Problem Set
线性代数问题集一

Liu Xinyi

2021 年 8 月 20 日

摘要

本问题集旨在对 Introduction to Linear Algebra(1) 中建立的理论提供反馈练习。换言之，使用在 ILA(1) 中给出的概念、推论、定理和普遍的数学证明工具，能够解决本问题集中的所有问题。

在本问题集中，按照 ILA(1) 建立起的理论成果，将可以解决的问题分为以下几类：

1 Problem Set

1. 设 $\mathbb{R}^+$ 是全体正实数构成的集合，
   在其中定义加法和标量乘法为 $+(a,b)=a\times b, \times(k,a)=a^k$, $\forall a,b\in\mathbb{R}^+$,$k\in\mathbb{R}$. 证明 $\mathbb{R}^+$ 是线性空间.

2. 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 是向量空间 V^3 中的向量，证明集合 $W=\{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}\|k,l\in\mathbb{R}$ 是 V^3 的子空间.

3. 设 V 是一个非空的向量空间，证明：V 不能是它的两个真子空间的并集.

4. 设 $W_1,W_2,\cdots,W_r$ 是向量空间 V 的真子空间. 证明: 在线性空间 V 中存在一个向量 ξ, 满足

$$\xi\notin\cup_{1\leq i\leq r}W_i.$$

5. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 两两线性无关，试问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是否线性无关.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 并且 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_n$ 线性相关，那么 β 是否属于 $\mathbf{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

8. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中不同四点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, K_4 使

$$k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + K_3 \vec{OC} + k_4 \vec{OD} = \vec{0}$$

且 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

9. 已知 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，但不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 证明:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$ 等价.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta, \gamma$ 线性相关. 判断 β, γ 与 $\mathbf{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的关系.

11. 设 W_1, W_2 是向量空间 V 的两个非零子空间，如果 $W_1 \subset W_2$，且 $\mathrm{dim} W_1 = \mathrm{dim} W_2$. 证明:$W_1 = W_2$.

12. 假设 v_1, v_2, v_3, v_4 张成 V，证明 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$ 也能张成 V.

13. 设 $\alpha_1 = (1,1,1)$,$\alpha_2 = (1,2,3)$,$\alpha_3 = (1,3,t)$, 试问当 t 的取值如何决定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关或线性无关.

14. 设 $\mathbf{W}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,0,\cdots,0)|a_i\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^n$. 证明 $\dim W=r$.

15. 设 W_1 和 W_2 是线性空间 V 的两个非零线性子空间, 如果 $W_1\subset W_2$, 且 $\dim W_1=\dim W_2$. 证明:$W_1=W_2$.

16. 将向量组 $(2,1,-1,3),(-1,0,1,2)$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个基.

17. 设 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\alpha_1=(1,1,\cdots,1),\alpha_2=(2,2^2,\cdots,2^n),\cdots,\alpha_n=(n,n^2,\cdots,n^n)$. 证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个张成组.

18. 已知 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(-4,5,6),\alpha_3=(7,-8,9)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 求向量 $\vec{\xi}=(5,-12,3)$ 在这个基下的坐标.

19. 在 $\mathbb{R}^3$ 中求出向量 α, 使得 α 在下列两个基有相同的坐标:

$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (-1,0,0), \alpha_3 = (0,1,1);$

$\beta_1 = (0-1,1), \beta_2 = (1,-1,0), \beta_3 = (1,0,1).$

20. 如果 $\alpha + k\beta + \gamma = \mathbf{0}$. 证明:$\mathcal{L}(\alpha,\beta) = \mathcal{L}(\beta,\gamma)$.

21. 设 $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4, \mathbf{W_1} = \mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \mathbf{W_2} = \mathcal{L}(\beta_1,\beta_2)$, 其中

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = (1,-1,2,3), && \alpha_2 = (-1,2,-1,1), \\ &\alpha_3 = (-1,0,-3,5), && \beta_1 = (-1,4,0,-1), \\ &\beta_2 = (0,9,5,-14). \end{aligned}$$

求 $\mathbf{W_1}$ 与 $\mathbf{W_2}$ 的和与交基和维数.

22. 设 $\mathbf{W_1}, \mathbf{W_2}$ 是有限维向量空间 $\mathbf{V}$ 的两个子空间, 并且

$$\dim(\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}) = \dim(\mathbf{W_1} + \mathbf{W_2}) - 1.$$

证明:$\mathbf{W_1} \subset \mathbf{W_2}$ 或者 $\mathbf{W_2} \subset \mathbf{W_1}$.

23. 求 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 3), \alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的补子空间.

24. 设 $\mathbf{U}$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的子空间,$\mathbf{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$. 求:

(a) $\mathbf{U}$ 的一个基;

(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基;

25. 证明: 若 v_1, v_2, v_3, v_4 是 $\mathbf{V}$ 的基,$\mathbf{W}$ 是 $\mathbf{V}$ 的子空间, 并且 $v_1, v_2 \in \mathbf{W}$,$3, v_4 \notin \mathbf{W}$, 则 v_1, v_2 是 $\mathbf{W}$ 的基.

26. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_m \in \mathbf{V}$ 的一组线性无关向量组, 又 $w \in \mathbf{V}$. 证明:

$$\dim \mathcal{L}(v_1 + 2, v_2 + w, \cdots, v_m + w) \geq m - 1.$$

2 分类表与原理