Taller de Interpolación

Métodos Numéricos

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

23 de Noviembre de 2018

Qué es interpolar?

Dados:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall\ i \neq j$

Interpolar consiste en hallar una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \quad \forall i$.

- Para qué sirve?
  - Esperamos que $\Phi(x) \approx f(x)$ para $x \in [x_0, x_n]$.
- ¿Qué pasa con $x \notin [x_0, x_n]$?
  - A priori no podemos asegurar nada.
  - Este caso se estudia usando métodos de *extrapolación*.
    Ej: Regresión Lineal (CML).
- Observación: Muchas veces no conocemos una fórmula cerrada de f.

Métodos de Interpolación - Polinomio Interpolador

$\{(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$

- Interpolar usando un polinomio p ($p = \Phi$).

- **<u>Unicidad:</u>** Existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para todo i.
  - Ej: Si tengo 10 puntos, ¿Cuántos polinomios interpoladores hay de grado menor o igual a 9? ¿Y de grado 10?

- Interpolador de Lagrange:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + \dots + f(x_n)L_n(x), \quad \text{con } L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

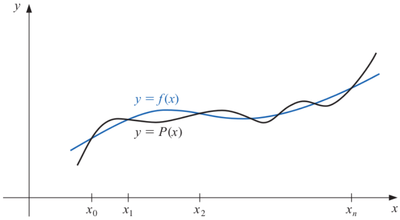
- Diferencias Divididas:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} f[x_i] & = f(x_i) \\ f[x_i, \dots, x_{i+k}] & = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

Métodos de Interpolación - Polinomio Interpolador

- Gráficamente:



- **Error:** Sea $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$, el error cometido al aproximar $f(x)$ usando $p(x)$ (con $gr(p) \leq n$), con $x \in [x_0, x_n]$ es:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_0, x_n)$$

- Ej: Error del polinomio interpolador lineal para $n = 1$ y $x \in [x_0, x_1]$

$$E(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1), \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_0, x_1)$$

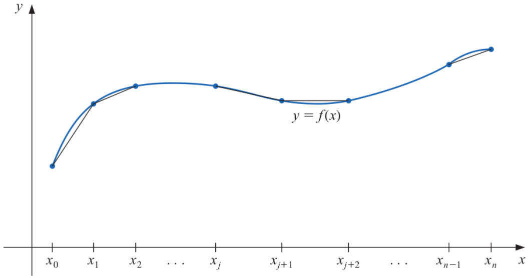
Métodos de Interpolación - Interpolación Fragmentaria Lineal

$\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

- Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con una recta (polinomio de grado 1).
- Puede pensarse como n (sub)problemas de interpolación lineal.
- El **error** cometido al interpolar $x \in [x_i, x_{i+1}]$ es:

$$E_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$$

- Gráficamente:

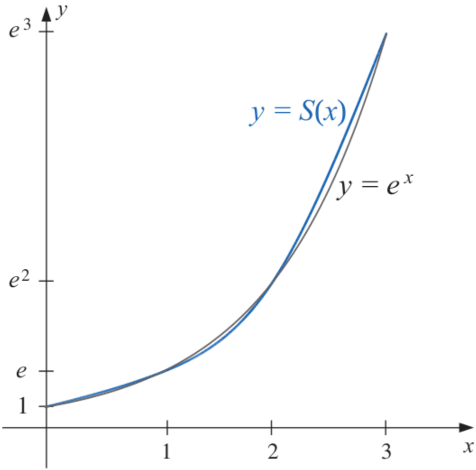


Métodos de Interpolación - Trazador Cúbico: Splines

$\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

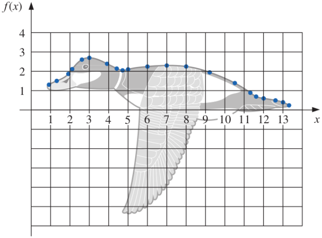
- Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
  - $gr(S_i) \leq 3$
  - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-1$ (contínua).
  - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).
  - $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada segunda contínua).
  - Si es natural, $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$.
  - Si es sujeto a f, $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$.
- Φ resulta en una interpolación “suave” de f.

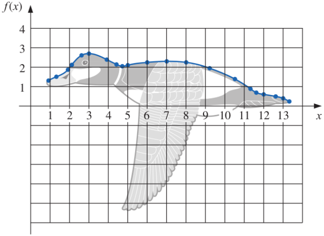
- Gráficamente:



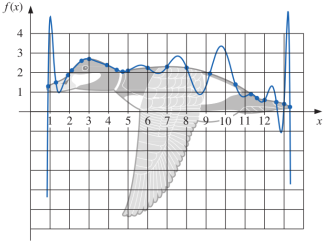
Ejemplo: Splines vs. Lagrange

$n = 20$ (21 puntos)





Splines



Lagrange

Ejercicio: Ayúdame, Métodos Numéricos. Eres mi única esperanza.

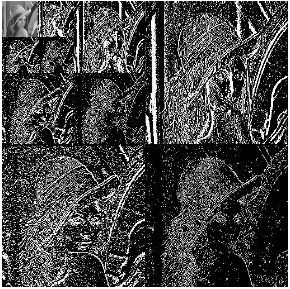
- Una nueva estación espacial de guerra está siendo construída por agrupaciones afines al viejo imperio.
- Un agente encubierto de la república encontró los planos y comenzó a transmitirlos, hasta que lo descubrieron y la transmisión fue interrumpida.
- Los planos estaban siendo enviados como una imagen en formato JPEG-2000. (????)
- Por lo tanto, tenemos los planos en una resolución muy pobre.

zooM

JPEG 2000

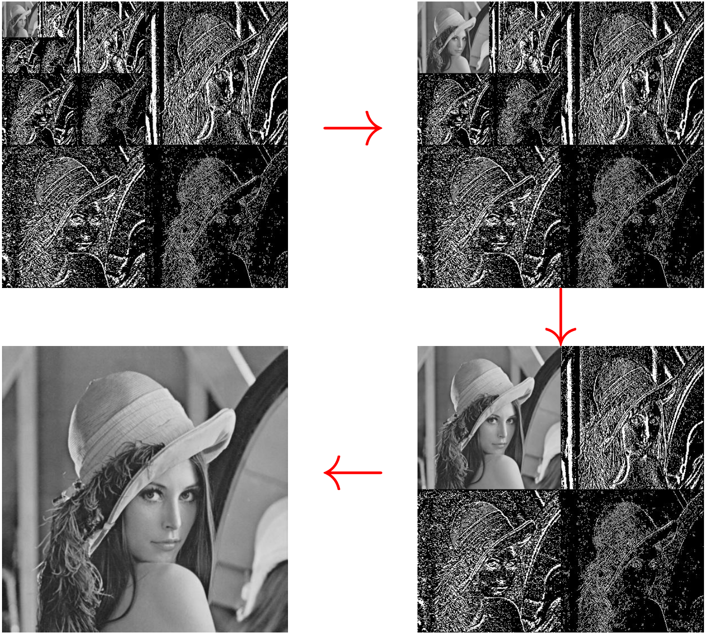
- Es un formato de compresión de imágenes que permite una *transmisión progresiva*.
- Aplica una *transformada wavelet* a la imagen.

$\rightsquigarrow$



- La transmisión se realiza desde la pieza más chica (arriba a la izquierda) que corresponde a una versión de baja resolución de la imagen.
- Luego se van transmitiendo las demás partes, siempre desde las piezas más chicas a las más grandes. Las demás piezas permiten reconstruir la imagen en resoluciones progresivamente mayores, hasta llegar a la resolución original.

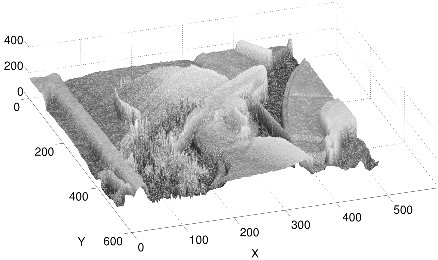
JPEG 2000 - Reconstrucción Progresiva



¿Qué es una imagen?

Podemos pensarla como una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$



- $f(x, y)$ es la *intensidad* en la posición (x, y).
- Restringimos el dominio a un rectángulo y el codominio a un rango de intensidades:

$$f : [a, b] \times [c, d] \to [0, 255]$$

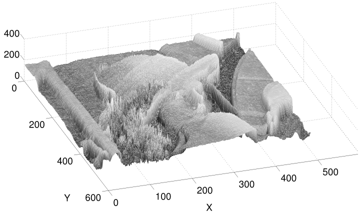
⚠ **El eje y lo vamos a usar en la dirección opuesta a la habitual.**

¿Qué es una imagen?

Podemos pensarla como una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Problema: No podemos almacenar $f(x, y)$ para los infinitos $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

  Solución: Muestrear el dominio. (Imagen digital)



$\rightsquigarrow$

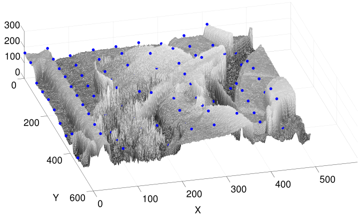
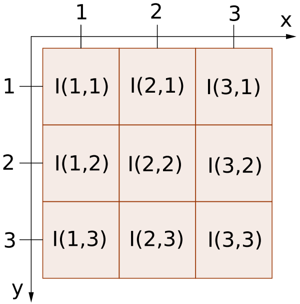


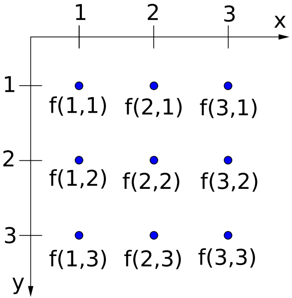
Imagen digital

Podemos pensarla como una matriz de pixels $I \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- $I(x, y)$ es la *intensidad* del pixel en la fila y, columna x. $x \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in \{1, \ldots, m\}$.
- Restringimos a un rango de intensidades: $I(x, y) \in [0, 255]$.
- Dada una imagen $f : [1, n] \times [1, m] \to [0, 255]$, obtenemos una imagen digital realizando un *muestreo* de f:

$$I(x, y) = f(x, y), \quad \text{con } x \in \{1, \ldots, n\},\ y \in \{1, \ldots, m\}$$





Imágenes - Observaciones

- ¿Cómo se representa una imagen RGB?
  Con tres imágenes, una por cada canal.

- Para visualizar una imagen, debemos realizar un mapeo de cada $I(x, y)$ al conjunto $\{0, \ldots, 255\}$. En este taller vamos a tomar $round(I(x, y))$, siendo

$$round(\alpha) = \begin{cases} \lfloor\alpha\rfloor & \text{si } \alpha - \lfloor\alpha\rfloor < 0{,}5 \\ \lceil\alpha\rceil & \text{si } \alpha - \lfloor\alpha\rfloor \geq 0{,}5 \end{cases}$$

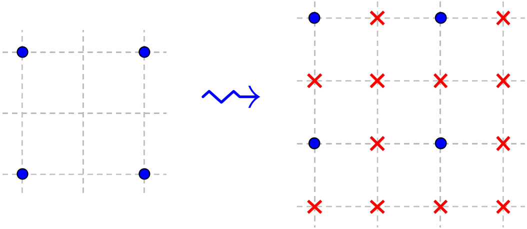
Zoom digital

Es una transformación de una imagen digital I_a en I_b de mayor tamaño, definida por:

1. Cantidad de píxels a agregar y la posición espacial de cada uno.
2. Cálculo de la intensidad de cada píxel en la nueva imagen.

1. Vamos a limitarnos a estudiar los zooms "nX" con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ que multiplican por n la cantidad de filas y columnas de la imagen. Los pixels de la imagen original se mantienen intactos y se agregan pixels intermedios equidistantes. Por ejemplo:

Zoom $2X$:



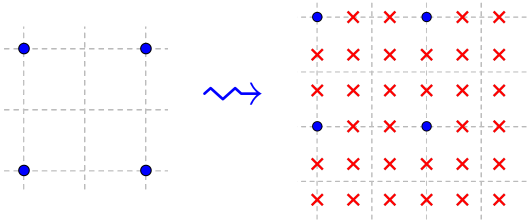
Zoom digital

Es una transformación de una imagen digital I_a en I_b de mayor tamaño, definida por:

1. Cantidad de píxels a agregar y la posición espacial de cada uno.
2. Cálculo de la intensidad de cada píxel en la nueva imagen.

1. Vamos a limitarnos a estudiar los zooms ''nX'' con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ que multiplican por n la cantidad de filas y columnas de la imagen. Los pixels de la imagen original se mantienen intactos y se agregan pixels intermedios equidistantes. Por ejemplo:

Zoom $3X$:

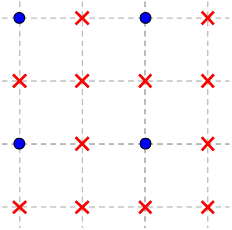


Zoom digital

Es una transformación de una imagen digital I_a en I_b de mayor tamaño, definida por:

1. Cantidad de píxels a agregar y la posición espacial de cada uno.
2. Cálculo de la intesidad de cada píxel en la nueva imagen.

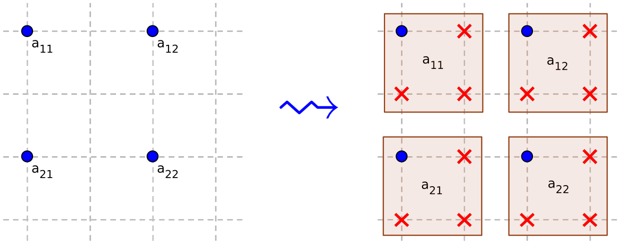
2. ¿Cómo calculamos la intensidad en cada pixel?

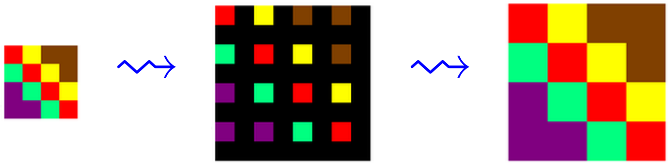


- Si el pixel estaba en la imagen original, queda igual.
- Si el pixel es nuevo, ¿qué hacemos?

Zoom digital - Vecino Más Cercano

Cada pixel de la imagen original es copiado en sus vecinos.

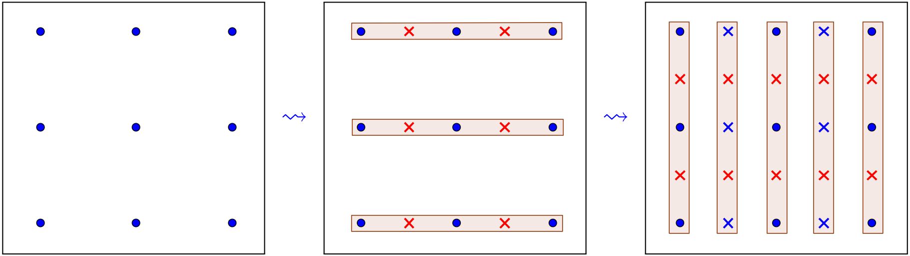




Zoom digital con métodos de interpolación

1. Para cada fila de la imagen, construimos una función interpoladora $\Phi_{\tilde{y}}(x)$ para la función $f(x, \tilde{y})$, con $\tilde{y}$ fijo y hallamos los valores de los pixels intermedios.

2. Luego para cada columna de la imagen (incluso las columnas interpoladas previamente), calculamos la función interpoladora $\Phi_{\tilde{x}}(y)$ para la función $f(\tilde{x}, y)$ e interpolamos en los pixels intermedios.



- ¿Y en los bordes? Antes de aplicar el método, extendemos la imagen original copiando la anteúltima fila y columna.

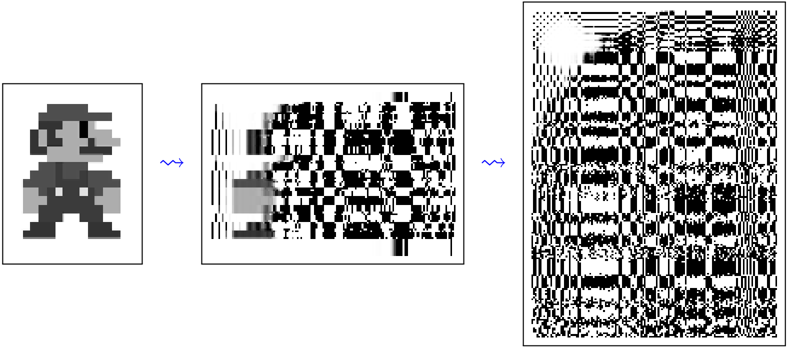
Zoom digital con métodos de interpolación

¿Cómo elegimos Φ?

1. Polinomio interpolador.
2. Interpolación fragmentaria lineal (zoom Bilineal).
   - No importa el orden de los pasos. Se puede interpolar primero por filas o primero por columnas.
3. Spline (natural).

Zoom digital con métodos de interpolación - Ejemplo

Realizamos zoom de 2X usando como ϕ un polinomio interpolador.



¿Qué pasó?

- Oscilación del polinomio interpolador.
- Error creciente al interpolar tantos puntos.

Zoom digital - Calidad - Artifacts

¿Cómo podemos comparar distintos métodos de zoom?

- La observación de *artifacts* es una manera de medir la calidad de un método de zoom digital.
- ¿Qué *artifacts* pueden introducir los métodos de interpolación?

Aliasing Blurring Edge Halo

- ¿Por qué aparecen los *artifacts*? Por el error de interpolación.

Zoom digital - Calidad - Remuestreo

¿Cómo podemos comparar distintos métodos de zoom?

- Hacemos un remuestreo de la imagen para achicarla, aplicamos zoom y comparamos con la original.

⚠ El remuestreo se debe hacer con el mismo método para no introducir el error de otro método.

- Podemos comparar con EAM, ECM y PSNR. Sean $\tilde{I}, I \in [0, 255]^{m \times n}$ la imagen con zoom y la original respectivamente.
  - Error Absoluto Medio:
  $$EAM(\tilde{I}, I) = \frac{1}{mn} \sum_x \sum_y |\tilde{I}(x,y) - I(x,y)| \quad \in [0, 255]$$
  - Error Cuadrático Medio:
  $$ECM(\tilde{I}, I) = \frac{1}{mn} \sum_x \sum_y (\tilde{I}(x,y) - I(x,y))^2 \quad \in [0, 255^2]$$
  - Peak Signal-to-Noise Ratio:
  $$PSNR(\tilde{I}, I) = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE(\tilde{I}, I)} \right) \; [dB] \quad \in [0, \infty)$$