第 五 周

第6章 刚体力学

§6.1， §6.2， §6.3 （1，2，3，4）

作业：P80

6-2，6-6，6-7，6-9，6-12

第三章 刚体力学基础

刚体模型：在任何外力作用下，形状和大小均不发生改变的物体。

说明：

(1) 理想模型；

(2) 在外力作用下，任意两点间均不发生位移；

(3) 内力无穷大的特殊质点系。

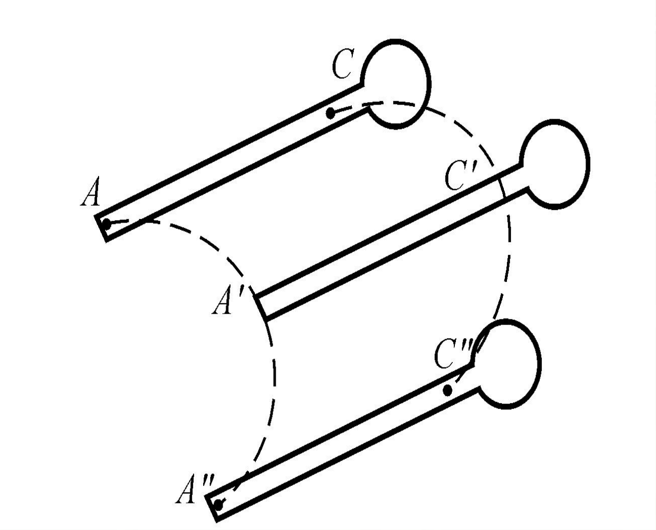
§3.1 刚体运动的描述

一、平动和转动

1. 刚体的平动

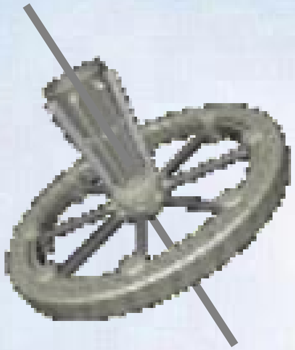
刚体上任意两点的连线始终保持平行，这种运动称为平动。如电梯的升降，活塞的往返等都是刚体的平动。

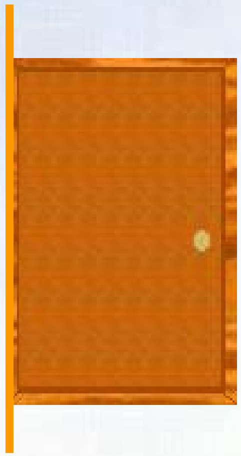
刚体上各质点的运动相同，因而刚体的平动可用质心运动描述，刚体的平动就可归结为质点运动问题。



2. 刚体的定轴转动

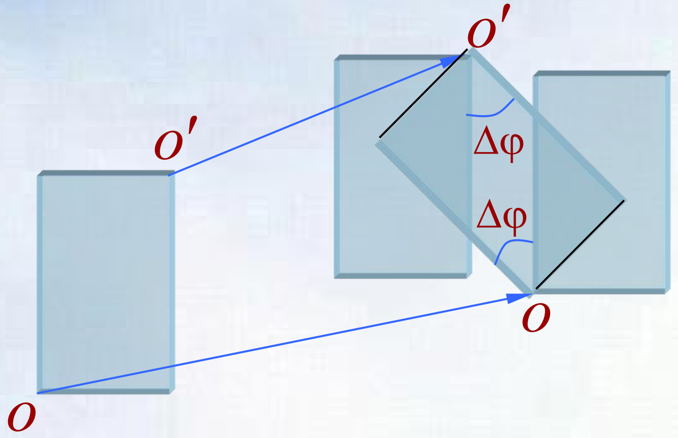
刚体中各质点都绕某一直线做圆周运动，这种运动称为定轴转动。





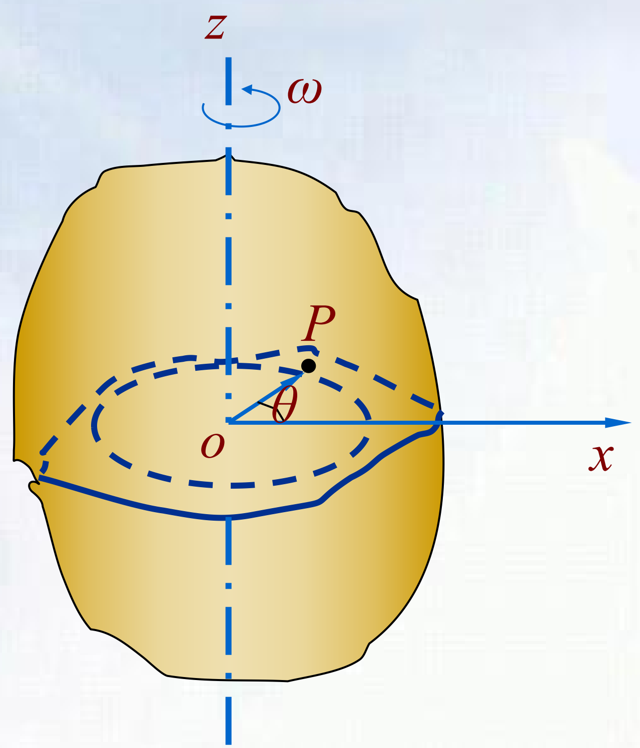
刚体的一般运动可看作平动和转动的合成。

由于转轴位置的选择不同，可以有多种平动和转动的分解方式，但转动的角位移总是相同的，和转轴位置无关。



二、刚体定轴转动的描述

刚体内取一点P，做转轴的垂足O，通过OP并与转轴垂直的平面，称为**转动平面**。刚体绕转轴转动时，质点P在转动平面内做圆周运动，可用圆周运动的角量描述。刚体中任意一点的角位移、角速度、角加速度，可代表整个刚体的角量运动。角量与线量基本关系：



$$\upsilon = \frac{dl}{dt} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} = \omega R$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \beta R$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

匀变速定轴转动：

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

刚体转动方向的正负规定：逆时针转为角坐标θ的正方向。$\omega>0$，表示逆时针方向转动；$\omega<0$，表示顺时针方向转动。$\beta>0$，角加速度为正方向；$\beta<0$，角加速度为负方向。

例：刚体做定轴转动，角速度为$\omega=6t^2$。求：（1）$t=1s$时的角加速度；（2）在 $t=1$s 到 $t=2$s 这段时间内，刚体转过的角度。

解：（1）按定义：$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=12t$　　$t=1s$时，$\beta=12\mathrm{rad/s^2}$

（2）按角速度定义：

$$\theta-\theta_0=\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_1^2\omega dt=\int_1^2 6t^2dt$$

可解得这段时间内刚体转过的角度：$\theta-\theta_0=14(\mathrm{rad})$

§3.2 刚体定轴转动的转动定律

一、对轴的力矩

对于有固定转轴的刚体，平行于转轴或作用线通过转轴的力，都不能使刚体转动。设力$\boldsymbol{F}$作用于刚体中的质点P，且在转动平面内，则力$\boldsymbol{F}$对转轴的力矩定义为：

$$M=Fd$$

d 称为力臂，d与位矢的关系为：

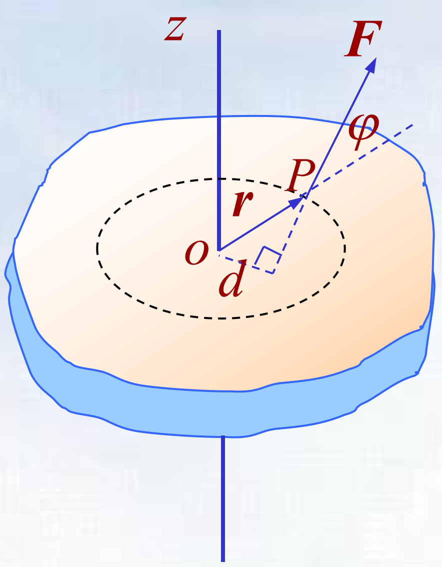
$$d = r\sin\varphi$$

因而上式可写为：

$$M = Fr\sin\varphi = F_\tau r$$

上式用矢量表示式为：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$



- 若力不在转动平面内，则可将此力分解为与转轴的平行分量和垂直分量，其中平行分量不产生力矩。
- 刚体所受的合力矩等于各力对转轴力矩的和：

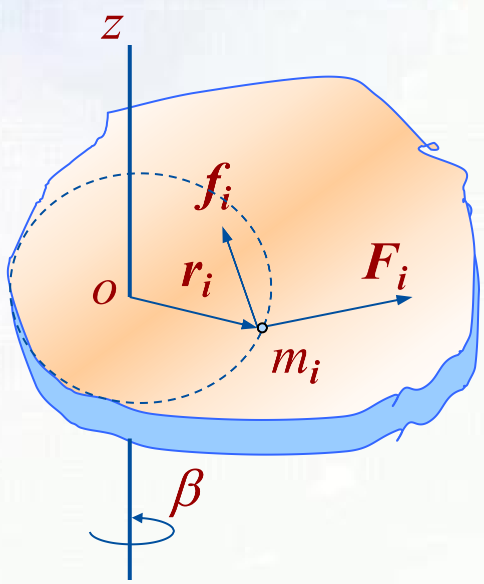
$$M = \sum F_i d_i,\quad \boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

- 可以证明，内力的合力矩为零，刚体所受的合力矩指外力的合力矩。

二、刚体定轴转动的转动定律

设质点m_i离转轴的垂直距离为r_i，受到外力$\boldsymbol{F}_i$和内力$\boldsymbol{f}_i$的作用，运动方程为：

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i = m_i \boldsymbol{a}_i$$



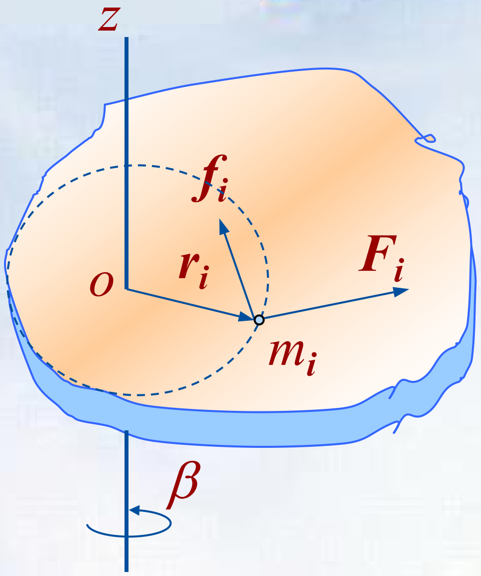
切向分量式为： $F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau}$

根据线量与角量的关系，

$$a_{i\tau} = \beta r_i$$

上式可写为：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i r_i \beta$$



在上式两边同乘 r_i 得：

$$F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$$

因法向分量 F_{in}和 f_{in} 均通过转轴，不产生力矩，则 $f_{i\tau} r_i$、$F_{i\tau} r_i$ 分别表示内力、外力对转轴的力矩。对上式求和：

$$\sum F_{i\tau} r_i + \sum f_{i\tau} r_i = (\sum m_i r_i^2)\beta$$

外力对转轴力矩的代数和，M

内力力矩求和为零

刚体本身的性质和转轴位置有关称 **转动惯量**

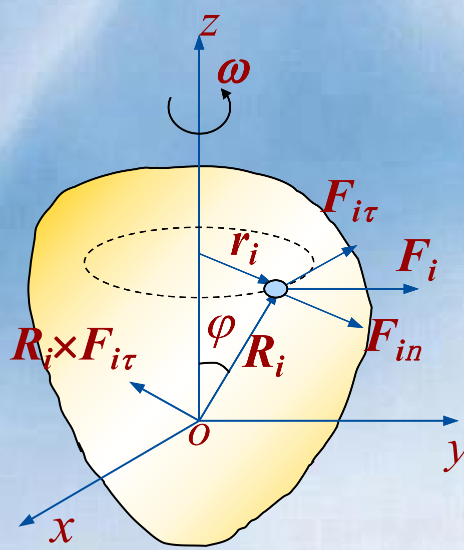
即：$M = J\beta$　　用矢量表示：$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\beta}$

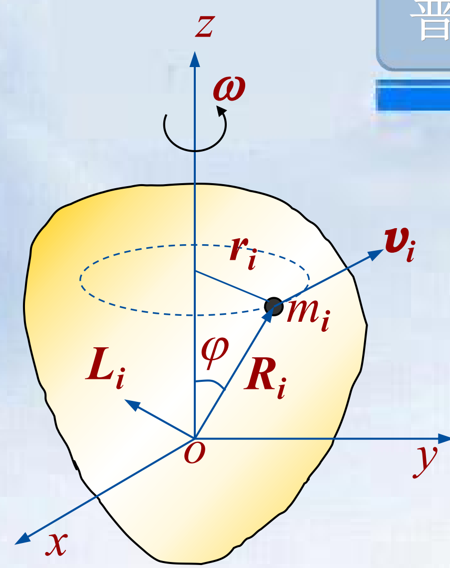
刚体定轴转动时，角加速度与<u>合外力矩</u>成正比，与转动惯量成反比—刚体定轴转动定律。

三、刚体定轴转动的转动定律与质点系角动量定理的关系

刚体定轴转动是刚体转动的最简形式，其一般形式为定点转动。质点系角动量定理对刚体的定轴、定点转动都适用，而定轴转动定律只是角动量定理沿转轴的一个分量式（坐标原点在转轴上）。

设刚体绕 z 轴定轴转动，现求质点系角动量定理 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ 在 z 轴的分量式：首先求合外力矩，设$\boldsymbol{F}_i$为质点m_i所受外力的垂直分量（外力可分解为与转轴的平行分量和垂直分量，其中平行分量不产生力矩），则$\boldsymbol{F}_i$对o点的力矩：



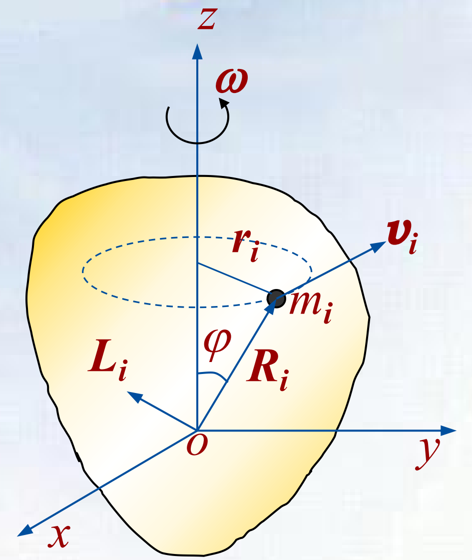


$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{R}_i \times (\boldsymbol{F}_{i\tau} + \boldsymbol{F}_{in})$$

上式中 $\boldsymbol{F}_{in}$ 产生的力矩沿z轴的分量为零。

$(\boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{F}_{i\tau})$ 在质点与z轴组成的平面内，并与 $\boldsymbol{R}_i$ 垂直，力矩沿z轴的分量为：

$$M_{iz} = R_i F_{i\tau} \sin\varphi = F_{i\tau} r_i$$



力矩在z轴的分量的总和：

$$M_z = \sum F_{i\tau} r_i$$

再求角动量$\boldsymbol{L}$沿z轴的分量L_z，

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{R}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$\boldsymbol{L}_i$在质点与 z 轴组成的平面内，并与$\boldsymbol{R}_i$垂直，沿z轴的分量为：

$$L_{iz} = m_i R_i v_i \sin\varphi = m_i r_i^2 \omega$$

刚体总角动量$\boldsymbol{L}$在z轴分量为所有质点的L_{iz}的总和：

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega$$

刚体绕 z 轴转动时，质点系角动量定理沿 z 轴的分量式：

$$M = \sum F_{i\tau} r_i = \left[M_z = \frac{dL_z}{dt} \right] = \sum m_i r_i^2 \beta = J\beta$$

即为刚体定轴转动定律。

§ 3.3 转动惯量

一、转动惯量的物理意义

将刚体定轴转动定律与质心运动定律比较：

$$\mathbf{M} = J\boldsymbol{\beta}\,; \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$$

质量m是刚体平动惯性大小的量度，与此相比，转动惯量J是刚体转动惯性大小的量度。

二、转动惯量的计算

刚体对转轴的转动惯量J等于刚体上各质点的质量m_i与各质点到转轴垂直距离平方r_i^2乘积之和。

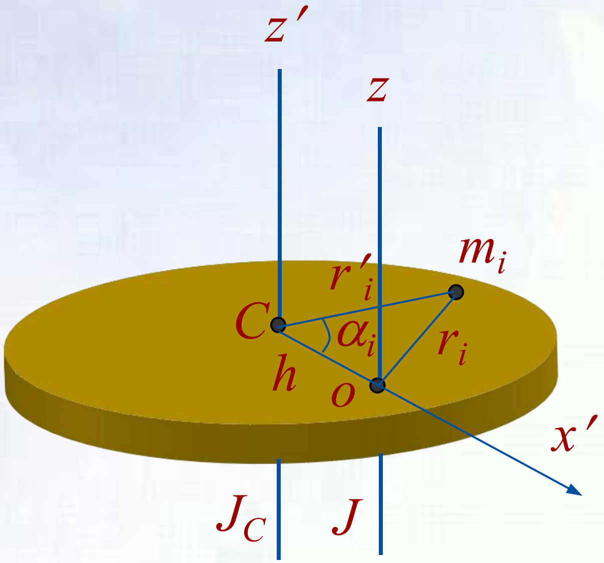
$$\boxed{J = \sum m_i r_i^2} \qquad \boxed{J = \int r^2 dm}$$

转动惯量的单位：kg·m²。

三、平行轴定理和垂直轴定理

1. 平行轴定理

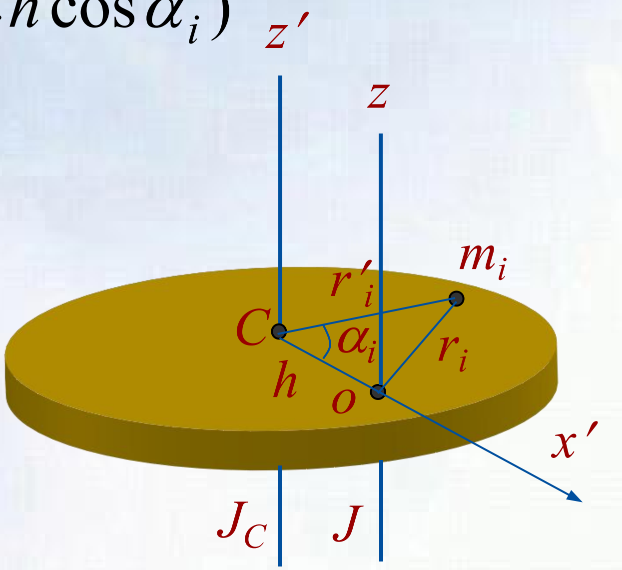
刚体对任意转轴的转动惯量J等于对通过质心的平行轴的转动惯量J_C加上刚体质量与两平行轴间距离的平方乘积：



$$J = J_C + mh^2$$

证明：刚体对oz轴的转动惯量J为：

$$J=\sum m_i r_i^2=\sum m_i({r_i'}^2+h^2-2r_i'h\cos\alpha_i)$$



上式右边第一项为刚体通过质心的平行轴的转动惯量

$$J_C=\sum m_i {r_i'}^2$$

第二项为： mh^2

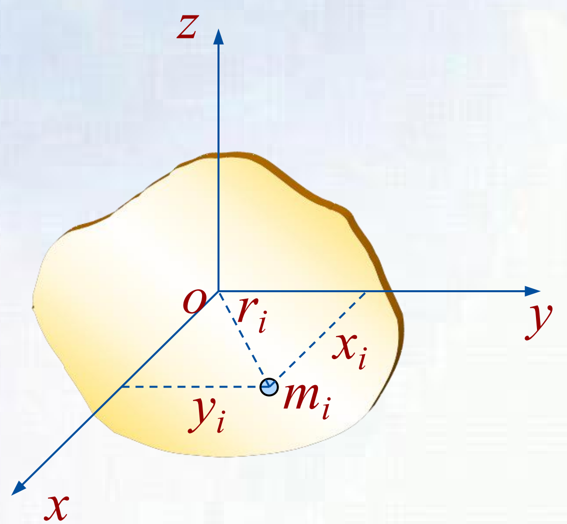
以质心C为原点，做Cx'轴，按质心定义：

$$x_C'=\frac{\sum m_i x_i'}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i r_i'\cos\alpha_i}{\sum m_i}=0$$

故第三项为零，因此证得：$J = J_C + mh^2$

2. 垂直轴定理

若刚体薄板在xy平面内对x轴和y轴的转动惯量分别为J_x和J_y，则薄板对z轴的转动惯量为：



$$J_z = J_x + J_y$$

证明：薄板对z轴的转动惯量为：

$$J_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

上式中： $\sum m_i x_i^2 = J_y$ $\sum m_i y_i^2 = J_x$

故证得： $\boxed{J_z = J_x + J_y}$

刚体的转动惯量与三个因素有关：

刚体的总质量；质量分布；转轴的位置。

同一刚体对不同转轴的转动惯量不同，凡是提到转动惯量，必须指明它是对哪个轴才有意义。

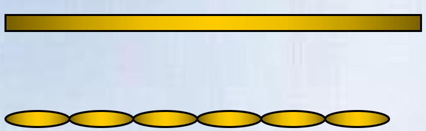
在计算刚体的转动惯量时，首先要会计算刚体某一部分的质量元dm。由分布的不同，质量元的计算为：

质量为线分布 $dm = \lambda(l)dl$

质量为面分布 $dm = \sigma(\mathbf{r})ds$

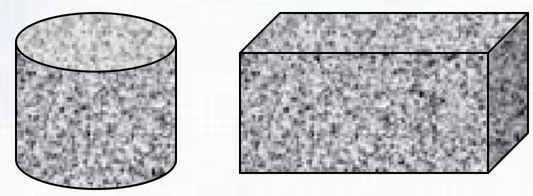
质量为体分布 $dm = \rho(\mathbf{r})dV$

其中λ、σ、ρ分别为质量的线密度、面密度和体密度。



线分布

面分布



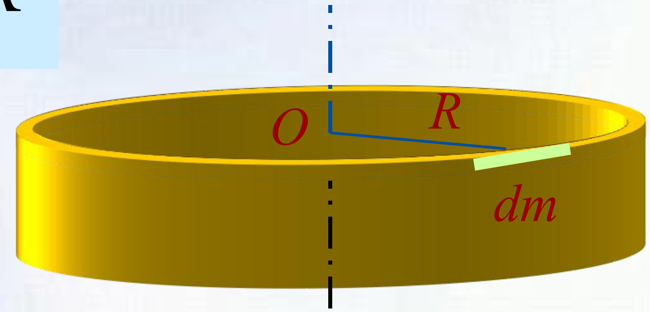
体分布

例： 求质量为m、半径为R的均匀圆环的转动惯量。轴与圆环平面垂直并通过圆心。

解：

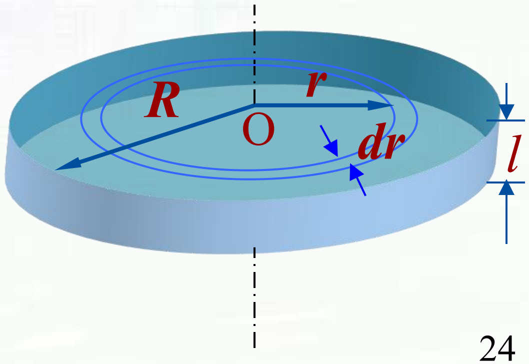
$$J=\int R^2 dm = R^2\int dm = mR^2$$

J是可加的，所以若为薄圆筒（不计厚度）结果相同。



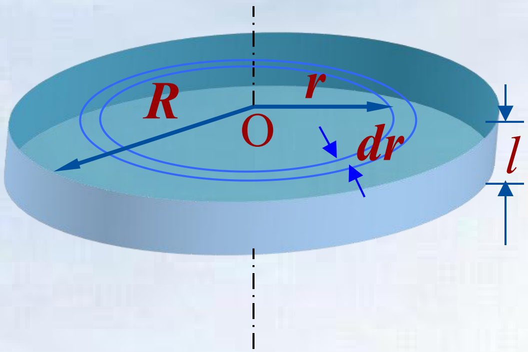
例： 求质量为m、半径为R、厚为l 的均匀圆盘的转动惯量。轴与盘平面垂直并通过盘心。

解： 取半径为r宽为dr的薄圆筒，



$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot l$$

$$dJ = r^2 dm = \rho \cdot 2\pi l r^3 dr$$



$$J = \int dJ = \int_0^R \rho \cdot 2\pi l r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 l$$

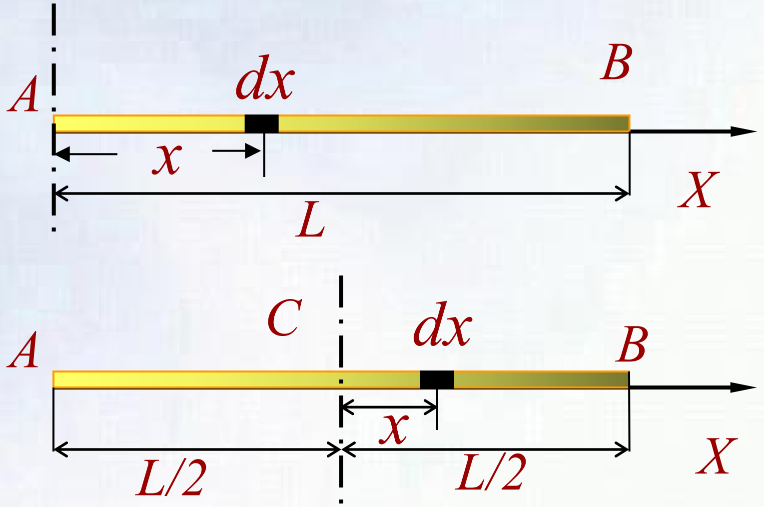
$$\because \quad \rho = \frac{m}{\pi R^2 l} \quad \therefore \quad J = \frac{1}{2} m R^2$$

例: 求长为L，质量为m的均匀细棒对图中不同轴的转动惯量。

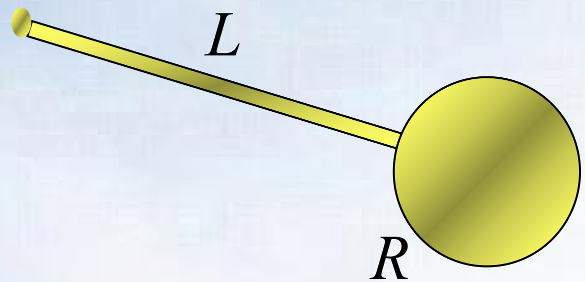
解： 取如图坐标，$dm=\lambda dx$

$$J_A=\int_0^L x^2\lambda dx=mL^2/3$$

$$J_C=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\lambda\, dx=mL^2/12$$



例： 计算右图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量。（棒长为L、圆半径为R）



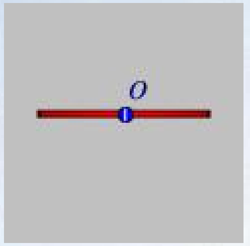
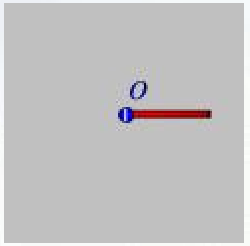
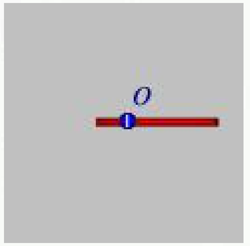
解： 棒绕端点：$J_{L1}=\dfrac{1}{3}m_L L^2$

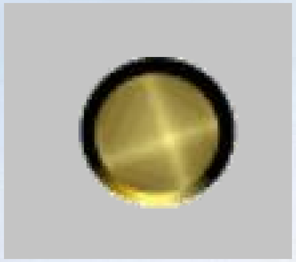
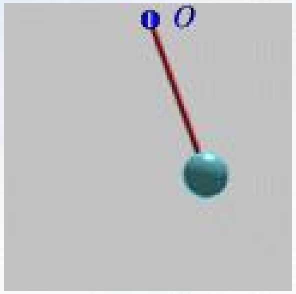
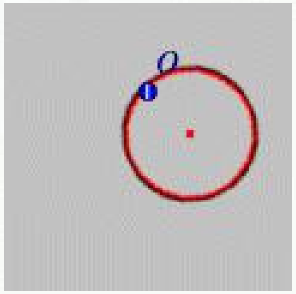
圆盘绕轴心：$J_o=\dfrac{1}{2}m_o R^2$

圆盘绕棒的端点：$J_{L2}=J_0+m_0 d^2=J_0+m_0(L+R)^2$

$$J=\frac{1}{3}m_L L^2+\frac{1}{2}m_o R^2+m_o(L+R)^2$$

一些刚体的转动惯量

1. 匀质直杆对垂直于杆的转轴的转动惯量(杆长为l，质量为M)	1) 垂直于杆、通过杆中心的轴 $J = 1/12 M l^2$	
	2) 垂直于杆、通过杆端点的轴 $J = 1/3 M l^2$	
	3) 垂直于杆、通过杆1/4处的轴 $J = 7/48\, M l^2$	

2. 匀质圆盘的转动惯量(圆盘质量为M，半径为R)	通过盘心、垂直盘面的转轴 $J = 1/2\ MR^2$	
3. 挂钟摆锤的转动惯量 (杆长为l ，质量为m_1；摆锤半径为R，质量为m_2)	$J=\frac{1}{3}m_1l^2+\frac{1}{2}m_2R^2+m_2(l+R)^2$	
4. 挂在光滑钉子上的匀质圆环摆动的转动惯量(圆环质量为m, 半径为R)	$J=mR^2+mR^2=2mR^2$	

5. 半径为R的球体，转轴沿直径的转动惯量	$J=\dfrac{2}{5}mR^2$	
6. 半径为R的球壳，转轴沿直径的转动惯量	$J=\dfrac{2}{3}mR^2$	

四、回转半径

若刚体对转轴的转动惯量为J，则回转半径定义为：

$$R_G = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

从而刚体的转动惯量为：

$$J = mR_G^2$$

若把刚体全部质量都分布在半径为R_G的圆周上，这时的转动惯量就等于刚体的转动惯量。

刚体定轴转动例题

思考题、1、2、3

例题一、 悬挂两重物的塔形滑轮的运动

例题二、 滑轮上悬挂软绳的运动

例题三、 打击中心问题

例题四、 斜面、滑轮与弹簧组成系统的运动

1. 刚体绕定轴作匀变速转动时，刚体上距转轴任一点的

(A) 切向、法向加速度的大小均随时间变化

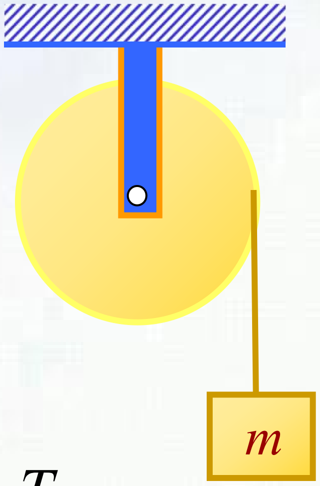
(B) 切向、法向加速度的大小均保持恒定

(C) 切向加速度的大小恒定，法向加速度的大小变化

(D) 法向加速度的大小恒定，切向加速度的大小变化

答案 **C** $a_\tau = \beta R$(常量)；$a_n = \omega^2 R$ (变化)

2．一轻绳绕在具有水平转轴的定滑轮上，绳下端挂一物体，物体的质量为m，此时滑轮的角加速度为β。若将物体卸掉，而用大小等于mg、方向向下的力拉绳子，则滑轮的角加速度将：



(A) 变大 (B) 不变

(C) 变小 (D) 无法判断

答案 **A** $mg - T = ma$，则 $mg > T$

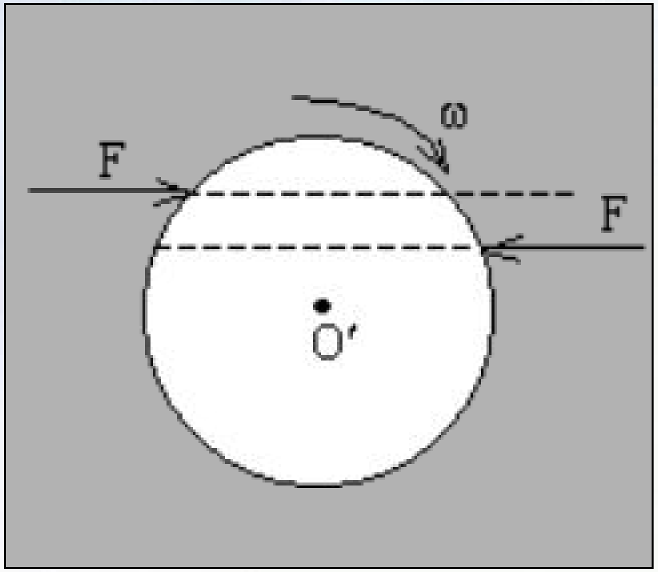
3. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴 O 以角速度ω按图示方向转动，若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 $\boldsymbol{F}$ 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度ω

（A）必然增大

（B）必然减少

（C）不会改变

（D）如何变化，不能确定

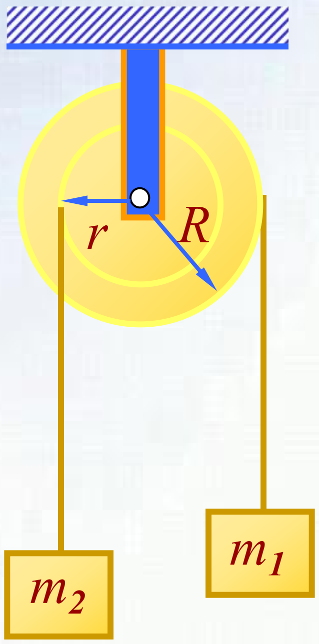


答 案

A 合力矩与**ω**方向相同, ω 增加

例题1：悬挂两重物的塔形滑轮的运动

如图所示，一个组合滑轮由两个匀质的圆盘固接而成，大盘质量M_1=6kg，半径R =0.10m，小盘质量M_2 = 4kg，半径 r=0.05m 。两盘边缘上分别绕有细绳，细绳的下端各悬挂质量 $m_1 = m_2 =$ 2kg 的物体。两物体由静止释放，求：



(1) 两物体m_1、m_2的加速度大小；

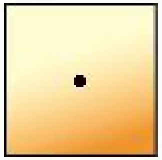
(2) 两绳中的张力。

思考与分析：

这是一个由质点和刚体组成的系统，首先要明确，处理这类问题的基本方法是隔离体法。对质点分析受力，应用牛顿定律。对刚体要分析所受力矩和角加速度，应用转动定律。然后通过角量与线量的关系，把质点的加速度与刚体的角加速度联系起来。

解答：

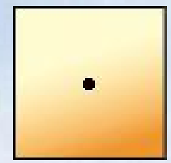
解：对质点 m_1：　　$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$　　(1)

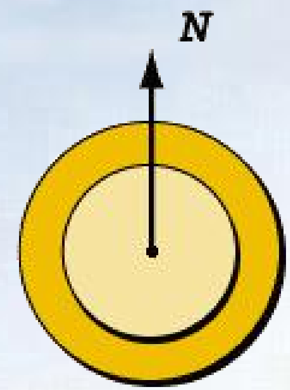


对质点 m_2： $T_2 - m_2 g = m_2 a_2$ (2)

对于滑轮：

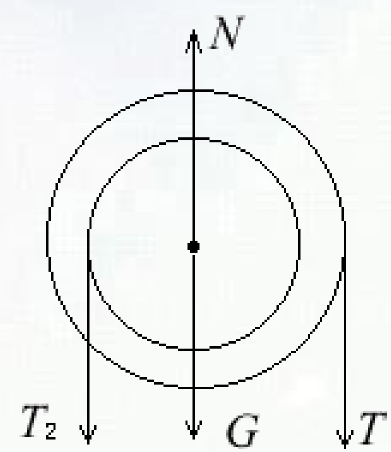
分析它受几个力？画出受力图





其中 $G=(M_1+M_2)g$

1. 四个力对转轴的力矩的大小和方向：



$M_N = M_G=0$， 理由：作用线通过转轴

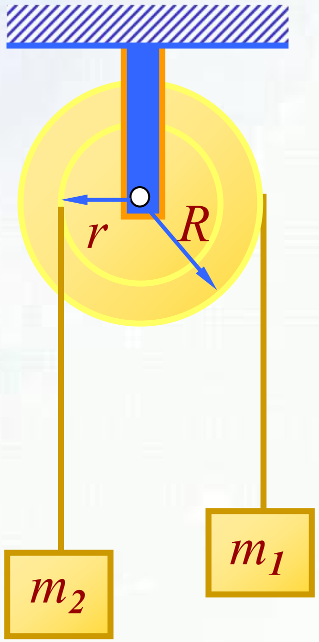
$M_{T1}= RT_1$ 方向 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{T}_1$， $\otimes$

$M_{T2}= rT_2$ 方向 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T}_2$， $\odot$

2. 设⊗方向为正（与m_1，m_2正方向一致），
由转动定律：

$$RT_1 - rT_2 = (J_1 + J_2)\beta = \left(\frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2r^2\right)\beta \qquad (3)$$

3. m_1的加速度a_1，即为大盘边缘处的切向加速度：



$$a_1 = R\beta \qquad (4)$$

同样 $$a_2 = r\beta \qquad (5)$$

由(1)式—(5)式解得：$(\beta\ \ a_1\ \ a_2\ \ T_1\ \ T_2)$

$$\beta = \frac{(Rm_1 - rm_2)g}{M_1'R^2 + M_2'r^2} = \frac{5}{3}g = 16.3rad/s^2$$

其中 $M_1' = m_1+1/2M_1$

$M_2' = m_2+1/2M_2$

$a_1=R\beta=1.63\ \mathrm{m/s^2}$

$a_2= r\beta=0.817\ \mathrm{m/s^2}$

$T_1=m_1(g - a_1)=16.3\ \mathrm{N}$

$T_2=m_2(g + a_2)=21.2\ \mathrm{N}$