Tomografía computada

Introducción

El objetivo del trabajo práctico es evaluar un método para reconstruir imágenes tomográficas sujetas a ruido, utilizando aproximación por cuadrados mínimos.

En muchos ámbitos de la medicina se trabaja con estudios que buscan obtener los mejores resultados posibles con instrumentos que poseen error. Ejemplo de esto son las tomografías computadas, donde se atraviesa el objeto de estudio con rayos X. Luego, según la proporción de la radiación que llega al otro lado, se consigue estimar la densidad del objeto atravesado.

Dado que cada envío de un rayo atraviesa una sección distinta del objeto se realizan múltiples disparos con diferentes ángulos para tratar de capturar todas las partes del objeto. Como además los instrumentos tienen errores de medición es recomendable realizar repetidas veces el mismo envío para tratar de disminuir los efectos negativos asociados. Dada una cierta granularidad elegida para representar la imagen se tomará luego una serie de mediciones con los rayos y se determinará un sistema de ecuaciones. La particularidad de dicho sistema es que será sobredeterminado, debido a que se toman más mediciones que cantidad de incógnitas. Para conocer los niveles de densidad en cada parte del objeto en la discretización basta entonces resolver este sistema, para lo que se usarán los métodos numéricos vistos en la materia.

Así como en muchas aplicaciones, no siempre es posible contar con datos reales ya sea porque son difíciles o caros de conseguir o, como en este caso, porque no es razonable realizar sucesivas tomografías sobre un individuo por la cantidad de radiación que podría recibir. En este trabajo realizaremos una *simulación* sobre una imagen sintética que consideraremos proveniente de un tomógrafo lo que nos permitirá además juzgar que tan buena es la aproximación obtenida.

Método de reconstrucción

El análisis tomográfico de una sección (que suponemos bidimensional y cuadrada) de un cuerpo consiste en emitir señales de rayos X que lo atraviesan en diferentes direcciones, midiendo el tiempo[1] que tarda cada uno en atravesarlo.

Supondremos que el cuerpo se discretiza en $n \times n$ celdas cuadradas. Si d_{ij}^k es la distancia que recorre el k-ésimo rayo en la celda ij (notar que $d_{ij}^k = 0$ si el rayo no pasa por esta celda) y v_{ij} es la velocidad de la señal del rayo en esa celda, entonces el tiempo de recorrido de la señal completa es:

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k v_{ij}^{-1}. \tag{1}$$

Como resultado del análisis tomográfico, se tienen mediciones del tiempo que tardó cada señal en recorrer el cuerpo. Si se emitieron m señales, entonces el resultado es un vector

[1] Esto es una simplificación, en realidad se mide la intensidad de los rayos.

$t \in \mathbb{R}^m$, tal que t_k indica el tiempo de recorrida de la k-ésima señal. Sea $D \in \mathbb{R}^{m \times n^2}$ una matriz cuyas filas se corresponden con las m señales y cuyas columnas se corresponden con las n^2 celdas de la discretización del cuerpo de forma vectorizada, y tal que la fila k contiene los valores d_{ij}^k en las columnas correspondientes a cada celda. Entonces, las velocidades de recorrida originales v_{ij}^{-1} se pueden reconstruir resolviendo el sistema de ecuaciones $Ds = t$. El vector solución $s \in \mathbb{R}^{n^2}$ contiene los valores inversos de las velocidades originales en cada celda que representarán las densidades en cada punto del cuerpo escaneado. Notar que estos valores serás las incógnitas de nuestro problema y por lo tanto no hará falta invertirlos.

Un problema fundamental que debe considerarse es la presencia de errores de medición en el vector t de tiempos de recorrido. Dado que el sistema estará en general sobredeterminado, la existencia de estos errores hará que no sea posible encontrar una solución que satisfaga al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema. Para manejar este problema, el sistema $Ds = t$ se resuelve utilizando el método de aproximación por *cuadrados mínimos*, obteniendo así una solución que resuelve de forma aproximada el sistema original.

Proceso de simulación tomográfico

Debido a la imposibilidad de contar con un tomógrafo real y acceder a los datos crudos del mismo, realizaremos un proceso de simulación tomográfico el cual consistirá en generar datos de prueba partiendo de imágenes sintéticas que consideraremos reales, es decir, serán la sección de nuestro objeto a escanear[2]. Para los fines de este procedimiento, se considerará que el valor de cada píxel de la imagen corresponde al dato real de densidad del cuerpo, es decir, a la velocidad (inversa) de recorrida de las señales de rayos X al atravesar ese píxel.

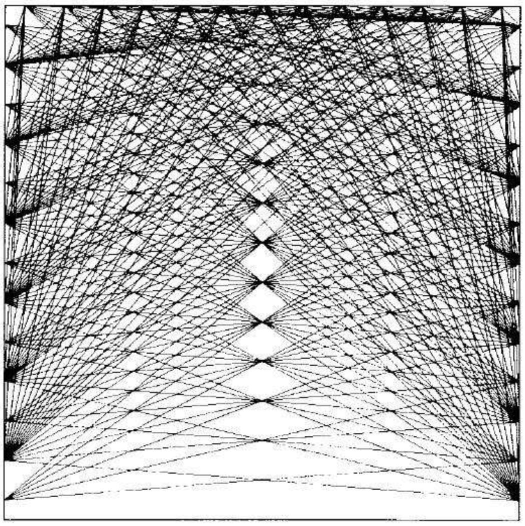
Generación de rayos

Parte del proceso de simulación tomográfico, consiste en generar rayos sobre la imagen real o cuerpo a escanear de distinta forma. Distintos tomógrafos generan rayos de diversas formas, algunos generan rayos de forma axial, otros rayos paralelos, etc. En la Figura 1(a) se muestra una posible distribución de estos rayos.

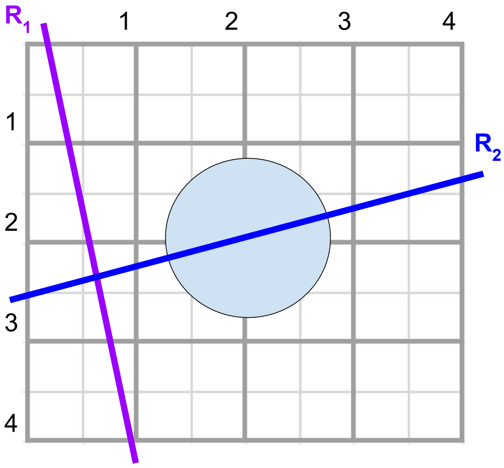
Una vez definida la forma de generar rayos, se debe definir la discretización del espacio a escanear. Este modelo así definido permite representar muchos tipos de tomógrafos distintos con sólo variar la forma de los rayos y la discretización. Dado que poseemos la imagen real sobre la cual realizaremos nuestra simulación, primero generaremos los rayos sobre ella para poder medir el tiempo t_k de cada rayo k y la longitud del mismo rayo en cada celda de la grilla discretizada d_{ij}^k.

Veamos un ejemplo, supondremos que tenemos una imagen de real de tamaño 8×8 y la discretizamos en una grilla de 4×4 (ver Figura 1(b)). Para los rayos R_1 y R_2, obtendremos los valores $t_1 = 0$ y $t_2 = 15$ resultado de la suma de las intensidades de los píxeles que el rayo R_1 y R_2 toca en la imagen original, respectivamente. Luego, obtendremos los siguientes valores de distancias para cada rayo (donde los que no se indican son iguales a cero). Rayo R_1: $d_{11}^1 = 2$, $d_{21}^1 = 3$, $d_{31}^1 = 2$ y $d_{41}^1 = 2$. Rayo R_2: $d_{31}^2 = 3$, $d_{32}^2 = 2$, $d_{23}^2 = 2$ y $d_{24}^2 = 3$.

[2]Con el presente trabajo se adjuntan imágenes de prueba, sin embargo cada grupo puede proponer las suyas.



(a)



(b)

Figura 1: Ejemplo de generación de señales de rayos X.

Procedimiento

1. Leer desde un archivo una imagen con los datos reales de un objeto de estudio.
2. Definir un tamaño de discretización $n \times n$ para la imagen a reconstruir.
3. Generar un conjunto relevante de rayos y calcular sus tiempos de recorrida exactos.
4. Perturbar los tiempos de recorrida con ruido aleatorio.
5. Guardar para cada rayo los tiempos t_k y los valores d_{ij}^k
6. Ejecutar el método propuesto en la sección anterior sobre los datos perturbados, con el objetivo de reconstruir el cuerpo original. La imagen resultante se debe guardar en un archivo de salida.

Enunciado

El trabajo práctico consiste en implementar un programa en `C++` que simule el proceso de tomografía y reconstrucción. Para el mismo, se **deberán** generar datos de prueba simulando el proceso de tomografía computada descripto en el presente trabajo práctico. Dado que el proceso consiste en incorporar ruido a las mediciones, se desea evaluar la calidad de reconstrucción comparada con la imagen real.

El programa **deberá** tener como parámetros (al menos) los nombres de los archivos de la imagen de entrada (a utilizar en la simulación) y de salida de la imagen reconstruida, junto con un parámetro que permita especificar el nivel de ruido a introducir en la imagen. La cantidad y tipo de parámetros puede modificarse por cada grupo.

Se **deben** probar con distintas estrategias geométricas para generar las señales de rayos X, y distintas discretizaciones. Buscar la que mejor reconstrucción posea[3]. Ejemplo de generación de rayos pueden ser: paquetes de señales radiando de puntos fijos o puntos de inicio móviles, señales partiendo de los cuatro lados de la imagen o sólo de algunos lados, variación de rango de ángulos de salida de las señales, de forma aleatoria, etc. Reportar también los casos fallidos y justificar las causas de fallo.

Para resolver cuadrados mínimos de **debe** utilizar la descomposición SVD.

Además, se **debe** medir el número de condición κ_2 de la matriz asociada al sistema de ecuaciones normales $D^tDx = D^tt$ que resuelve el problema de cuadrados mínimos, para analizar la estabilidad de la solución. **Definir** condiciones para que D^tD sea SDP y posea un número de condición bajo. **Justificar** teóricamente y corroborar experimentalmente.

Por último, este trabajo **tendrá** una presentación oral frente al curso que será evaluada como una parte adicional de la nota. Para la misma, cada grupo diseñará una presentación con diapositivas incluyendo los desarrollos y resultados que considere interesantes del propio informe, y dispondrá de 15 minutos para exponerlo. Ver sección "Pautas para la exposición oral".

Experimentación

La particularidad de este trabajo práctico es que cada grupo **debe** proponer nuevas experimentaciones basadas en lo pedido en la sección de Enunciado y lo que el grupo considere relevante. Para guiar la experimentación, a continuación se proponen algunas líneas de trabajo las cuales no son exhaustivas pero que pueden servir como disparadores de nuevas experimentaciones.

Se desea analizar el impacto del nivel y tipo de ruido introducido en función de la calidad de reconstrucción. También, la discretización utilizada jugará un rol importante en la calidad de reconstrucción y en el tiempo de procesamiento.

Para medir el error de la imagen reconstruida se propone utilizar el PSNR, definido como:

$$\texttt{PSNR} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\texttt{MAX}_u^2}{\texttt{ECM}}\right)$$

donde $\texttt{MAX}_u$ define el rango máximo de la imagen y $\texttt{ECM}$ es el *error cuadrático medio*, definido como:

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j}(u_{ij}^0 - u_{ij})^2$$

donde N es la cantidad de píxeles de la imagen, u^0 es la imagen *ideal* y u es la imagen que reconstruimos. Tener en cuenta que previo a aplicar el PSNR ambas imágenes deben poseer las mismas dimensiones. Si bien esta métrica se condice en gran medida con la calidad percibida por las personas, una variación homogénea de las intensidades en los píxeles de la imagen reconstruida, producirá altos valores de ECM y por ende bajos valores de PSNR. Para lidiar con este problema se sugiere utilizar de forma complementaria alguna métrica que considere errores *normalizados*.

[3] Para facilitar la implementación de esta función se adjunta un código Matlab/Octave de ejemplo.

Analizar el condicionamiento de la matriz y su relación con la forma y cantidad de rayos generada.

Puntos opcionales no obligatorios

Utilizar alguna de las siguientes opciones para resolver cuadrados mínimos y comparar con el método requerido:

1. Factorización QR.
2. Cholesky sobre las ecuaciones normales.
3. Gauss-seidel sobre las ecuaciones normales.

Notar que en el procedimiento de simulación descripto anteriormente, la alteración de los tiempos de recorrida solamente afecta al término independiente en el sistema de ecuaciones normales. Por la tanto, teniendo la factorización LU, es posible experimentar con muchos niveles de ruido de forma más eficiente. Mencionar en qué casos esto es conveniente.

En caso de que el sistema tenga un número de condición alto, se pueden intentar esquemas de regularización para mejorar la estabilidad de la solución obtenida.

Pautas para la exposición oral

Como se mencionó anteriormente, además del informe del trabajo práctico, se deberá crear una presentación con diapositivas la cual cada grupo deberá exponer en a lo sumo 15 minutos en la fecha indicada por los docentes. La presentación y exposición será evaluada y formará parte de la nota del trabajo práctico. Para la misma se deberán seguir las siguientes pautas:

- No sobrepasar los **15 minutos** de exposición.
- La exposición es requisito para aprobar el TP3 pero la misma no implica garantía de aprobación de todo el trabajo práctico.
- La exposición puede ser de la totalidad o de un subconjunto de los integrantes, y esta decisión queda a elección de cada grupo. Una vez finalizada la misma, se llevará a cabo un coloquio donde los integrantes del grupo responderán a las preguntas realizadas.
- Cabe mencionar que los docentes podrán elegir qué alumno debe responder, con lo cual es importante que todos los integrantes estén al tanto de todas las decisiones tomadas.
- Ver consejos para la creación de presentaciones en la sección “Descargas” del sitio de la materia.

Fecha de entrega

- *Formato Electrónico:* domingo 2 de diciembre hasta las 23.59 hs, enviando el trabajo (informe + código) a la dirección `metnum.lab@gmail.com`.

    - El subject del email debe comenzar con el texto `[TP3]` seguido de la lista de apellidos de los integrantes del grupo separados por punto y coma `;`.
      Ejemplo: `[TP3] Lennon; McCartney; Starr; Harrison`

    - Se ruega no sobrepasar el máximo permitido de archivos adjuntos de 20MB. Tener en cuenta al realizar la entrega de no ajuntar bases de datos disponibles en la web, resultados duplicados o archivos de backup.

- *Formato físico:* no es necesario.
- *Recuperatorio:* jueves 20 de diciembre hasta las 23.59 hs, enviando el trabajo corregido a la dirección `metnum.lab@gmail.com`
- *Exposición oral:* viernes 21 de diciembre desde las 17hs.
- Pautas de laboratorio:
  `https://campus.exactas.uba.ar/pluginfile.php/109008/course/section/16502/pautas.pdf`

Importante: El horario es estricto. Los correos recibidos después de la hora indicada serán considerados re-entrega.