

Ayúdame, Métodos Numéricos. Eres mi única esperanza.

Agrupaciones afines al antiguo imperio galáctico se unieron para crear una nueva estación espacial de destrucción masiva, la *Estrella de la Muerte III*. El ejército de la república, al mando de la general Leia Organa, estuvo los últimos meses intentando conseguir los planos de la estación espacial sin éxito. Hace unos días, un agente encubierto logró llegar a ellos en una misión secreta y, utilizando el formato JPEG-2000, comenzó a transmitir los planos a la base espacial más cercana. En un momento lo descubrieron y la transmisión fue interrumpida. El formato utilizado transmite la imagen aumentando su resolución progresivamente. Dado que sólo tenemos un fragmento de la transmisión, la resolución de los planos es muy pobre y la general Organa nos pidió que los ampliemos para empezar a analizar debilidades en la nueva estación espacial y organizar un ataque.

Para realizar la ampliación de las imágenes de los planos, en este taller vamos a analizar tres tipos de zoom: vecino más cercano, interpolación bilineal y splines. Además vamos a estudiar el error producido al interpolar píxeles, desde el punto de vista teórico, empírico y visual (mediante el reconocimiento de *artifacts*).

Ejercicios

1. Seleccione la opción correcta. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea p un polinomio interpolador de f en $\{x_0 \dots x_n\}$. Si el error cometido al interpolar es nulo, entonces:

- ☐ $f(x) = p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $f(x) = p(x) \quad \forall x \in [x_0, x_n]$
- ☐ Ninguna de las anteriores.

2. Dada la imagen $f : [1, 200] \times [1, 200] \rightarrow [0, 255]$, $f(x, y) = g(x) + h(y)$, siendo:

$$g(x) = c \left(\frac{1}{24}x^3 - \frac{55}{4}x^2 + 1200x \right), \quad \text{con } c = 6,375 \times 10^{-3}$$

$$h(y) = 0,255y$$

Definimos la imagen digital I como $I(x, y) = f(x, y)$ para $x, y \in \{1, \dots, 200\}$. Observar que la imagen es de 200×200 (en escala de grises, ver Figura 1). Se desea aplicar zoom de 2X a I (es decir, ampliarla al doble de filas y doble de columnas) utilizando el método *Bilineal* (IFL¹ por columnas y luego por filas).

- a) Sea $\tilde{x} \in \{1, \dots, 200\}$ una columna de la imagen. Se realiza IFL de los puntos

y_i	1	2	...	200
$I(\tilde{x}, y_i)$	$I(\tilde{x}, 1)$	$I(\tilde{x}, 2)$...	$I(\tilde{x}, 200)$

(i.e., a lo largo de cada columna). Observar que $I(\tilde{x}, y_i) = f(\tilde{x}, y_i)$.

Calcular el módulo del error cometido $|E_{\tilde{x}}(y)|$ para todo $y \in [1, 200]$.

Luego de realizar IFL a lo largo de cada columna, obtenemos una nueva imagen $I'(x, y)$ definida para $x \in \{1 \dots 200\}$, $y \in \{1; 1,5; 2; 2,5; \dots; 199,5; 200\}$ (i.e., se duplica la cantidad de filas de la imagen I).

¹IFL: Interpolación Fragmentaria Lineal

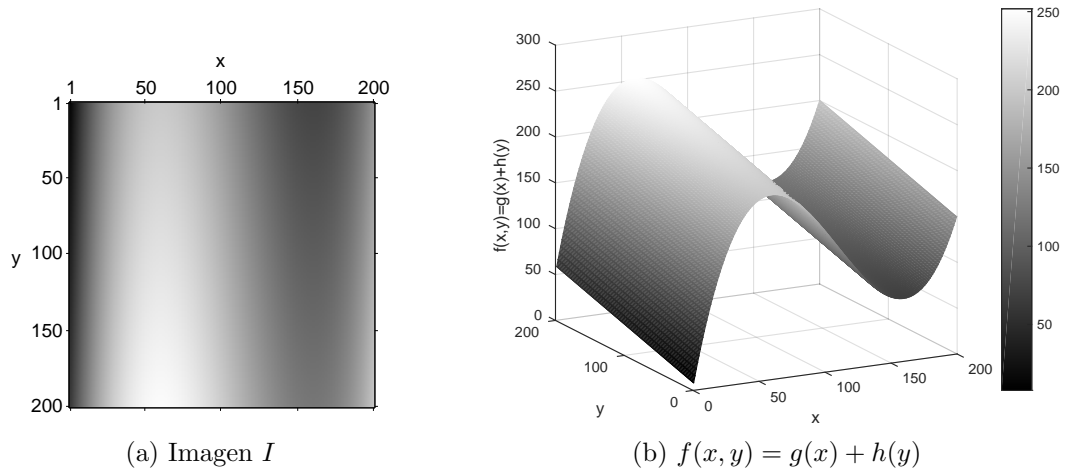


Figura 1: Representación en imagen digital I de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Probar que $I'(x, y) = f(x, y)$ para todo x, y donde I' está definida.

Sugerencia: Tener en cuenta el resultado del ítem anterior y la respuesta al ejercicio 1.

c) Sea \tilde{y} una fila de I' . Se realiza IFL de los puntos

x_i	1	2	...	200
$I'(x_i, \tilde{y})$	$I'(1, \tilde{y})$	$I'(2, \tilde{y})$...	$I'(200, \tilde{y})$

(i.e., a lo largo de cada fila).

Acotar el módulo del error cometido $|E_{\tilde{y}}(x)|$ para todo $x \in [1, 200]$.

d) A partir de los resultados previos, acotar el error absoluto cometido en cada píxel de la interpolación bilineal de I .

3. Utilizando el script `zoom.m` y las imágenes provistas, hallar:

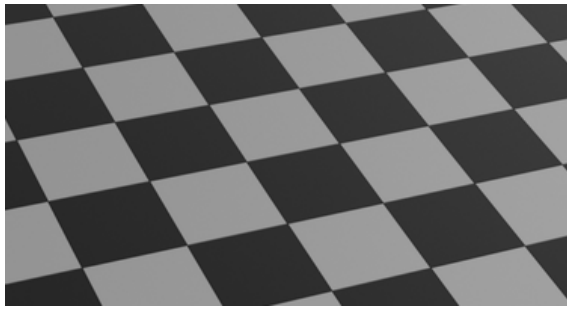
- Un ejemplo donde el método Splines tenga el mejor $PSNR$.
- Un ejemplo donde el método Bilineal tenga el mejor $PSNR$.
- Un ejemplo donde el método Vecino más Cercano tenga $ECM = 0$ (sin error).

Indicar para cada caso:

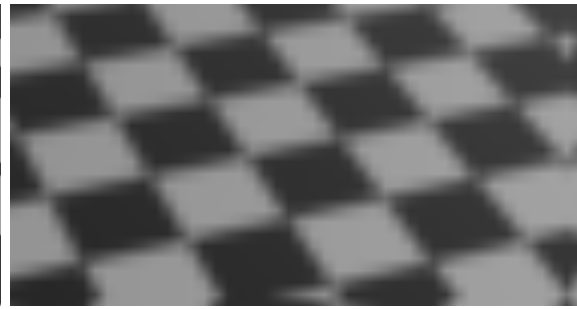
- La imagen que fue utilizada.
- La posición del recorte seleccionado $(x, y, ancho, alto)$.
- El nivel de zoom que fue aplicado (2X, 3X, ...).
- El recorte original y el zoom de cada método (por ejemplo ver Figura 2).
- Los valores de \sqrt{ECM} y $PSNR$ de cada uno.

¿Se corresponde el valor de $PSNR$ con la calidad visual percibida (considerando artifacts)?.

- Se aplicaron los tres métodos de zoom a un recorte de un tablero (ver Figura 2). Analice las tres imágenes e indique a qué método corresponde cada una. Justifique su elección.
- En base al análisis realizado, ¿qué método utilizaría en los planos de la estrella de la muerte? Justifique su respuesta.



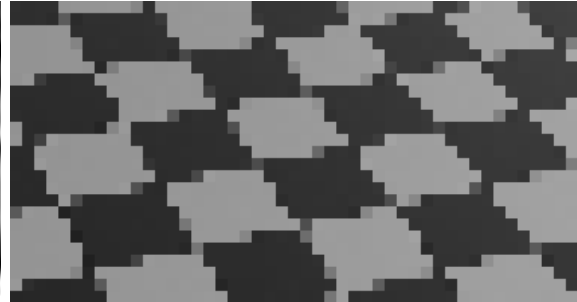
(a) Original



(b) Zoom con método 1



(c) Zoom con método 2



(d) Zoom con método 3

Figura 2: ¿A qué método corresponde cada una?

Ejercicios Opcionales

6. Dados los puntos:

x_i	1	2	4	5
$f(x_i)$	0	2	12	20

Calcular el polinomio interpolador de grado menor o igual que 3 usando el método de:

- a) Lagrange.
- b) Diferencias divididas.

7. Dados los puntos $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 7)$, determinar cuántos polinomios de grado d existen que pasen por todos los puntos, para

- a) $d = 2$
- b) $d = 3$
- c) $d = 4$

Para cada valor de d , en caso de ser posible, mostrar uno.

Evaluación

- Coloquio con los docentes durante la clase.
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución por escrito hasta el Miércoles 28 de noviembre, incluidos los Ejercicios Opcionales.