Differential Calculus
微分学

Zimmer Abdeeglr

2021 年 8 月 26 日

摘要

为解决求导问题而作。具体细节，思路有待填充
研究重点 1：$\lim(1+\frac{1}{x})^x$

0 (AR).Basic Concepts

介绍使用的基本数学概念

1 (AR).Real Number System

介绍实数系的构造过程

2 (AR).Convergence Sequence

介绍用数列极限表达的实数连续性定理

3 (AR).Continus Function

连续函数是一个数列——我自己说的.

讨论函数求极限的方法和连续函数的性质 (在写出更具体的思路和研究对象后删除)

3.1 函数的收敛与发散的定义

3.2 连续函数的研究

4 (AR).Calculus

为了解决导数的计算问题, 我们需要两类工具, 一类是具体的关于各种常见函数的求导公式, 需要熟记, 另一类是抽象的求导法则, 这位求解复杂函数的导数提供了逐步求导的原理.

首先我们可以从定义出发, 来证明一些基本的求导公式:

1. $c' = 0$,
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
3. $(e^x)' = e^x$,
4. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$,
5. $(\sin x)' = \cos x$,
6. $(\cos x)' = -\sin x$,

这些基本的求导公式是进一步的公式推导提供了基础, 接下来要介绍求导的四则运算.

定理 4.0.1. *设函数 f 和 g 在点 x 上可导, 那么 $f \pm g, fg$ 也在 x 上可导. 如果 $g(x) \neq 0$, 则 f/g 也在 x 上可导.*

并且

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

证明. 最直观的证明方式可以参考 3Blue1Brown 的视频. □

利用求导的四则运算, 我们可以得到正切函数和余切函数的求导公式:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= (\frac{\cos x}{\sin x})' \\ &= \frac{-\sin^x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

函数除了能够四则运算之外, 还有复合运算, 因此也有求导的符合运算法则. 这一法则被称为**链式法则**.

定理 4.0.2 (复合函数的求导)**.** *设函数 g 在 t_0 可导, 函数 f 在 $x = g(t_0)$ 可导, 则 $f(g(x))$ 在 t_0 可导, 并且*

$$(f(g(t_0)))' = f'(g(t_0))g'(t_0).$$

第三个求导法则是反函数求导法则.

定理 4.0.3 (反函数的求导)**.** *设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个小邻域上连续且严格单调. 如果它在 x_0 可导, 并且 $f'(x_0) \neq 0$, 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 可导, 并且*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

5 (AR).The Crown of Differential Calculus

介绍微分中值定理和泰勒展开式

6 (ER).The Study on e

7 (ER). 不动点研究

8 (ER). 周期 3 混沌