

第十四周

第12章 热力学基础

§ 12.5- § 12.6, § 12.7

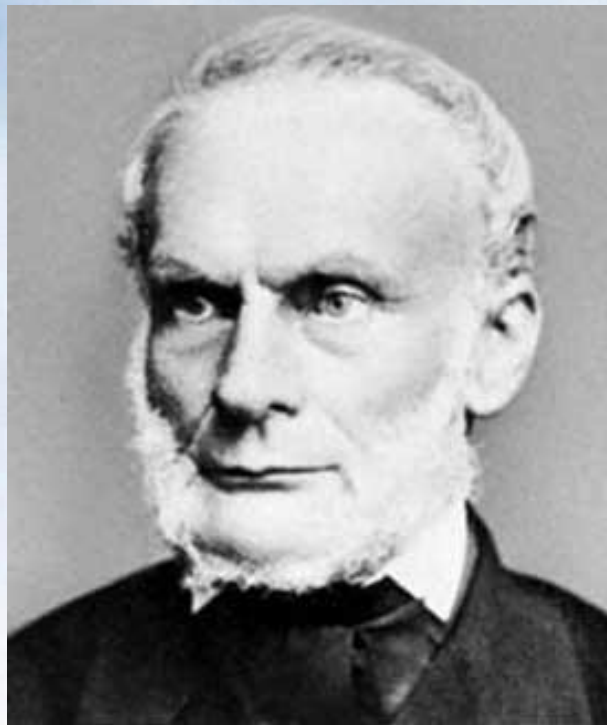
第13章 静电场

§ 13.1, § 13.2 § 13.3

作业: P209 12-20, 12-24, 12-25 12-26

§ 12.6 熵

1865年克劳修斯为了定量表述热力学第二定律，用宏观分析方法首先引入了状态函数熵 (S) 的概念。



R.Clausius (1822-1888)

一、熵

在研究热机效率时，在卡诺循环中

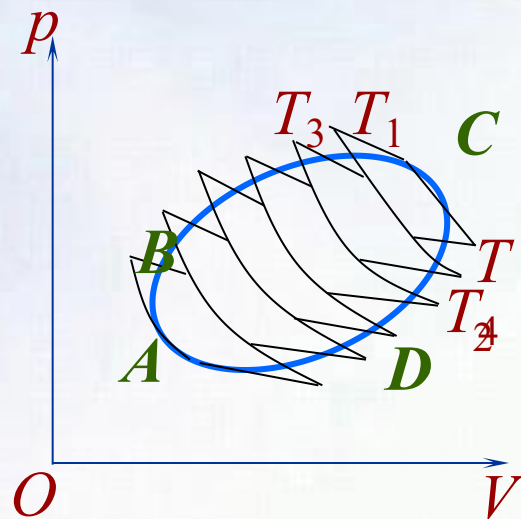
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

将 Q_1 和 Q_2 用代数值来表示过程中的吸热，则上式可写成

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{-Q_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

这说明在一个卡诺循环中，代数量 Q/T 的总和等于零。以上结果可推广到任意可逆循环过程：

封闭曲线 $ABCD$ ，用一系列窄长可逆卡诺循环过程之和来代替，图中一系列卡诺循环的外边界所形成的折线与曲线 $ABCD$ 非常接近，将所有卡诺循环中 Q/T 相加，有：

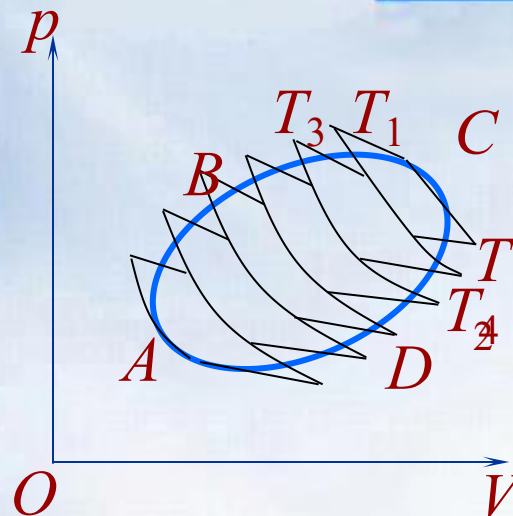


$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

$$\frac{dQ_3}{T_3} + \frac{dQ_4}{T_4} = 0$$

.....

$$\sum \frac{dQ_i}{T_i} = 0$$



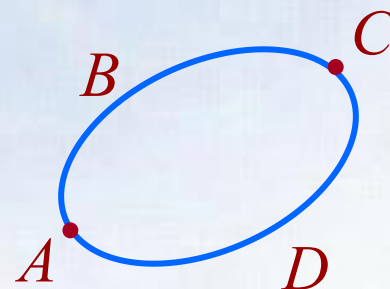
当卡诺循环数目趋于无限多的极限情形下，外边界折线就趋于曲线 $ABCD A$ ，上式求和号变为积分号，即：

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

若将闭合曲线看成是由 ABC 和 CDA 两个可逆过程所组成，则有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A(B)}^C \frac{dQ}{T} + \int_{C(D)}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\int_{A(B)}^C \frac{dQ}{T} = -\int_{C(D)}^A \frac{dQ}{T} = \int_{A(D)}^C \frac{dQ}{T}$$



任何可逆过程， dQ/T 的积分只决定于过程的始、末态，而与过程所经历的途径无关。克劳修斯根据这个性质，引进一个新的态函数 S ，叫做熵。系统在态 A 时，熵为 S_A ，而在态 C 时，熵为 S_C ，对可逆过程：

$$\Delta S = S_C - S_A = \int_A^C \frac{dQ}{T}$$

对微小可逆过程，熵增量写成：
熵的单位是 J / K。

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

二、熵变计算

应用熵变公式可以计算状态变化过程中的熵变，但要注意以下两点：

(1) 熵S是态函数，与过程无关，故可自由设计可逆过程计算熵变。

(2) 由于 dQ 与系统的量有关，故熵具有容量性质，系统的熵变为各组成部分熵变的总和。

1. 理想气体状态变化时熵变的计算

绝热可逆过程：

$$dQ = 0 \quad \Delta S = \int_a^b \frac{dQ}{T} = 0$$

等体可逆过程：

$$\Delta S = \int_a^b \frac{dQ_V}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_V dT}{T} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

等压可逆过程:

$$\Delta S = \int_a^b \frac{dQ_p}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_p dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

等温可逆过程:

$$\Delta S = \int_a^b \frac{dQ_T}{T} = \frac{1}{T} (\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}) = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

任何可逆过程: $TdS = dQ = dE + pdV$

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2. 物体可逆相变化时熵变的计算

可逆相变化是指在温度、压强和相平衡条件下的相变过程。由于温度恒定，故： $\Delta S = Q/T$

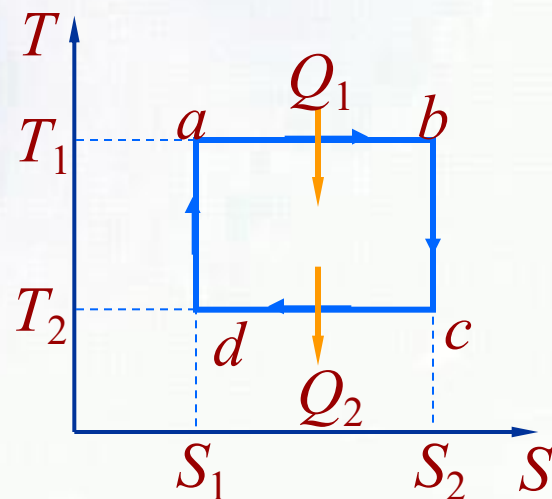
三、 T - S 图上的卡诺循环

在 T - S 图上，卡诺循环是一个矩形，由 $dS=dQ/T$

$$Q_1 = \int_{S_1}^{S_2} T_1 dS = T_1(S_2 - S_1)$$

$$Q_2 = \int_{S_2}^{S_1} T_2 dS = T_2(S_1 - S_2)$$

气体对外所做净功：



$$W = Q_1 - |Q_2| = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$$

热机的效率：
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

四、熵增加原理 (Principle of entropy increase)

可以证明，对任意过程有：

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}, \quad dS \geq \frac{dQ}{T}$$

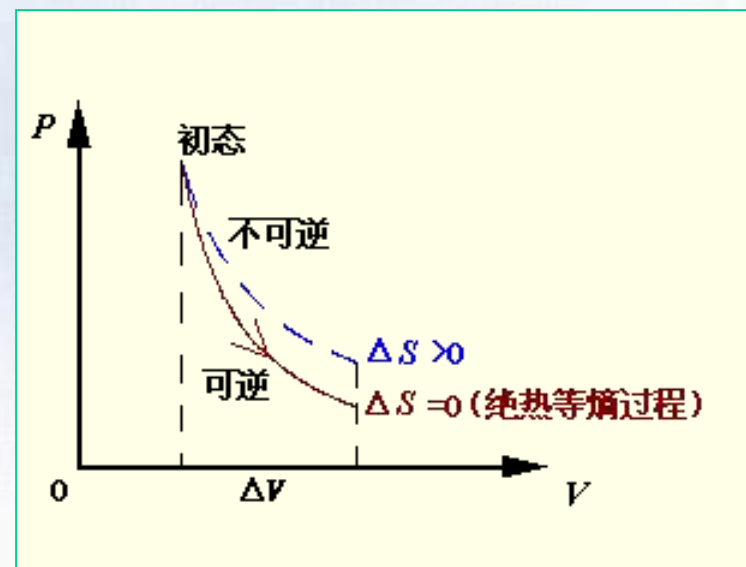
当系统经历绝热过程时， $dQ=0$ ，则有

$$\Delta S \geq 0$$

上式中不等号表示不可逆绝热过程，等号表示可逆绝热过程。

原理的文字表述：

(1) 可逆绝热过程熵不变，不可逆绝热过程（如孤立系统的自发过程）熵必然增加（见图示）(2) 孤立系统熵只增不减。



例题七:

将1.0kg温度为100℃的水和1.0kg温度为0℃的水混合。分别计算高温水和低温水在这一过程中的熵变。若将它们看成是一个系统，则系统总的熵变是多少？

解: 已知 $m_1=1.0\text{kg}$, $m_2=1.0\text{kg}$, $T_1=273\text{K}$, $T_2=373\text{K}$, 水的比热在此温度范围内可看作常量 $c=4.18\times 10^3 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, 由 $m_1=m_2$ 可知混合水的最后温度为 $T_3=(273+373)/2=323\text{K}$ 。

低温水的熵变

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \int \frac{dQ}{T} = m_1 c \int_{T_1}^{T_3} \frac{dT}{T} = m_1 c \ln \frac{T_3}{T_1} \\ &= 1.0 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{323}{273} \approx 7.0 \times 10^2 \text{ (J/K)}\end{aligned}$$

高温水的熵变

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= \int \frac{dQ}{T} = m_2 c \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = m_2 c \ln \frac{T_3}{T_2} \\ &= 1.0 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{323}{373} \approx -6.0 \times 10^2 \text{ (J/K)}\end{aligned}$$

总的熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 7.0 \times 10^2 - 6.0 \times 10^2 = 1.0 \times 10^2 \text{ (J / K)}$$

在混合过程中，高温水的熵减少，低温水的熵增加。若将高温水和低温水合起来看作是一孤立系统，则过程中系统的熵是增加的，可见这是一个不可逆过程。

例题八：沿不同条途径的熵变

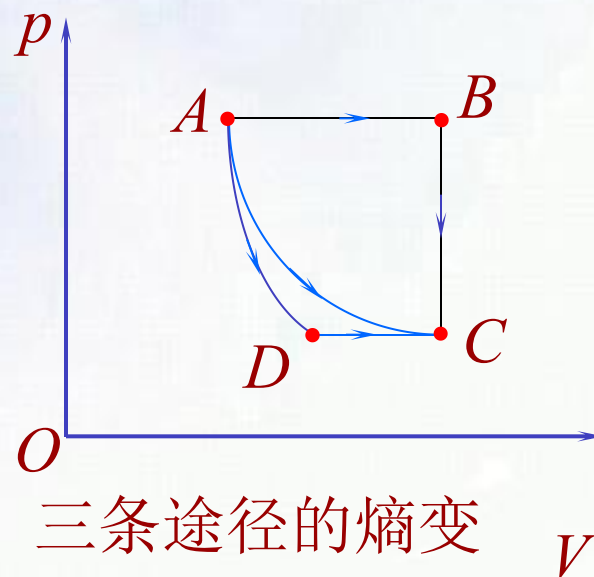
设1mol理想气体从态A变化到态C，可经历三条途径，如所示。若态C时气体的体积是态A时的2倍，求分别沿这三条途径的熵变。（AC为等温过程，AD为绝热过程）

解：已知 $p_A = p_B$, $V_C = 2V_A$,
 $T_A = T_C$, $p_D = p_C$ 。

（1）途径ABC：AB为等压过程，

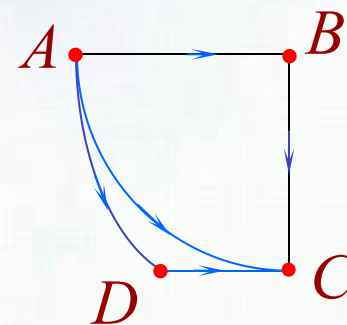
$$dQ_p = \frac{m}{\mu} C_p dT$$

BC为等体过程， $dQ_v = \frac{m}{\mu} C_v dT$



熵变:

$$\begin{aligned}
 \Delta S_1 &= \int_A^B \frac{dQ_p}{T} + \int_B^C \frac{dQ_V}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} \\
 &= \frac{m}{\mu} C_p (\ln T_B - \ln T_A) + \frac{m}{\mu} C_V (\ln T_C - \ln T_B) \\
 &= \frac{m}{\mu} (C_p - C_V) \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2 \\
 &= 1 \times 8.31 \times \ln 2 \approx 5.67 (\text{J/K})
 \end{aligned}$$



(2) 途径AC: AC为等温线, 熵变:

$$\Delta S_2 = \int_A^C \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_C}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2 = \Delta S_1$$

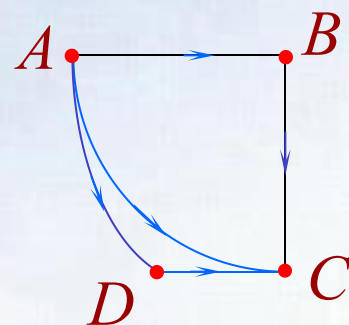
(3) 途径ADC: AD 为绝热过程, $dQ=0$, DC 为等压过程, 由两过程方程: $T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$, $T_D/V_D = T_C/V_C$ 和 $T_C = T_A$, 得

$$\frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

熵变:

$$\Delta S_3 = \int_A^D \frac{dQ}{T} + \int_D^C \frac{dQ}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \int_{T_D}^{T_C} \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_C}{T_D} = \frac{m}{\mu} C_p \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{V_C}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2 = \Delta S_1$$



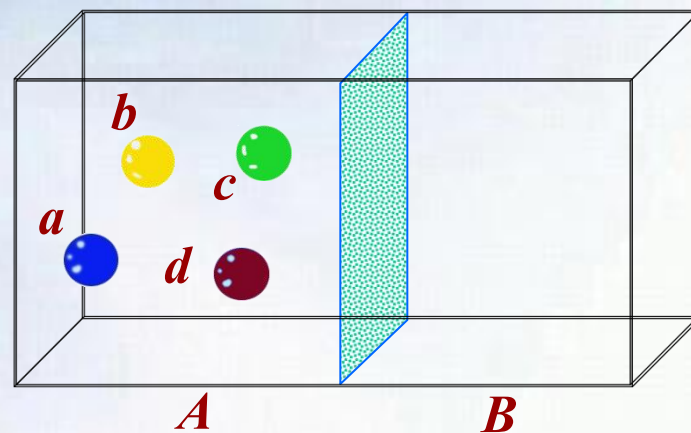
由上述结果可知, 沿三条途径的熵变化相同, 这说明熵变与过程无关, 仅由始末态决定。

§ 12.7 热力学第二定律的统计意义

一、热力学第二定律的统计意义

1. 自然过程的方向性

研究气体向真空自由膨胀，
假设容器左、右等体积，
左部有气体，右部为真空。
抽去隔板气体自由膨胀。



系统宏观态—用分子在左、右两部分的分配数目表示(5)。系统微观态—用分子（可区分）处在某一部分的具体情况表示(2^4)。

设容器中装有4个分子，开始时，4个分子都在左边，抽出隔板后分子将向右边扩散并在整个容器内无规则运动。隔板被抽出后，4个分子在容器中可能的分布情形如下图所示：

宏观态	微观态	微观态数	概率 P
		1	$1/2^4$
		4	$4/2^4$
		6	$6/2^4$
		4	$4/2^4$
		1	$1/2^4$

在 $2^4=16$ 种可能的微观状态中，
4个分子全部退回到左边的可能性（即概率）为
 $1/2^4=1/16$ 。因此，可以认为4个分子的自由膨胀
有可能是“可逆的”。一般来说，若有 N 个分
子，则共有 2^N 种可能的微观状态。 n 个在左、
($N-n$)个在右的分布（宏观态）对应的微观态
数为：

$$\omega = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

若容器内有 N 个分子，则全部集中在A室的宏观
态出现的概率：

$$\frac{1}{2^N}$$

即N个分子全部退回到左边的概率为 $(1/2)^N$ 。对于真实理想气体系统 $N \sim 10^{23}/\text{mol}$ ，这些分子全部退回到左边的概率为 $(1/2)^{10^{23}}$ 。此数值极小，意味着此事件永远不会发生。

对单个分子或少量分子来说，它们扩散到右边的过程原则上是可逆的。对大量分子组成的宏观系统来说，它们向右边自由膨胀的宏观过程实际上是不可逆的。这就是宏观过程的不可逆性或自然过程的方向性在微观上的统计解释。

2. 等概率原理与热力学概率

统计物理基本假定——等概率原理：

对于孤立系，各种微观态出现的可能性（或概率）是相等的。

各种宏观态不是等概率的。哪种宏观态包含的微观态数多，这种宏观态出现的可能性就大。

热力学概率定义为系统任一宏观态对应的微观态数 ω 。

3. 热力学第二定律的统计表述

孤立系统内部所发生的过程总是从包含微观态数少的宏观态向包含微观态数多的宏观态过渡，从热力学概率小的状态向热力学概率大的状态过渡。

二、玻耳兹曼熵公式

热力学概率 ω 是一个非常大的数，为了便于处理，1877年玻耳兹曼用下面关系式定义的熵 S 和热力学概率 ω 联系起来，来表示系统无序性的大小

$$S = k \ln \omega$$

k 称为玻尔兹曼常量， S 是宏观系统熵值，单位是：焦耳/开

ω 越大，微观态数就越多，系统就越混乱越无序。由此看出熵的微观意义：

熵是系统内分子热运动无序性的一种量度。

电 磁 学

第九章 真空中的静电场

§ 13.1 电荷

物体所带的电荷有两种，分别称为正电荷、负电荷。同号电荷相斥，异号电荷相吸。电荷可以由摩擦起电、静电感应产生。历史上约定：用丝绸摩擦的玻璃棒带正电，用毛皮摩擦的塑料棒带负电。

电荷是基本粒子的一个性质，它不能脱离这些基本粒子而存在。

1. 电荷守恒定律

在一个与外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变。

电荷守恒定律适用于一切宏观和微观过程(例如核反应)，是物理学中普遍的基本定律之一。

2. 电荷量子化

1906~1917年，密立根 (R.A. Millikan) 用液滴法测定了带电粒子的电荷，发现带电粒子的电量只能是基本电荷 e 的整数倍，即粒子的电荷是量子化的。

迄今所知，电子是自然界中存在的最小负电荷，质子是最小的正电荷。它们的带电量都是基本电荷 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ 库仑(C)

库仑(C)是电量的国际单位。

电荷量子化是个实验规律，现有的实验结果表明：质子和电子的带电量差异

$$\frac{|q_e| - |q_p|}{|q_e|} < 10^{-21}$$

电荷量子化已在相当高的精度下得到了检验。

那么基本电荷 e 是不是最基本的呢？在强子结构的夸克模型（1964年）中，夸克带分数电荷。 d 夸克的带电量为 $-e/3$ ； u 夸克为 $2e/3$ ； s 夸克为 $-e/3$ ； c 夸克为 $2e/3$ ； b 夸克为 $-e/3$ ； t 夸克为 $2e/3$ ；在这一模型中，夸克是受到“禁闭”的。迄今为止，尚未在实验中找到自由状态的夸克。

值得一提的是，1909年密立根在一篇论文中记述了一个油滴上出现的数据，由于不太确定、未重复出现而被他丢掉了，这一电荷数据比最终得到的 e 值小30%左右。

现在，分数电荷仍是一个悬而未决的命题。不过即使分数电荷存在，仍然不会改变电荷量子化的结论，只不过新的基本电荷是原来的 $1/3$ 而已。

3. 电荷的相对论不变性

在不同的参照系内观察，同一个带电粒子的电量不变。电荷的这一性质叫做电荷的相对论不变性。

§ 13.2 库仑定律

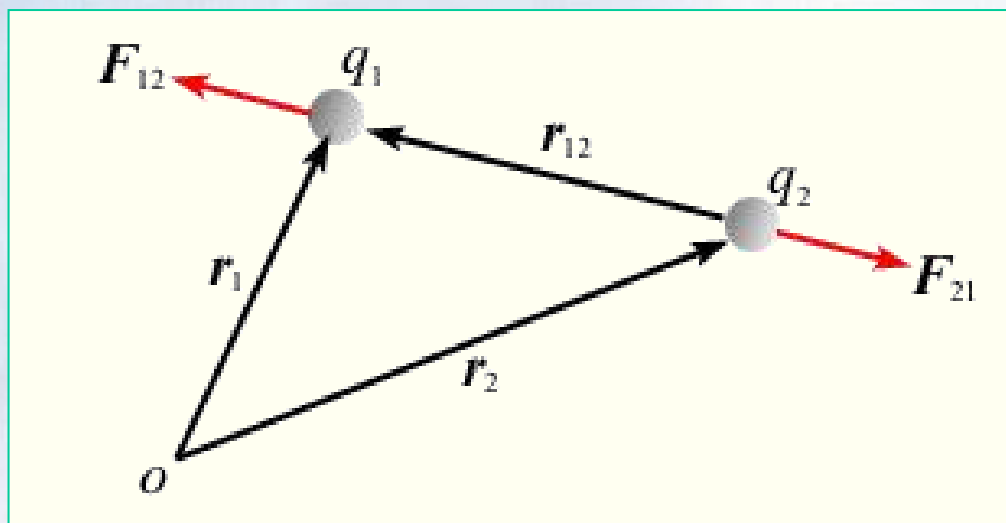
一、点电荷和库仑定律

点电荷：当带电体的线度与它到其他带电体的距离相比很小时，可以将其看作点电荷。

1785年库仑(Coulomb)从扭秤实验结果总结出点电荷之间的相互作用所满足的规律，这就是库仑定律：

在真空中两个静止点电荷之间的作用力与它们的电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比：

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$



比例系数 k 由实验确定

$$k = 8.9875 \times 10^9 (\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{C}^2$$

引入真空电容率：

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

则库仑定律可写作：

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

二、电场力叠加原理

当空间有两个以上的点电荷时，作用在某一点电荷上的总静电力，等于其它各点电荷单独存在时对该点电荷所施静电力的**矢量和**。这是静电力的叠加原理。

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_i}{r_{1i}^3} \vec{r}_{1i}\end{aligned}$$

库仑定律的平方反比规律的精确性及定律的适用范围一直是物理学家关心的问题。可以将 r^{-2} 写作

$$\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$$

库仑定律是否是严格的平方反比关系，由 ε 是否为零来验证。现代实验表明：

$$\varepsilon \leq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$$

现代电磁场量子理论指出：有限的 ε 值是和光子质量的有限值相联系的；假如库仑定律偏离了平方反比关系，光子将有有限的静止质量。

§ 11.3 电场 电场强度

一、电场

场的基本概念：按字义理解，所谓“场”是指某种物理量在空间的一种分布。例如温度场、速度场等等。

分类：标量场 矢量场 均匀场 静场

在物理学中，“场”是指物质的一种特殊形态。实物和场是物质的两种存在形态，它们具有不同的性质、特征和不同的运动规律。场也有质量、能量、动量和角动量。

实物是由原子分子组成的，一种实物占据的空间，不能同时被其他实物所占据；而场是一种弥漫在空间的特殊物质，它遵从叠加性，即一种场占据的空间，能为其他场同时占有，互不产生影响。

实物之间的各种相互作用总是通过各种场来传递的。

标量场和矢量场：标量场在空间各点只有大小，没有方向。为描述场的整体分布特征，通常采用**等值面**和**等值线**的方法，常常引入标量场的**梯度**。

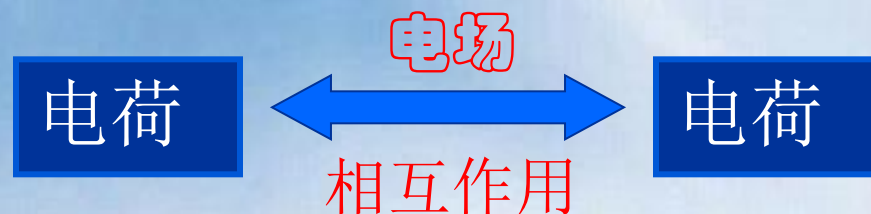
矢量场的场量在空间不同点上既可能有不同的量值、也可能有不同的方向。为了描述矢量场的性质，总是通过它的场线、通量和环流来进行研究的。

关于电荷的相互作用，历史上有长期的争论：

1. 超距作用：带电体之间的相互作用不借助中间物质，不需传递时间。
2. 近距作用，场论观点（法拉第）：没有物质，带电体之间的相互作用是不可能发生的，而这种特殊的物质就是电场。

根据场论观点：

(1) 特殊媒介物质—电场



(2) 电场力



静电场

相对于观察者静止的电荷周围所存在的场称为静电场（该电荷称为场源电荷）。

- (1) 静电场仅是电磁场的一种特殊形态。
- (2) 电磁场与实物物质一样具有质量、能量、动量等。
- (3) 电磁场一经产生就能单独存在。
- (4) 电磁场可在空间叠加。
- (5) 场和实物虽然都是物质，但又有区别。它们是物质存在的两种不同形式。
- (6) 近代观点：两个点电荷是通过交换场量子而相互作用的，电磁场的场量子就是光子。

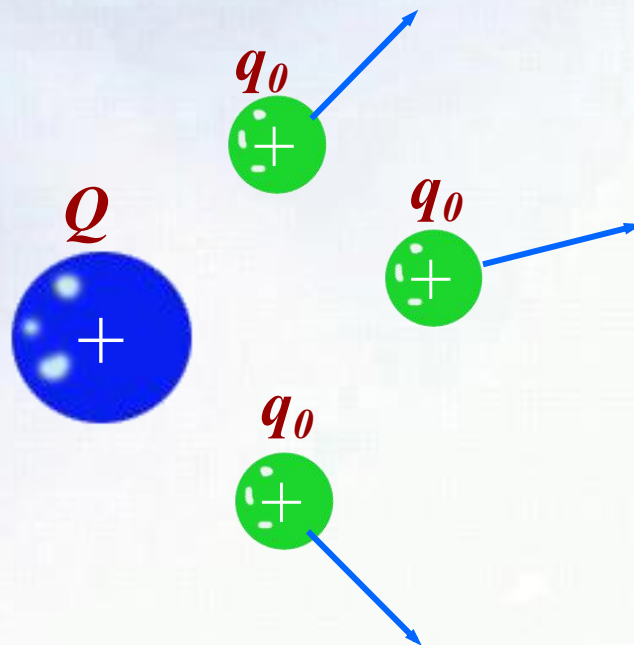
静电场的主要表现

进入电场的任何带电体都将受到电场的作用力；当带电体在电场中移动时，电场力将对带电体作功。

二、电场强度

电场对电荷的作用

引入试探电荷 q_0 （点电荷）所带电量足够小，以致在电场中不会影响原有的电场的分布。



实验事实:

- (1) q_0 在场中不同点, 受力 F 的大小、方向均不同;
- (2) 不同 q_0 在场中确定点受力的方向确定, 大小与 q_0 成正比: $F \propto q_0$
- (3) 比值 F / q_0 与 q_0 无关, 仅由电场本身性质决定。

定义电场强度 (简称场强)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场强度的定义: 电场中某点的电场强度在量值上等于放在该点的单位正试验电荷所受的电场力, 其方向与正试验电荷受力方向一致。

几点说明:

(1) 单位: (N/C) 或 (V/m)

(2) E 是空间各点坐标的一个矢量函数, 其方向与正试验电荷所受力 F 的方向相同。

(3) 在已知电场强度分布的电场中, 电荷 q 在场中某点所受的电场力为 $F=qE$ 。

三、点电荷与点电荷系的电场强度

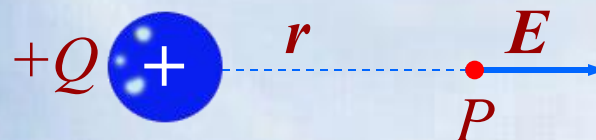
1. 点电荷的电场强度

根据库仑定律, 有:

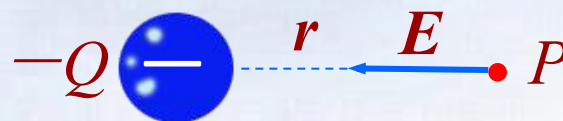
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

从上式可得出结论：

当 $Q>0$ 时， E 的方向与 r 的方向相同；



当 $Q<0$ 时， E 的方向与 r 的方向相反。



2. 点电荷系的电场强度

场强叠加原理：

设场源由 n 个点电荷 q_1 、 q_2 、...、 q_n 组成，作用在场中某点 P 处试验电荷 q_0 上的力 F 为各点电荷所产生的力 F_1 、 F_2 、...、 F_n 的矢量和。

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

相应的合场强为上式两边各除以 q_0 得：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

即点电荷系在某点产生的场强，等于每一个点电荷单独存在时在该点分别产生的场强的矢量和，这就是场强叠加原理。

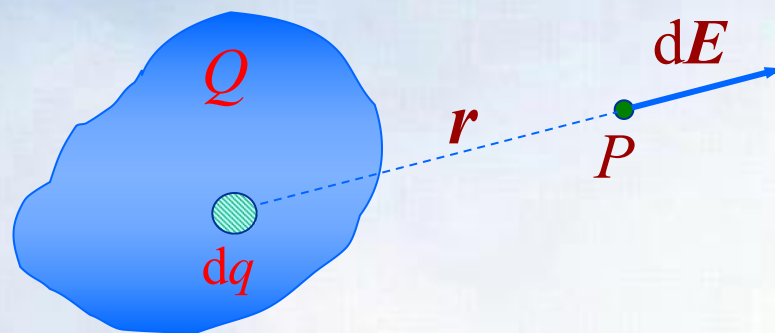
3. 连续分布电荷的电场强度

任何带电体都可以看成是许多电荷元 dq 的集合，在电场中任一点P处，每一电荷元 dq 在P点产生的场强为：

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

整个带电体在P点的场强为：

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

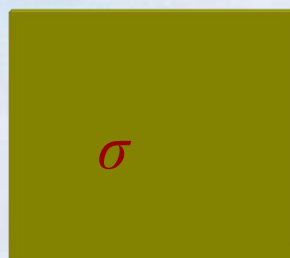
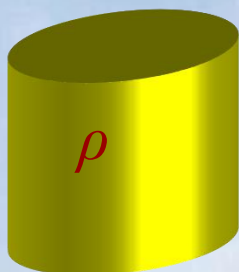


实际带电体电荷连续分布的形式大致有三种：

(1) 体分布: $dq = \rho dV$

(2) 面分布: $dq = \sigma ds$

(3) 线分布: $dq = \lambda dl$



按不同分布方式的场强公式:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{r}$$

例题一：

如图所示，一半径为 R 的均匀带电细圆环，电量为 q 。求垂直于环面轴线上的场强分布。

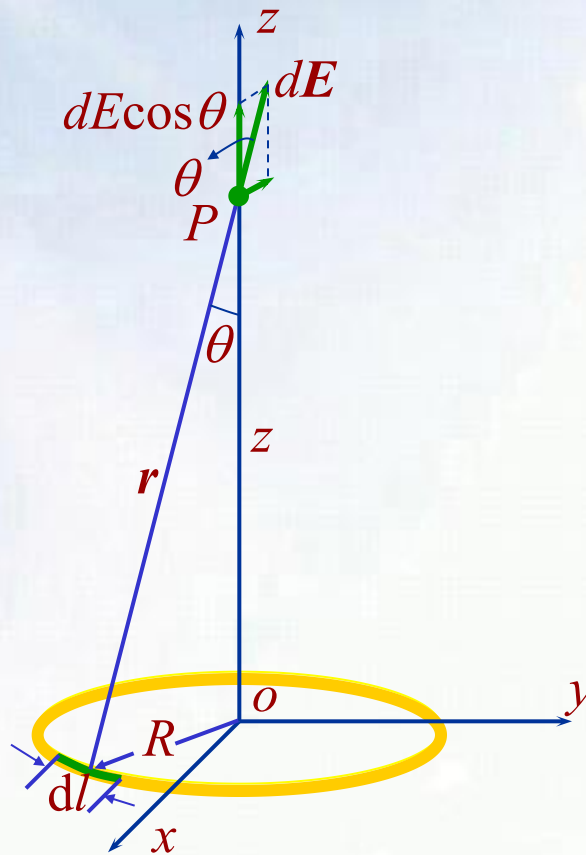
解：

环的线电荷密度为 $\lambda = q / 2\pi R$

将圆环分割成许多电荷元 dq ，
任一电荷元在 P 点产生的场强为：

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(z^2 + R^2)} \hat{r}$$

有对称性可知 $\int dE_{\perp} = 0$



于是，总场强只是平行于z轴的分量 dE_z 的总和，由图可知：

$$dE_z = dE \cos \theta = dE \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{z \lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

则：

$$E = \int dE_z = \frac{z \lambda}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{z q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

方向沿z轴正向。当 $z \gg R$ 时，与 z^2 相比 R^2 可忽略，此时：

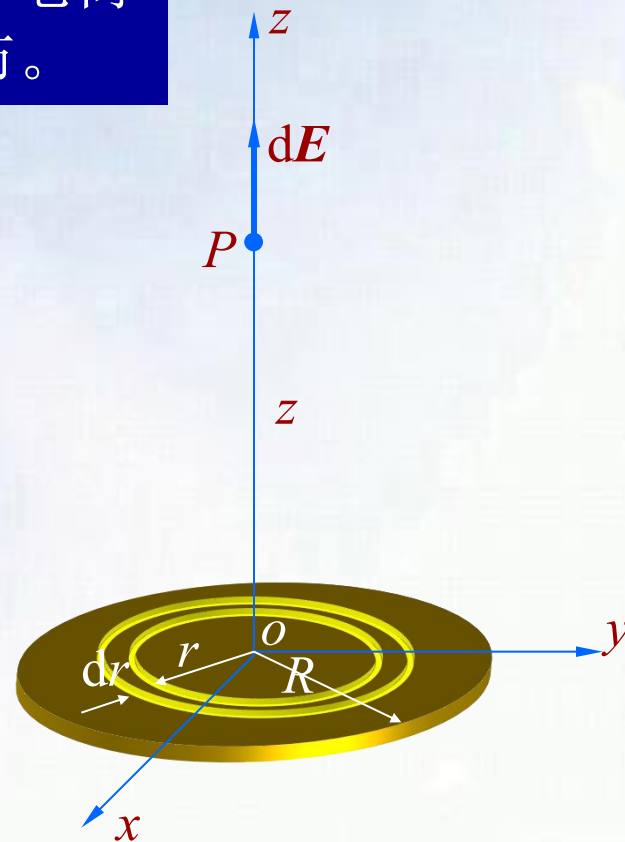
$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad (\text{相当于点电荷})$$

例题二：

半径为 R 的均匀带电薄圆盘，面电荷密度为 σ 。求圆盘轴线上的场强分布。

解：圆盘可看成由无限多个同心圆环组成，在圆盘上取半径为 r ，宽度为 dr 的细圆环，则细圆环在 P 点的场强为：

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0}(z^2 + r^2)^{-3/2}(2r)dr \end{aligned}$$



对于整个带电圆盘在P点产生的场强为：

$$E = \int dE_z = \frac{z\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

讨论：

(1)若 $z \ll R$ ，带电盘可视为无限大：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(2)若 $z \gg R$ ，场强为：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 / z^2}}\right)$$

由
$$\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

得到:
$$E \approx \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \quad (\text{相当于点电荷})$$