

第三次作业报告 PB23000141 刘彦宏

编译环境

作业使用cmake组织项目, 编译器使用mingw64的g++. 开发使用的IDE是Clion, VS2022也可以正常构建并运行(本次作业我注意到不同编译器的long double实现略有区别, 不过不影响完成作业).

运行我的此次作业代码, 只需要加载根目录下的CMakeLists文件, 然后选择对应的构建目标构建后运行即可. 第一题的构建目标是hw3_1, 第二题的构建目标是hw3_2, 第三题的构建目标是hw3_3.

另外在此注明, 本次作业内容(即实现的QR求解器)的核心代码在utils文件夹下, 程序入口在hw3文件夹下. 也就是说, 如果需要检查条件数计算器的实现, 则需要打开utils文件夹下的文件; 而如需改动方程组进行测试, 则需要在hw3文件夹下进行修改.

问题描述

利用课本给出的算法实现对于某矩阵 \mathbf{A} 进行QR分解, 并以此来解决最小二乘问题.

问题分析

对于第一题, 只是朴素的求解方程组, 不需要问题分析. 对于第二题, 将 $1, t, t^2$ 分别作为 \mathbf{A} 的三列, 将 y 作为 \mathbf{b} , 即可构建出最小二乘问题, 利用求解器求解即可. 第三题将 $1, a_1, \dots, a_{11}$ 作为 \mathbf{A} 的十二列, 将 y 作为 \mathbf{b} , 即可构建出最小二乘问题, 利用求解器求解即可.

结果展示

第一题

显示求解的具体结果会使得输出非常冗长, 代码中提供了可以选择打印求解结果与否的宏定义. 这里展示不打印具体结果的运行结果. Error指的是第二次作业提到的精度, 即 $\frac{\|x - \hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. 第一个方程不是对称正定的, 故只尝试使用LU分解, PLU分解和QR分解进行求解, 但QR求解器的结果是若干nan和一个inf和一个-inf, 可能的原因是运算中误差的累积使得 R 矩阵的对角元异常的小, 进而出现了回代的时候分母异常的小. 第二个方程可能形态比较好, 各个求解器的表现都很不错, 表现最好的是LDLT求解器, 最差的是QR求解器. 第三个方程比较病态, 误差的累积使得朴素的Cholesky求解器面临需要对负数开根的问题, 求解完全无法进行, 其他的求解器误差也都比较大, 这里一个意料之外的情况是PLU求解器的表现不如LU求解器, 这可能是因为系数矩阵过于病态, 选主元也未能有效提高精度.

```
Microsoft Visual Studio 调试 X + - X

Real solution:
LU solution:
Error: 2.14735e+09

PLU solution:
Error: 1.11898e-05

QR solution:
Error: inf

Real solution:
LU solution:
Error: 2.19767e-16

PLU solution:
Error: 2.19767e-16

QR solution:
Error: 7.32556e-16

Cholesky solution:
Error: 2.93022e-16

Cholesky(LDLT) solution:
Error: 1.46511e-16

Error(Better_Cholesky_solver): Trying to compute the square root of a negative number!
Warning(Better_Cholesky_solver): Matrix D has negative elements!
Real solution:

LU solution:
Error: 195.959

PLU solution:
Error: 376.105

QR solution:
Error: 84.0741

Cholesky solution:
Error: 0

Cholesky(LDLT) solution:
Error: 80.7288

D:\Code\数值代数\out\build\x64-Debug\hw3\hw3_1.exe (进程 42760)已退出，代码为 0 (0x0)。
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口。 . |
```

第二题

这个题非常人性化，可以用肉眼看出我的求解器给出的答案是正确的。

```
[ Microsoft Visual Studio 调试机 X + | - | X ]  
[ [ 1, 1, 1 ]  
]  
D:\Code\数值代数\out\build\x64-Debug\hw3\hw3_2.exe (进程 36068)已退出，代码为 0 (0x0)。  
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。  
按任意键关闭此窗口 . . .
```

第三题

```
[ Microsoft Visual Studio 调试机 X + | - | X ]  
[ [ 2.07752, 0.718888, 9.6802, 0.153506, 13.6796, 1.98683, -0.958225, -0.484023, -0.0736469, 1.0187, 1.44352, 2.90279 ]  
]  
D:\Code\数值代数\out\build\x64-Debug\hw3\hw3_3.exe (进程 38604)已退出，代码为 0 (0x0)。  
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。  
按任意键关闭此窗口 . . .
```

可以利用matlab来验证结果的正确性

线性回归模型：

y ~ 1 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11

估计系数：

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	2.0775	8.4629	0.24549	0.8092
x1	0.71889	0.85875	0.83713	0.41485
x2	9.6802	7.4694	1.296	0.21337
x3	0.15351	0.52321	0.29339	0.77299
x4	13.68	5.0295	2.7199	0.015142
x5	1.9868	1.8036	1.1016	0.28693
x6	-0.95822	2.6588	-0.3604	0.72326
x7	-0.48402	4.1978	-0.11531	0.90964
x8	-0.073647	0.092207	-0.79871	0.43616
x9	1.0187	0.71449	1.4258	0.17315
x10	1.4435	2.776	0.52001	0.61018
x11	2.9028	2.5258	1.1493	0.26734

观测值数目：28，误差自由度：16

均方根误差：4.09

R 方：0.951，调整 R 方 0.917

F 统计量(常量模型)：28, p 值 = 2.33e-08

讨论总结

此次作业实现了QR分解，并以此求解最小二乘问题。除了第一题的第一个方程组，程序的输出都符合预期，可以认为是比较成功的。