第 七 周

第8章　相对论

§8.1，　§8.2，　§8.3，　§8.4，　§8.5，
§8.6，　　§8.7，　§8.8，　　§8.9，
§8.10(一般了解)

作业：P114　8-1，8-2，8-5，8-7，8-11

P115　8-14，8-16，8-19

狭义相对论基础

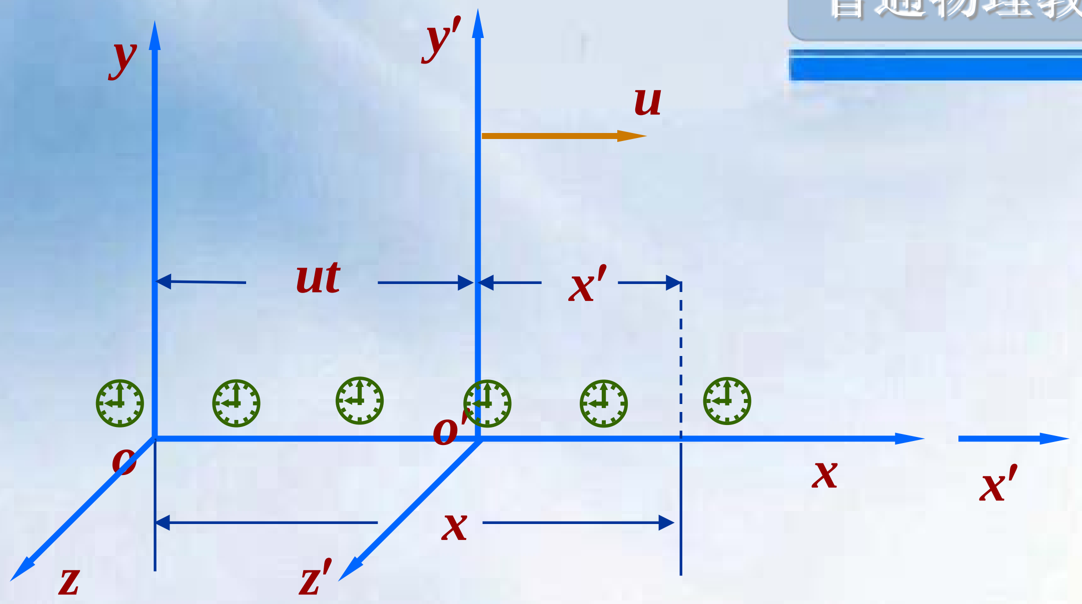
第四章 狭义相对论基础

§ 4.1 经典力学的困难

伽利略变换：

设K'系相对K系以恒定速度u沿x轴正向运动，且 $t=0$时两坐标系重合。若在K 系中有一事件发生于 (x, y, z, t)，同一事件在 K' 系中可以用 (x', y', z', t') 来描述。事件 (x, y, z, t) 或 (x', y', z', t') 分别由K系或K'系中的观察者记录。这里的观察者指静止于某一参考系中无数同步运行的记录钟，其位置和其相应的一个时钟读数可以构成一个事件记录。依照上述约定，伽利略变换为：

$$x = x' + ut$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$
$$\upsilon_x = \upsilon'_x + u$$
$$\upsilon_y = \upsilon'_y$$
$$\upsilon_z = \upsilon'_z \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$



在牛顿定律成立的领域内，力与参考系无关

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$，由于$m$不变， $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \longrightarrow \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$

牛顿定律和其它力学规律在伽利略变换下形式不变，这就是力学的相对性原理。

伽利略变换在根本上依赖于时间和空间的观念：

牛顿关于绝对时间和空间的定义：

绝对空间，就其性质来说，与此外的任何事物无关，永远是相同的和不动的……。

绝对的、真正的和数学的时间自己均匀地流逝着，并与此外的任何事物无关……。

即：长度的量度与参照系无关，时间的量度与参照系无关，且时间和空间是分离的。

伽利略变换的主要结果：

1. 两个事件A、B的时间间隔是：

$$t'_A - t'_B = t_A - t_B$$

若在**K'**系中 $t'_A = t'_B$ 将导致**K**系中 $t_A = t_B$

在一个惯性系中同时发生的事件，在所有惯性系中都是同时的。

2. 两点之间的空间间隔是：

$$x'_A - x'_B = (x_A - ut_A) - (x_B - ut_B)$$
$$= x_A - x_B - u(t_A - t_B)$$

若在同一时刻测量，则： $x'_A - x'_B = x_A - x_B$

即在不同惯性系中长度测量结果相同。

在牛顿时空观中速度是相对的、加速度是绝对的。总之：在所有惯性系中力学定律都是相同的；或力学定律在伽利略变换下是不变的。

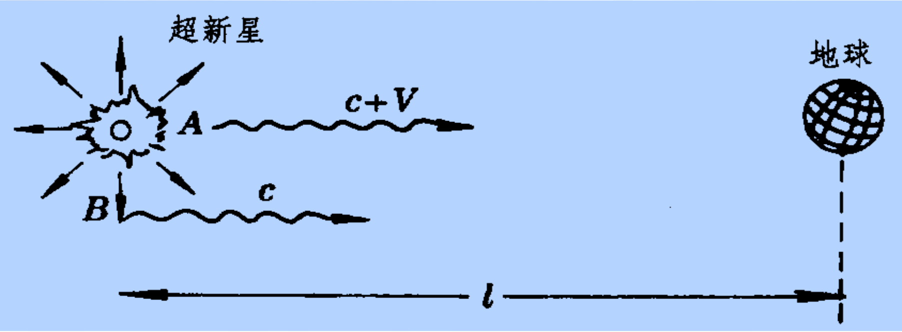
经典力学时空观的困难：

(1)速度合成律的问题

设一人相对于自己以速度 $\boldsymbol{u}$ 掷球，而又以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对地面跑动，则球出手后相对地面的速度为：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{V}$，但此算法运用到光的传播问题时就会产生矛盾。

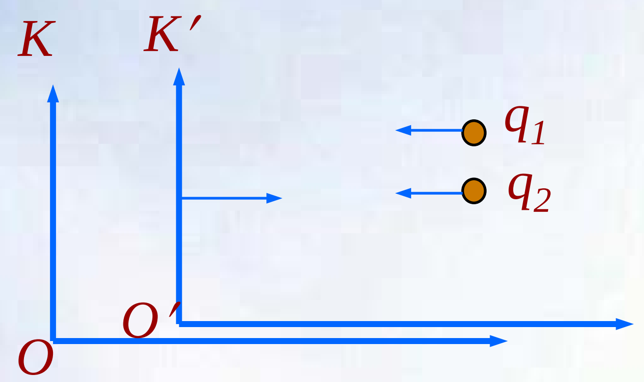
设想两个人玩排球。甲击球给乙，乙看到球，是因为球发出的光到达了乙的眼睛。设甲乙两人之间的距离为l，球发出的光相对于球的传播速度是c。在甲即将击球之前，球暂时处于静止状态，乙看到此情景的时刻比实际时刻晚$\Delta t = l / c$。在极短冲击力作用下，球出手时速度达到V，按上述经典的合成律，此刻由球发出的光相对于地面的速度为$c+V$，乙看到球出手的时刻比它实际时刻晚$\Delta t' = l / (c+V)$。显然$\Delta t' < \Delta t$，这就是说，乙先看到球出手，后看到甲即将击球！这种因果颠倒的现象如何解释。

1731年一英国天文爱好者在金牛座上发现蟹状星云。人们相信它是900多年前一次超新星爆发出的气体壳层，而这次爆发在我国的《宋会要》中的记载得到证实。爆发时间从1054（北宋至和元年）延续到1056（嘉右元年）。超新星爆发时其外围物质向四周飞散，可分为纵向和横向，设纵向速度为*V*，按经典速度合成率计算，（*V*=1500km/s, *l*=5000光年）$\Delta t'$比Δt短25年。我们将会在25年内持续看到超新星爆发所发出的强光，而史书记载不到两年，这如何解释？



(2)电磁学定律的伽利略变换

在K系中两静止的点电荷，只有静电场，而在K'系看来，则两运动电荷间还有磁场，且与速度有关。看来伽利略变换不适合电磁学。



按照电磁场理论：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = 0$$

如果伽利略变换适用，它的一维方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=0$$

将变为：$(x=x'+ut,\quad t=t')$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi+\frac{2u}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\varphi-\frac{u^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi=0$$

即在不同的惯性系中波动方程呈现不同的形式。另外，按伽利略变换，在不同的惯性系中（相对速率为u），光以$c+u$和$c-u$传播。

(3)以太风实验:

为了在经典力学的框架内解释上述矛盾，法国

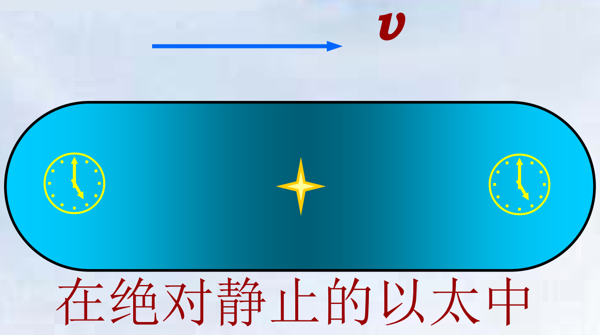
物理学家菲涅耳提出“以太”理论，在与“以太”介质相对静止的参照系中光以速度 c 运动。

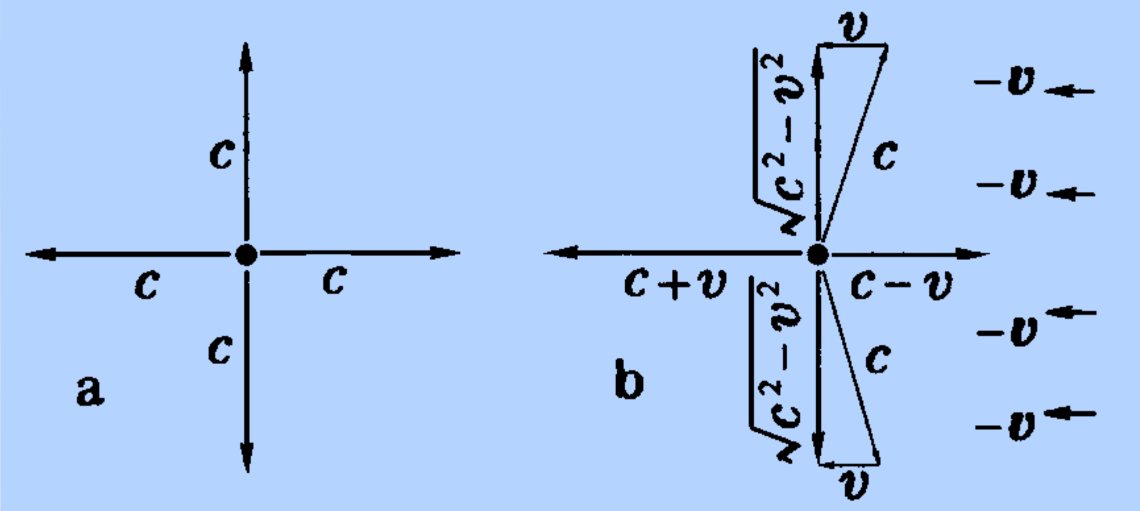
“以太”的性质：没有质量、完全透明、对运动物体没有阻力。

设想在惯性系中测量光速，飞船以速度 υ 相对以太运动，飞船中间发出闪光，光相对船头观察者速度 $c-\upsilon$，光相对船尾观察者速度 $c+\upsilon$；只要测出船头船尾观察者接受到光信号的时间，就可确定飞船相对以太的运动速度 υ。

$$l/[2(c-v)]=\Delta t_1 \quad l/[2(c+v)]=\Delta t_2$$

假设地面相对静止坐标系(以太)的运动速度为$\boldsymbol{v}$，若以太确实存在，则在地面各处测得的光速如下图所示:



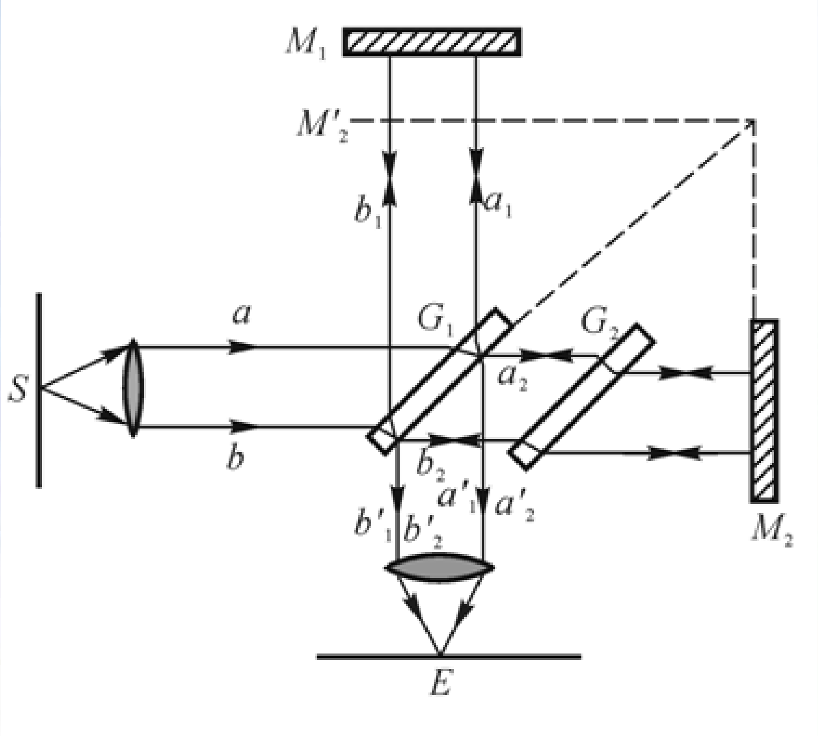


想象中的以太风对光速的影响

迈克耳逊和莫雷按上述思路作了精密实验，即著名的迈克耳逊-莫雷实验，结果没有观察到预期结果：

预期的“干涉条纹”移动没有被观察到。

表明“以太”不存在。



1887年

(4)质量与速度的关系

按照牛顿力学，物体的质量是常量。但1901年考夫曼（W.Kaufmann）在确定镭发出的β射线（高速运动的电子束）荷质比*e/m*的实验中首先观察到，电子的荷质比*e/m*与速度有关。他假设电子的电荷*e*不随速度而改变，则它的质量*m*就要随速度的增加而增大。这类实验后来被更多人用愈来愈精密的测量不断地证实。

由于在经典物理中遇到以上所介绍的困难，物理学家开始寻求伽利略变换以外的新变换。这方面的工作有：

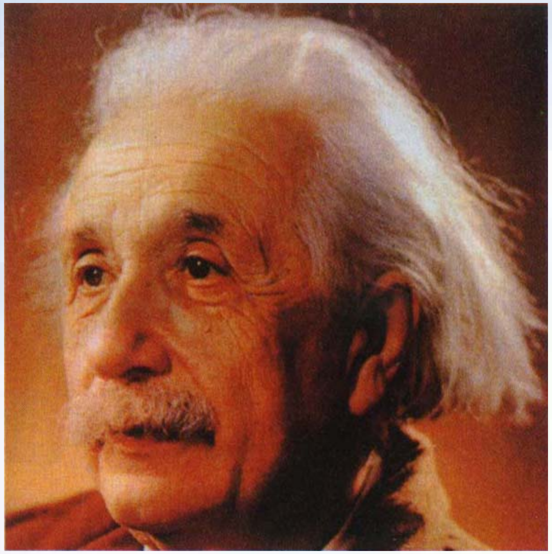
1892年爱尔兰的菲兹哲罗和荷兰的洛伦兹提出运动长度缩短的概念。

1899年洛伦兹提出运动物体上的时间间隔将变长。

1904年法国庞加莱提出物体质量随其速率的增加而增加，速度极限为真空光速。

1905年爱因斯坦提出狭义相对论。

§4.2 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换



一、狭义相对论的基本原理

1. 相对性原理：物理定律在所有惯性系中都相同。2. 光速不变原理：在所有惯性系**真空**中的光速都相等。

满足上述两个条件的变换是洛伦兹变换。洛伦兹变换还遵循两个基本原理：1. 变换是线性的，因两参照系的事件一一对应。2. 假定了时空的均匀性及空间的各向同性。

二、洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

在洛伦兹变换中，当u<<c时洛伦兹变换变成伽利略变换。若设想K系相对K'系以$(-u)$运动，则可得其逆变换：

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

三、爱因斯坦速度变换

在洛伦兹变换两边求微分有：

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - udx/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

用第四式除其余三式，即得爱因斯坦速度变换公式：

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}$$

$$v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}$$

$$v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}$$

同理可得上式的逆变换：

$$v_x=\frac{v'_x+u}{1+uv'_x/c^2}$$

$$v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv'_x/c^2}$$

$$v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv'_x/c^2}$$

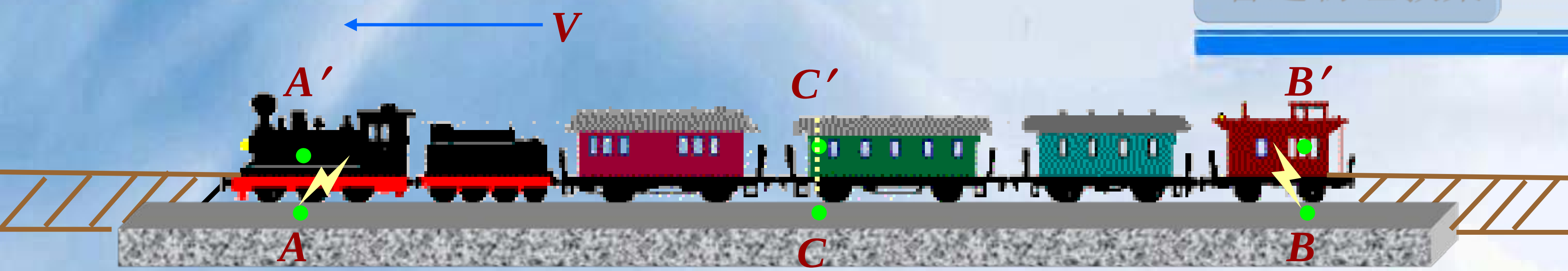
上式称为爱因斯坦速度变换公式。当$u<<c$时爱因斯坦速度变换变成伽利略速度变换。

§ 4.3 狭义相对论的时空观

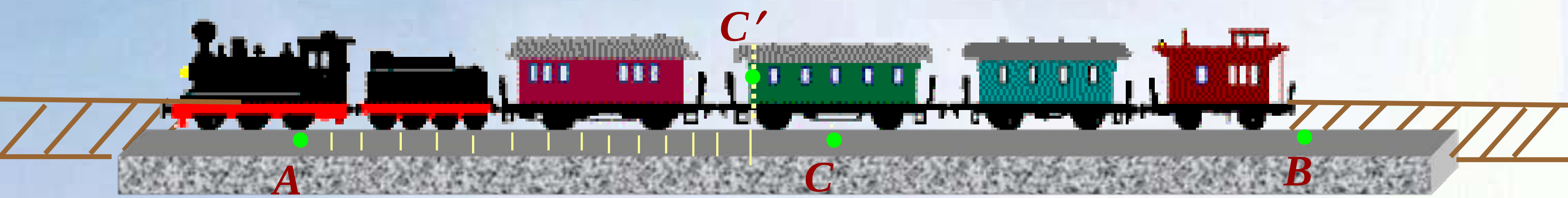
一、同时的相对性

爱因斯坦根据光速不变原理，提出一个异地对钟准则：设在*K*惯性系中（站台），*C*为*A*、*B*中点，在*C*点向*A*、*B*两点发出对钟光信号，*A*、*B*收到此信号被认为是“同时”的。

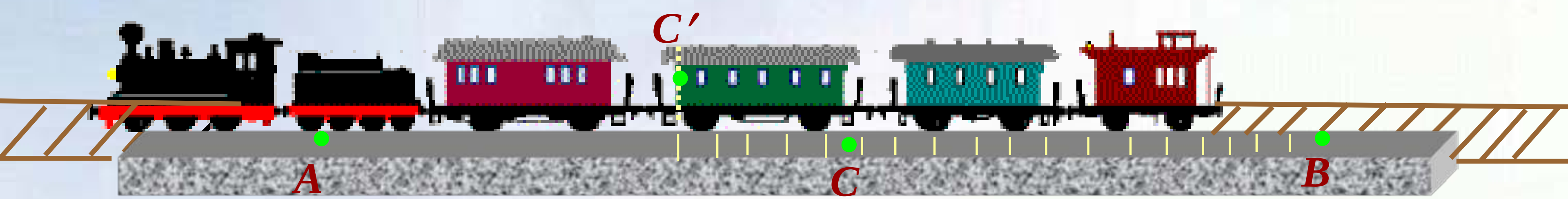
以上的“同时性”判断适用于一切惯性系。问题是。两个事件，在某惯性系看是同时的，是否在其他惯性系看也同时？



1. 站台上的A、B同时发出信号



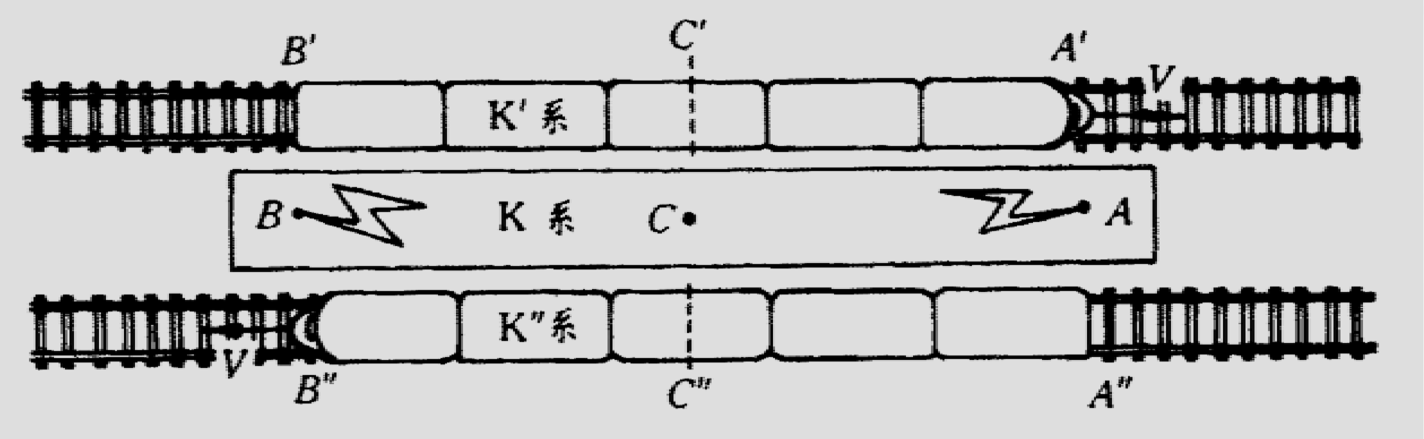
2. A(即A'处)的信号先到达C'处



3. B(即B'处)的信号后到达C'处

在经典物理中同时是绝对的，但在相对论中，由于光速不变原理，此结论将不成立。为说明这一点，爱因斯坦提出一理想实验：设火车相对站台以匀速**V**向左运动（见下图）。当列车的A'、B'与站台的A、B两点重合时，站台上同时在这两点发出闪光，则它们同时传到C点。但列车的中点C'先接到A'点的闪光，后接到B'点的闪光。对观察者C'来说，A'的闪光早于B'的闪光；对观察者C来说，A的闪光与B的闪光是同时的，即对站台参考系同时的事件，对列车参考系是不同时的，这就是说同时是相对的。

现在可以把问题提的尖锐一点，假定有两辆列车相向而行，相对站台的速度为$\boldsymbol{V}$、-$\boldsymbol{V}$。如图所示，站台上A、B两点同时发出子弹。这是一个关于谁先开枪的问题。C' 和 C'' 两目击者将得到相反的结果？



谁先开枪问题

可用洛仑兹变换讨论同时的相对性。设K'系相对K系以速度$\boldsymbol{u}$沿x轴运动，在x轴坐标为x_1的A处和x轴坐标为x_2的B处，t时刻同时发生两个事件，则按洛仑兹变换，K'系中有：

$$t_1' = \frac{t - ux_1/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad t_2' = \frac{t - ux_2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

由上式可见：

① 当 $x_2 \neq x_1$ 时，$t_1' \neq t_2'$。只有当$x_2 = x_1$时，$t_1' = t_2'$。

K系中不同地点发生的两个“同时”事件，在K'系中“不同时”。

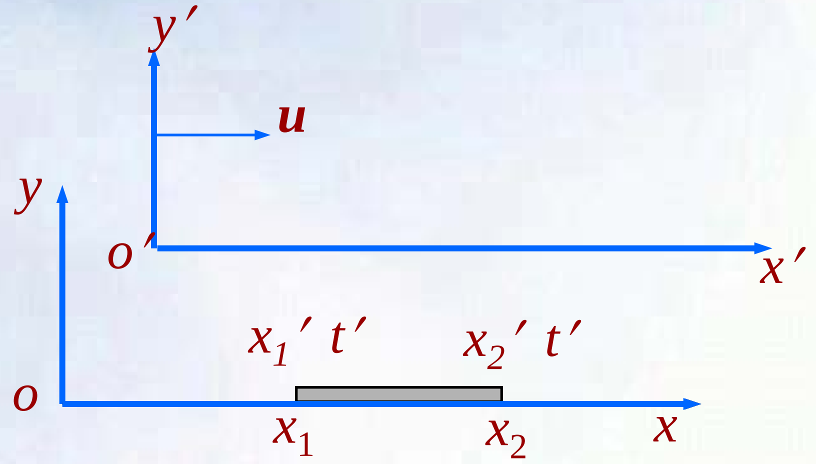
② 无论 $x_2 = x_1$ ，还是 $x_2 \neq x_1$ ，若 $u << c$ ，则 $t_1' \approx t_2'$ 。

二、长度的相对性

要测量一个运动物体的长度，合理的办法是同时记下物体两端的位置。设K'系相对K以速度$\boldsymbol{u}$沿x轴运动，K系中有一根静止的棒，两端点的空间坐标为x_1和x_2，则棒在K系中的长度为：

$$l_0 = x_2 - x_1$$

通常棒在相对它静止的参照系中的长度称为固有长度或 静长。在K'系中的t'时刻，记下棒两端的空间坐标 x'_1、x'_2。K' 系中棒的长度为：



$$l' = x_2' - x_1'$$

按洛仑兹变换，有

$$x_1 = \frac{x_1' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

故： $l' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-u^2/c^2}$

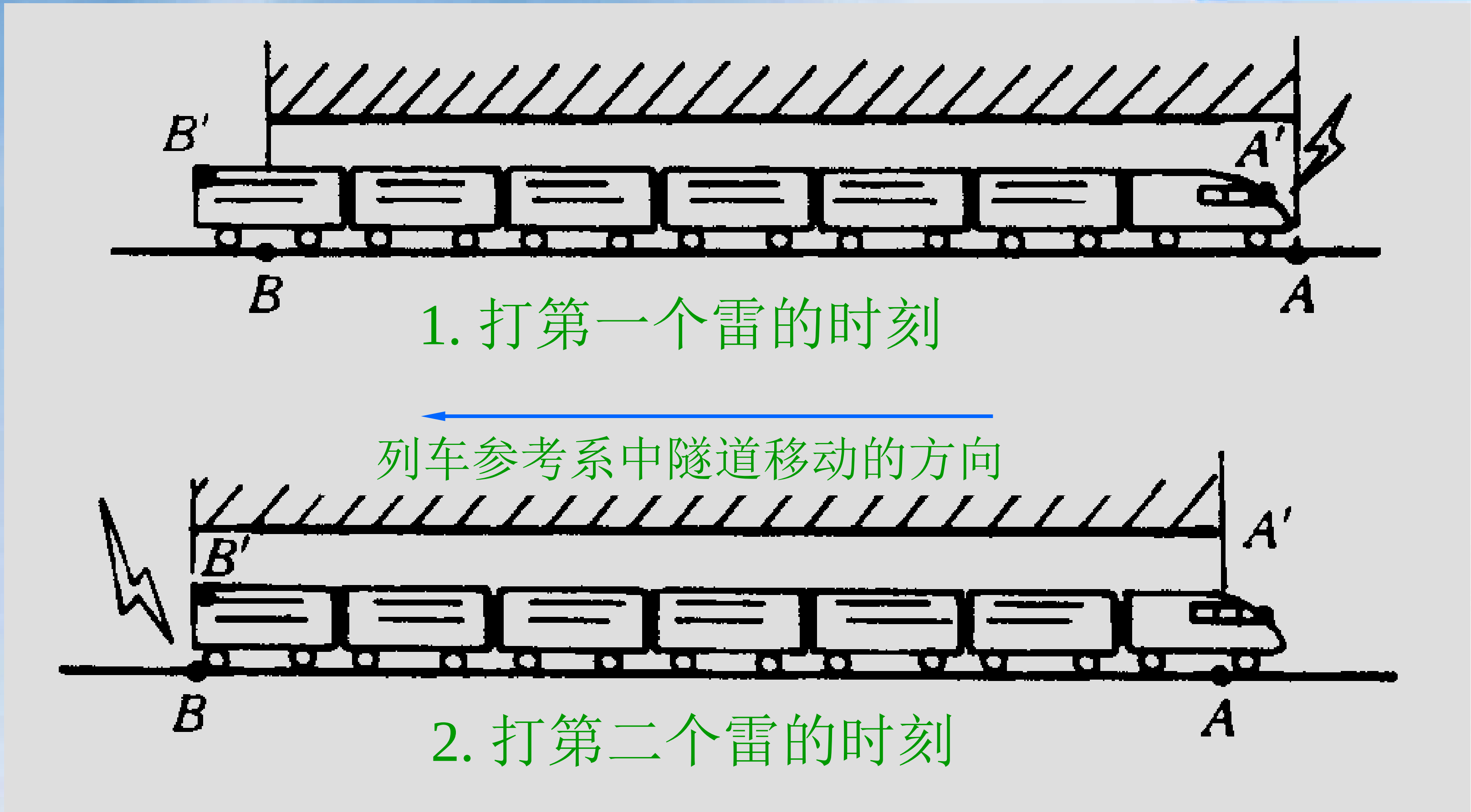
因 $l_0 = x_2 - x_1$， 故此棒在K'系中的长度：

$$l' = l_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

在相对棒静止的惯性系中，棒的长度最大，称为静长l_0。在相对于棒运动的惯性系中，棒沿运动方向的长度小于静长。此效应称为长度缩短。

与相对运动垂直的方向上，无相对运动，故不发生长度收缩。

设在地面参照系中，运动的列车长度为AB，正好与一段隧道的长度相同。而在列车参照系中，列车就会比隧道长。在地面参照系中当列车完全进入隧道时，在入口和出口处同时打两个雷。在列车参照系中，列车会被雷击中吗？这个问题的关键在“同时的相对性”上。在地面参照系中同时打两个雷，而在列车参照系中不同时，出口A处雷在先，列车未出洞，此时虽车尾在洞外，但B处雷还未响，等B处雷响时，车尾已进洞。

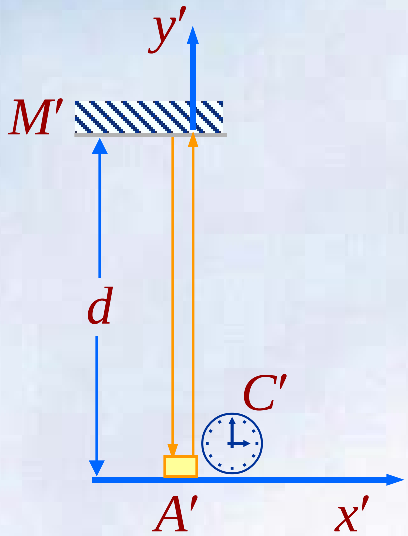


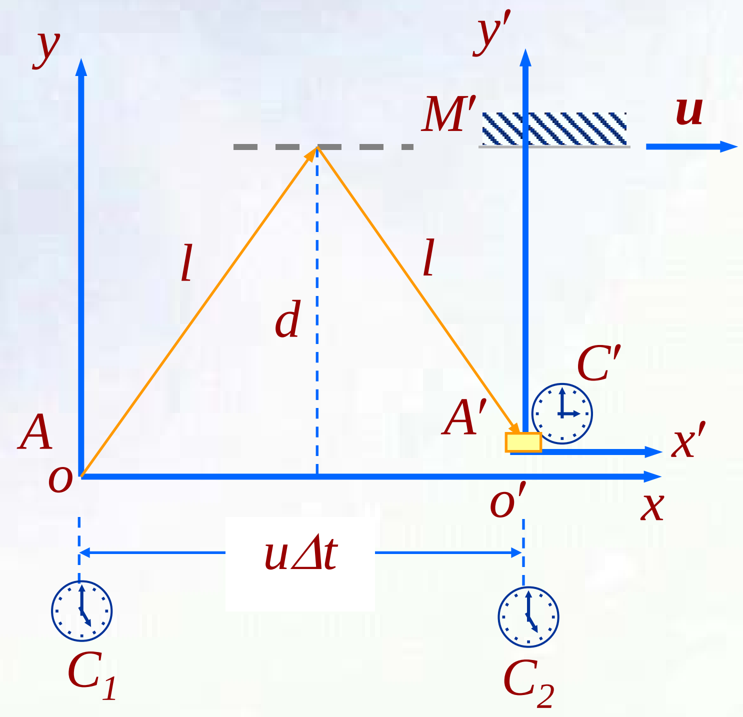
列 车 参 照 系

三、时间的相对性

设 K' 系中 A' 有一闪光源，它近旁有一只钟 C'，其上方有一反射镜 M'。光从 A' 发出再返回 A'，钟 C' 所走过时间为：

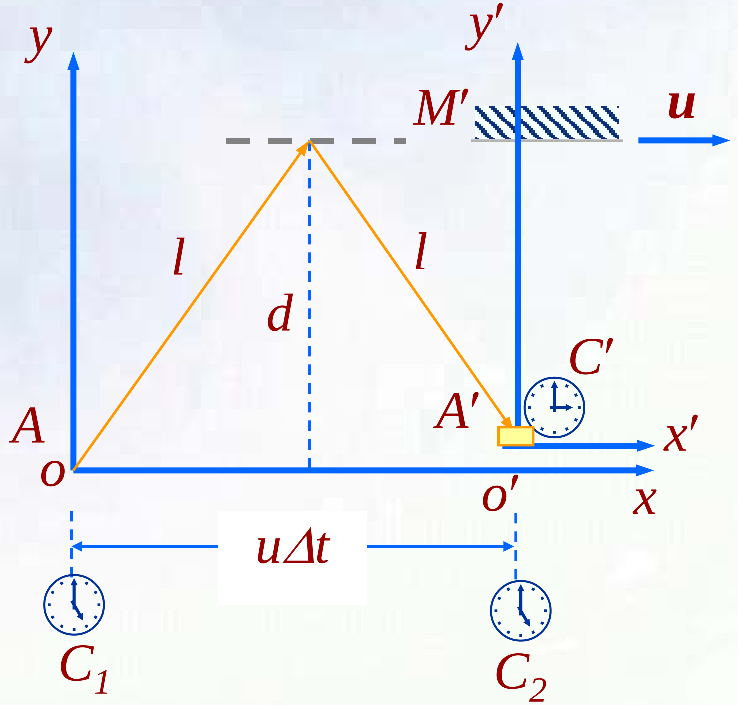
$$\Delta t' = 2d/c$$





在K系中测量，以Δt表示K系中测得闪光由A点发出返回到A'所经过的时间，在此时间内A'沿x方向移动的距离$u\Delta t$，K系中测量光线走过斜线的长度为：

$$2l = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$$



由于光速不变，所以：

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$$

由上式可解出：

$$\Delta t=\frac{2d/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Longrightarrow \Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

上式中 $\Delta t'$ 是在 K' 系中同一地点的两个事件之间的时间间隔，是静止于此参照系中的一只钟测出的，称为**原时** Δt_0。

由于上式中 $\sqrt{1-u^2/c^2}<1$，故 $\Delta t'<\Delta t$，即原时最短。

K 系中的 Δt 是不同地点的两个事件之间的时间间隔，是用静止于此参照系中的两只钟测出的，称为两地时，它比原时长。

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

上述相对论效应称为**时间膨胀**。

可用洛仑兹变换讨论时间间隔的相对性问题：

设在K系中的同一地点先后发生两个事件，时空坐标为(x,t_1)和(x,t_2)，在K系中两个事件的时间间隔为：

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1$$

由于K'系、K系间有相对运动，K'系中的这两个事件就发生在不同的地点，按洛仑兹变换，K'系中两个事件发生的时刻为：

$$t_1' = \frac{t_1 - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad t_2' = \frac{t_2 - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

K'系中两事件的时间间隔为：

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

若在K'系和K系两件事件都发生在不同地点，则上式不成立，要用洛仑兹变换直接求解。

孪生子佯谬

甲乙两孪生兄弟，甲留在地球，乙坐飞船旅行，在甲看，时间在飞船上流逝的比地球上慢，故乙比甲年轻；在乙看，时间在地球上流逝的比飞船上慢，故甲比乙年轻。到底谁年轻？

广义相对论证明，在非惯性系中时间流逝的慢，故乙比甲年轻。1971年，马里兰大学的研究小组将原子钟乘飞机进行实验，发现飞机上的钟比地面上的钟慢59ns，与理论符合到±1%。

例题一：

μ介子在静止参照系中平均经过2×10^{-6}s（固有寿命）衰变为电子和中微子。宇宙射线在大气上层产生的μ介子速度达2.994×10^{8}m/s，若没有时间膨胀效应，只能行进600m，不可能到达地面实验室，但实际μ介子可穿透9000 m的大气层。

解法一：以地面为参照系，μ子寿命为：

$$\tau=\frac{\tau'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{2\times10^{-6}s}{\sqrt{1-(0.998)^2}}=3.16\times10^{-5}s$$

$$\Delta x=u\tau=9461\,m$$

解法二：可用洛仑兹变换求解

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \tau' \qquad t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$x_2' - x_1' = 0 \qquad x_2 - x_1 = u(t_2' - t_1')/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

四、“时空间隔”的绝对性

设A、B两个事件在K、K'的时空坐标分别为：

(x_1,y_1,z_1,t_1)，(x_2,y_2,z_2,t_2) 和 (x_1',y_1',z_1',t_1')，(x_2',y_2',z_2',t_2')

则定义两事件在K、K'系的时空间隔为

$$S=\sqrt{-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2+c^2(t_2-t_1)^2}$$

$$S'=\sqrt{-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2+c^2(t_2'-t_1')^2}$$

将洛仑兹变换代入：

$$S=[-(\frac{x_2'+ut_2'}{\sqrt{1-u^2/t^2}}-\frac{x_1'+ut_1'}{\sqrt{1-u^2/t^2}})^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2$$

$$+c^2(\frac{t_2'+ux_2'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-\frac{t_1'+ux_1'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}})^2]^{1/2}$$

$$=\sqrt{-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2+c^2(t_2'-t_1')^2}=S'$$

即：　$\boxed{S=S'}$

两个事件之间的时空间隔 S 在所有惯性系中都相同，即时空间隔是绝对的。时间与空间不是完全等同的，空间位置可忽左忽右、忽上忽下，而时间则一去不复反。在时空间隔中，时间项与空间项前面的符号不同。

五、因果事件时序的绝对性 *

如果两个事件存在因果关系，是否在某一参照系中因果关系会颠倒呢？设在K'系中事件B是由A事件引起，如在K'系中A事件是t_1'时刻在x_1'处开枪，B事件是t_2'时刻在x_2'处子弹中靶。按洛仑兹变换，K系中A、B两事件发生的时刻分别为：

$$t_1 = \frac{t_1' + ux_1'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + ux_2'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

故在K系中，中靶事件与开枪事件的时间间隔为

$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}\right)$$

由于上式中 $\dfrac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}$ 是子弹在K'系中的飞行速度υ_x'，而υ_x'和u的绝对值都必须小于光速c。在K'系中开枪事件在先，中靶事件在后，$t_2' - t_1' > 0$，不论 $x_2' - x_1'$ 如何，恒有 $t_2 > t_1$ 。即因果事件的时序不会颠倒。

狭义相对论中讨论运动学问题的思路：

1、确定两个作相对运动的惯性参照系；

2、确定所讨论的两个事件；

3、表示两个事件分别在两个参照系中的时空坐标或其时空间隔；

4、用洛仑兹变换讨论。

注意：

静长（固有长度）一定是物体相对某参照系静止时两端的空间间隔；原时（固有时）一定是在某坐标系中同一地点发生的两个事件的时间间隔。

例题二：

静长为5m的飞船以u＝9×10³m/s的速率相对于地面匀速飞行时，从地面上测量，它的长度是多少？

解法一：

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 5\sqrt{1(\quad 9\times10^3/3\times10^8)^2} \cong 4.999999998m$$

差别很难测出。

解法二：可用洛仑兹变换求解

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$t'=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\qquad t=\frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$x_2'-x_1'=l_0\qquad x_2'-x_1'=(x_2-x_1)/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$t_2-t_1=0\qquad l=l_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

例题三：

带正电的π介子是一种不稳定的粒子，当它静止时，平均寿命为2.5×10^{-8}s，之后即衰变成一个μ介子和一个中微子。在实验室测得π介子的速率为u=0.99c，并测得它在衰变前通过的平均距离为52m，这些测量结果是否一致？

解法一：

若用平均寿命$\Delta t'$ =2.5×10^{-8}s和u相乘，得$7.4m$，与实验结果不符。考虑相对论的时间膨胀效应，$\Delta t'$是静止π介子的平均寿命，是原时，当π介子运动时，在实验室测得的平均寿命应是：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2.5\times10^{-8}}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 1.8\times10^{-7}(s)$$

实验室测得它通过的平均距离应该是：$u\Delta t$ =$53m$，与实验结果符合得很好。

解法二：可用洛仑兹变换求解

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \Delta t' \qquad t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$x_2' - x_1' = 0 \qquad x_2 - x_1 = u(t_2' - t_1')/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

例题四：

试从 π 介子在其静止的参照系来考虑 π 介子的平均寿命。

解： 从 π 介子的参照系看来，实验室的运动速率为 u=0. 99c，实验室中测得的距离是*l*=52m，为静长，在 π 介子参照系中测量此距离应为：

$$l' = l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 52\times\sqrt{1-(0.99)^2} = 7.3m$$

而实验室飞过此距离所用时间为：

$$\Delta t' = {l'}/{u} = {7.3}/{0.99c} = 2.5\times 10^{-8}(s)$$

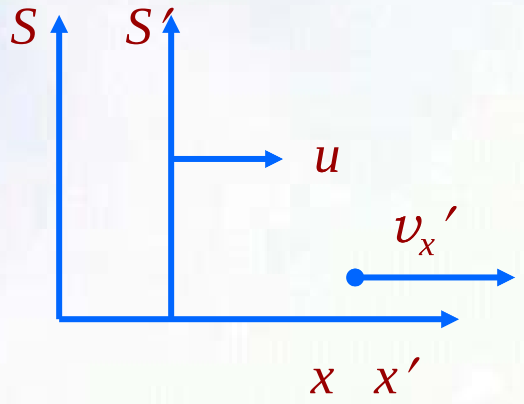
这就是静止π介子的平均寿命。

例题五：

设想一飞船以0.80c的速度在地球上空飞行，如果这时从飞船上沿速度方向抛出一物体，物体相对飞船速度为0.90c。问：从地面上看，物体速度多大？

解： 选飞船参考系为S'系。

地面参考系为S系。

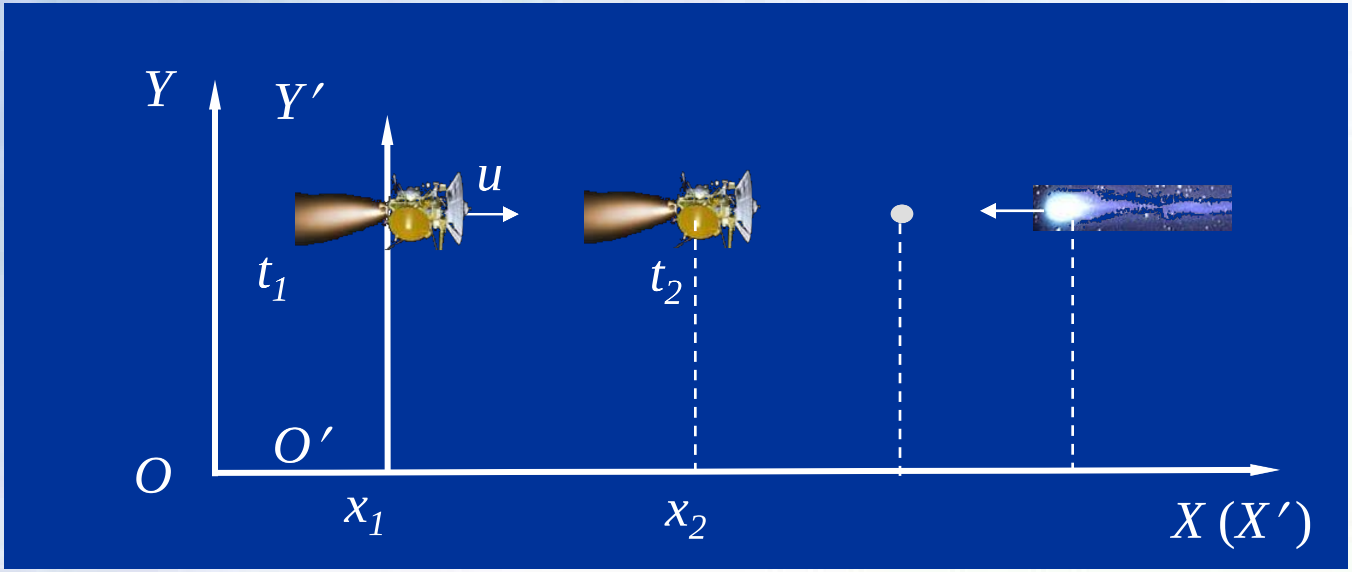


$$u = 0.8c \qquad v'_x = 0.9c$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = 0.99c$$

例题六：

一艘飞船和一颗慧星相对于地面分别以0.6c和0.8c的速度相向运动，在地面上观测，再有5s钟两者就要相撞，试求从飞船上的钟看再经过多少时间两者将相撞。



解法一：

如图所示，建立地面参照系S及飞船参照系S′。开始飞船经过地面上x_1位置，到达x_2位置与慧星相撞，这两个事件在飞船上观察是发生在同一地点，因此它们的时间间隔$\Delta t'$为原时，故：

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 5\times\sqrt{1-(\frac{0.6c}{c})^2} = 4s$$

解法二：可用洛仑兹变换求解

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t_2 - t_1 = 5s \qquad t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$x_2' - x_1' = 0 \qquad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

§ 4.4 狭义相对论动力学方程

动力学的一系列概念，如能量、动量、质量等，及与它们相联系的量如力、功等，在相对论中面临重新定义的问题。如何定义？爱因斯坦提出两条原则：

1. 当$v \ll c$时，新定义的物理量必须趋于经典物理中的对应量。

2. 尽量保持基本守恒定律继续成立。

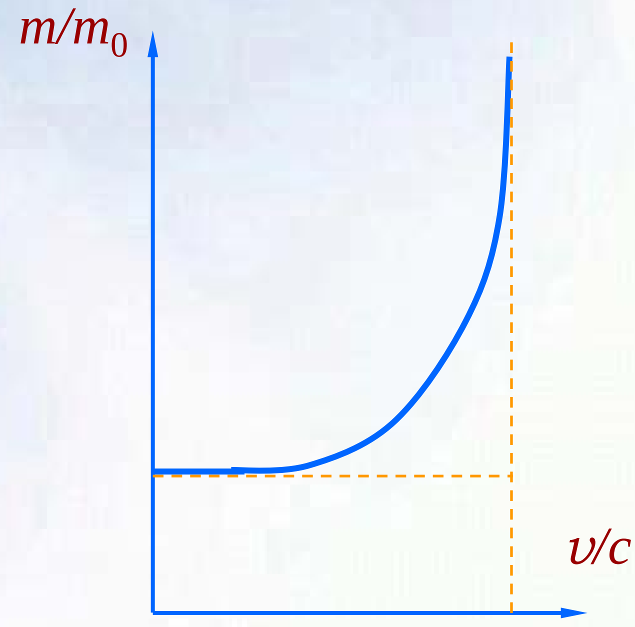
一、质量与速度的关系

在相对论中仍定义动量$\boldsymbol{p}$与速度$\boldsymbol{\upsilon}$为同方向矢量，且仍写成$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{\upsilon}$，动量与速度的比率系数$m$仍定义为质量，由于$\boldsymbol{p}$与速度$\boldsymbol{\upsilon}$在数量上已不一定有正比关系，我们把对正比关系的偏离归结到比率系数m内。即设$m=m(\upsilon)$，且当$\upsilon/c\to 0$时$m\to m_0$(称为静止质量)。

根据动量守恒和相对论速度变换的关系，可以证明物体的质量与速度的关系为：

$$m(\upsilon)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

上式中m_0称为静止质量，此关系称为质速关系，它揭示了物质与运动的不可分割性。考夫曼用加速电子观察电子在磁场中的偏转，测定电子质量，从而验证了质速关系的正确性。某些粒子，如光子、中微子等，其速度等于光速，它们的静止质量必等于零，否则质量将无限大。



二、狭义相对论的动力学方程

狭义相对论动力学方程应满足三个要求：

1.洛仑兹变换下方程形式不变。

2.在有限力的作用下，物体速度不会超过光速。

3.当$\upsilon << c$时，近似式为$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。

按以上动量的定义：$$\boldsymbol{p} = m(\upsilon)\boldsymbol{\upsilon} = \frac{m_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

则动力学方程为：$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{\upsilon}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

它满足以上三个要求。

§ 4.5 质量与能量的关系

一、相对论中的动能

由动能定律，外力做功等于物体动能的增量：

$$dE_k = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

代入：$\boldsymbol{F} = \dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{\upsilon})$ 和 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\upsilon}dt$ ，有：

$$dE_k = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{\upsilon})\cdot\boldsymbol{\upsilon}dt = dm\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + md\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$$

$$= dm\upsilon^2 + m\upsilon d\upsilon$$

由 $m = m_0/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ $\quad dm = \dfrac{m_0\upsilon d\upsilon}{c^2(1-\upsilon^2/c^2)^{3/2}}$

有 $dm(c^2-\upsilon^2)=m\upsilon d\upsilon$

代入动能的增量，可得：

$$dE_k = dm\upsilon^2 + m\upsilon d\upsilon = c^2 dm$$

代入边界条件 $\upsilon=0, m=m_0, E_k=0$，积分：

$$\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^{m} c^2 dm$$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)}$$

二、质能关系

爱因斯坦从上述动能表达式中得到启示，提出物体静止能量和运动时所具有能量的见解：

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad E = m c^2$$

上式称为质能关系。物体的能量等于静止能量与动能之和。

质能关系揭示了质量与能量之间的深刻联系，是核能研究的理论基础。

§ 4.6 能量与动量的关系

质能关系 $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

将上式两边平方，并由 $p = m\upsilon$ ，于是有

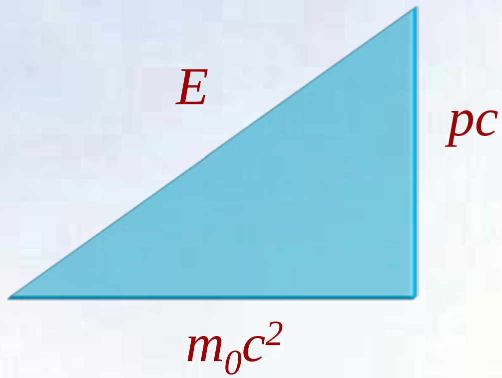
$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - p^2 c^2 / E^2}$$

由此式可解得：

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

上式即为狭义相对论中能量与动量的关系，简称**能动关系**。

由光子速度为c，可知光子的静止质量为零。由光的量子理论可知光子能量为



$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

由质能关系和能动关系：

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

思考题:

1. 设某微观粒子的总能量是它静止能量的K倍，则其运动速度的大小为（以 c 表示真空中的光速）

（A） $\dfrac{c}{K-1}$　　（B） $\dfrac{c}{K}\sqrt{1-K^2}$

（C） $\dfrac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$　　（D） $\dfrac{c}{K+1}\sqrt{K(K+2)}$

解答　C　$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}=Km_0c^2$$

2. 根据相对论力学，动能为0.25MeV 的电子，其运动速度约等于

（A）0.1 c　　（B）0.5 c

（C）0.75 c　　（D）0.85 c

（c 表示真空中的光速）

解答　C

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-m_0c^2=0.25Mev$$

$$m_0c^2\approx 0.5Mev$$

3. 在参照系 S 中，有两个静止质量都是m_0的粒子 A 和 B，分别以速度υ沿同一直线相向运动，相碰后合在一起成为一个粒子，则其静止质量M_0的值为

（A） $2m_0$

（B） $2m_0\sqrt{1-(v/c)^2}$

（C） $\dfrac{m_0}{2}\sqrt{1-(v/c)^2}$

（D） $\dfrac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

解答

D

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}=M_0c^2$$

4. 把一个静止质量为m_0的粒子，由静止加速到υ= 0.6 c （ c 为真空中光速）需作的功等于

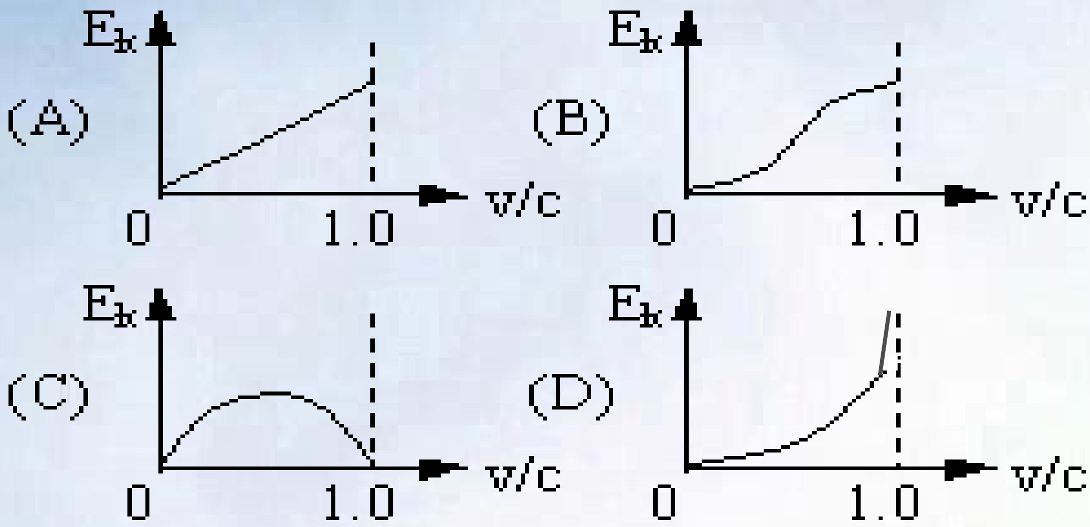
（ A ） $0.18 m_0 c^2$　　（ B ） $0.25 m_0 c^2$

（ C ） $0.36 m_0 c^2$　　（ D ） $1.25 m_0 c^2$

解答　B

$$W = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 \right) - 0$$

5. 令电子的速率为υ，则电子的动能 E_K对于比值υ/c的图线可用下列图中哪一个图表示？（c表示真空中光速）



解答　D

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0c^2$$

例题八：

两个静止质量都是m_0的小球，其中一个静止，另一个以υ=0.8c运动。它们做对心碰撞后粘在一起，试求碰撞后合成小球的静止质量。

解： 两个静止质量均为m_0的小球所组成的系统，在碰撞前后动量守恒，以m表示碰撞前运动小球的相对论质量，M、V分别表示碰撞后合成小球的质量和速度，则有

$$m\upsilon = MV \qquad (1)$$

而：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{m_0}{0.6} \qquad (2)$$

此系统碰撞前后遵循能量守恒定律，则有：

$$m_0c^2 + mc^2 = Mc^2$$

即：
$$m_0 + m = M \qquad (3)$$

将式(2)代入式(3)得：

$$M = m_0 + \frac{m_0}{0.6} = \frac{8}{3}m_0$$

设碰撞后合成小球的静止质量为M_0，则根据质速关系有

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad (4)$$

将式(1) (2) 及 $M=8/3m_0$ 代入式(4)得：

$$M_0 = M\sqrt{1-(V/c)^2} = M\sqrt{1-(\frac{m}{M}\upsilon/c)^2}$$

$$=\frac{8m_0}{3}\sqrt{1-(\frac{m_0}{0.6}\cdot\frac{3}{8m_0}\cdot\frac{0.8c}{c})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}m_0$$

例题九：

有一静止质量为m_0的粒子，具有初速度υ＝0.4c。试求：（1）若粒子速度增加一倍，它的动量为初动量的多少倍？（2）若使粒子的末动量为初动量的10倍，则粒子末速度为初速度的多少倍？

解：（1）设$P(\upsilon)$和$P'(2\upsilon)$为粒子的初、末动量，则有

$$\frac{P'}{P}=\frac{\dfrac{2m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{2\upsilon}{c})^2}}}{\dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}}=\frac{2\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}{\sqrt{1-(\frac{2\upsilon}{c})^2}}=\frac{2\sqrt{1-0.4^2}}{\sqrt{1-4\times0.4^2}}=3.1$$

即在此速度时，速度增加一倍，动量增加了约3倍。这是因为粒子的质量也增加所造成的。

（2）由已知的粒子初速度υ为0.4c可求出粒子的初动量为$P=0.44m_0c$，而末动量为$P'=10P$。

由 $P=\dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$ 可得：

$$\upsilon=\frac{Pc}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}} \qquad \upsilon'=\frac{P'c}{\sqrt{P'^2+m_0^2c^2}}$$

所以：

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon}=\frac{P'\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{P\sqrt{P'^2+m_0^2c^2}}=\frac{10\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{\sqrt{100P^2+m_0^2c^2}}=2.4$$

即当$P'=10P$时，粒子末速度只是初速度的2.4倍。

例题十：

一粒子的静止质量为1/3×10^{-26}kg，以速率3c/5垂直进入水泥墙。墙厚50cm，粒子从墙的另一面穿出时的速率减少为5c/13。求：（1）粒子受到墙的平均阻力。（2）粒子穿过墙所需的时间。

解： $m_0=\frac{1}{3}\times10^{-26}kg,\quad \upsilon_1=\frac{3}{5}c,\quad d=0.5m,\quad \upsilon_2=\frac{5}{13}c$

（1）由动能定律

$$W=\overline{F}d=E_{K2}-E_{K1}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon_2^2/c^2)}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon_1^2/c^2)}}$$

$$\overline{F}=\frac{m_0c^2}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_2^2/c^2)}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_1^2/c^2)}}\right)=-10^{-10}\,\mathrm{N}$$

负号表示阻力。

（2）由动量定理 $\boxed{\overline{F}\Delta t=m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1}$

$$\Delta t=\frac{m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1}{\overline{F}}=\frac{1}{3}\times10^{-8}\,\mathrm{s}$$