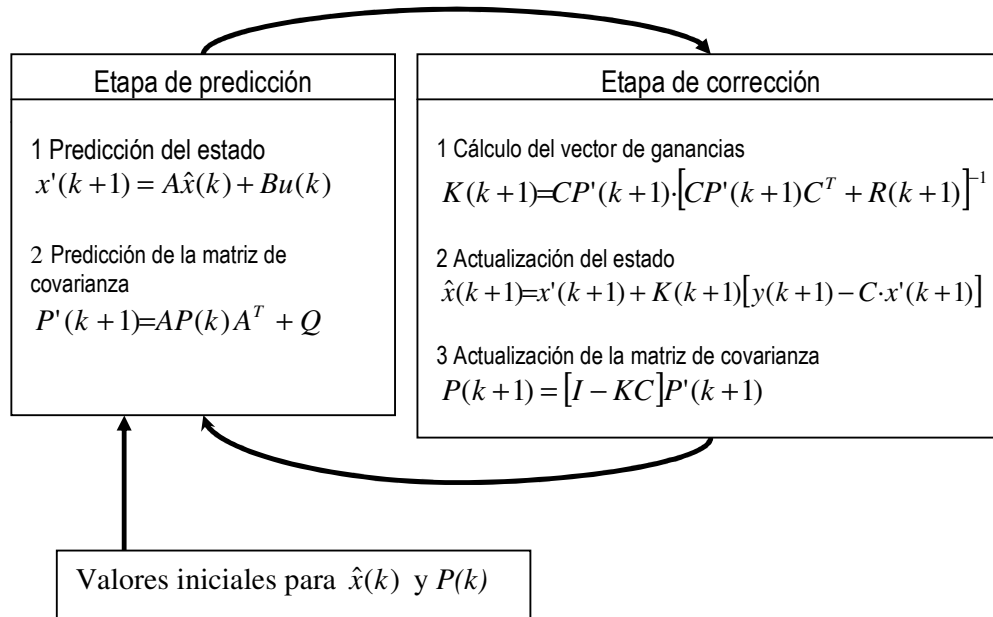
Filtro de Kalman con filtrado:

El objetivo consiste en determinar los valores de $\hat{x}(k)$ conocidas las medidas contaminadas $y(0), y(1), \dots, y(k)$ para que $P(k)$ sea mínima, o visto desde otro punto de vista, el objetivo es determinar los valores de $\hat{x}(k+1)$ a partir de las medidas contaminadas de la observación $y(k+1)$ para que la matriz $P(k+1)$ sea mínima.

El filtrado de $\hat{x}(k+1)$ propuesta por Kalman y Bucy, se realizará a partir del estado anterior y de un factor de corrección que será función del error.

El algoritmo tiene dos pasos que son ejecutados de forma iterativa. Predicción: Antes de tener la medida $y(k+1)$ y Corrección o actualización del estado.

En la siguiente figura se puede ver el proceso de cálculo:



Paso 1: Predicción-Extrapolación-Estimación

Calculamos una predicción del estado $x(k+1)$, lo notaremos como $x'(k+1)$. El valor de la predicción es calculado a partir del valor más actualizado del estado (posteriormente veremos que es el estado corregido en la parte final del algoritmo)

$$x'(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) \quad [3]$$

Predecimos el valor de la matriz de covarianza del error previo a la medida $P'(k+1)$ (recordamos que estamos haciendo una previsión del estado). Como se indicó en [2], el error estará definido por:

$$e'(k+1) = x(k+1) - x'(k+1). \quad [4]$$

Por tanto $e'(k+1)$ en esta etapa de predicción vale:

$$e'(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k)$$

$$P'(k+1) = E\left\{[A(x(k) - \hat{x}(k)) + v(k)][A(x(k) - \hat{x}(k)) + v(k)]^T\right\}$$

Operando:

$$P'(k+1) = E\left\{[A(x(k) - \hat{x}(k))][A(x(k) - \hat{x}(k))]^T\right\} + E\{v(k)v(k)^T\}$$

$$E\{v(k)v(k)^T\} \text{ Se define como la matriz de covarianza asociada al proceso: } Q(k)$$

Queda por tanto:

$$P'(k+1) = AP(k)A^T + Q(k) \quad [5]$$

Paso 2: Innovación-Actualización-Corrección.

Decíamos antes que el valor del estado se va a calcular a través del estado anterior y de una corrección que es función del error. Esto es:

$$\hat{x}(k+1) = x'(k+1) + K(k+1)[y(k+1) - C \cdot x'(k+1)] \quad [6]$$

Siendo el factor de corrección:

$$K(k+1)[y(k+1) - C \cdot x'(k+1)]$$

y:

$y(k+1)$ es el último valor observado.

$x'(k+1)$ es el valor más actualizado disponible del estado (calculado en la fase de predicción).

Buscaremos el valor de $K(k+1)$ para conseguir un valor óptimo de $\hat{x}(k+1)$ tal que la matriz de covarianza del error sea mínima. Volviendo a definir el error a partir de [1]:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

Substituyendo:

$$e(k+1) = x(k+1) - x'(k+1) - K[y(k+1) - Cx'(k+1)]$$

La observación $y(k+1)$ tiene el valor

$$y(k+1) = Cx(k+1) + w(k+1)$$

Por tanto:

$$e(k+1) = x(k+1) - x'(k+1) - KCx(k+1) - Kw(k+1) + KCx'(k+1)$$

Agrupando:

$$e(k+1) = [I - KC](x(k+1) - x'(k+1)) - Kw(k+1)$$

Así pues, según [2]:

$$P(k+1) = E\{ \langle [I - KC](x(k+1) - x'(k+1)) - Kw(k+1) \rangle \langle [I - KC](x(k+1) - x'(k+1)) - Kw(k+1) \rangle^T \}$$

$$P(k+1) = E\{ \langle [I - KC](x(k+1) - x'(k+1)) \rangle \langle [I - KC](x(k+1) - x'(k+1)) \rangle^T \} + E\{ kw(k+1)w(k+1)^T k \}$$

$$E\{w(k+1)w(k+1)^T\} : \text{Matriz de covarianza asociada a la medida: } R(k+I)$$

$$P'(k+1) = [I - KC] \cdot E\{ \langle x(k+1) - x'(k+1) \rangle \langle x(k+1) - x'(k+1) \rangle^T \} [I - KC]^T + KR(k+1)K^T$$

Anteriormente ya calculamos que:

$$P'(k+1) = E\{ \langle x(k+1) - x'(k+1) \rangle \langle x(k+1) - x'(k+1) \rangle^T \}$$

Por lo que :

$$P(k+1) = [I - KC]P'(k+1)[I - KC]^T + KRK^T \quad [7]$$

Si Llamamos P1 a P'(k+1) y P(k+1) = P:

$$P = P1 + KCP + PC^T K^T + KCPC^T K^T + KRK^T$$

$$TrP = TrP1 + 2TrKCP + TrK(CPC^T)K^T + TrKRK^T \quad (Tr \text{ traza de la matriz})$$

Diferenciamos respecto a K para obtener el mínimo de la expresión e igualamos a cero

$$\frac{\partial TrP}{\partial K} = -2TrCP + 2TrCPC^T + 2KR = 0$$

$$K = CP \cdot [CPC^T + R]^{-1}$$

Es decir:

$$K(k+1) = CP'(k+1) \cdot [CP'(k+1)C^T + R(k+1)]^{-1} \quad [8]$$

Se puede comprobar que es el mínimo a través del Hessiano.

Substituyendo [8] en [7]:

$$P(K+1) = [I - KC]P'(k+1) \quad [9]$$

Inicialización del algoritmo:

Para iniciar el algoritmo es necesario conocer las siguientes condiciones de contorno:
Un valor inicial del estado: x(0). El valor de la matriz de covarianza del error, que para P(0). Podemos asumir que P(0) = Q. Y los valores de las matrices de covarianza asociadas al sistema y a la medida: Q y R.

Resumiendo, el algoritmo tiene los siguientes pasos:

En la iteración k:

1º Predicción:

$$x'(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$$

$$P'(k+1) = AP(k)A^T + Q$$

2º Corrección

$$K(k+1) = P'(k+1) \cdot [C^T P'(k+1) C + R(k+1)]^{-1}$$

observación. $y(k+1)$

$$\hat{x}(k+1) = x'(k+1) + K(k+1)[y(k+1) - C \cdot x'(k+1)]$$

$$P(k+1) = [I - KC]P'(k+1)$$

Nótese que el concepto de filtrado es debido a que los valores del estado óptimo $\hat{x}(k+1)$ y de la observación se producen en el mismo instante.

Ejemplo 1. Filtrado de una constante

Supongamos que queremos estimar el valor de una constante que al ser medida tiene una serie de desviaciones debidas a la incertidumbre del aparato de medida.

El sistema será entonces:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + w(k)\end{aligned}$$

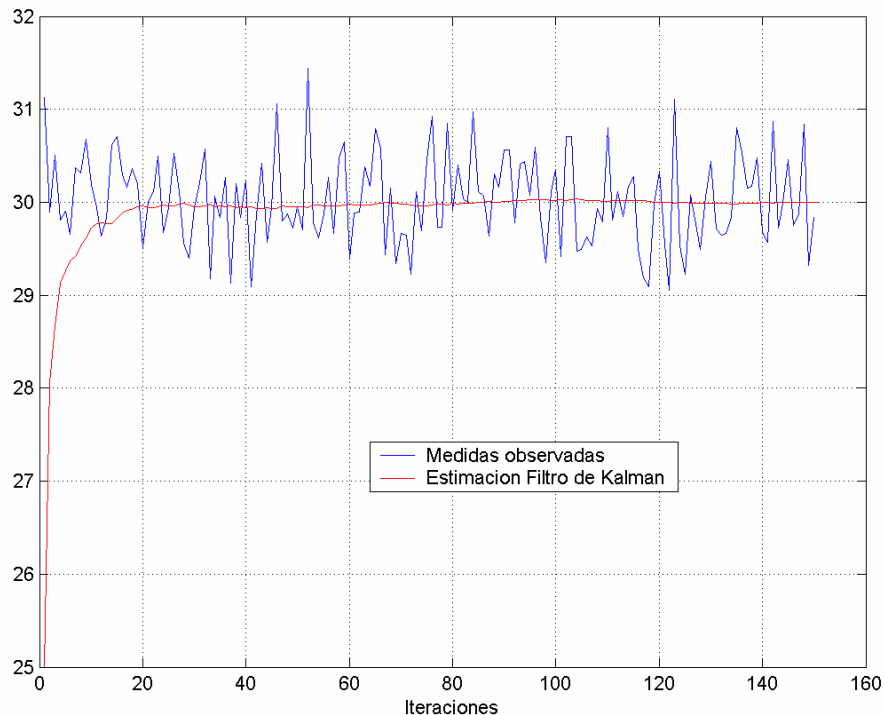
$$A=I$$

$$B=0$$

$$C=I$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + v(k) \\ y(k) &= x(k) + w(k)\end{aligned}$$

Supongamos que la desviación típica de la medida es $\sigma_w = 0.5$. La covarianza (varianza en este caso será $\sigma_w^2 = 0.25 = R$). Y consideremos también que el sistema tiene una desviación muy pequeña $\sigma_v = 0.001$. La varianza asociada al sistema es $\sigma_v^2 = 1e-6$. $P(0) = 1e-6$. En la siguiente gráfica se puede observar el efecto del filtro de Kalman para una constante de 30. $x(0) = 25$.



Código utilizado para generar la gráfica:

```

X(1) = 25;
desv_obs = 0.5;
desv_estado = 0.001;
var_obs = desv_obs* desv_obs;           %R
var_estado = desv_estado* desv_estado; %Q
P_despues(1) = var_obs;                  %P(0)

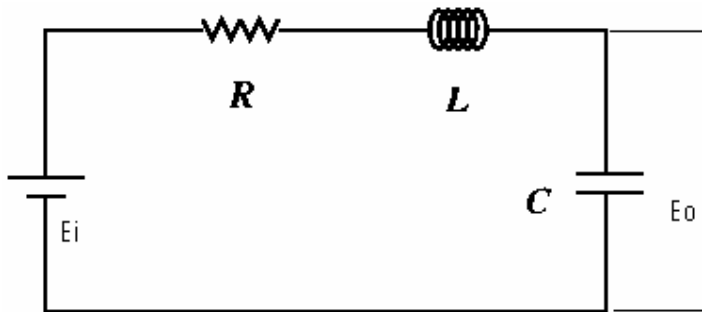
for k=1:100
    %%% 1 Predicción %%%
    % Predicción del estado
    X_antes(k+1)=X(k);
    % Predicción de la matriz de covarianza del error
    P_antes(k+1)=P_despues(k)+var_estado;

    %%% 2 Corrección %%%
    % Ganancia
    Ganancia(k+1)=P_antes(k+1)/(P_antes(k+1)+var_obs);
    % Observación
    Y(k+1)=30 + desv_obs*randn(1);
    % Estimación del estado
    X(k+1)=X_antes(k+1)+Ganancia(k+1)*(Y(k+1)-X_antes(k+1));
    % Actualización de la matriz de covarianza
    P_despues(k+1)=(1-Ganancia(k))*P_antes(k+1);
end

```

Ejemplo 1. Filtrado del estado para un sistema de segundo orden

Supongamos el siguiente sistema formado por un circuito RLC serie.



Si analizamos el sistema en el dominio de Laplace, obtendremos que:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Pasando a espacio de estados, (nota: el sistema es continuo):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} E_i(s) + \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w$$

Siendo:

$$x_1 = E_0 \quad x_2 = \frac{dE_0}{dt}$$

Tomemos los valores

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ H.} \\ C &= 1000 \mu\text{F} \\ R &= 30 \Omega \end{aligned}$$

Así pues:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1000 & -30 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si presumimos un tiempo de muestreo de $T = 0.01 \text{ s}$.

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0.9550 & 0.0085 \\ -8.4963 & 0.7001 \end{bmatrix}; B(k) = \begin{bmatrix} 0.0450 \\ 8.4963 \end{bmatrix}; C(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponemos una desviación del observador de 1 voltio

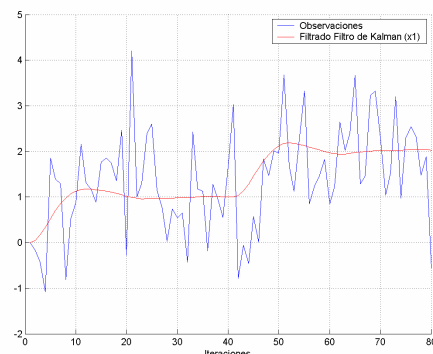
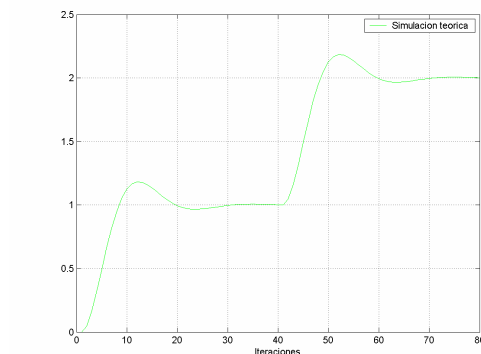
Suponemos una desviación del sistema de 0.01 voltio y 0.01 voltio/segundo.

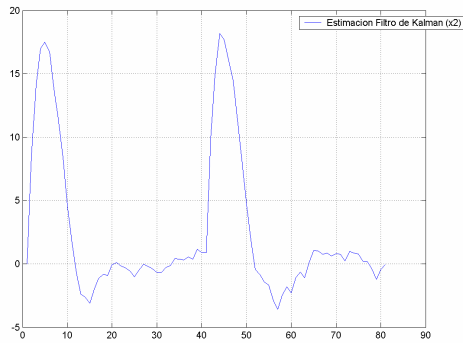
$$\sigma_{v_1} = 0.01; \quad \sigma_{v_2} = 0.01; \quad \sigma_w = 1$$

por lo que :

$$R = I; \text{ y } Q = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

En la siguiente gráfica se puede ver el resultado de la estimación





Código utilizado para generar la gráfica:

```
%Datos
C = 1e-3; L = 1; R = 30;
%Formamos el sistema continuo
A = [0 1; -1/(L*C) -R/L]; B = [0; 1/(L*C)]; C = [1 0]; D = 0;
SYS = ss(A,B,C,D);
%Transformamos de continuo a discreto con T = 0.01 s.
sysd = c2d(SYS,0.01);
[Ad,Bd,Cd,Dd]= ssdata(sysd);
%generamos la entrada
for i=1:40 U(i)=1; end
for i=41:80 U(i)=2; end
%simulamos el sistema teorico
[Y_,X_] = dlsim(Ad,Bd,Cd,Dd,U);
[s1,s2] = size(X_);
%condiciones de contorno
desv_obsvdr = 1; %incertidumbre de la observacion (1 V)
desv_estado = 0.05; %incertidumbre de los estados (0.01 V y 0.01 V/s)
Q = [desv_estado^2 0; 0 desv_estado^2]; %matriz de covarianza
R = desv_obsvdr^2; %matriz de covarianza (varianza)
P_despues = Q; %matriz de covarianza del error para t=0
X = [0;0]; %estado inicial
%bucle
for k=1:s1
    %%%% 1 Predicción %%%%%%%%%%%%%%
    % Predicción del estado
    X_antes = Ad*X + Bd*(U(k) + desv_estado*randn(1));
    % Predicción de la matriz de covarianza del error
    P_antes = Ad*P_despues*Ad'+Q;
    %%%% 2 Corrección %%%%%%%%%%%%%%
    %observacion (la tomamos de la simulacion anterior)
    Y = Y_(k) + desv_obsvdr*randn(1);
    % Ganancia
    Ganancia = Cd*P_antes*inv(Cd*P_antes*Cd' + R);
    % Estimación del estado
    X = X_antes + Ganancia*(Y - Cd*X_antes);
    %guardamos los resultados para plotearlos posteriormente
    x1(k+1)=X(1); x2(k+1)=X(2); y(k+1)=Y;
    % Actualización de la matriz de covarianza
    P_despues =(eye(2)-Cd' * Ganancia)*P_antes;
End
```

Filtro de Kalman con estimación:

Partimos de un sistema lineal representado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + w(k)\end{aligned}\quad [10]$$

Como ya se indicó con anterioridad, la solución que propusieron Kalman y Bucy para el predictor del estado, vendrá determinada por el estado en el instante anterior y por un factor de corrección que será función del error entre la observación y la estimación.

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) - K(k)[y(k) - \hat{y}(k)] \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k)\end{aligned}\quad [11]$$

Asumidas todas las condiciones iniciales, análogas al caso de filtrado, se trata aquí de determinar la estimación $\hat{x}(k+1)$, conociendo las medidas contaminadas de ruido $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, ..., $y(k)$, para que la matriz $P(k+1)$ de covarianza del error, en el instante $k+1$, sea mínima.

El error en el instante $k+1$ se determinará por:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad [12]$$

Substituyendo en [12] las expresiones [10] y [11]

$$e(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k) - A\hat{x}(k) + Bu(k) - K(k)[Cx(k) + w(k) - C\hat{x}(k)]$$

$$e(k+1) = A[x(k) - \hat{x}(k)] - CK(k)[x(k) - \hat{x}(k)] - K(k)w(k) + v(k)$$

$$e(k) = [x(k) - \hat{x}(k)]$$

$$e(k+1) = [A - K(k)C]e(k) - K(k)w(k) + v(k)$$

Llamando:

$$\hat{A}(k) = A - K(k)C \quad [13]$$

tenemos:

$$e(k+1) = \hat{A}(k)e(k) - K(k)w(k) + v(k)$$

Así pues la matriz de covarianza del error tal y como se había definido en [2]

$$P(k+1) = E\{ e(k+1)e(k+1)^T \} =$$

Substituyendo y operando:

$$\begin{aligned} E\{ [\hat{A}(k)e(k) - K(k)w(k) + v(k)][\hat{A}(k)e(k) - K(k)w(k) + v(k)]^T \} = \\ E\{ \hat{A}(k)e(k)e(k)^T \hat{A}(k)^T - \hat{A}(k)e(k)K(k)^T w(k)^T + \hat{A}(k)e(k)v(k)^T - \\ - K(k)w(k)w(k)^T K(k)^T - K(k)w(k)\hat{A}(k)^T e(k)^T - K(k)w(k)v(k)^T + \\ + v(k)\hat{A}(k)^T e(k)^T - v(k)K(k)^T w(k)^T + v(k)v(k)^T \} \end{aligned}$$

y como:

$$E\{ \hat{A}(k)e(k)e(k)^T \hat{A}(k)^T \} = \hat{A}(k)E\{ e(k)e(k)^T \} \hat{A}(k)^T = \hat{A}(k)P(k)\hat{A}(k)^T$$

$$E\{ \hat{A}(k)e(k)K(k)^T w(k)^T \} = E\{ K(k)w(k)\hat{A}(k)^T e(k)^T \} = 0$$

$$E\{ \hat{A}(k)e(k)v(k)^T \} = E\{ v(k)\hat{A}(k)^T e(k)^T \} = 0$$

$$E\{ K(k)w(k)w(k)^T K(k)^T \} = K(k)E\{ w(k)w(k)^T \} K(k)^T = K(k)RK(k)^T$$

$$E\{ K(k)w(k)v(k)^T \} = E\{ v(k)K(k)^T w(k)^T \} = 0$$

$$E\{ v(k)v(k)^T \} = Q$$

Queda:

$$P(k+1) = \hat{A}(k)P(k)\hat{A}(k)^T + K(k)RK(k)^T + Q$$

Teniendo en cuenta el valor de $A^T(k)$

$$P(k+1) = [A - K(k)C]P(k)[A - K(k)C]^T + K(k)RK(k)^T + Q \quad [14]$$

Una vez que hemos calculado la expresión de la matriz de covarianza del error, tenemos que encontrar el valor de $K(k)$ que hace que esa matriz sea mínima:

$$P(k+1) = [A - K(k)C]P(k)[A - K(k)C]^T + K(k)RK(k)^T + Q$$

$$P(k+1) = AP(k)A^T - AP(k)K(k)^T C^T - K(k)CP(k)A^T + K(k)CP(k)K(k)^T C^T +$$

$$K(k)RK(k)^T + Q$$

$$\begin{aligned} TrP(k+1) = & Tr(AP(k)A^T) - Tr(K(k)CP(k)A^T) + Tr(K(k)CP(k)K(k)^T C^T) + \\ & Tr(K(k)RK(k) + Tr(Q) \end{aligned}$$

Si diferenciamos respecto a $K(k)$

$$\frac{\partial TrP(k+1)}{\partial K(k)} = -2Tr(CP(k)A^T) + 2Tr(K(k)CP(k)C^T) + 2Tr(K(k)R)$$

Igualando a cero para buscar el mínimo:

$$-2Tr(CP(k)A^T) + 2Tr(K(k)CP(k)C^T) + 2Tr(K(k)R) = 0$$

Al ser $P(k)$ y $R(k)$ simétricas:

$$\begin{aligned} K(k)[CP(k)C^T + R] &= 2CP(k)A^T \\ K(k) &= CP(k)A^T [CP(k)C^T + R]^{-1} \end{aligned} \quad [15]$$

Substituyendo este valor en [14] obtenemos $P(k+1)$

$$P(k+1) = Q + [A - K(k)C]P(k)A^T \quad [16]$$

Resumiendo, el proceso iterativo a seguir es:

1.- Cálculo de la ganancia:

$$K(k) = CP(k)A^T [CP(k)C^T + R]^{-1}$$

2.- Estimación del estado:

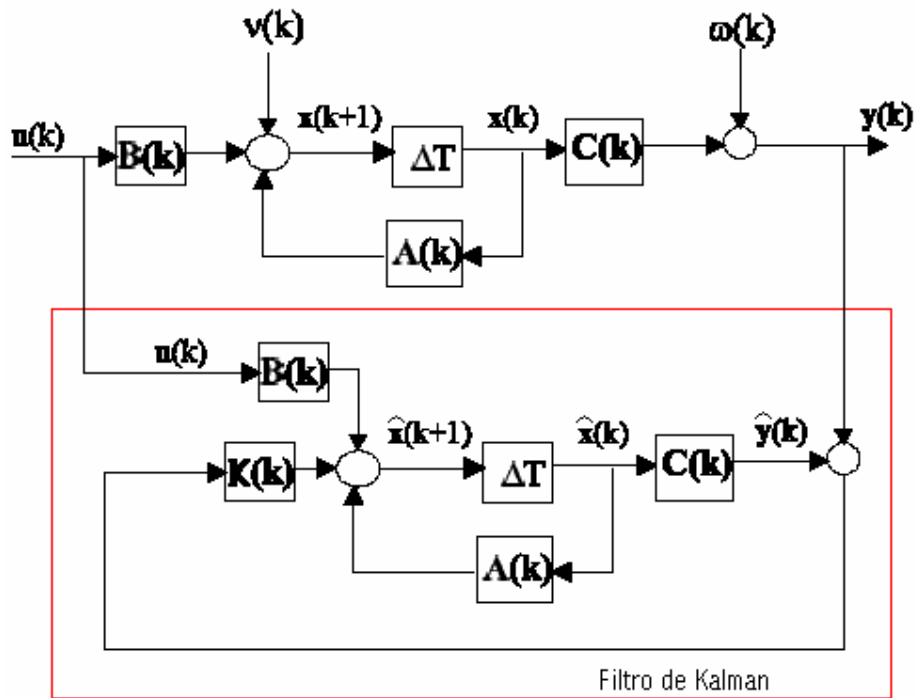
$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) - K(k)[y(k) - C\hat{x}(k)]$$

3.- Actualización de la matriz de covarianza del error

$$P(k+1) = Q + [A - K(k)C]P(k)A^T$$

Nótese que el concepto de estimación es debido a que cuando tenemos la observación del sistema $y(k)$ los valores obtenidos para el estado óptimo son los de $\hat{x}(k+1)$.

Si representamos el filtro en forma de bloques, obtenemos la siguiente representación:



Documentación

- [1] Rafael Molina Soriano. Bases Del Filtro de Kalman.
<http://decsai.ugr.es/vip/doctorado/pvd/T7bn.pdf>
- [2] Tema XVII – El filtro de Kalman
http://www.depeca.uah.es/wwwnueva/docencia/ING-CA/ctr_avz/VVEE17.PDF
- [3] Greg Welch, Gary Bishop. Introduction to the Kalman Filter.
Peter S. Haybeck. Stochastic models, estimation and control. Volume 1
Greg Welch, Gary Bishop. SCAAT. Incremental tracking with Incomplete Information
http://knaan.com/Lev/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf
- [4] Kalman Filter Derivation.
http://www.atcourses.com/kalman_filter.pdf