第 八 周

第9章 机械振动

§9.1， §9.2， §9.3 §9.4(一般了解)，

§9.5

作业：P133 9-1，9-5，9-6，9-10

P134 9-13，9-14，9-21，9-24；

第九章 机械振动

§5.1 简谐振动的描述

一、简谐振动的解析表示 振幅、相位和频率

简谐振动是一种最简单、最基本的振动形式。复杂的振动可分解为许多不同频率的简谐振动，而许多不同频率的简谐振动也可叠加为复杂振动。

弹簧振子的振动是简谐振动的一种理想模型。简谐振动的数学关系式有余弦或正弦形式：

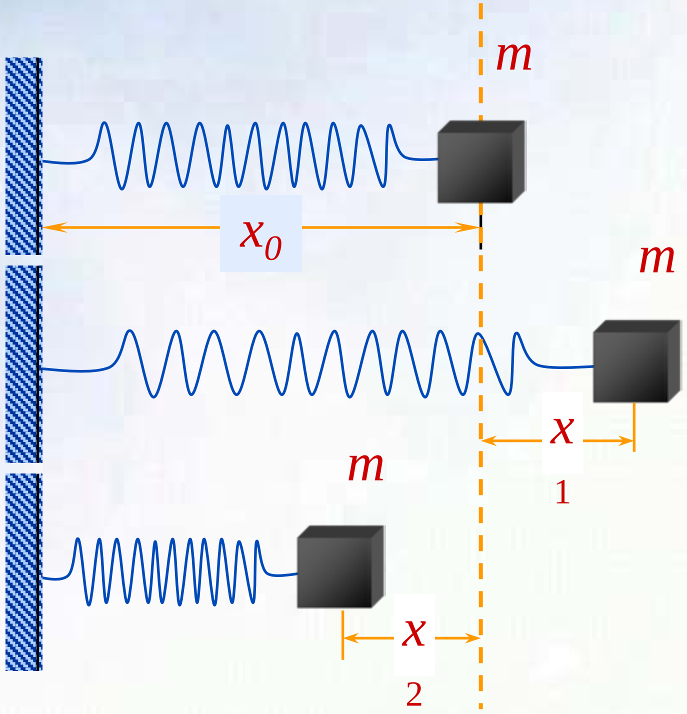
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)} \qquad (1)$$

A 振幅—物体的最大位移；

φ 初相—决定物体初始时刻的位移；

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$(\omega t + \varphi)$ 相位—决定任意时刻物体的位移。初相和相位也能决定初始或任意时刻物体的速度、加速度。



ω 称为角频率；频率 ν 为每秒振动的次数。

$$\omega = 2\pi\nu$$

物体做一次完整振动的时间称为周期：

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega$$

对振动方程求导，可得速度和加速度的表达式：

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (2)$$

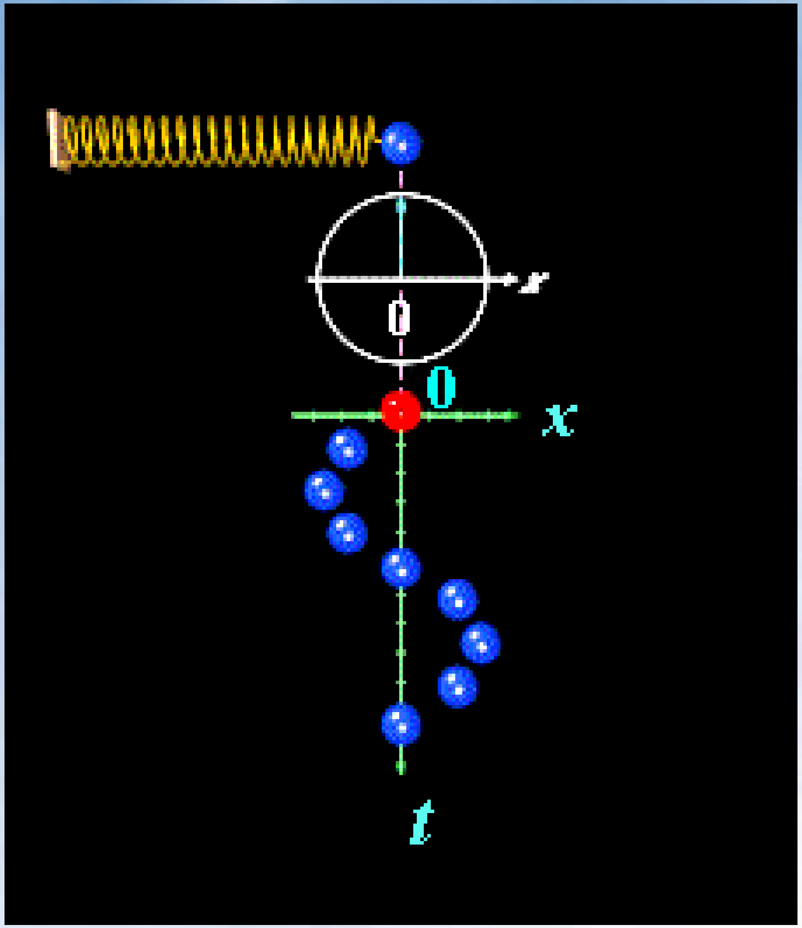
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

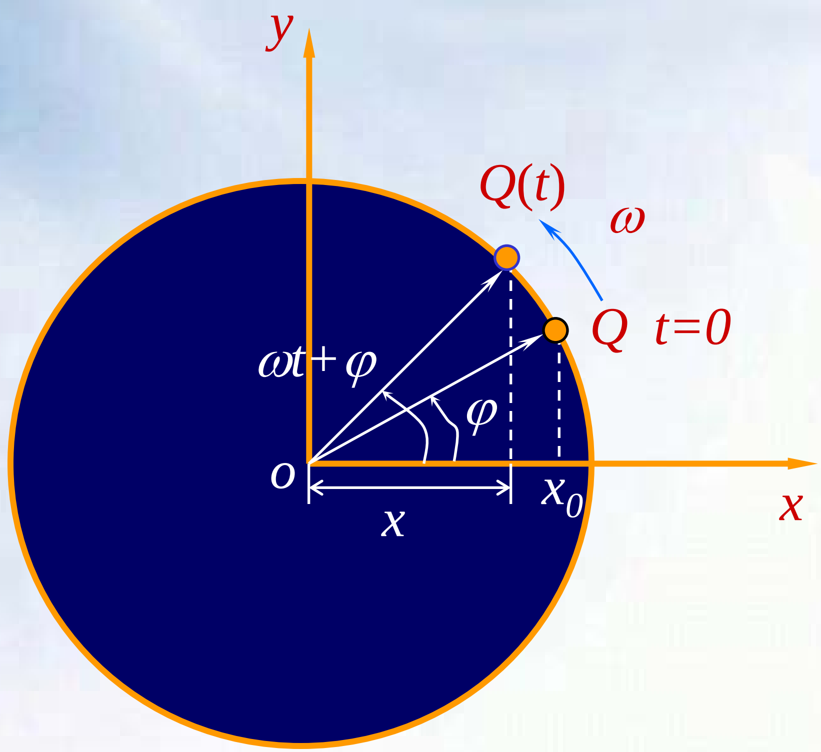
比较（1）式和（3）可得： $a=-\omega^2 x$

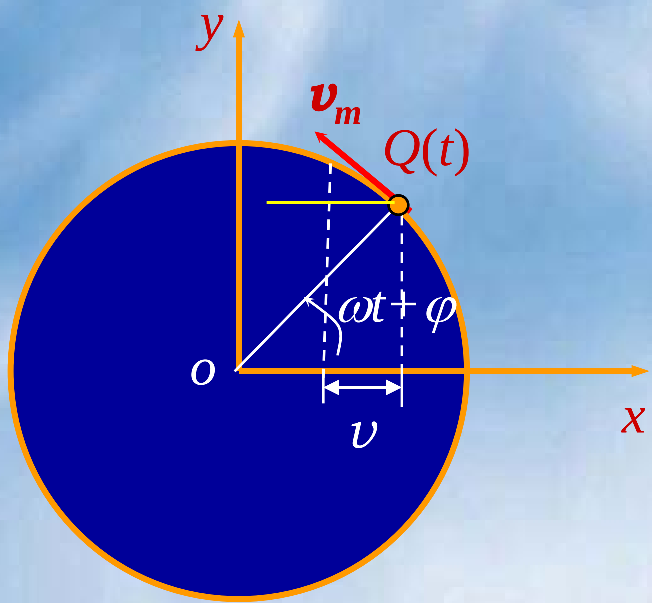
如果一个物体做简谐振动，它的加速度和位移成正比，但方向相反。

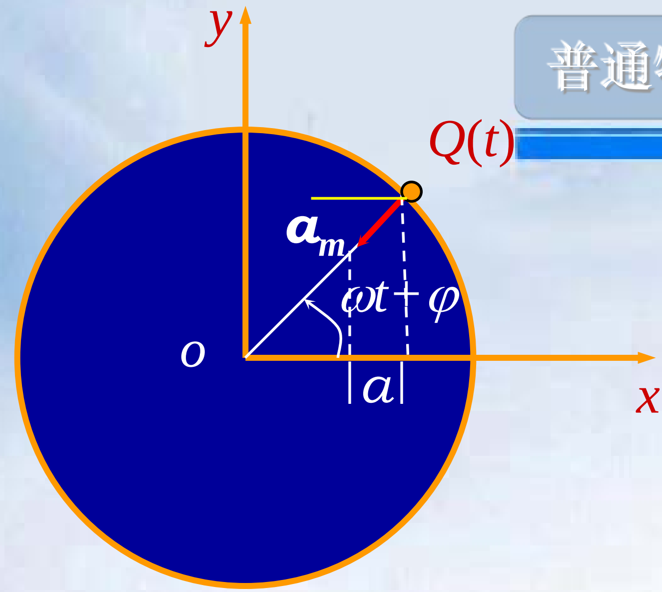
二、简谐振动的振幅矢量图示法

为了帮助理解，简谐振动方程可用简单的几何图示来说明，如旋转矢量法或参考圆表示法：如下图所示，参考点Q以o为圆心，A为半径，做逆时针匀速圆周运动，角速度为ω。初始时刻（t=0）位置矢量oQ与x轴的夹角为φ，任意时刻t，oQ与x轴的夹角为$(\omega t+\varphi)$，此时Q点在x轴的投影相当于（1）式所表示的简谐振动方程。


0
0
x
t


y
Q(t)
ω
Q t=0
ωt+φ
φ
o
x
x0
x





$$\upsilon=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

相位的超前与落后：研究两个振动的迭加时，相位差起决定作用，设有两个同频率的振动：

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ 和 $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

两者的相位差为：

$$(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$$

当 $\Delta\varphi=\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$时，两振动同相位；

当 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$ 时，两振动反相位；

当 $\Delta\varphi=\pi/2$，这时说x_2比x_1超前90^0，也可说x_1比 x_2落后90^0。将振动位移、速度、加速度比较，速度比位移超前π/2，加速度比速度移超前π/2。

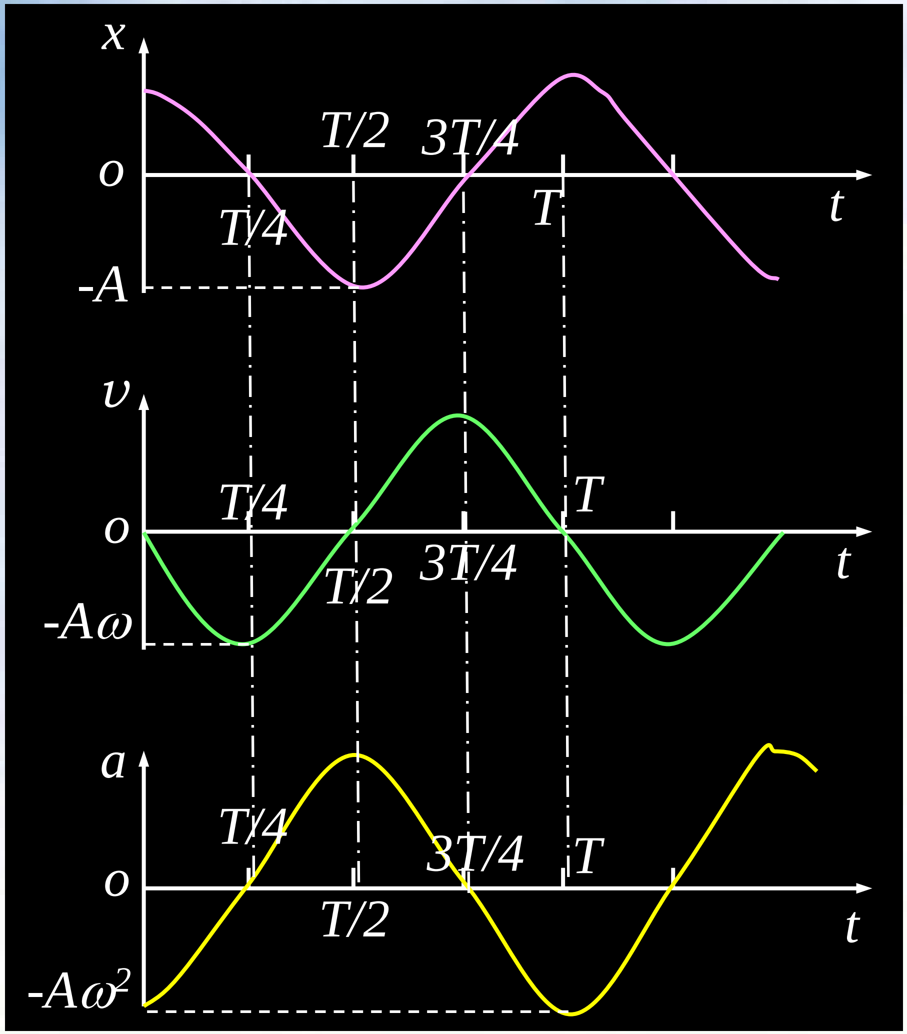
如把位移、速度、加速度都用余弦形式表达，设$\varphi=0$则：

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \pi)$$

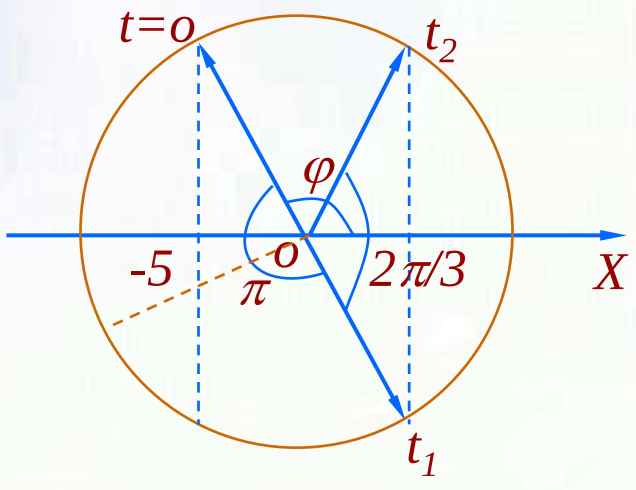
可见速度的最大值比位移的最大值早1/4周期，加速度的最大值比速度最大值早1/4周期。



例题

一物体沿X轴作简谐振动。其振幅A＝10cm，周期T＝2s，t＝0时物体的位移为 x_0＝－5cm，且向X轴负方向运动。试求：（1）t＝ 0.5s时物体的位移；（2）何时物体第一次运动到 x＝5cm处；（3）再经过多少时间物体第二次运动到 x＝5cm处。

解: 由已知条件可画出该谐振动在t＝0时刻的旋转矢量位置，如图所示：



由图可以看出 $\varphi=\pi-\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

所以该物体的振动方程为：

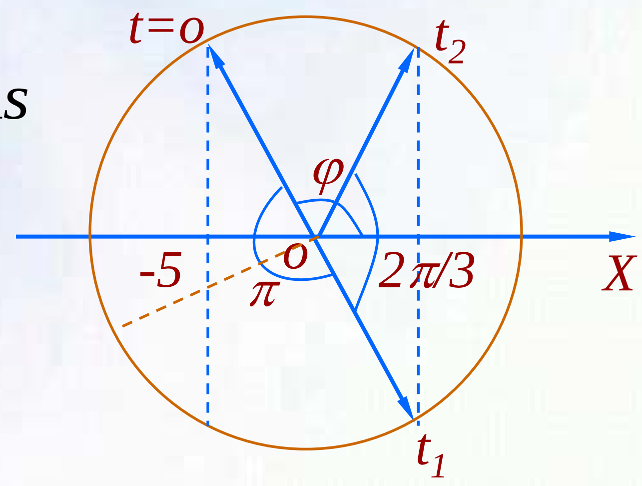
$$x=0.10\cos(2\pi\frac{t}{T}+\frac{2}{3}\pi)$$

（1）将 T＝2s，代入振动方程可得 t＝ 0.5s 时质点的位移为：

$$x = 0.10\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi) = -0.087(m)$$

（2）当物体第一次运动到 x＝5cm处时，旋转矢量转过的角度为π，如图所示，所以有

$$\omega t_1 = \pi, \quad 即 \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}T = 1s$$



（3）当物体第二次运动到 x＝5cm处时，旋转矢量又转过2 π /3，如图所示，所以有

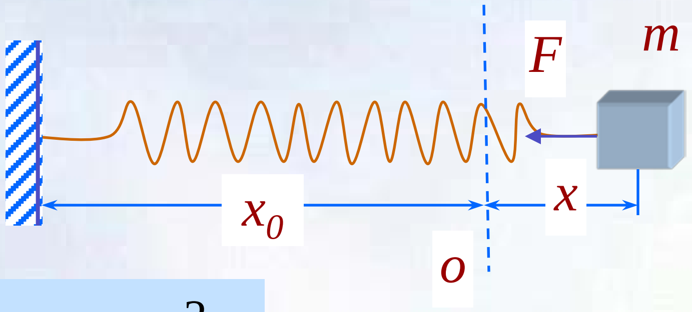
$$\omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = \frac{2}{3}\pi, \quad 即 \quad \Delta t = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{1}{3}T = \frac{2}{3}s$$

§5.2 简谐振动的动力学表述

一、弹簧振子的运动微分方程及其解

在弹簧振子系统中，物体受弹性力为：

$$F = -kx$$



按牛顿第二定律，得：

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

或：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k}{m})x = -\omega^2 x$$

上述方程的解有三种形式：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \end{cases}$$

其中 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

选用的通解形式为：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

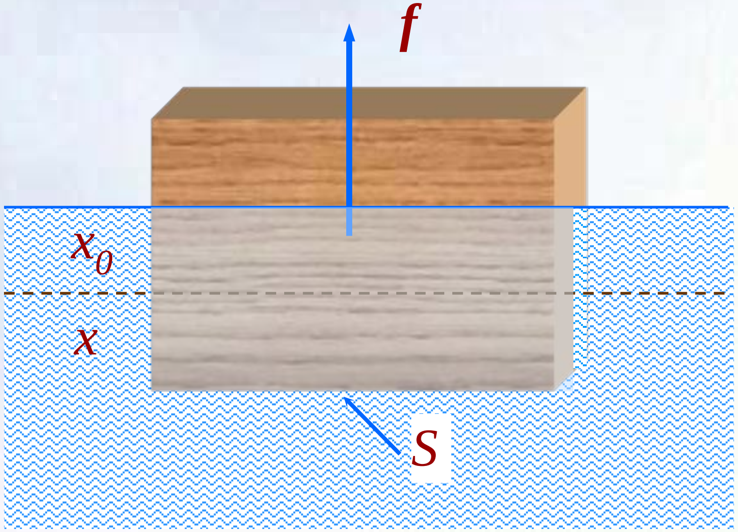
上式中当t=0时， $x_0 = A\cos\varphi$ $\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi$

由此可求得：$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2}$ $\varphi = \arctan\dfrac{-\upsilon_0}{\omega x_0}$

例题2

水面上浮沉的木块可看作简谐振动吗？如果是，周期为多少？

解： 木块偏离平衡位置距离为 x 时，所受浮力与重力之差为：



$$f_{浮} = -\rho_{水} g S(x + x_0)$$

$$mg = \rho_{水} g S x_0$$

$$f = f_{浮} + mg = -\rho_{水} S g x$$

此力相当于弹性系数k为 $S\rho_{水}g$ 的准弹性力。木块受一相当于弹性恢复力的作用，因而是简谐振动，其周期为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{S\rho_{水}g}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho_{水}g}}$$

二、谐振动的能量

设弹簧振子的物体位移为x，速度为υ，系统的弹性势能和动能分别为：

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

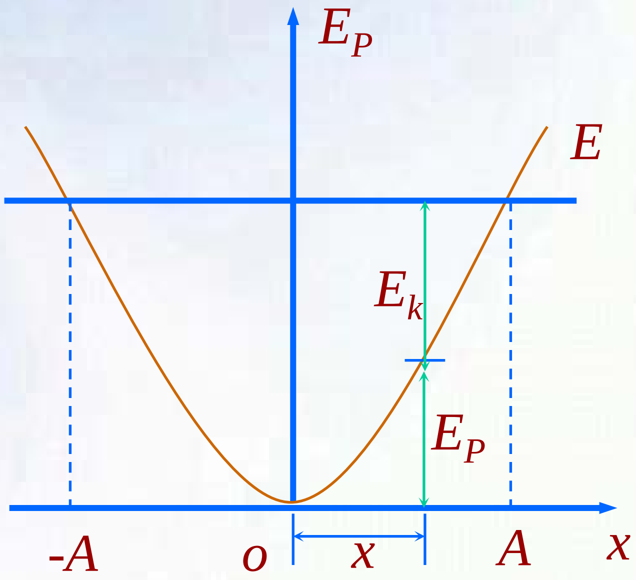
上式中我们利用了公式 $\omega^2=k/m$，系统的总机械能为：

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}kA^2}$$

系统的势能和动能的总量守恒，而且总能量与振幅的平方成正比。

弹簧振子的能量曲线图：

物体在平衡位置附近振动时，在平衡位置时势能为零，动能最大；通过平衡位置后，动能逐渐减小，势能逐渐增大；当动能为零时，势能最大，物体静止。然后物体往回运动。物体在周而复始的运动中，总能量保持不变。



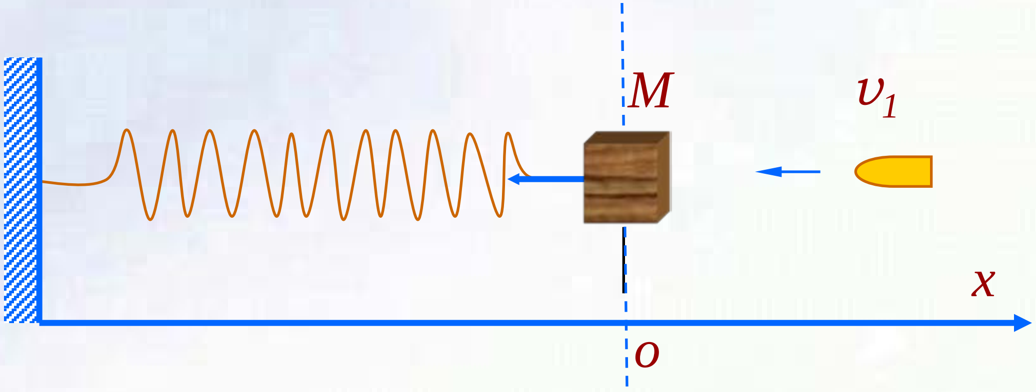
例题3

弹性系数为k，质量为M的弹簧振子，静止的放在光滑的水平面上，一质量为m的子弹以水平速度v_1射入M中，与它一起运动。选M、m开始共同运动的时刻$t=0$，求固有的角频率、振幅和初相位？

解： 碰撞后振子的质量为$M+m$，固有的角频率为：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

由碰撞过程的动量守恒，碰撞后的初速度为：



$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon_1 m}{M+m}$$

这里υ_1和υ_0都是负值，初始动能为 $\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_0^2$ ，

在最大位移处全部转化为弹性势能 $\frac{1}{2}kA^2$ ，

由此得：

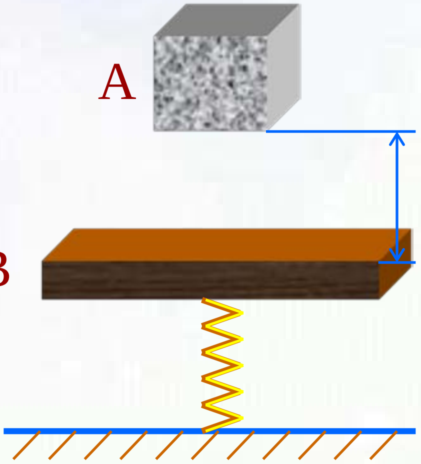
$$A = \sqrt{\frac{M+m}{k}}\,\upsilon_0 = \sqrt{\frac{m^2}{k(M+m)}}\,\upsilon_1$$

在$t=0$时刻，有：
$$\begin{cases} x = A\cos\varphi_0 = 0 & (1) \\ \upsilon = -\omega_0 A\sin\varphi_0 = \upsilon_0 < 0 & (2) \end{cases}$$

由(1)式得：$\varphi_0 = \pi/2, 3\pi/2$，再由(2)判断 $\varphi_0 = \pi/2$

例题4

质量为M的物块A在离平板为h的高度处自由下落，落在质量也是M的平板B上，平板B起初与一弹簧相连并处于平衡态，已知轻质弹簧的劲度系数为K，物体与平板为完全非弹性碰撞，求碰撞后弹簧的最大压缩量。



解： 设弹簧的最大压缩量为x，开始时弹簧已被压缩了x_0，则$m_B g = Kx_0$，$x_0 = Mg/K$

物块A自由下落，机械能守恒，

$$v_A = \sqrt{2gh}$$

A与B完全非弹性碰撞，动量守恒，

$$m_A \upsilon_A = (m_A + m_B)V，\quad V = \upsilon_A/2$$

A与B一起压缩弹簧，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}})V^2 - (m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}})gx_0 + \frac{1}{2}Kx_0^{\ 2} = -(m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}})gx + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$x^2 - \frac{4Mg}{K}x + 3\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 - \frac{Mg}{K}h = 0$$

解得：

$$\boxed{x = \frac{2Mg}{K} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \frac{Mg}{K}h}}$$

（负号舍去，因必须有$x > x_0$）

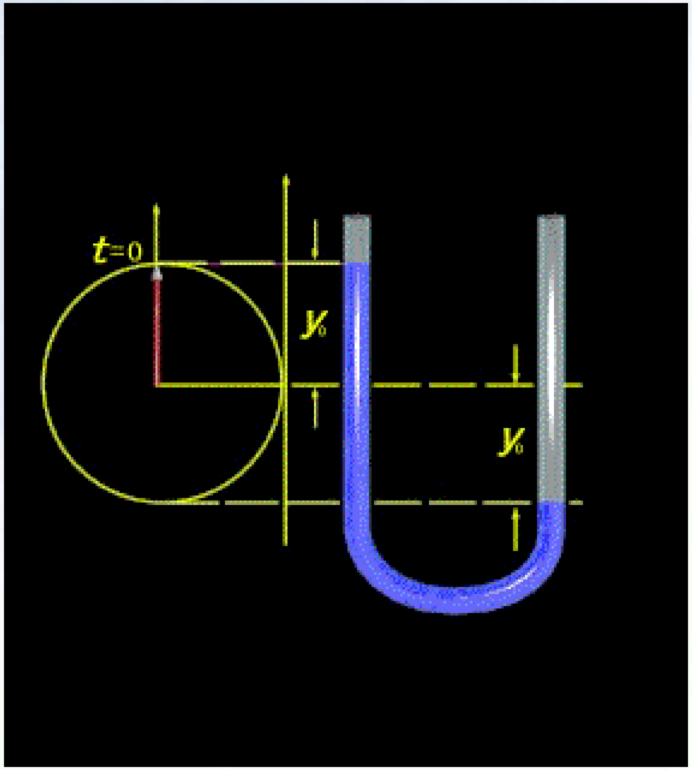
例题5

质量为m的水银，装在U型管中，管截面为S，若使管中水银面相差$2y_0$，水银上下振动，忽略摩擦。

(1) 证明此振动为谐振动；

(2) 求振动周期、写出振动方程。

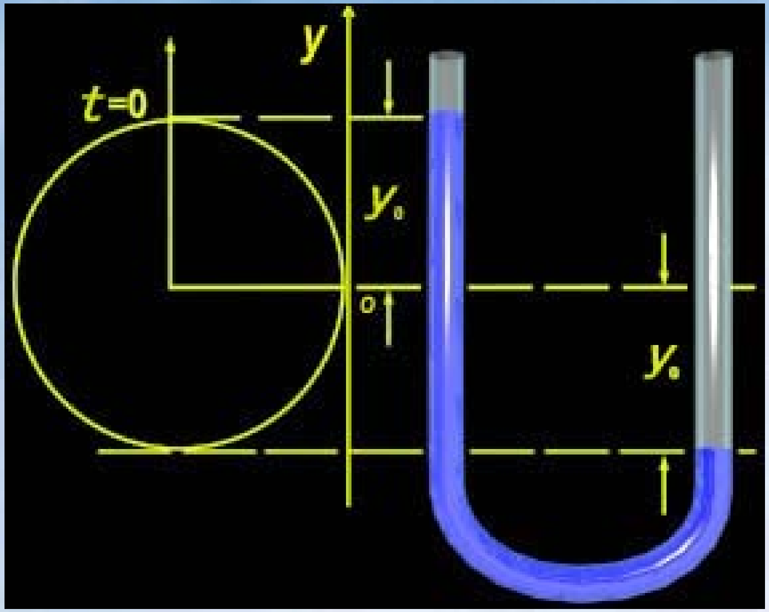
(设t=0，左液面位移最大)

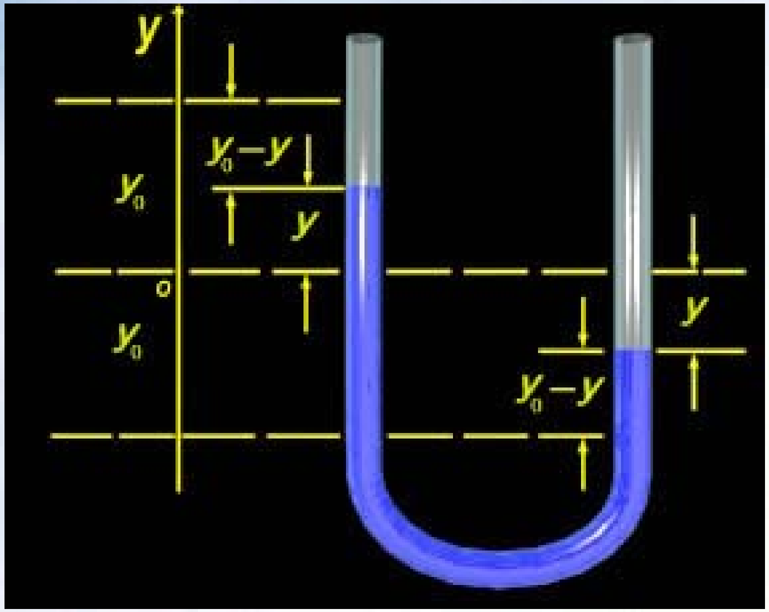


解题方法一

—— 动力学方法

图形分析：





t=0时刻位移y_0　　　　t时刻位移y

由动力学知(参见上页图形分析):

$$F=-2\Delta mg=-2ysg\rho=m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{2sg\rho}{m}y\cdots(1)$$

角频率 $\omega=\sqrt{\frac{2sg\rho}{m}}$ $\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2sg\rho}}$

初相:$t=0, y=y_0, \upsilon=0 \quad \therefore \phi=0$ (参见上页图形分析)

谐振动方程:$y=y_0\cos\omega t$

解题方法二 —— 能量法

选平衡位置势能为零，左液面升高 y 时，右液面下降 y，

液体总势能增加：

$$\Delta mg(\frac{1}{2}y)-\Delta mg(-\frac{1}{2}y)=\frac{1}{2}\rho sgy^2-(-\frac{1}{2}\rho sgy^2)=\rho sgy^2$$

液体势能：$E_p=\rho sgy^2$ 与 $E_p=\frac{1}{2}ky^2$ 相比，得

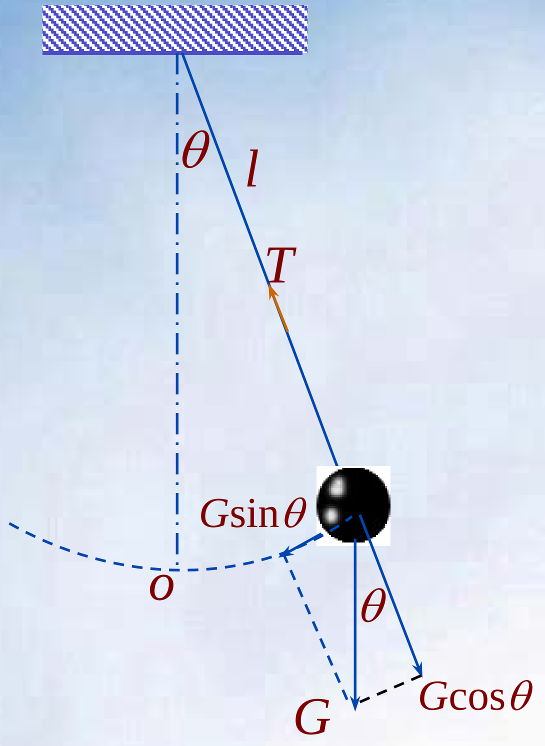
$$k=2\rho sg \qquad \omega=\sqrt{\frac{2sg\rho}{m}}$$

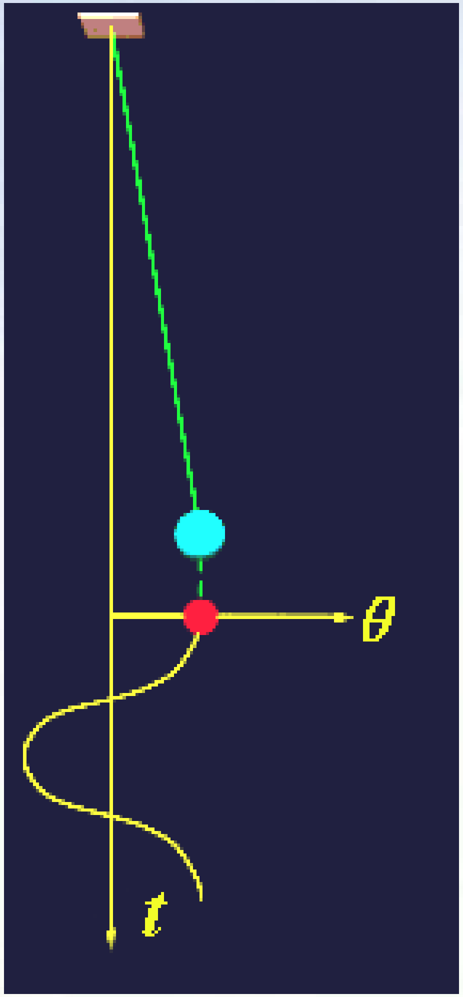
说明物体作谐振动，振动方程：

$$y=y_0\cos\omega t$$

§ 5.3 几种常见的简谐振动

1. 单摆





单摆所受的重力的切向分力：

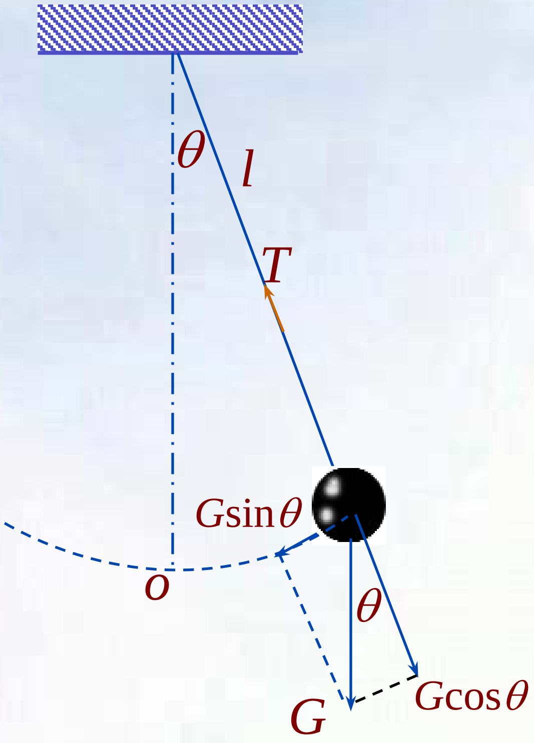
$$mg\sin\theta$$

单摆小球的切向加速度：

$$a_\tau = l(d^2\theta/dt^2)$$

由牛顿第二定律：

$$-mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



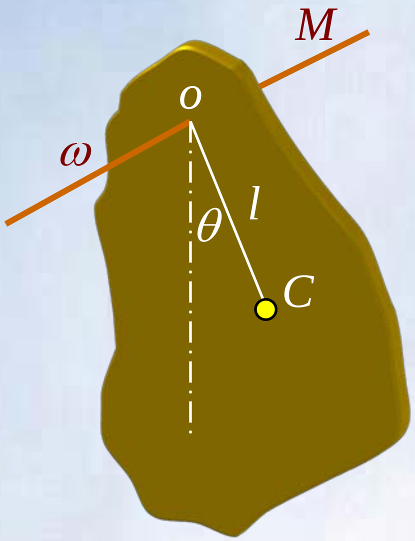
当θ很小时，$\sin\theta \approx \theta$

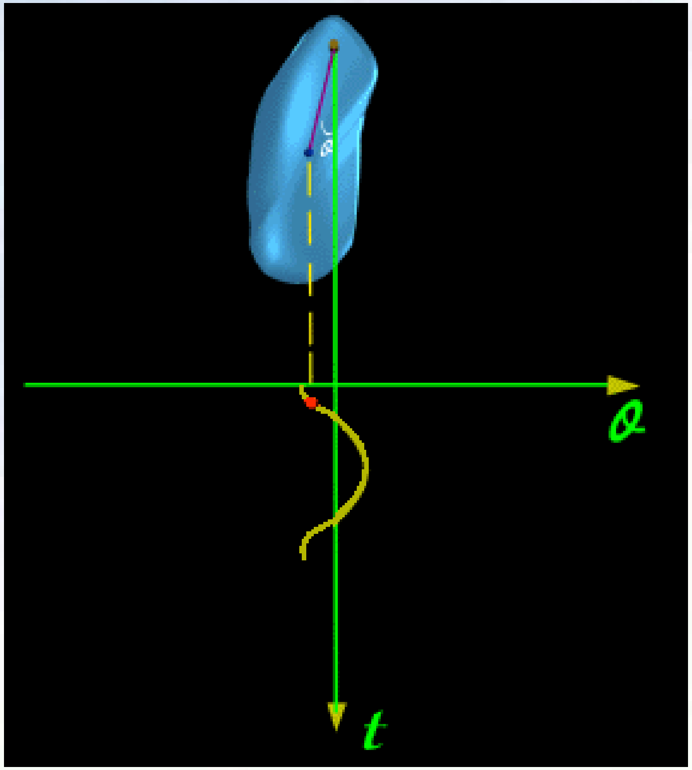
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

则有：

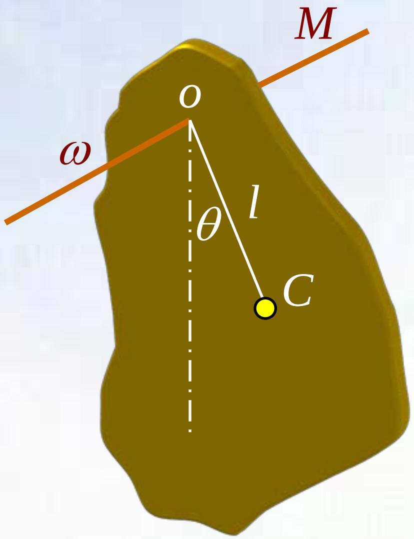
$\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)}$，其中 $\boxed{\omega = \sqrt{g / l}}$

2. 复摆（物理摆）





一个可绕水平轴摆动的刚体构成物理摆。选如图O为支点，则：



$$M = -lmg\sin\theta$$

$$J = J_C + ml^2$$

运动方程为：

$$\boxed{M = J\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

即：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{J}mg\sin\theta = 0$$

当θ很小时，$\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta$$

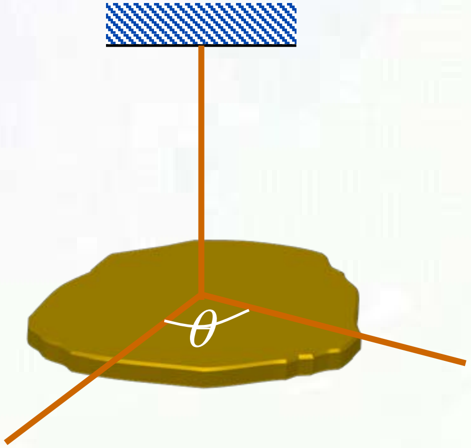
$\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)}$ 其中：$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}}$

对于单摆，$J = ml^2$ 代入ω即可得单摆的表达式。

3. 扭摆

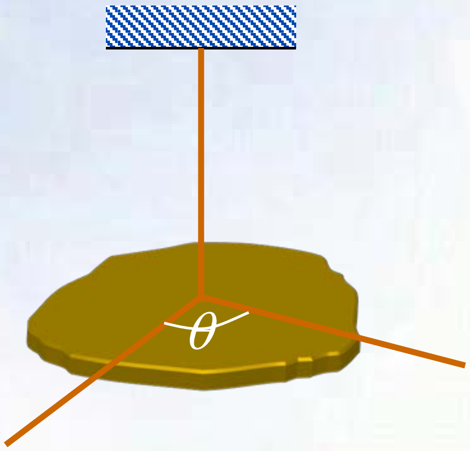
扭转力矩和运动方程分别为：

$$M = -k\theta \qquad M = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



由以上两式可得：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{J}\theta$$



可知其振动的角频率为 $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{J}}}$

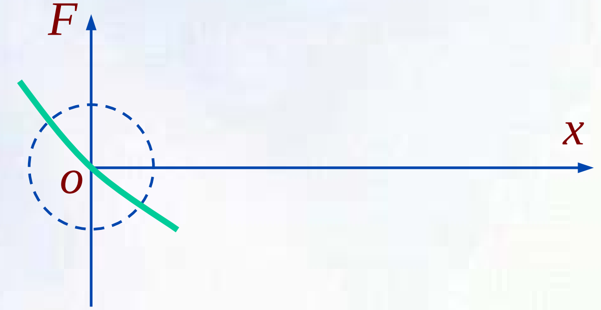
扭摆的周期为：$\boxed{T = 2\pi\sqrt{J/k}}$

已知k，再测得T可计算出转动惯量。

稳定平衡附近的运动：*

在许多系统中，回复力包含非线性项，势能曲线如图所示：**在图中稳定平衡点o，$x=0$处，势能有极小值：**

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$



与势能相应的作用力为：$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

在$x=0$附近，$F(x)$-x曲线如图所示。

在原点附近对$F(x)$做泰勒级数展开：

$$F(x)=F(0)+\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x+\cdots$$

由平衡位置的极值条件，可知：

$$F(0)=0,\quad \left(\frac{dF}{dx}\right)_0=-\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0<0,\quad 令\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0=k$$

在x较小，可略去二阶以上项： $\boxed{F(x)=-kx}$

物体在回复力作用下，在稳定平衡位置附近的运动，可近似看作简谐振动。

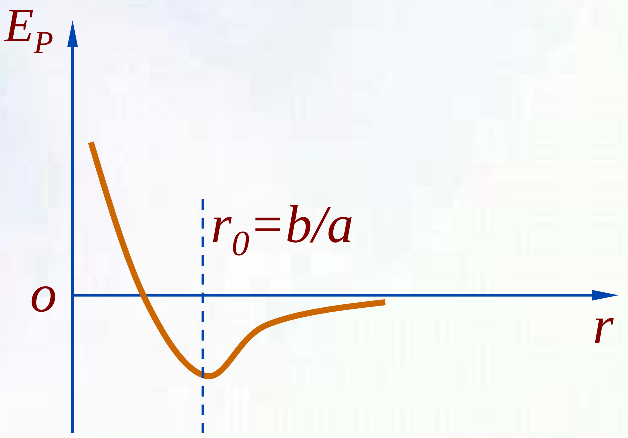
例题6 *

在某些双原子分子中，两原子间的相互作用力可以用 $F=-\dfrac{a}{r^2}+\dfrac{b}{r^3}$ 表示，其中a与b均为正的常数，而r为两原子间的距离。图中表示了势能E_P随r的变化曲线。

(1) 证明在平衡时原子间距为b/a

(2) 证明原子在平衡位置附近的微振动是简谐振动，劲度系数为a^4/b^3

(3) 试求振动的周期



解：(1) 原子在平衡位置受力为零，故：

$$F=-\frac{a}{r^2}+\frac{b}{r^3}=0$$

所以平衡时原子间距为： $r_0=\frac{b}{a}$

(2) 设原子在平衡位置附近位移为x，所受到的力F可展开为幂级数：

$$F(x)=F(0)+\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0}x+\cdots$$

式中 $x = r - r_0$，$F(0)$为原子在平衡位置所受的力，故$F(0)=0$。若忽略二阶及二阶以上的小量，则有：

$$F(x)=\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0}x$$

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0} = -\left(\frac{2a}{r^3} - \frac{3b}{r^4}\right)_{r=\frac{b}{a}} = -\frac{a^4}{b^3}$$

故：
$$F = -\frac{a^4}{b^3}x = -kx$$

所以，原子在平衡位置附近的振动为谐振动，且劲度系数为

$$\boxed{k = \frac{a^4}{b^3}}$$

(3) 分子中原子的振动周期为：

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{b^3}{a^4}m}}$$

§5.6 振动的合成

一、同方向同频率简谐振动的合成

设物体沿x轴同时参与两个独立振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

则合振动为：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

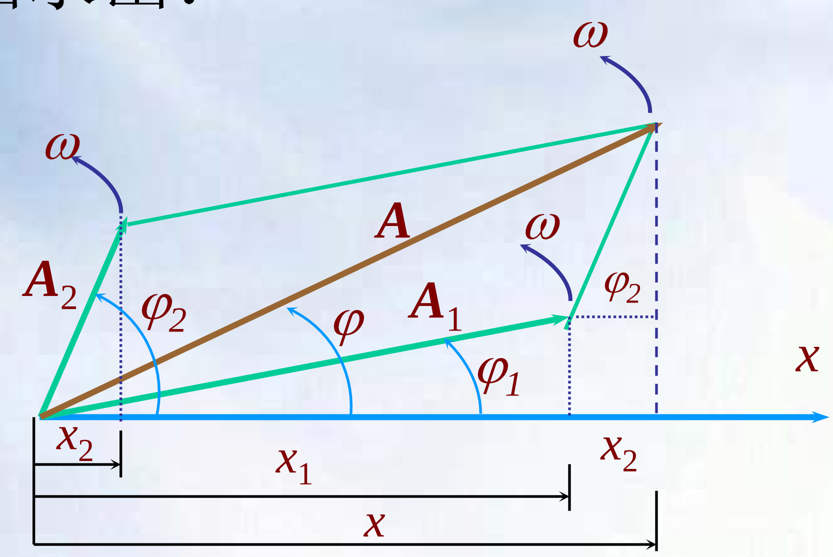
可以证明，合成后仍然为简谐振动：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

合振幅和初相也可从矢量图求出：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=arctg\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$



$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 在 x 轴的投影为 $x=x_1+x_2$

讨论：

① x_1和x_2同相，即

$\varphi_2-\varphi_1=2m\pi \qquad m=(0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，则：

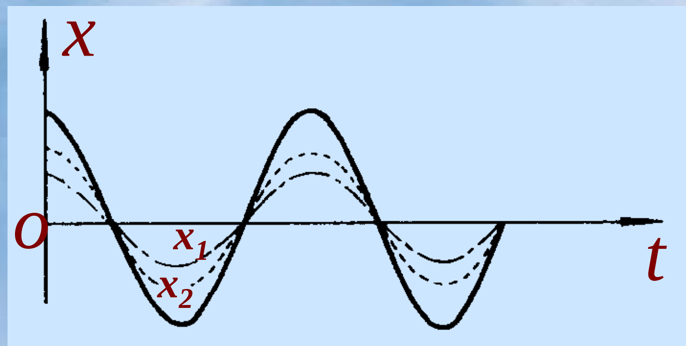
$A=A_1+A_2$。当 $A_1=A_2$ 时，合振幅为分振幅的两倍。

②x_1和x_2反相，即

$\varphi_2-\varphi_1=(2m+1)\pi,\quad m=(0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，

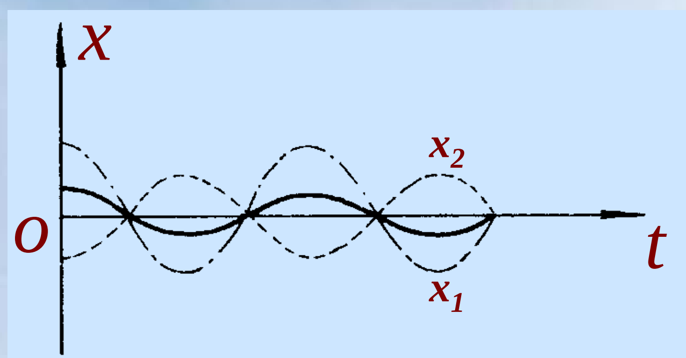
$A=|A_1-A_2|$。当 $A_1=A_2$ 时，合振幅为零，能量也最小。

对于多个振动矢量的合成，我们同样可用旋转矢量法迭加而得。



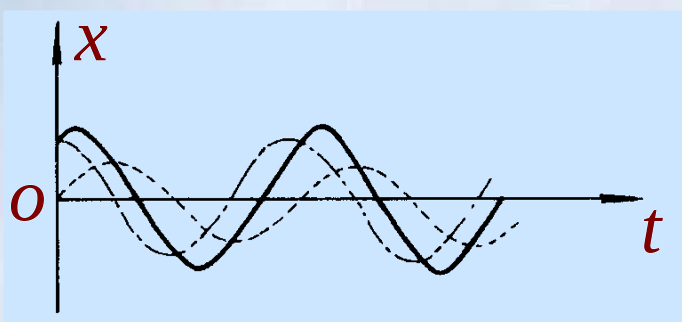
(a) $\phi_{20}-\phi_{10}=2k\pi$

$A=A_1+A_2$



(b) $\phi_{20}-\phi_{10}=(2k+1)\pi$

$A=\left|A_1-A_2\right|$



(c) 任意角度

例题7

N个同方向，同频率的简谐振动，他们的振幅相等，都为a，初相分别为0、α、2α …，振动表达式为：

$$x_1 = a\cos\omega t$$

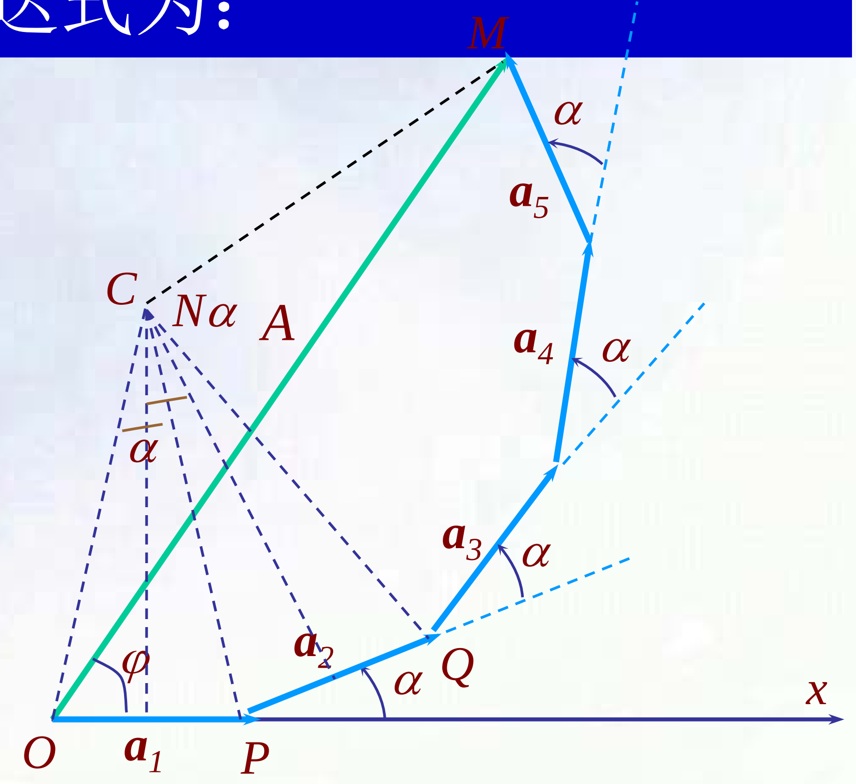
$$x_2 = a\cos(\omega t+\alpha)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t+2\alpha)$$

$$\vdots$$

$$x_N = a\cos[\omega t+(N-1)\alpha]$$

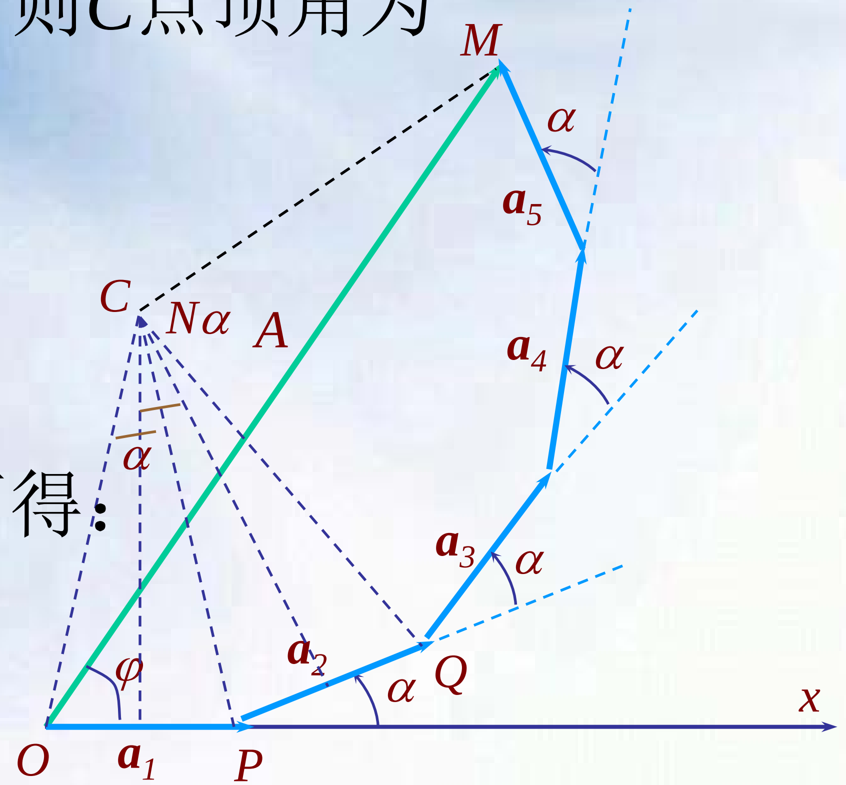
求他们的合振动的振幅和初相。



解： 如图所示，在图中做$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$的中垂线，两线相交于C点，则C点顶角为α，所以

$\angle OCM = N\alpha$，又令

$$OC = PC = \cdots = MC = R$$



从等腰三角形OCM，可得：

$$A = 2R\sin\frac{N\alpha}{2}$$

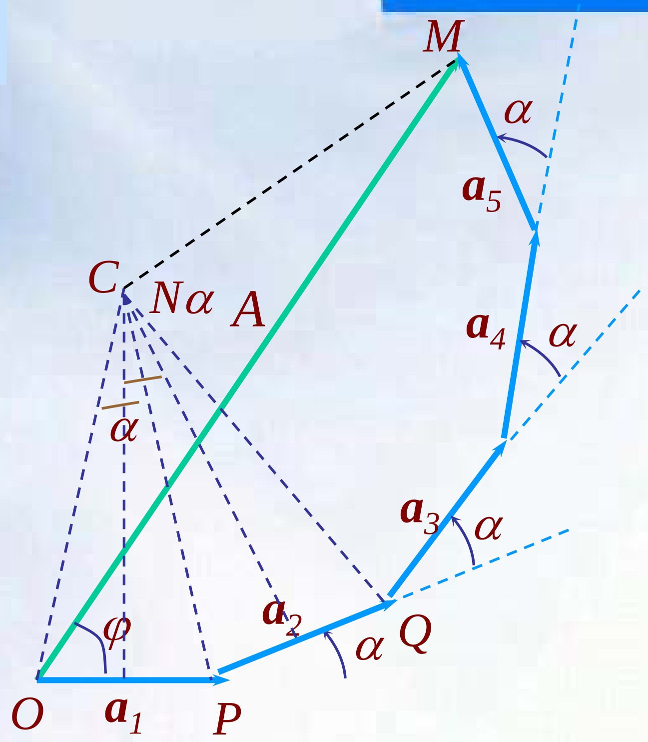
在三角形OCP中：$a = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$

于是可 $A = a\sin\frac{N\alpha}{2} / \sin\frac{\alpha}{2}$

因为：$\angle COM = \frac{1}{2}(\pi - N\alpha)$

$\angle COP = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\alpha$$



最终合振动的表达式为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = a\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\alpha)$$

如果各分振动的初相相同，即α=0，于是有：

$$A=\lim_{\alpha\to 0} a\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=Na \qquad \varphi=0$$

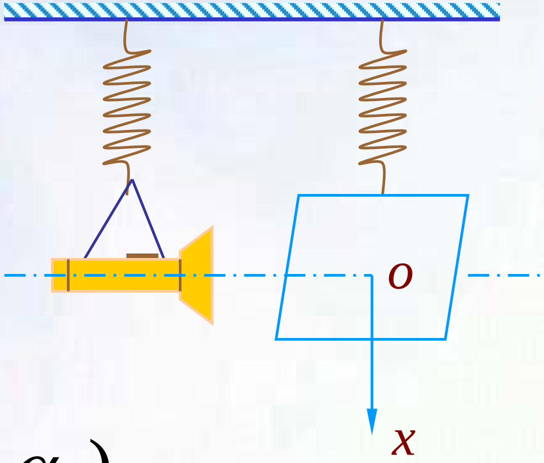
例题8

屏幕和手电筒的质量均为m，用倔强系数相同的弹簧悬挂在同一水平面上。当平衡时，手电筒光恰好照在屏幕的中心。已知屏幕和手电筒相对于地面的上下振动表达式分别为：

$$x_1=A\cos(\omega t+\alpha_1)$$

$$x_2=A\cos(\omega t+\alpha_2)$$

若要求：(1)在屏上的光点相对于屏静止不动；(2)在屏上的光点相对于屏作振幅$A'=2A$的振动，则初位相α_1、α_2应满足什么条件？用何方式起动，方能得到上述结果？



解： 根据相对运动公式，

有：
$$x_{光对地}=x_{光对屏}+x_{屏对地}$$

由题意：

$$x_{光对地}=x_2=A\cos(\omega t+\alpha_2)$$

$$x_{屏对地}=x_1=A\cos(\omega t+\alpha_1)$$

所以：$x_{光对屏} = x_2 - x_1$

$$= A\cos(\omega t + \alpha_2) - A\cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$= -2A\sin(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2})\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \qquad (1)$$

（1）要求光点相对于屏不动，即：$x_{光对屏}$=0，由式（1）可知：

$$\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0,\ \text{即} \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

（2）当光点相对于屏的振幅为2A时，由（1）式得：

$$\left|\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right| = 1,\ \text{所以} \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi$$

可见，要使光点相对于屏不动，则要求$\alpha_1=\alpha_2$，即手电筒和屏的振动始终要同步（同位相），为此，把它们往下拉A位移后，同时释放即可；同理，要使光点对屏有2A振幅。两者必须位相相反，为此，让手电筒位于 (-A)处，而屏则位于(+A)处，同时释放，即可实现。

二、同方向不同频率的两简谐振动的合成 拍

设两振动方程为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

两者的合振动为：

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

为简单起见：设

$$A_1 = A_2 = a, \qquad \varphi = 0$$

则：

$$x = 2a\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

在 $|\omega_2 - \omega_1| << \omega_2 + \omega_1$ 时，上式中第一项

$$A = 2a\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t$$

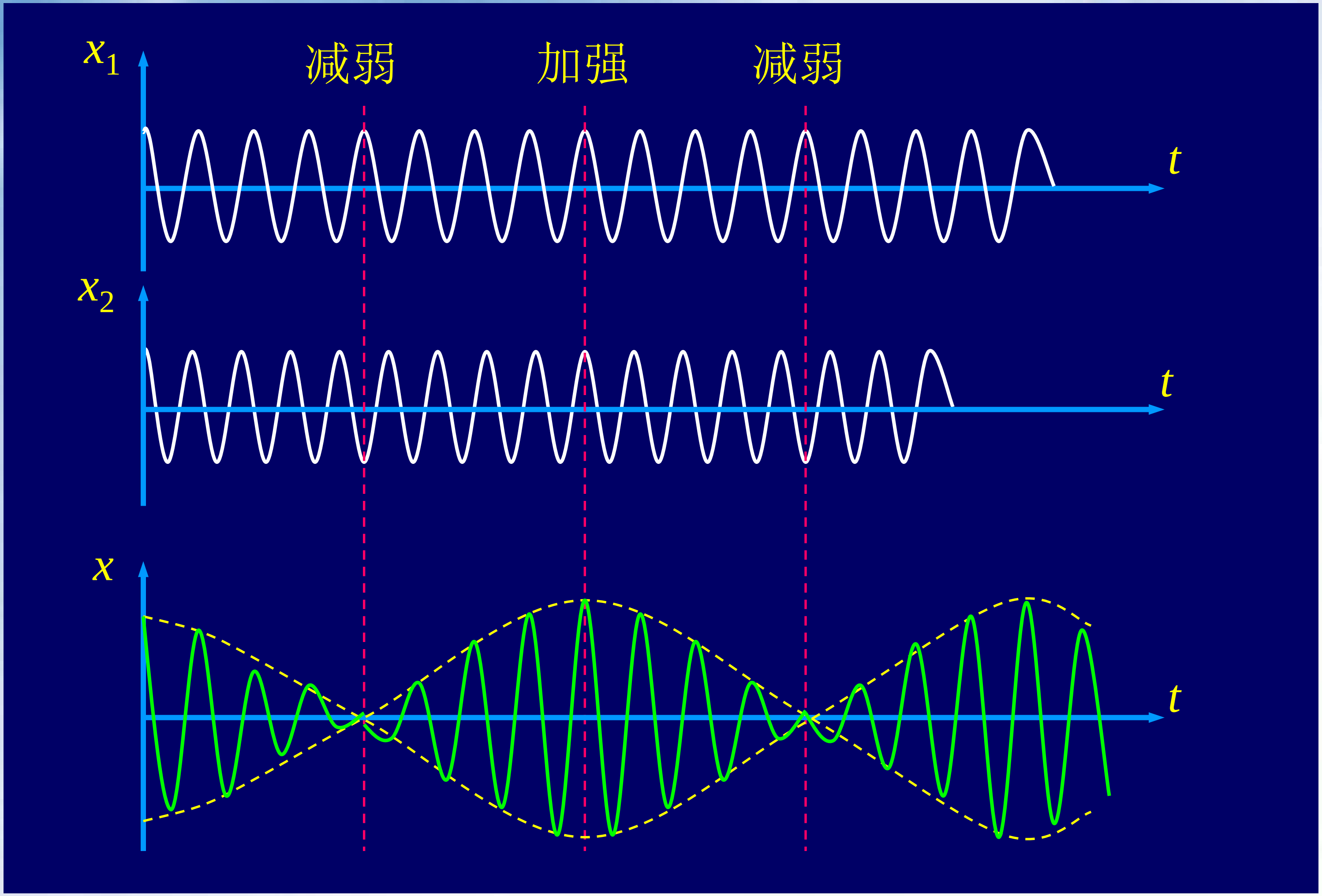
可看作随时间变化的振幅。

两个频率相近的简谐振动合成时，合振动的振幅已不再保持恒定，而是做缓慢的周期性改变，合振幅的这种周期性的变化称为“拍”。单位时间内振幅强弱的变化次数称为“拍频”，它的值可由

$$\left|\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right|$$

求出，即拍频为 $\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t$ 振动频率的两倍：

$$\nu_{\text{拍}}=\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right|=\left|\nu_2-\nu_1\right|$$


x_1
减弱
加强
减弱
t
x_2
t
x
t

三、相互垂直的简谐振动的合成

设物体同时参与两个相互垂直的振动，两个振动分别为：

$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

此合成振动的振幅应限制在$2A_1$和$2A_2$的矩形内，在直角坐标系中的轨迹方程为一椭圆方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

证明：

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1 \qquad ①$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2 \qquad ②$$

以 $\cos\varphi_2$ 和 $\cos\varphi_1$ 分别乘①②两式，然后相减，得：

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad ③$$

以 $\sin\varphi_2$ 和 $\sin\varphi_1$ 分别乘①②两式，然后相减，得：

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2-\frac{y}{A_2}\sin\varphi_1=\cos\omega t\sin(\varphi_2-\varphi_1) \quad ④$$

③④两式平方后相加，得：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

证毕

讨论:

①$\varphi_2-\varphi_1=0,\pi$　时（π的偶数倍或奇数倍），上述方程变为:

$$\left(\frac{x}{A_1}\mp\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\pm\frac{A_2}{A_1}x$$

这是两条通过一三 (0)、二四 (π) 象限的直线，质点离开平衡位置的位移大小满足方程:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

② $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}(-\frac{\pi}{2})$ 即 $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 时，合成方程为一个以坐标轴为主轴的椭圆方程：

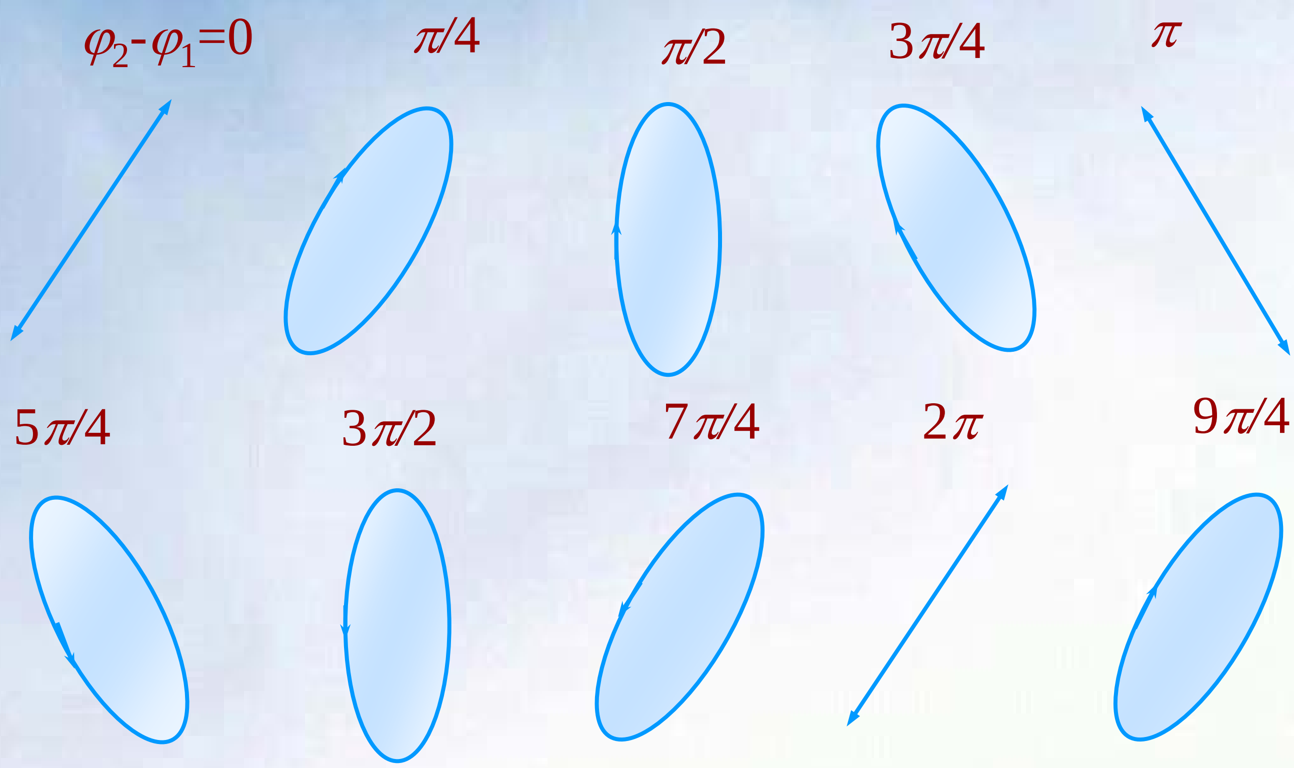
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

当 $A_1=A_2$ 时为圆振动。

③ 当两个分振动的位相差为任意值时，物体做一般椭圆运动。

$0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ ，对应顺时针运动

$\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ ，对应逆时针运动



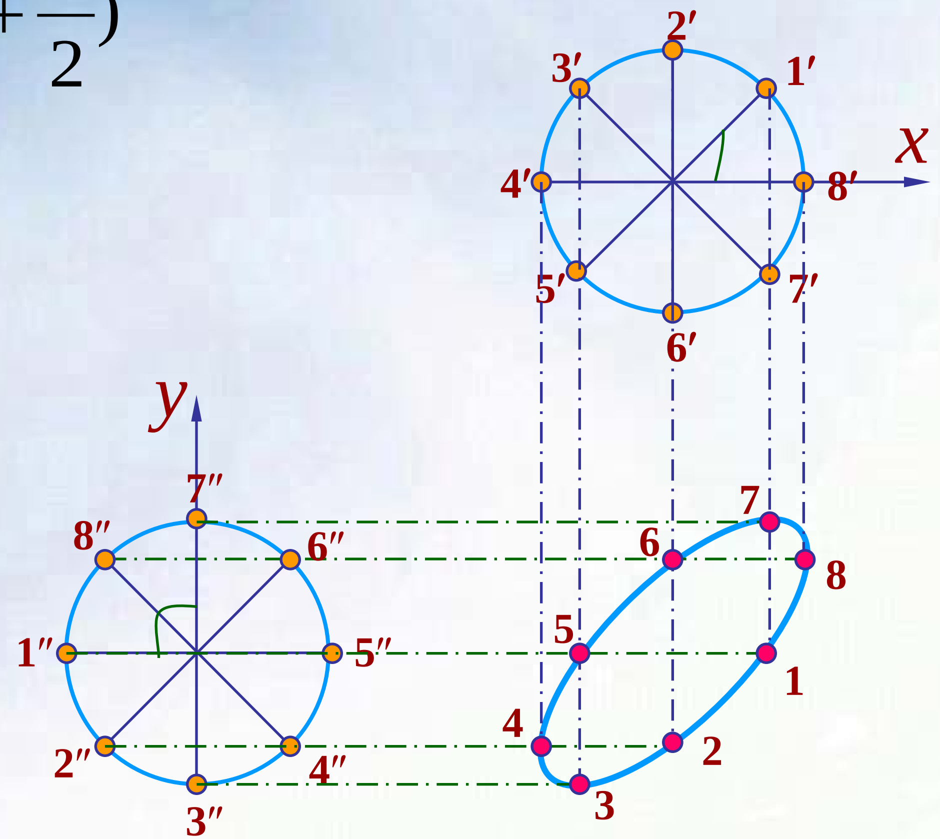
如

$$x = A_1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

合成振动轨迹是椭圆

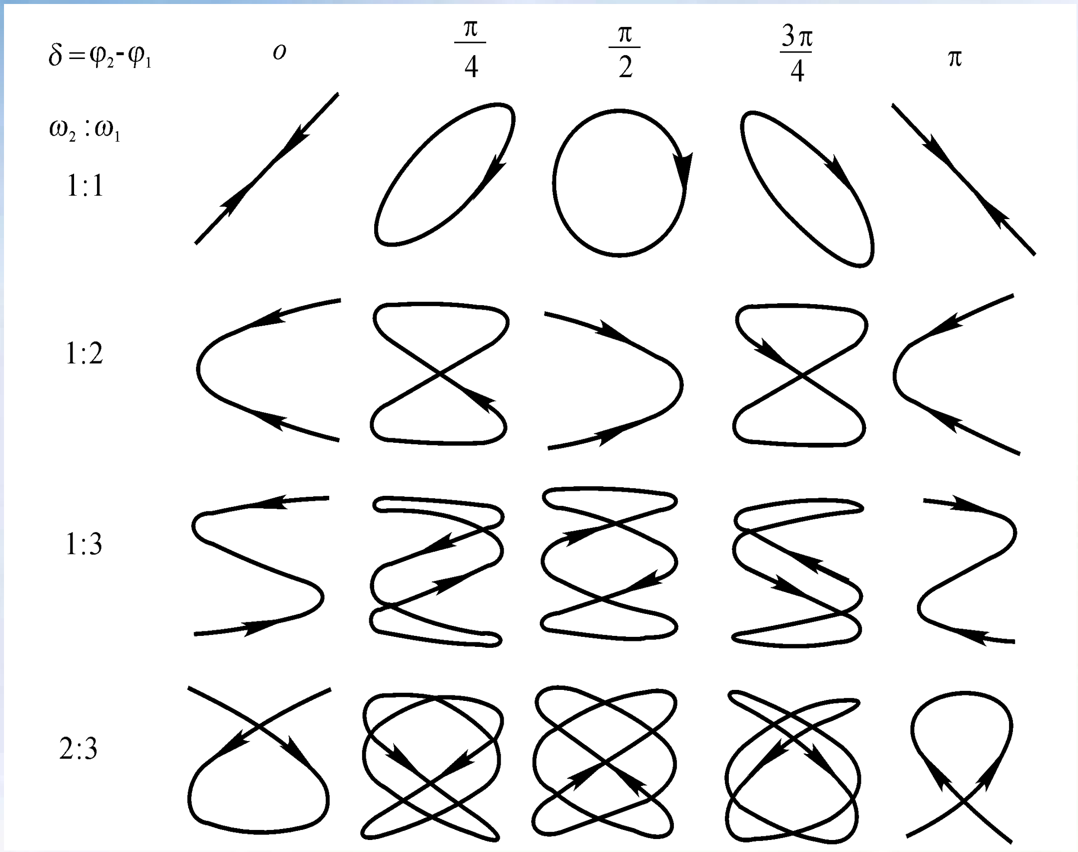
需要指出，与合成相反，一个直线简谐振动、匀速圆周运动或椭圆运动，都可分解为两个相互垂直的简谐振动。



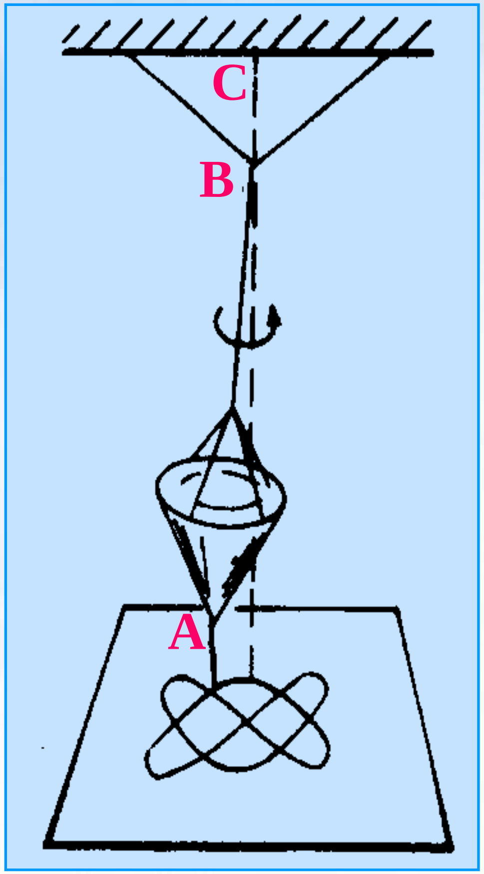
④ 两相互垂直，不同频率的简谐振动的合成

1. 若ω_1与ω_2相差很小，图形不断变化。

2. ω_2/ω_1有整数倍的关系。这些图形称为“李萨如图形”。



演示李萨如(Lissajou)图形的一个简单的实验装置—沙漏单摆。当单摆前后摆动时，摆长为AC，左右摆动时，摆长为AB，调节AC和AB的比率，可以得到不同的李萨如图形。



例题9

质量为m的质点，同时参与互相垂直的两个振动，其振动方程分别为：

$$x = 0.06\cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})\,\mathrm{m}, \qquad y = 0.03\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6})\,\mathrm{m}$$

试求：(1)质点的运动轨迹方程；(2)质点在任一位置时所受的作用力。

解：（1）由已知条件：

$$x = A\cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})$$

$$y = B\cos[(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{2})] = B\sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})$$

式中A=0.06m，B=0.03m，两式平方后相加，
得质点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

即质点的运动轨迹为一椭圆。

（2）因为 t 时刻质点的位矢为：

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$=A\cos(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})\vec{i}+B\sin(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})\vec{j}$$

所以：

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$=-\omega^2[A\cos(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})\vec{i}+B\sin(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})\vec{j}]=-\omega^2\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{f}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}}$$

即质点在任一位置所受的作用力大小随 r 变化，方向始终指向原点。