求导练习

Liu Xinyi

2021 年 8 月 24 日

摘要

为微积分求导练习而作

1 微分运算

1.1 导数的定义

定义 1.1.1. 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限, 则称这个极限为函数 f 在点 x_0 的**导数**, 记作 $f'(x_0)$, 并称函数 f 在 x_0 **可导**.

类似于左连续和右连续, 导数也可以定义左导数和右导数, 分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

对于一个定义在区间 (a,b) 上的函数 f, 如果对所有 $x\in(a,b)$, 函数 f 在点 x_0 可导, 则称函数 f 在 (a,b) 上可导, 另外如果函数 f 在端点 a 有右导数, 或者在端点 b 处有左导数, 则称函数 f 在 $[a,b)$ 上可导或者在 $(a,b]$ 上可导.

定理 1.1.1. 若函数 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

这一定理通常会被编成口诀“可导的一定连续, 连续的不一定可导”.

习题 1.1.1. 设函数 f 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

习题 1.1.2. 设函数 f 在 $x=0$ 处可导, 且 $a_n\to 0^-, b_n\to 0^+(n\to+\infty)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

习题 1.1.3. 设 f 是偶函数且在 $x=0$ 可导. 证明:$f'(0)=0$.

习题 1.1.4. 设函数 f 在 x_0 可导, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

习题 1.1.5. 设函数 f 在 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$. 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)})^n.$$

习题 1.1.6. 设 $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$. 求 $f'(0), f'(1), f'(2)$.

习题 1.1.7. 尝试构造一个函数 f, 它在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可导, 但

$$\lim_{n\to\infty} n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$$

处处存在.

在提出定义之后, 我们就能对具体的问题进行计算. 解决关于求导的计算问题, 需要两种技术: 公式和求导法则.

1.2 求导公式

1. $c' = 0$,
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
3. $(e^x)' = e^x$,
4. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$,
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
7. $(\sin x)' = \cos x$,
8. $(\cos x)' = -\sin x$,
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
14. **(arcot x)'**$= \frac{1}{1+x^2}$,

1.3 求导法则

1. 四则运算法则
2. 链式法则
3. 反函数求导法则
4. 洛必达法则