V103

Biegung elastischer Stäbe

Annika Burkowitz
annika.burkowitz@tu-dortmund.de

Phillip Alexander Greve
phillip.greve@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.01.2016 Abgabe: 12.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll die Biegung von Stäben untersucht und der Elasitzitätsmodul von Stäben berechnet werden.

2 Theorie

2.1 Hookesches-Gesetz

Kräfte die an der Oberfläche eine Körpers angreifen und Gestalts- und Volumenveränderungen hervorrufen, werden meist auf die Flächen bezogen und als Spannung bezeichnet. Die senkrecht zur Oberfläche stehende Teil wird als Normalspannung σ oder Druck bezeichnet. Die Komponente die parallel zu der Oberfläche steht wird Tangential- bzw. Schubspannung genannt. Das Hookesche Gesetz

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

beschreibt den, bei kleinen relativen Änderungen $\frac{\Delta L}{L}$, linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation wie in Abbildung 1.

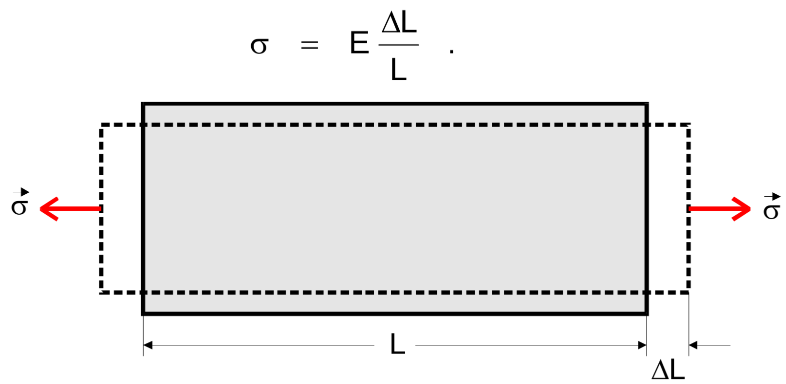

Abbildung 1: Auswirkung einer Normalspannung auf eine stabförmige Probe [1] .

Hierbei ist E der Elastizitätsmodul, der eine Materialkonstante ist.

2.2 Biegung bei einseitiger Einspannung

In der Abbildung 2 ist, die schematische Darstellung einer Biegung bei einseitiger Einspannung zu sehen.

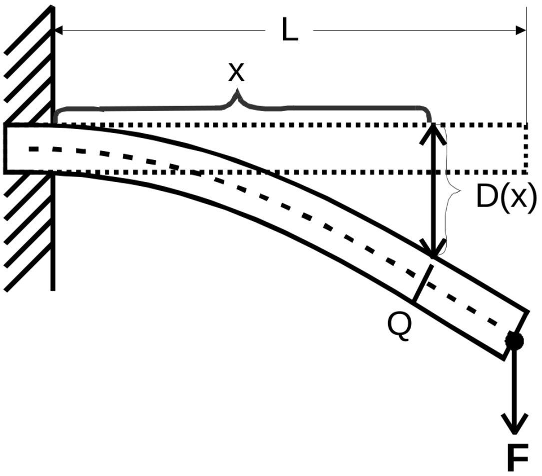

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Biegung bei einseitiger Einspannung [1].

Die Durchbiegung $D(x)$ lässt sich ermitteln indem man die Drehmomente aufstellt. Bei der Biegung wird der eine Teil des Stabs gestaucht und der andere Teil gestreckt. Der Teil der spannungsfrei ist, wird neutrale Faser genannt und ist in Abbildung 2 durch eine gestrichelte Linie angedeutet. Die wirkenden Kräfte an der Stelle Q sind in Abbildung 3 dargestellt.

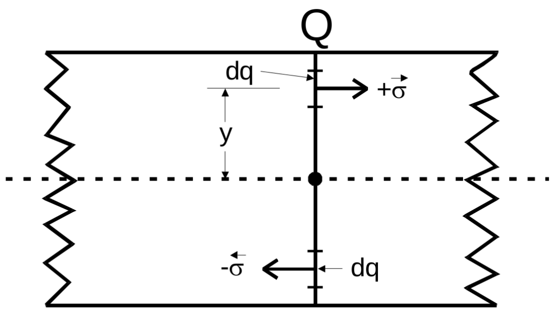

Abbildung 3: Darstellung der Drehmomente bei Q [1].

Die entgegengesetzten Druck- und Zugspannungen sind vom Betrag gleich. Mit Gleichung (2) lässt sich das Drehmoment M_σ berechnen.

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q \tag{2}$$

Es stellt sich das Gleichgewicht

$$M_F = M_\sigma$$

ein. Das durch die Gewichtskraft des angehängten Gewichts entstehende Drehmoment M_F ist hierbei gegeben durch

$$M_F = F(L - x).$$

Das Gleichtgewicht ist also

$$\int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q = F(L-x). \tag{3}$$

Die Normalspannung ist durch das Hookesche-Gesetz gegeben und ist mit einer Näherung für geringe Kruvenkrümmungen

$$\sigma(y) = E\frac{y}{R} = Ey\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2} \ ,$$

so dass sich das Gleichgewicht als

$$E\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}\int_Q y^2\mathrm{d}q = F(L_x)$$

schreiben lässt. Das Flächenträgheitsmoment I ist gegeben durch

$$I = \int_Q y^2\mathrm{d}q(y) \ . \tag{4}$$

Wird die Gleichung (4) integriert, erhält man die Gleichung für die Durchbiegung in Abhängigkeit zu Abstand

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \qquad (0 \leq x \leq L)\,. \tag{5}$$

2.3 Biegung bei beidseitiger Auflage

Da beide Enden des Stabes aufliegen, greift nun die Kraft $\frac{F}{2}$ an. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 4 zu sehen.

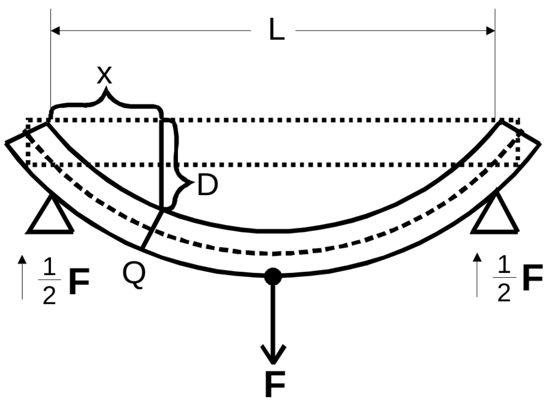

Abbildung 4: darstellung der Drehmomente bei Q [1].

Für die Drehmomente gelten nun

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2} \ \ (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L-x) \ \ (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \tag{7}$$

und damit für die Durchbiegung der linken Hälfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \tag{8}$$

und die der rechten Hälfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L). \tag{9}$$

[1]

3 Durchführung

Der Versuch wird mit einer Messaparatur nach Abbildung 5 durchgeführt.

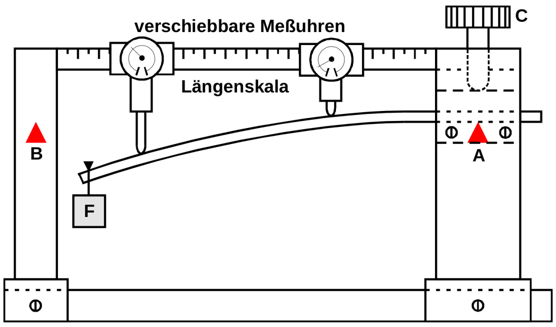

Abbildung 5: Darstellung einer Messapparatur zur Biegung von Stäben [1] .

Die Maße des Stabes werden bestimmt sowie sein Gewicht. Mit den Messungen wird die Dichte des Stabes und damit dessen Material bestimmt. Es wird mit den Messuhren an verschiedenen Stellen die relative Verbiegung gemessen. Dafür wird eine Messung mit und eine ohne Gewicht am freien Ende an jeder Messstelle durchgeführt und die Differenz bestimmt sowie der Abstand vom Einspannpunkt notiert. In einer zweiten Messreihe wird der Probestab auf die Auflagepunkte A und B aus Abbildung 5 gelegt. Das Gewicht wird mittig zwischen beiden plaziert. Die relative Verbiegung wird gemessen, indem die Differenz der angezeigten Werte bei der jeweiligen Messuhr bildet. Für beide Messreihen werden jeweils midestens 30 Messungen gemacht. Die einseitige Messung wird für einen rechteckigen und einen runden Stab durchgeführt, die Messung bei beidseitiger Auflage nur für den rechteckigen Stab.

4 Fehlerrechnung

Die Fehlerrechnung wird mit nachfolgenden Formeln und mit Python durchgeführt. Der Mittelwert wird mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{10}$$

berechnet und Standardabweichung des Mittelwerts berechnet sich nach

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x_i})^2}. \tag{11}$$

Der Gaußsche Fehler einer Funktion $f(x_i)$, die von den fehlerbehafteten Variablen x_i abhängt, berechnet sich nach der Formel

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \tag{12}$$

Dabei ist Δx_i der Fehler von x_i. Die relative Abweichung eines berechneten Wertes x vom wahren Wert x_w beträgt

$$\Delta x_\mathrm{rel} = \frac{x - x_\mathrm{w}}{x_\mathrm{w}}. \tag{13}$$

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Dichte

Um die nachfolgend berechneten Elastizitätsmoduln mit Literaturwerten vergleichen zu können, wird zunächst die Dichte der Stäbe bestimmt. Mit Hilfe einer Tabelle wird dann das Metall oder die Legierung bestimmt. Für Stab 1, der eine quadratische Querschnittsfläche hat, wurden folgende geometrische Abmessungen bestimmt:

$$\begin{aligned}\text{Länge } l_1 &= 0.60\,\mathrm{m}\\ \text{Breite } a &= 0.01\,\mathrm{m}\\ \text{Masse } m_1 &= 0.5025\,\mathrm{kg}.\end{aligned}$$

Für Stab 2 mit einer runden Querschnittsfläche wurde

$$\begin{aligned}\text{Länge } l_2 &= 0.60\,\mathrm{m}\\ \text{Durchmesser } d &= 0.01\,\mathrm{m}\\ \text{Masse } m_2 &= 0.5025\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

gemessen. Alle Messungen wurden dabei zehn Mal durchgeführt, um den Fehler des Mittelwerts bestimmen zu können, da jedoch immer der gleiche Wert gemessen wurde, ist der Fehler 0. Die Dichte der Probestäbe wird mit

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{14}$$

bestimmt. Für die gemessene Dichte des quadratischen Stabes folgt

$$\rho_1 = \frac{m_1}{l_1 a^2} = \frac{0.5025\,\mathrm{kg}}{0.60\,\mathrm{m}(0.01\,\mathrm{m})^2} = 8375\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

und für die des runden Stabes

$$\rho_2 = \frac{m_2}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l_2} = \frac{0.3605\,\mathrm{kg}}{\pi\,(0.005\,\mathrm{m})^2\,0.55\,\mathrm{m}} = 8346\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Dies entspricht im Rahmen der relativen Fehler von $\Delta\rho_1 = 0.3\,\%$ und $\Delta\rho_2 = 0.6\,\%$ der literaturbekannten Dichte von Messing ([2, S. 274], Tabelle 1: Einige Eigenschaften fester Stoffe) und legt nahe, dass die Stäbe aus Messing sind. Für eine Messing-Legierung mit einer Zusammensetzung von 60 % Kupfer und 38 % Zink ist dort eine Dichte von $\rho_{Messing} = 8400\,\mathrm{kg/m^3}$ angegeben.

5.2 Flächenträgheitsmomente

Für die Berechnung des Elastizitätsmoduls werden die Flächenträgheitsmomente der verschiedenen Stäbe benötigt. Das Flächenträgheitsmoment I wird mit der Gleichung (**??**) berechnet.

5.2.1 quadratischer Stab

Für den Stab mit quadratischer Querschnittsfläche und einer Kantenlänge von $h = 0.01\,\mathrm{m}$ ergibt sich

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h \cdot \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h^4}{12} = 8.33 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4. \tag{15}$$

5.2.2 runder Stab

Weiter ergibt sich für den Stab mit runder Querschnittsfläche und dem Radius $R = \frac{d}{2} = 0.005\,\mathrm{m}$ unter Verwendung der Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot r^2 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}(\varphi + \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{=0})\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi R^4}{4} = 4.91 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \end{aligned} \tag{16}$$

5.3 Einseitige Einspannung

5.3.1 eckiger Stab

Die zur Berechnung der Durchbiegung $D(x)$ nach Gleichung (5) notwendigen Messwerte sind in Tabelle 1 dargestellt, welche sich zur besseren Lesbarkeit des Textes im Anhang befindet (sowie alle weiteren Messwerte).
Der Abstand des Messpunktes vom Einspannungspunkt ist x, $D_0(x)$ ist die Durchbiegung ohne Belastung des Stabes und $D_M(x)$ die Durchbiegung des Stabes nach Anhängen

eines Gewichts der Masse $M_{G1} = 1.0205\,\mathrm{kg}$. Die effektive Länge des Stabes vom Einspannungspunkt bis zum freien Ende des Stabes beträgt $L = 0.49\,\mathrm{m}$.

Der Elaztizitätsmodul wird durch eine lineare Ausgleichsrechnung bestimmt. Dazu wird $D(x)$ gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen und mit Python eine lineare Regression der Form $f(x) = a \cdot x + b$ durchgeführt, welche für die Parameter a und b die folgenden Werte liefert (siehe dazu Abbildung 6):

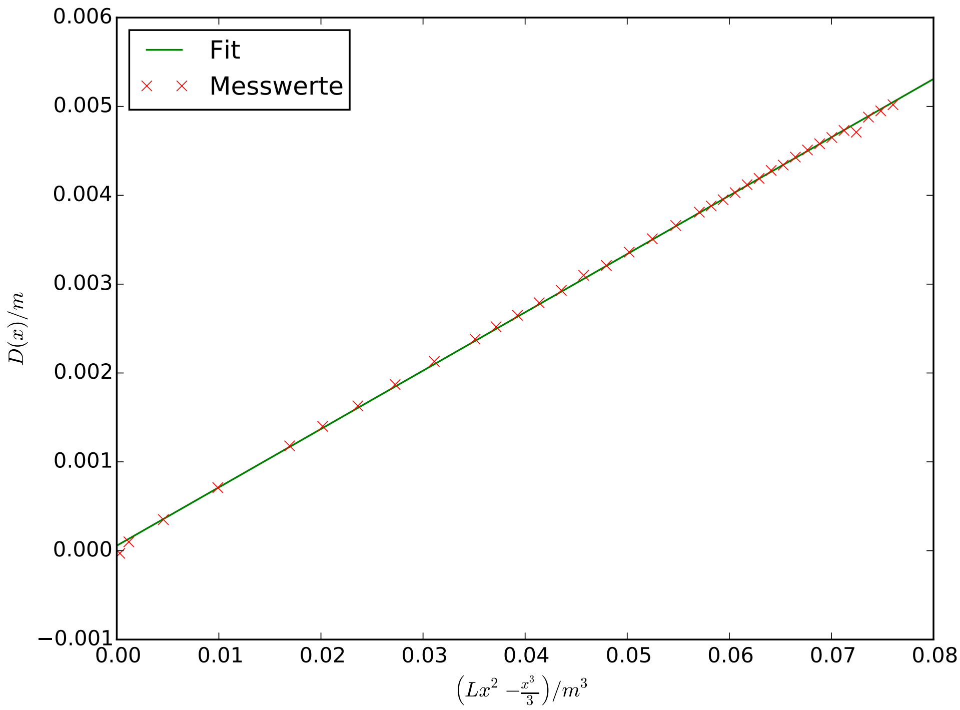

Abbildung 6: Lineare Ausgleichsrechnung für den einseitig eingespannten eckigen Stab.

$$a = (0.0657 \pm 0.0002)\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$
$$b = (0.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Nach Gleichung (5) wird der Elastizitätsmodul dann mit

$$a = \frac{F}{2EI_1} \iff E = \frac{M_{G1}g}{2I_1 a} \tag{17}$$

bestimmt. Dabei ist I_1 das in Abschnitt **??** berechnete Flächenträgheitsmoment. Für den quadratischen Stab bei einseitiger Einspannung ergibt sich mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung nach Gleichung (12), welche mit Python durchgeführt wurde, für den

Elastizitätsmodul folgender Wert:

$$E = (91.5 \pm 0.3) \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{m}}.$$

5.3.2 runder Stab

Die Messwerte zur Berechnung der Durchbiegung $D(x)$ des runden Stabes bei einseitiger Einspannung sind in Tabelle 2 im Anhang aufgeführt. Die Masse des Gewichts zur Belastung des Stabes beträgt $M_{G2} = 0.5285\,\mathrm{kg}$, die effektive Länge des Stabes ist wieder $L = 0.49\,\mathrm{m}$. Analog zur Berechnung des Elastizitätmoduls des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung wird eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt, welche in Abbildung 7 zu sehen ist und auf die Werte

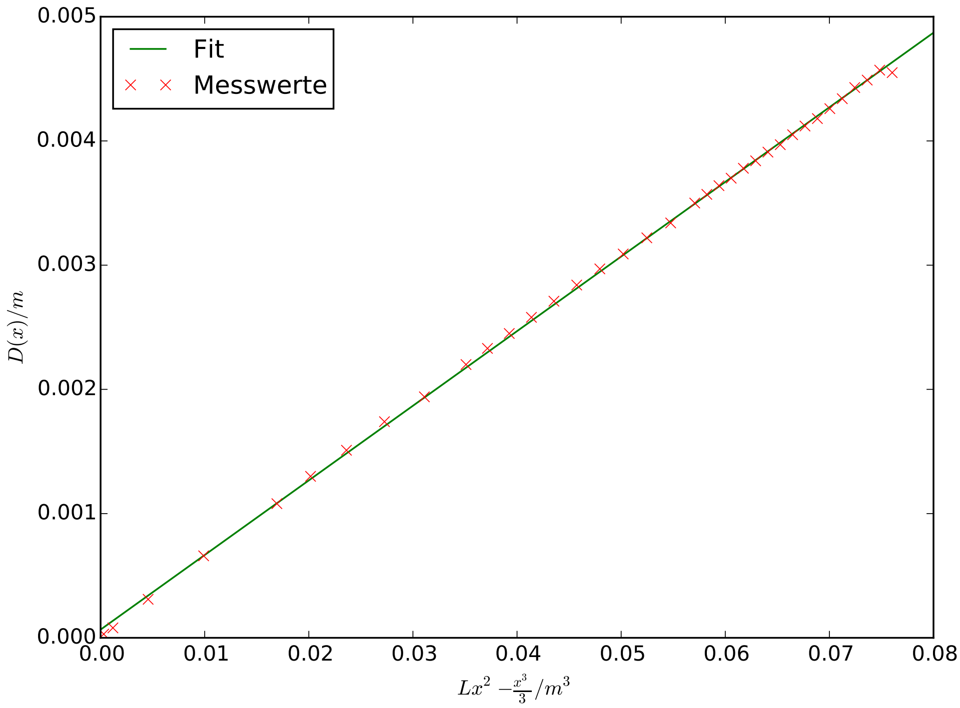

Abbildung 7: Lineare Ausgleichsrechnung für den einseitig eingespannten runden Stab.

$$a = (0.0601 \pm 0.0002) \, \frac{1}{\mathrm{m}}$$
$$b = (7 \pm 1) \cdot 10^{-5} \, \mathrm{m}$$

für die Parameter a und b führt. Für den Elastizitätsmodul ergibt sich dann vergleichbar zu Gleichung (17) jedoch mit dem Flächenträgheitsmoment I_2

$$E = \frac{M_{G2} g}{2 I_2 a} = (87.9 \pm 0.3) \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{m}}. \tag{18}$$

5.4 Beidseitige Einspannung

Die zur Berechnung verwendeten Messwerte sind im Anhang in Tabelle **??** und **??** zu finden. Bei der beidseitigen Einspannung ist zu beachten, dass die Abstände immer vom einen Ende des Stabes aus gemessen wurden und nicht jeweils vom Einspannpunkt bis zur Mitte. Deshalb müssen die Bereiche $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ getrennt berechnet werden. Die effektive Stablänge bei beidseitiger Einspannung ist $L = 0.553\,\mathrm{m}$, die Masse des angehängten Gewichts $M_{G3} = 4.689\,\mathrm{kg}$.

5.4.1 linke Seite $(0 <= x <= \frac{L}{2})$

In diesem Fall wird das Polynom $\left(3L^2x - 4x^3\right)$ gegen $D(x)$ aufgetragen und eine lineare Ausgleichsrechnung wie bei der einseitigen Einspannung durchgeführt. Der Graph ist in Abbildung 8 zu sehen. Für die Parameter a und b erhält man in diesem Fall die Werte

$$
\begin{aligned}
a &= (0.0122 \pm 0.0003)\,\frac{1}{\mathrm{m}} \\
b &= (4 \pm 4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Für den Elastizitätsmodul folgt nach Gleichung (8)

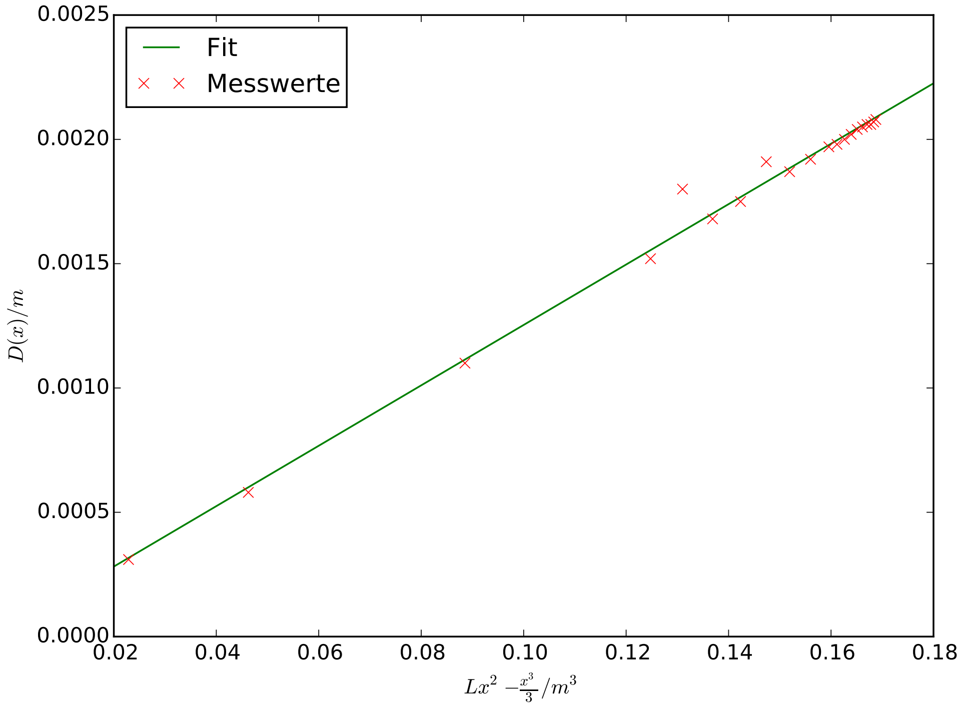

Abbildung 8: Lineare Ausgleichsrechnung für den beidseitig eingespannten eckigen Stab.

$$a = \frac{F}{48EI_1} \iff E = \frac{M_{G3}g}{48I_1 a} = (95 \pm 2) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{m}} \tag{19}$$

5.4.2 rechte Seite ($\frac{L}{2} <= x <= L$)

Hier wird das Polynom $\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right)$ gegen $D(x)$ aufgetragen und wiederum eine lineare Regression durchgeführt, die die Werte

$$a = (0.012\,07 \pm 0.000\,06)\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$
$$b = (5 \pm 1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

liefert. Der Graph ist in Abbildung 9 dargestellt. Der Elastizitätsmodul wird sodann mit Gleichung (19) berechnet und ergibt

$$E = (95.2 \pm 0.4) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{m}}$$

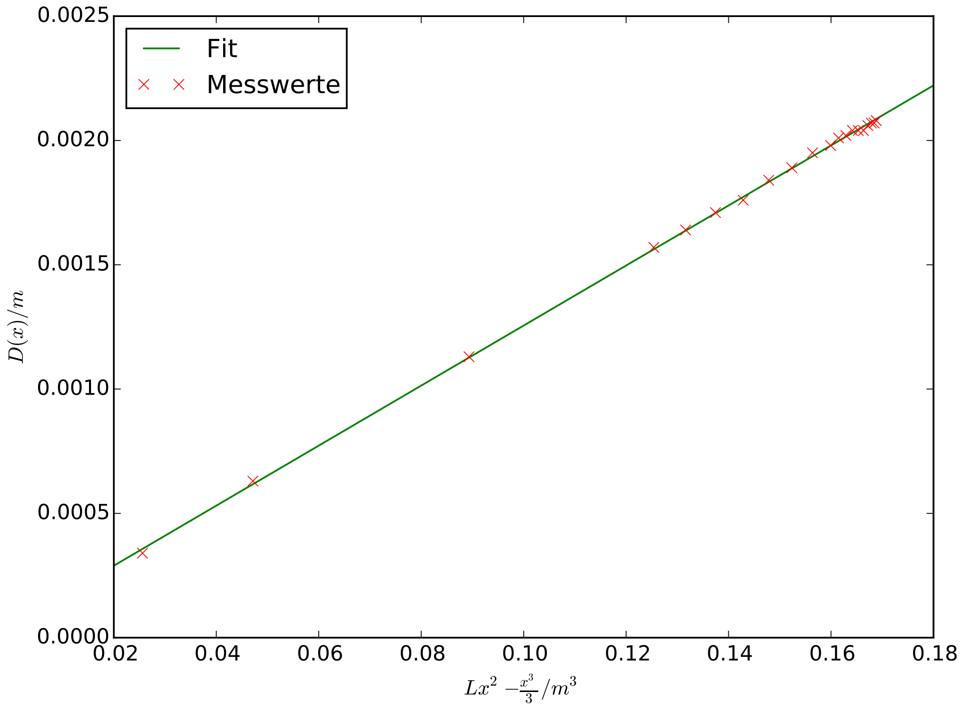

Abbildung 9: Lineare Ausgleichsrechnung für den beidseitig eingespannten eckigen Stab.

5.5 Vergleich mit Literaturwerten

Beide Stäbe bestehen aus Messing. Da die genaue Zusammensetzung der Messinglegierung jedoch nicht bekannt ist, kann keine relative Abweichung der berechneten Elastizitätsmoduln angegeben werden. Für Messing ist in der Literatur [2, S. 275]

$$E_{\text{Literatur}} = 80...103\,\frac{\text{GN}^2}{\text{m}}$$

angegeben. Alle berechneten Elastizitätsmoduln liegen in diesem Rahmen:

$$\begin{aligned}
E_{\text{Stab 1,einseitg}} &= (91.5 \pm 0.3) \cdot 10^9\,\frac{\text{N}^2}{\text{m}} \\
E_{\text{Stab 2,einseitg}} &= (87.9 \pm 0.3) \cdot 10^9\,\frac{\text{N}^2}{\text{m}} \\
E_{\text{Stab 1,beidseitig1}} &= (95 \pm 2) \cdot 10^9\,\frac{\text{N}^2}{\text{m}} \\
E_{\text{Stab 1,beidseitig2}} &= (95.2 \pm 0.4) \cdot 10^9\,\frac{\text{N}^2}{\text{m}}.
\end{aligned}$$

Bildet man den Mittelwert der drei Elastizitätsmoduln, die für Stab 1 berechnet wurden, so erhält man $E_{\text{Stab 1, mittel}} = (93.8 \pm 0.7) \cdot 10^9\,\text{N}^2/\text{m}$ mit einer Standardabweichung von $(1.2 \pm 0.3) \cdot 10^9\,\text{N}^2/\text{m}$.

6 Diskussion

Zunächst sei angemerkt, dass die Messuhren sehr anfällig auf Stöße auf den Tisch reagiert haben und häufig geschwankt haben. Bei der linearen Ausgleichsrechnung für den Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ der beidseitigen Einspannung fallen zwei Messwerte auf, die deutlich neben der Ausgleichsgeraden liegen. Da alle anderen Messwerte sehr gut mit der Ausgleichsgeraden übereinstimmen, könnte es sein, dass dort nicht darauf geachtet wurde, dass vor dem Ablesen der Messuhr auf den Tisch geklopft werden musste, damit sich der Zeiger richtig einstellen kann. Werden die Werte für $x = 16.1\,\text{cm}$ und $x = 19.1\,\text{cm}$ nicht in die Regression mit einbezogen, so ergibt sich für den Elastitzitätsmodul statt $E = (95 \pm 2) \cdot 10^{-9}\,\text{N}^2/\text{m}$ $E = (94.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-9}\,\text{N}^2/\text{m}$. Dies entspricht einer Abweichung um etwa $-0.2\,\%$, vor allem aber wird der Fehler kleiner.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zur Biegung elastischer Stäbe*. 2016. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf`.

[2] D. Geschke. *Physikalisches Praktikum*. Hrsg. von P. Kirsten u. a. 10. Aufl. Stuttgart, Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1994.

x in cm	$D_0(x)$ in mm	$D_M(x)$ in mm
48.0	-0.28	4.74
47.5	-0.26	4.69
47.0	-0.24	4.64
46.5	-0.13	4.58
46.0	-0.22	4.51
45.5	-0.20	4.45
45.0	-0.19	4.39
44.5	-0.19	4.32
44.0	-0.17	4.26
43.5	-0.14	4.20
43.0	-0.14	4.14
42.5	-0.11	4.08
42.0	-0.11	4.01
41.5	-0.09	3.94
41.0	-0.08	3.87
40.5	-0.07	3.81
40.0	-0.05	3.76
39.0	-0.01	3.65
38.0	0.04	3.55
37.0	0.08	3.44
36.0	0.14	3.35
35.0	0.18	3.28
34.0	0.23	3.16
33.0	0.28	3.07
32.0	0.32	2.97
31.0	0.38	2.90
30.0	0.44	2.82
28.0	0.55	2.68
26.0	0.69	2.56
24.0	0.82	2.45
22.0	0.96	2.36
20.0	1.10	2.28
15.0	1.43	2.14
10.0	1.84	2.19
5.0	0.60	0.70
2.5	0.85	0.82

Tabelle 1: Messwerte zur Berechnung von $D(x)$ für den eckigen Stab 1 bei einseitiger Einspannung.

x in cm	$D_0(x)$ in mm	$D_M(x)$ in mm
48.0	1.70	6.25
47.5	1.60	6.17
47.0	1.60	6.09
46.5	1.58	6.01
46.0	1.58	5.92
45.5	1.56	5.82
45.0	1.55	5.73
44.5	1.53	5.65
44.0	1.52	5.57
43.5	1.51	5.48
43.0	1.49	5.40
42.5	1.49	5.33
42.0	1.48	5.26
41.5	1.47	5.17
41.0	1.45	5.09
40.5	1.44	5.01
40.0	1.44	4.94
39.0	1.43	4.77
38.0	1.42	4.64
37.0	1.41	4.50
36.0	1.41	4.38
35.0	1.40	4.24
34.0	1.40	4.11
33.0	1.40	3.98
32.0	1.40	3.85
31.0	1.42	3.75
30.0	1.43	3.63
28.0	1.48	3.42
26.0	1.51	3.25
24.0	1.55	3.06
22.0	1.61	2.91
20.0	1.67	2.75
15.0	1.84	2.50
10.0	2.08	2.39
5.0	0.61	0.69
2.5	0.75	0.78

Tabelle 2: Messwerte zur Berechnung von $D(x)$ für den runden Stab 2 bei einseitiger Einspannung.

x in cm	$D_0(x)$ in mm	$D_M(x)$ in mm
26.6	1.44	3.52
26.1	1.45	3.52
25.6	1.44	3.50
25.1	1.43	3.49
24.6	1.42	3.47
24.1	1.42	3.46
23.6	1.42	3.44
23.1	1.41	3.41
22.6	1.41	3.39
22.1	1.40	3.37
21.1	1.39	3.31
20.1	1.37	3.24
19.1	1.36	3.27
18.1	1.34	3.09
17.1	1.32	3.00
16.1	1.30	3.10
15.1	1.28	2.80
10.1	1.17	2.27
5.1	1.08	1.66
2.5	1.11	1.42

Tabelle 3: Messwerte zur Berechnung von $D(x)$ für den rechteckigen Stab 1 bei beidseitiger Einspannung und $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

x in cm	$D_0(x)$ in mm	$D_M(x)$ in mm
28.6	3.15	5.23
29.1	3.15	5.22
29.6	3.15	5.22
30.1	3.17	5.23
30.6	3.18	5.22
31.1	3.18	5.22
31.6	3.18	5.22
32.1	3.19	5.21
32.6	3.20	5.21
33.1	3.21	5.19
34.1	3.22	5.17
35.1	3.25	5.14
36.1	3.26	5.10
37.1	3.29	5.05
38.1	3.29	5.00
39.1	3.30	4.94
40.1	3.31	4.88
45.1	3.37	4.50
50.1	3.36	3.99
52.5	3.36	3.70

Tabelle 4: Messwerte zur Berechnung von $D(x)$ für den rechteckigen Stab 1 bei beidseitiger Einspannung und $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.