Examen 2

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Resuelve el siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Solución.

```
t(matrix(1, nrow = 1, ncol = 6)) %*% matrix(1, nrow = 1, ncol = 6)
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    1    1    1    1    1
[2,]    1    1    1    1    1    1
[3,]    1    1    1    1    1    1
[4,]    1    1    1    1    1    1
[5,]    1    1    1    1    1    1
[6,]    1    1    1    1    1    1
```

Pregunta 2

Dada la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Calcular la matriz escalonada equivalente de la matriz A
(b) Calcular su inversa

Solución.

```
A = matrix(c(1, 1, 0, 1,
             0, 1, 1, 1,
             0, 0, 1, 1,
             1, 0, 1, 0),
           nrow = 4, byrow = T)
echelon(A)
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    0    0
[2,]    0    1    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    0    0    1
```

```r
solve(A)
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]  0.5 -0.5    0  0.5
[2,]  0.0  1.0   -1  0.0
[3,] -0.5  0.5    0  0.5
[4,]  0.5 -0.5    1 -0.5
```

Pregunta 3

Dado el determinante de orden n con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & \alpha^2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & \alpha^2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

(a) Calcularlo utilizando las propiedades de determinantes, indicando en cada paso cuál se está utilizando.
(b) En el caso particular en que $n = 9$, ¿cuáles son los valores de α que hacen que el determinante valga 0?

Solución.

Partimos de

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & \alpha^2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & \alpha^2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

Usando la propiedad $\det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \det(u_1, \ldots, u_i + \sum_{k \neq i} a_k u_k, \ldots, u_n)$, sumamos a la primera columna las $(n-1)$ columnas restantes.

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + 3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \alpha^2 + 3(n-1) & \alpha^2 & 3 & \cdots & 3 \\ \alpha^2 + 3(n-1) & 3 & \alpha^2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 + 3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

Usando la propiedad $\det(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = \lambda \det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$, sacamos factor común $\lambda = \alpha^2 + 3(n-1)$ de la primera columna.

$$
(\alpha^2+3(n-1))\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & \alpha^2 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & \alpha^2 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & \alpha^2\end{vmatrix}
$$

Usando la propiedad $\det(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n)=\det(u_1,\ldots,u_i+\sum_{k\neq i}a_ku_k,\ldots,u_n)$, a cada fila salvo a la primera, le restamos la primera fila.

$$
(\alpha^2+3(n-1))\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & \alpha^2-3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2-3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2-3\end{vmatrix}
$$

Hemos obtenido una matriz triangular, cuyo determinante sabemos que es el producto de los elementos de la diagonal. Con lo cual, sabiendo que la matriz es de orden n,

$$
(\alpha^2+3(n-1))\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & \alpha^2-3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2-3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2-3\end{vmatrix}=(\alpha^2+3(n-1))(\alpha^2-3)^{n-1}
$$

Si ahora $n=9$, tendremos que el determinante vale

$$
(\alpha^2+3\cdot(9-1))(\alpha^2-3)^8=(\alpha^2+24)(\alpha^2-3)^8
$$

Si queremos ver qué valores de α anulan dicho determinante, tendremos que resolver

$$
(\alpha^2+24)(\alpha^2-3)^8=0
$$

Dado que el factor $\alpha^2+24>0$, entonces la única forma de que el producto anterior valga 0 es calculando cuando el factor $(\alpha^2-3)^8=0$, es decir

$$
(\alpha^2-3)^8=0\Leftrightarrow\alpha^2-3=0\Leftrightarrow\alpha^2=3\Leftrightarrow\alpha=\pm\sqrt{3}
$$

```
A = matrix(3, nrow = 9, ncol = 9)
det(A)
```

```
[1] 0
```

Pregunta 4

(a) Utilizad el Teorema de Rouché-Frobenius para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según el parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$
\begin{cases}x & + & y & + & az & = & a-1\\ x & + & y & + & z & = & a\\ x & + & (a+1)y & + & 2z & = & 0\end{cases}
$$

(b) Resuelve por Crammer en caso de ser compatible determinado.

Solución.

La matriz de coeficientes A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante 0 si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ a & 2-a \end{vmatrix} = -a(1-a) = a(a-1) = 0$$

Por tanto, el determinante se anula si $a = 0$ o $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema es **Compatible Determinado**, ya que el rango de A es máximo (rg(A) = 3), coincide con el de la ampliada y es igual al número de incógnitas del sistema.
- Si $a = 0$, tenemos que
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
cuyo rango vale 2, pues hay un menor de orden 2 (el formado por las primeras dos filas y las últimas dos columnas) que es distinto de 0. Orlando con la tercera y última fila y la cuarta columna, tenemos el determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - (-1 + 0 + 0) = -2 + 1) = -1 \neq 0$$
Concluimos que el rango de la ampliada difiere del rango de A, con lo cual se trata de un sistema **Incompatible**.
- Si $a = 1$, tenemos que
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
cuyo rango vale 2, pues hay un menor de orden 2 (el formado por las últimas dos filas y las primeras dos columnas) que es distinto de 0. Orlando con la primera fila y la cuarta columna, tenemos el determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - (0 + 2 + 0) = -1 \neq 0$$
Como el rango de A y el de la ampliada no coinciden, se trata de un sistema **Incompatible**.

Resolvamos por cramer el caso en que $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} \\ &= \frac{2(a-1)+a^2(a+1)-((a+1)(a-1)+2a)}{a(a-1)} \\ &= \frac{2a-2+a^3+a^2-a^2+1-2a}{a(a-1)} \\ &= \frac{a^3-1}{a(a-1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} \\
&= \frac{2a+a-1-(a^2+2(a-1))}{a(a-1)} \\
&= \frac{3a-1-a^2-2a+2}{a(a-1)} \\
&= \frac{-a^2+a+1}{a(a-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} \\
&= \frac{(a+1)(a-1)+a-(a-1+a(a+1))}{a(a-1)} \\
&= \frac{a^2-1+a-(a-1+a^2+a)}{a(a-1)} \\
&= \frac{-a}{a(a-1)} \\
&= \frac{1}{1-a}
\end{aligned}
$$