Examen 3

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Resolver el siguiente producto de matrices:

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar el valor real de x, o demostrar que no existe, que hace que se cumpla la ecuación

$$A \cdot A^t \cdot I \cdot I^t = 0$$

donde 0 representa la matriz cuadrada nula de orden 3.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} A \cdot A^t \cdot I \cdot I^t &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1+2x \\ -2 & -1+2x & 1+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2x+6 & 2x+6 & 2x+6 \\ x^2+2x-2 & x^2+2x-2 & x^2+2x-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nos piden valores de x para que

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2x+6 & 2x+6 & 2x+6 \\ x^2+2x-2 & x^2+2x-2 & x^2+2x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No hay ningún valor de x que cumpla esta condición pues la primera fila no depende de x.

Pregunta 2

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

calcular su inversa.

Solución Vamos a calcular la inversa de la matriz A por Gauss:

$$
\begin{aligned}
(A|I) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (I|A^{-1})
\end{aligned}
$$

donde I representa la matriz identidad de orden 4.

Luego,

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

```
A=matrix(c(1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,1),ncol=4,byrow=TRUE)
solve(A)
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1   -1    1   -1
[2,]    0    1   -1    1
[3,]    0    0    1   -1
[4,]    0    0    0    1
```

Pregunta 3

Sean $\vec{u}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $||\vec{u}|| = 3$ y $||\vec{w}|| = 4$ y tales que si α es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tenemos que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Consideremos los vectores $\vec{x} = \vec{u} - 3 \cdot \vec{w}$ y $\vec{y} = 2 \cdot \vec{u} + \vec{w}$.

Se pide:

a. Calcular $||\vec{x}||$, $||\vec{y}||$.
b. Calcular $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Solución Notemos que $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = ||u|| \cdot ||w|| \cos\alpha = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

$$\begin{array}{rcl} ||\vec{x}||^2 & = & \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{u} - 3 \cdot \vec{w}, \vec{u} - 3 \cdot \vec{w} \rangle \\ & = & \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 3\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle - 3\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + 9\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ & = & ||\vec{u}||^2 - 6\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + 9||\vec{w}||^2 = 3^2 - 6 \cdot 6 + 9 \cdot 4^2 \\ & = & 117. \end{array}$$

Luego $||\vec{x}|| = \sqrt{117}$.

$$\begin{array}{rcl} ||\vec{y}||^2 & = & \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle 2 \cdot \vec{u} + \vec{w}, 2 \cdot \vec{u} + \vec{w} \rangle \\ & = & 4 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + 2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ & = & 4 \cdot ||\vec{u}||^2 + 4\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + ||\vec{w}||^2 = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 6 + 4^2 \\ & = & 76. \end{array}$$

Luego $||\vec{x}|| = \sqrt{117}$ y $||\vec{y}|| = \sqrt{76}$.

Ahora nos piden calcular $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle & = & \langle \vec{u} - 3 \cdot \vec{w}, 2 \cdot \vec{u} + \vec{w} \rangle \\ & = & 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 6 \cdot \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - 3 \cdot \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ & = & 2 \cdot ||\vec{u}||^2 - 5 \cdot \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - 3 \cdot ||\vec{w}||^2 \\ & = & 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 4^2 \\ & = & -60. \end{array}$$

Luego $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -60$.

Pregunta 4

Sea $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1 & = & u_1 + u_2 - u_3 \\ v_2 & = & u_1 - u_2 - u_3 \\ v_3 & = & u_1 - u_2 + u_3 \end{array} \right.$$

a. Demostrar que $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
b. Calcula las coordenadas de u_1, u_2 y u_3 en la base B_v.
c. Si $(1, 1, -1)$ son las coordenadas de un vector en la base B_u ¿cuáles son sus coordenadas en la base B_v?

Solución Las coordenadas de v_1 en la base B_u son $(1, 1 - 1)$, las de v_2 son $(1, -1, -1)$ y las de v_3 son $(1, -1, 1)$

Para saber si son linealmente independientes, calculamos el determinante

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| = 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0$$

Así que B_v es base.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1 & = & u_1 + u_2 - u_3 \\ v_2 & = & u_1 - u_2 - u_3 \\ v_3 & = & u_1 - u_2 + u_3 \end{array} \right.$$

resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & u_1+u_2-u_3 \\ v_2-v_1 & = & -2\cdot u_2 \\ v_3-v_1 & = & -2\cdot u_2+2\cdot u_3 \end{array}\right.$$

Por lo tanto

$$u_2=\frac{1}{2}\cdot v_1-\frac{1}{2}\cdot v_2$$

.

$$u_3=\frac{1}{2}\cdot(v_3-v_1+2\cdot u_2)=\frac{1}{2}v_3-\frac{1}{2}v_1+u_2=\frac{1}{2}v_3-\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}\cdot v_1-\frac{1}{2}\cdot v_2\cdot=-\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}\cdot v_3.$$

Y por último u_1

$$u_1=v_1-u_2+u_3=v_1-\left(\frac{1}{2}\cdot v_1-\frac{1}{2}\cdot v_2\right)-\frac{1}{2}\cdot v_2+\frac{1}{2}\cdot v_3=\frac{1}{2}\cdot v_1+\frac{1}{2}\cdot v_3.$$

Las coordenadas de la base B_u en la B_v son $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, respectivamente.

Con `R` comprobamos

```
BvBu = matrix(c(1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1),
         ncol = 3, byrow = FALSE)
BvBu
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    1    1
[2,]    1   -1   -1
[3,]   -1   -1    1
```

```
det(BvBu)
```

```
[1] -4
```

```
BuBv = solve(BvBu)
BuBv
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.5  0.5  0.0
[2,]  0.0 -0.5 -0.5
[3,]  0.5  0.0  0.5
```

La inversa de $BvBu$ contiene las coordenadas de los vectores de la base B_u en la base B_v por columnas.

Por último, nos dan el vector $\vec{x}=(1,1,-1)$ en la base B_u y nos piden que encontremos sus coordenadas en la base B_v. Para ello, hay que multiplicar el vector $\vec{x}$ por la izquierda de la matriz $BuBv$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Luego, el vector $\vec{x}$ tiene coordenadas $(1,0,0)$ en la base B_v.

Comprobamos con `R`:

```r
x_Bu = c(1, 1, -1)
x_Bu # En base Bu
```

```
[1]  1  1 -1
```

```r
x_Bv = BuBv %*% x_Bu
x_Bv # En base Bv
```

```
     [,1]
[1,]    1
[2,]    0
[3,]    0
```