METODOS NUMERICOS

28 de noviembre de 2018

Taller

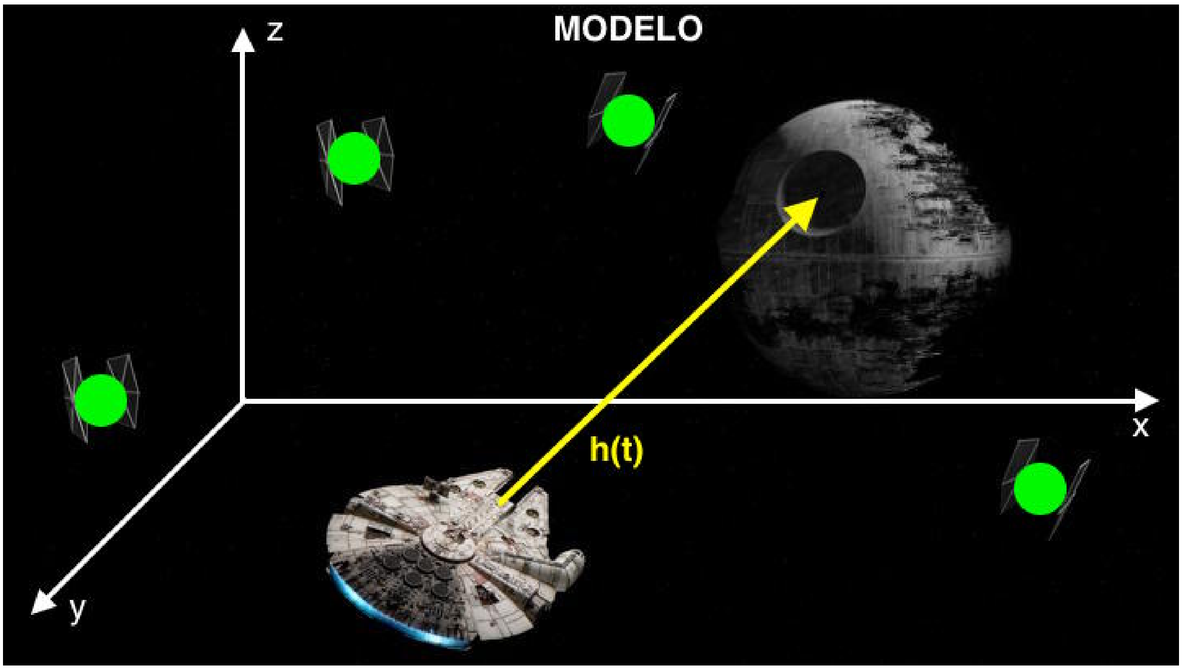
EPISODIO X: Ceros de funciones

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

A long time ago in a galaxy far,
far away. . . .

Son tiempos de guerra civil. Naves rebeldes han atacado desde una base secreta y han obtenido su primera victoria contra el malvado Imperio Galáctico. Durante la batalla espías rebeldes lograron robar los planos secretos del arma más extrema del Imperio, la ESTRELLA DE LA MUERTE, una estación espacial blindada con suficiente potencia para destruir un planeta entero. La nave Halcón Milenario comandada por Han Solo se encuentra en una misión especial: debe destruir la Estrella de la Muerte construida por un maléfico Lord Sith. Cercanas a la Estrella, se encuentran naves estelares protegiéndola y a la espera de detectar intrusos rebeldes para destruirlos. Para evadir los radares de las naves estelares que se encuentran dispersas en su trayecto, el Halcón Milenario debe moverse lentamente en línea recta y con sus escudos desactivados. Nuestro objetivo es decidir si es necesario enviar una señal de alerta a Han Solo en su trayecto a la Estrella de la Muerte cuando se encuentre a una distancia crítica de las naves estelares que la protegen. Así, Han Solo podrá activar sus escudos y llegar a salvo a su objetivo.



Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^3$ las ubicaciones de las naves estelares en el espacio (puntos verdes en la figura), y sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ la función de trayectoria del Halcón Milenario, expresada como una trayectoria paramétrica en función del tiempo. Asumimos que la trayectoria es una recta, es decir $h(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}^3$ (ver modelo en la figura). En el instante $t \in [0, 1]$, Han Solo estará en la posición $h(t)$, y su nivel de peligro está dado por:

$$A(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|h(t) - y_i\|_2}$$

Es decir, cada nave estelar aporta al nivel de peligro una cantidad que es inversamente proporcional a la distancia del Halcón Milenario a la nave estelar. Si en algún instante $t \in [0, 1]$ el nivel de peligro $A(t)$ es mayor o igual que un cierto valor crítico C, Han Solo deberá ser alertado para que active sus escudos y llegar a salvo a la Estrella de la Muerte.

Enunciado

El objetivo del Taller es implementar y comparar métodos numéricos para hallar algún instante de tiempo donde se alcance un nivel de peligro crítico de modo de alertar a Han Solo.

Para ello se debe:

1. Plantear una ecuación no lineal $f(t) = 0$ tal que una raíz de la misma indique que Han Solo debe ser alertado (es decir, el nivel de peligro es crítico).
2. *Newton-Raphson.*
   (a) Calcular explícitamente la derivada de f y plantear la iteración de Newton-Raphson para hallar una raíz de f. Definir f y su derivada en el script `CasoPrueba1.m`; completar la implementación del método en `NewtonR.m`.
   (b) Considerar los siguientes valores en `CasoPrueba1.m`: $C = 1, y_1 = (2, 3, -0.5), y_2 = (2, 0.5, 0.5), a = (3, 1, 1), b = (1, 1, -0.5)$.
   Mostrar gráficamente que Newton-Raphson cumple las condiciones del teorema de punto fijo en algún intervalo incluido en $[0, 1]$ con lo cual puede asegurarse la convergencia del método en dicho intervalo.
3. Comparar las velocidades de convergencia de los métodos de Bisección y Newton-Raphson. Para ello, sean $\{x_k^{(M)}\}_{k=0,\ldots}$ la sucesión de puntos del método M convergentes a la raíz r de f, donde M es Newton-Raphson o bisección. Graficar y mostrar los valores del error $e_k^M = |r - x_k^{(M)}|$.
4. Mostrar otras dos funciones de punto fijo (diferentes a Newton-Raphson) tal que la raíz de la ecuación no lineal del item 1 sea punto fijo de dichas funciones.
5. (**Opcional**) Implementar el método de la Secante y compararlo con los anteriores en cuanto a velocidad de convergencia.
6. (**Opcional**) Lord Kepler, dominando los secretos del lado oscuro de la Fuerza, descubrió las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol (y cualquier otra estrella, incluida la de la Muerte). Los planetas giran en una órbita elíptica, uno de cuyos focos lo ocupa el Sol, pero no lo hacen con un movimiento uniforme, sino cubriendo áreas iguales en tiempos iguales. El plasmado matemático de esta ley es la Ecuación de Kepler:
$$M = E - e \sin E$$

donde M es la anomalía media o ángulo que recorrería un planeta ficticio que se moviese con movimiento uniforme por la circunferencia principal, e es la excentricidad de la elipse situada entre $0 \leq e < 1$ y E es la anomalía excéntrica que es la **incógnita** que permite obtener la posición del planeta. Se pide:

(a) Probar que si la iteración de punto fijo dada por la función $g(E) = M + e\sin(E)$ converge, entonces converge a una solución de la ecuación de Kepler.

(b) Dados $M = 1$ y $e = 0.5$, demostrar que la iteración de punto fijo dada por g converge para cualquier $E_0 \in [1, 2]$.

(c) Plantear la iteración de Newton y probar que converge siempre para cualquier valor de M y e, partiendo de un E_0 lo suficientemente cerca de la solución.

Sugerencia: reescribir la ecuación de Kepler como $0 = E - e\sin E - M$.

Evaluación

- Coloquio con los docentes durante la clase.
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución por escrito hasta el miércoles 5 de diciembre, incluidos los Ejercicios Opcionales.