第 三 周

第3章 动量·动量守恒定理

§3. 1， § 3. 2； §3. 3； §3. 4

第4章 能量·能量守恒定理

§4. 1

作业：P34 3-1，3-5，3-7，3-12

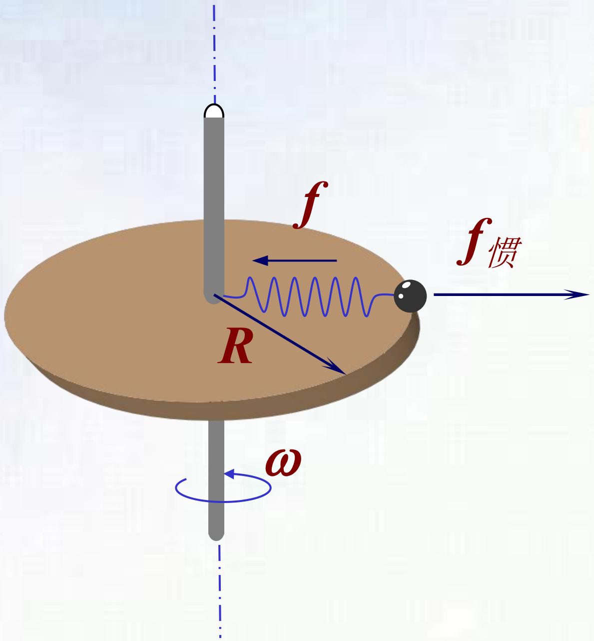
P48 4-1，4-4

2. 转动非惯性参照系　惯性离心力 *

如图小球做匀速圆周运动的加速度为

$$a=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

若取转台为参照系，则质点对此参照系是静止的。质点在此参照系内将受到一个与向心加速度方向相反的惯性力：



$$f_{\text{惯}} = -ma = -mR\omega^2$$

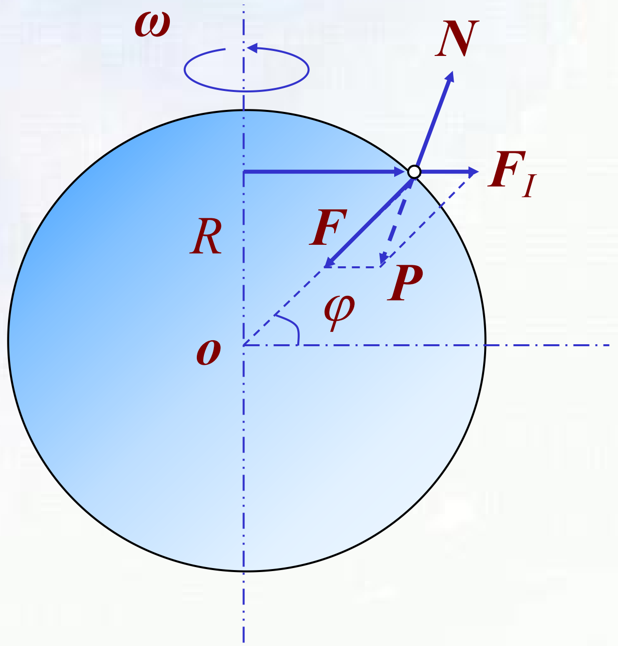
此惯性力称为**惯性离心力**，质点在拉力$\boldsymbol{f}$和惯性离心力$\boldsymbol{f}_{\text{惯}}$作用下保持静止。

在惯性参照系看：弹簧作用在质点上的拉力$\boldsymbol{f}$使质点做圆周运动。

在非惯性参照系看：质点在拉力$\boldsymbol{f}$作用下保持静止，这就必需假想一个惯性离心力的存在。

例题6*

地面上纬度φ处，有一质量为m的静止物体。考虑地球自转的影响，求物体的重力和该处的重力加速度。



解：在地球这个非惯性系中，物体m在引力$\boldsymbol{F}$、惯性离心力$\boldsymbol{F}_I$、地面支持力$\boldsymbol{N}$作用下静止，重力$\boldsymbol{P}$为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{F}_I$的合力：

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_I$$

$$F=G\frac{mM}{R^2}=mg_0$$ （指向地心）

$$F_I = m\omega^2 R\cos\varphi$$ （垂直于转轴向外）

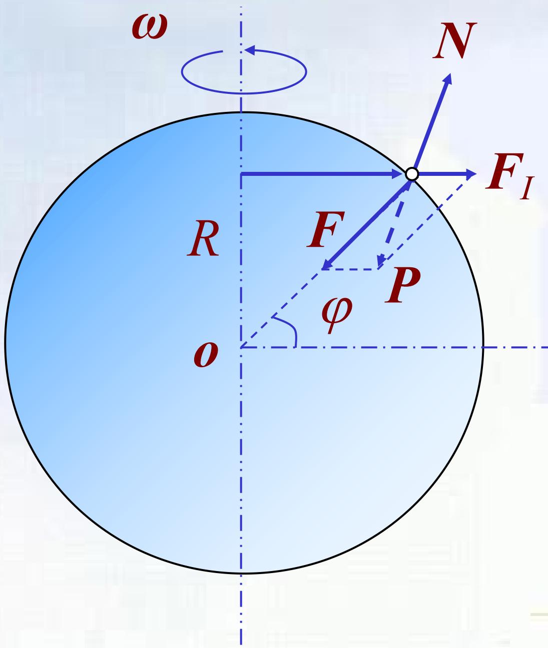
$$\frac{F_I}{F} = \frac{\omega^2 R\cos\varphi}{g_0} \approx \frac{\cos\varphi}{290}$$

可见 $F >> F_I$， $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 之间夹角很小，

物体的重力近似为：

$$P = mg = \sqrt{(F - F_I\cos\varphi)^2 + (F_I\sin\varphi)^2}$$

$$\approx F - F_I\cos\varphi = mg_0[1 - \frac{\cos^2\varphi}{290}]$$

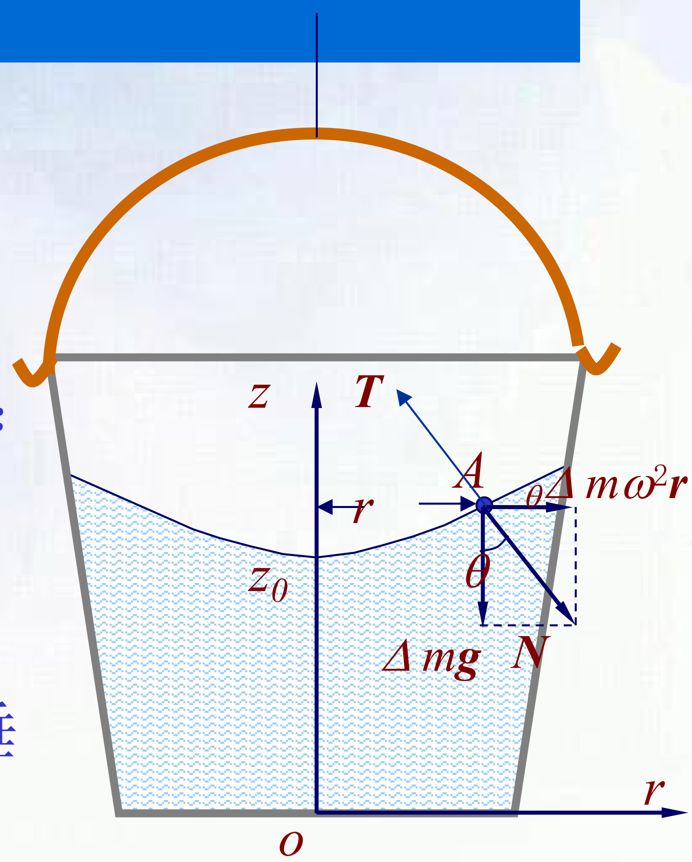


该处的重力加速度为：

$$\boxed{g = g_0[1 - \frac{\cos^2\varphi}{290}]}$$

例题7*

一水桶绕自身轴以ω角速度旋转，当水与桶一起转动时，水面的形状如何？



解：如图所示：在与水桶共转的非惯性参照系中，液块Δm 受三个力：重力Δmg、惯性离心力$\Delta m\omega^2 r$、液体浮力 T（垂直水面），合力为零。

从而 $N = \Delta m\,(g+\omega^2 r)$ 与水面垂直。设水面的方程为 $z = z(r)$ 则：

$$\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \frac{\Delta m\omega^2 r}{\Delta mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

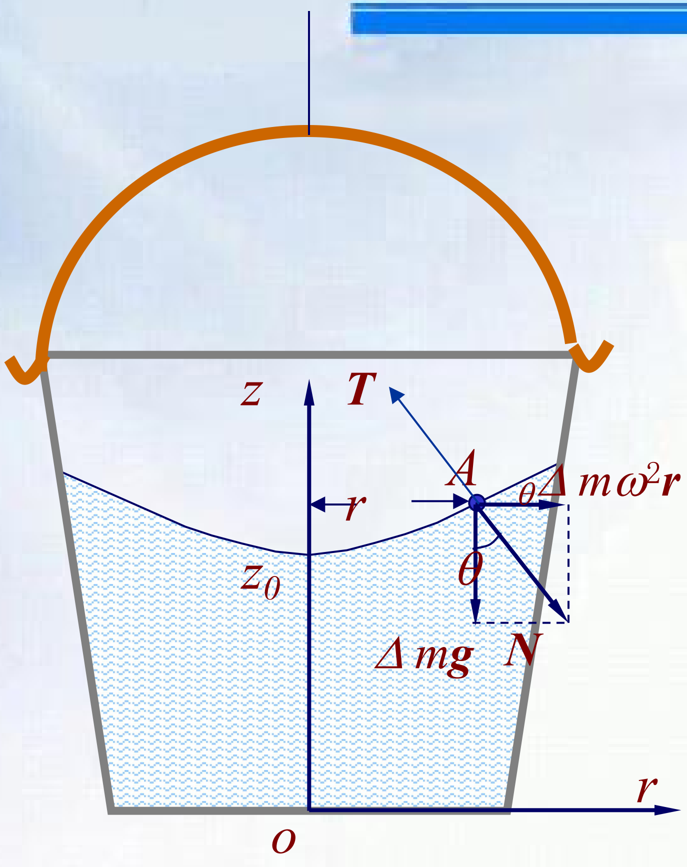
$$dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr$$

两端积分得：

$$\int_{z_0}^{z} dz = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r rdr$$

即：

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$



式中z_0是中心水面的高度。此为抛物线方程。由于轴对称性，水面为旋转抛物面。

§2.4　动量定律与动量守恒定律

一、质点动量定律

讨论力的时间积累效果：将第二定律改写为

$\boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p}$　　在$t_0 \sim t$的时间段积分，得：

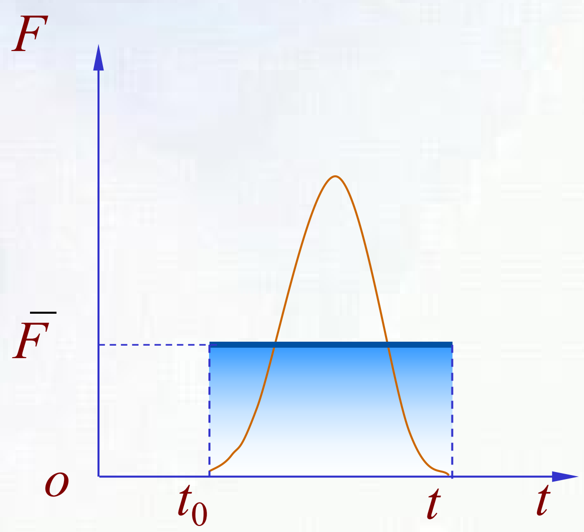
$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0$$

力对时间的积分称为冲量：　$\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}dt$

因而上式可写成： $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \Delta\boldsymbol{p}$

一段时间内质点所受合力的冲量等于这段时间内质点动量的增量。此即质点动量定律。

在碰撞、打击等过程中的相互作用力称为**冲力**。由于冲力作用时间短，很难测得$F(t)$，故引进**平均冲力**的概念：



$$\bar{F} = \frac{\int_{t_0}^{t} F(t)\,\mathrm{d}t}{t - t_0}$$

例题8

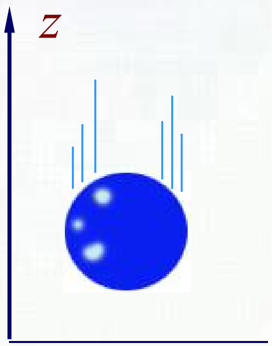
橡皮球的回跳：　一质量为0.2kg的橡皮球，向地板落下。它以8m/s的速率和地板相撞，并近似地以相同的速率回跳起来。高速摄影测得球与地板相接触的时间为10^{-3}s。怎样描述地板作用于球上的力呢？

球在刚刚撞击地面以前的动量为：

$$\vec{P}_a = -1.6\vec{k}(kg \cdot m/s)$$

而在10^{-3}s后它的动量为:

$$\vec{P}_b = +1.6\vec{k}(kg \cdot m/s)$$



由动量定律： $\int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt = \vec{P}_b - \vec{P}_a$

$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt = 1.6\vec{k} - (-1.6\vec{k}) = 3.2\vec{k}(kg \cdot m/s)$$

虽然不知道F随时间的精确变化，但地板作用于球上的平均力还是容易求出的。

$$\vec{F}_{平均} \Delta t = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt = \vec{P}_b - \vec{P}_a$$

因为$\Delta t = 10^{-3}$s $\quad \vec{F}_{平均} = \dfrac{3.2}{10^{-3}} \vec{k} = 3200\vec{k}(N)$

在此题中重力产生的冲量可忽略，为什么？

质点动量定律是矢量式，可用分量式计算：

$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt = m\upsilon_x - m\upsilon_{0x}$$

$$I_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt = m\upsilon_y - m\upsilon_{0y}$$

$$I_z = \int_{t_0}^{t} F_z dt = m\upsilon_z - m\upsilon_{0z}$$

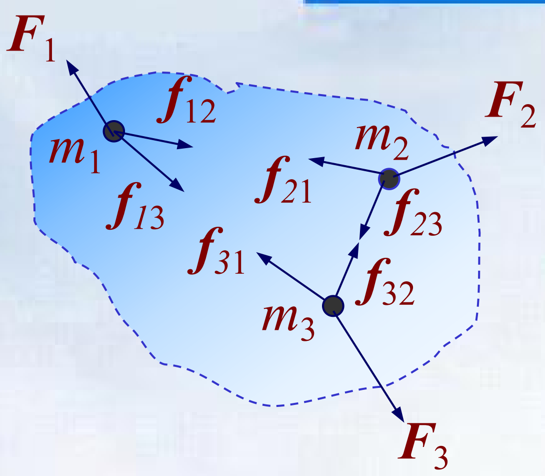
二、质点系动量定律

设质点组（系统）有m_1、m_2、m_3构成。外力为$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$，相互作用的内力为：$\boldsymbol{f}_{12}$、$\boldsymbol{f}_{21}$、$\boldsymbol{f}_{13}$、$\boldsymbol{f}_{31}$、$\boldsymbol{f}_{23}$、$\boldsymbol{f}_{32}$，由牛顿第二定律：

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{13})dt = d\boldsymbol{P}_1$$

$$(\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{23})dt = d\boldsymbol{P}_2$$

$$(\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{f}_{31} + \boldsymbol{f}_{32})dt = d\boldsymbol{P}_3$$



将以上三式相加，其中$\boldsymbol{f}_{12}$=-$\boldsymbol{f}_{21}$、$\boldsymbol{f}_{13}$= -$\boldsymbol{f}_{31}$、$\boldsymbol{f}_{23}$= -$\boldsymbol{f}_{32}$

从而得：

$$(\sum_i \boldsymbol{F}_i)dt = d(\sum_i \boldsymbol{P}_i)$$

设： $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \qquad \boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{P}_i$

则有质点系牛顿第二定律：

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

将上式在t_0～t时段内积分，得：

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0$$

质点系的动量的增量等于合外力的冲量。

●外力可改变质点系的总动量；内力只改变各质点的动量，但不能改变系统的总动量。

动量定理与牛顿定律的关系

	牛顿定律	动量定理
力的效果	力的**瞬时**效果	力对时间的**积累**效果
关系	牛顿定律是动量定理的**微分**形式	动量定理是牛顿定律的**积分**形式
适用对象	质点、质点系	质点、质点系
适用范围	惯性系	惯性系
解题分析	研究质点（系）在每时刻的运动情况	研究质点（系）始末两状态的变化

应用动量定理解题的两类问题

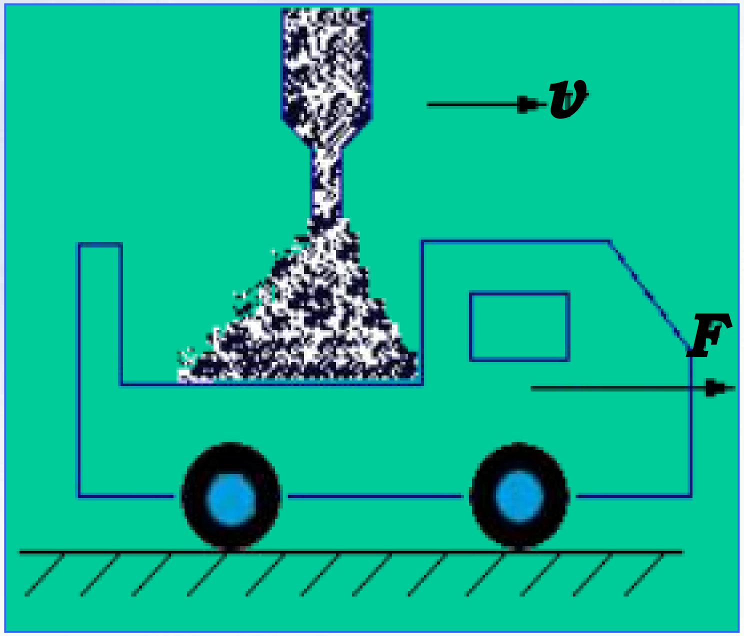
第一类：从实验中测出质点(系)前后的动量，便能求解出质点(系)所受的冲量值及平均作用力。

第二类：从实验中测出合外力对质点(系)的冲量，便能求解到质点(系)的动量变化。

思考题：沙漏问题

一辆装沙车以速率v=3m/s从沙斗下面通过，沙斗每秒落下的沙为m_0 = 500kg。如果使车的速率保持不变，忽略摩擦，求沙车的牵引力F。

求解的关键是要取质点系Δm(一段时间Δt内落下的沙) 为研究对象。分析它们在t与 $t+\Delta t$时刻的动量变化，然后利用质点系动量定理求解。



设在$\triangle t$时间内有$\triangle m$的沙落入沙车。

在时刻t，质点系水平总动量是$(0 \cdot \triangle m)$；在时刻$t+\triangle t$，质点系水平总动量是$(\triangle m \cdot v)$；故质点系在$\triangle t$时间内水平动量的增量为：$\triangle m \cdot v$

运用质点系动量定理求沙车的牵引力：

$$\overline{F}\Delta t = \Delta m \cdot v \qquad \overline{F} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v = m_0 v$$

代入数字可得：

$$\overline{F} = 500 \times 3 = 1500(N)$$

三．动量守恒定律

由质点系牛顿第二定律：

$$\boldsymbol{F}=0\text{时}，\quad \boldsymbol{P}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\text{常矢量}$$

合外力为零时，质点系的总动量保持不变，此即动量守恒定律。

动量守恒定律是一矢量式，系统在某一方向上外力为零时，则在该方向上动量守恒定律成立，它的分量式为：

$$P_x=\sum_i m_i v_{ix}=\text{常量}$$

$$P_y=\sum_i m_i v_{iy}=\text{常量}$$

$$P_z=\sum_i m_i v_{iz}=\text{常量}$$

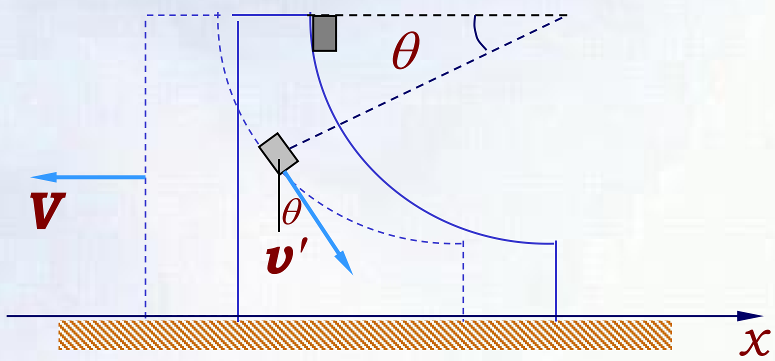
动量定律、动量守恒定律适用于惯性系。式中各物理量应相对于同一惯性系。

例题9

质量为M，半径为R的四分之一圆弧形滑槽，原来静止在光滑水平地面上，质量为m的小物体由静止开始沿滑槽从槽顶滑到槽底。求这段时间内滑槽移动的距离l。

解：滑块和小物组成的质点系在水平方向不受外力，总动量的水平分量守恒，设V为滑槽相对地面的速度，$\boldsymbol{v}'$为小物体相对滑槽的速度；以地面为参照系，则：

$$m(v'\sin\theta - V) - MV = 0 \quad ①$$



以滑槽为参照系，小物从顶端滑到底端在水平方向所走距离：

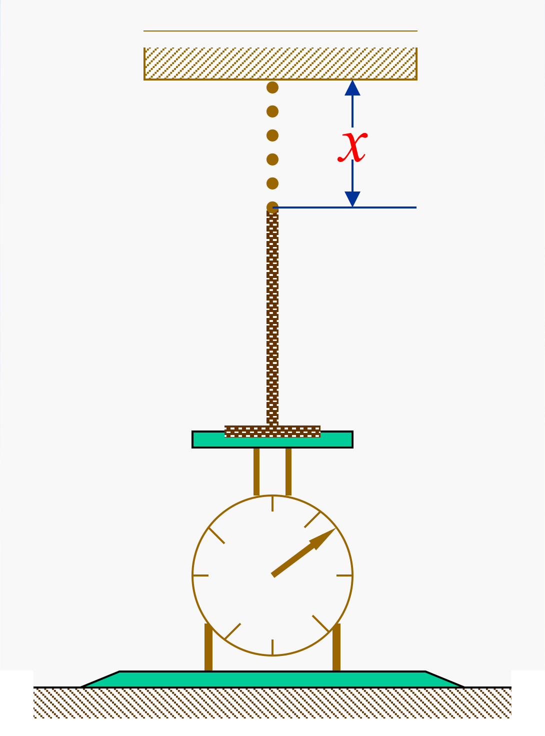
$$\int_0^t v'\sin\theta dt = R \quad ②$$

在这段时间内滑槽移动距离：$l = \int_0^t V dt$ ③

对①积分可得：
$$l=\frac{mR}{M+m}$$

例题10

一根质量为 M，长度为 L的链条，被竖直地悬挂起来，其最低端刚好与秤盘接触。现将链条释放并让它落到秤盘上，如图所示。求链条的下落长度为 x 时，秤的读数是多少？



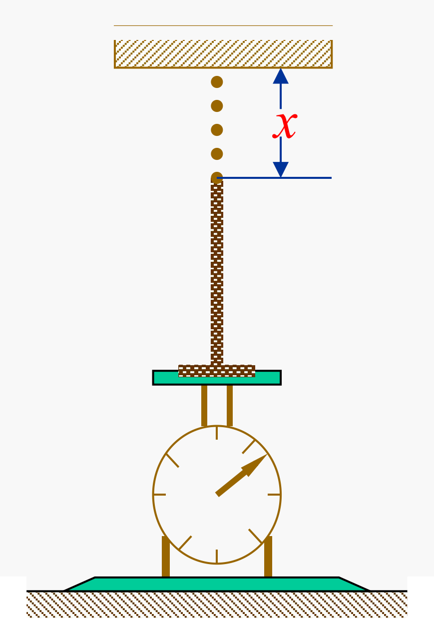
解：以落下秤盘的链条为研究对象。它受到三个力的作用：

重力：$\dfrac{M}{L}gx$　　　秤盘支持力：N

下落链条的冲力：T(落下的dx长度的线条的冲力)

取竖直向下为正，由平衡条件得：

$$\frac{M}{L}xg+T-N=0,\ N=\frac{M}{L}xg+T$$



设在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的时间间隔内，链条下落 dx，重力为 $\dfrac{M}{L}g\mathrm{d}x$，已下落链条对它的反作用力为 T'。由动量定律得：

$$\left(\frac{M}{L}gdx - T'\right)dt = 0 - \frac{M}{L}dx\upsilon,\ T' = \frac{M}{L}\upsilon^2,\ T = \frac{M}{L}\upsilon^2$$

故： $N = \frac{M}{L}xg + \frac{M}{L}\upsilon^2$ 考虑到 $\upsilon^2 = 2gx$

故： $N = \frac{M}{L}xg + \frac{M}{L}2gx = \frac{3gxM}{L}$

故秤盘读数 $\frac{3gxM}{L}$

§2.5　质心运动定律

一、质心

质点系的质量中心称为**质心**。质点系的总质量为：

$$m = \sum m_i$$

质心的位置是质点系内各质点的带权（质量）平均位置，质心的位矢为：

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{m}$$

在直角坐标系中：

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

对质量连续分布的情况：

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\int \boldsymbol{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \boldsymbol{r} dm}{m}$$

直角坐标系中质心位置：

$$x_C = \frac{\int xdm}{m}$$ $$y_C = \frac{\int ydm}{m}$$ $$z_C = \frac{\int zdm}{m}$$

质心相对于各质点的位置与坐标选择无关，对于对称物体，质心为几何中心。将坐标原点取在质心，则：$x_C = y_C = z_C = 0$。对两质点系统：

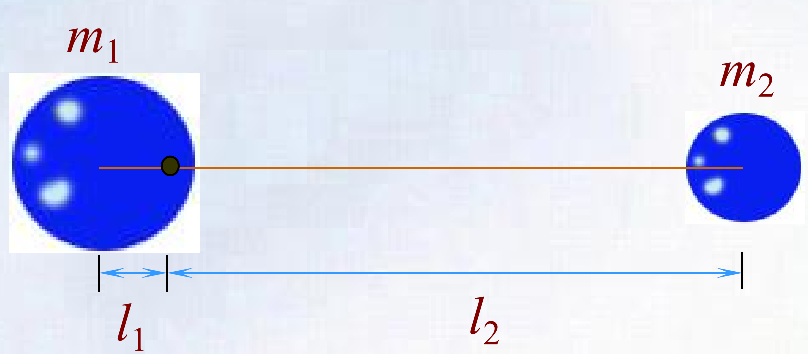
$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m} = 0$$ 得：$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

令：$l_i = |x_i| \ (i = 1,2)$ 为两质点到质心的距离，则

$$l_1=(\frac{m_2}{m})l \qquad l_2=(\frac{m_1}{m})l \qquad l=l_1+l_2$$

例题

地月系统的质心：地球的质量是月球的81倍，地月距离是地球半径的60倍，所以C点实际在地球体内离地心3/4个地球半径处。



$$l_1=\left(m_2 \big/ 82m_2\right)\cdot 60\cdot R_{地}\approx\frac{3}{4}R_{地}$$

例题12

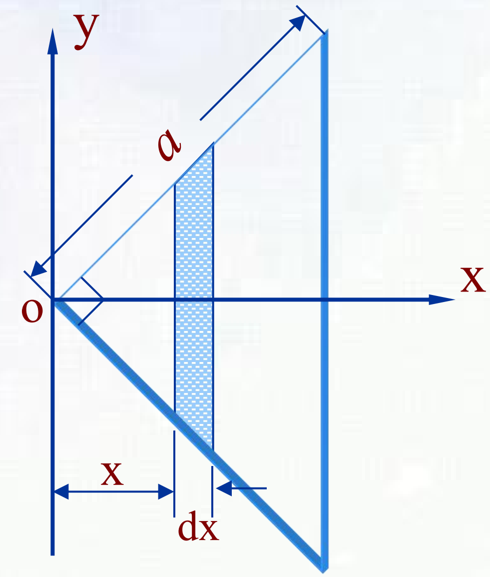
求腰长为 a 的等腰直角三角形均匀薄板的质心位置。

解：离原点x处，取宽度为dx的面元，由于面元高度为2y，所以面元面积为：2ydx=2xdx，设面密度为σ，则此面元的质量为：（y=x）

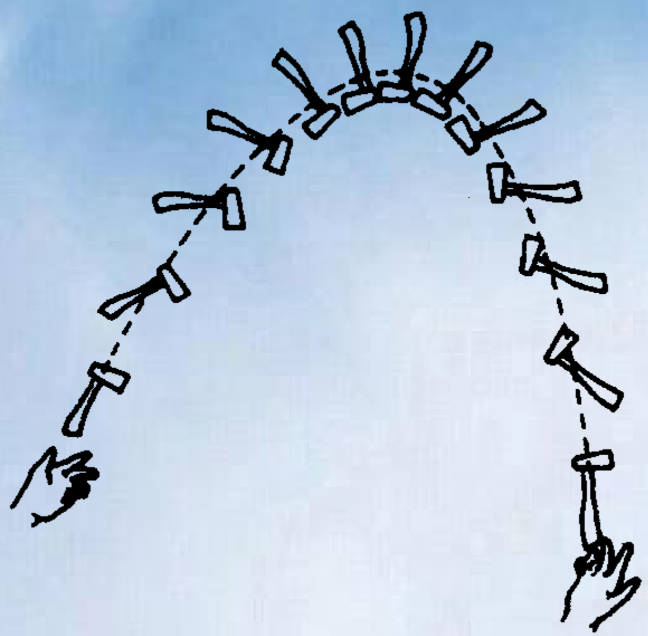
$$dm = 2\sigma x dx$$

此三角形质心坐标x_C为：

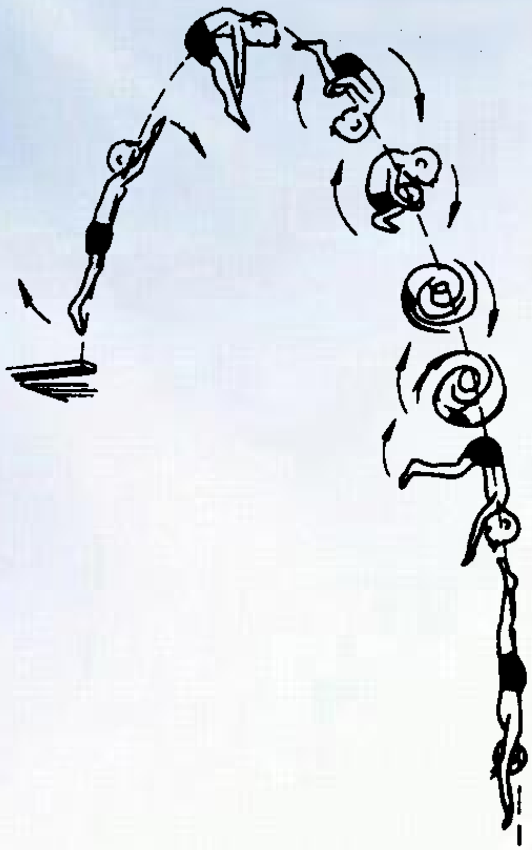
$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x^2 dx}{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x dx} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$



二、质心运动定律



两人互抛斧头



跳水

对质心位矢$\boldsymbol{r}_C$求导，得：

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}=\frac{\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}}{m}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{m}$$

上式可得： $m\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{P}$

对上式求导，根据质点系牛顿第二定律：

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=m\boldsymbol{a}_C}$$

故质心运动规律与质点完全一样。

上式为质心运动定律：**质点系所受的合外力等于质点系总质量与质心加速度的乘积。**

动量守恒定律的另一种表达形式：**质点系所受的合外力为零，则质心速度保持不变。**

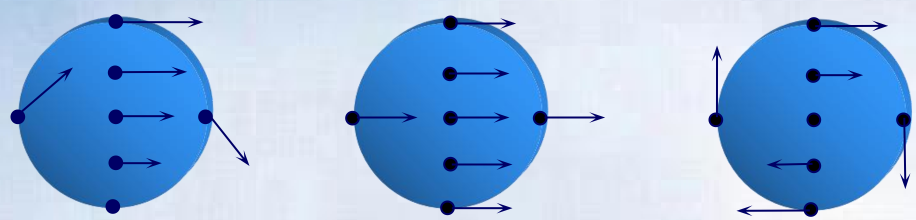
三、质心参照系

原点选在质心上的平动参照系，称为**质心参照系**(与惯性系只有相对平动)。质心参照系的特点：

①在质心参照系中质心速度恒为零：$\boldsymbol{v}'_C = 0$

②质心参照系的总动量恒为零：$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}'_C = 0$

一质点系相对地面参照系的运动可分解为随质心的整体运动和各质点相对质心的运动。如车轮的滚动，可分解为随质心运动和相对质心运动。



（a）车轮的滚动 （b）随质心的运动 （c）相对质心的运动

例题13

应用质心概念和质心运动定律求解小物沿四分之一圆弧下滑问题。

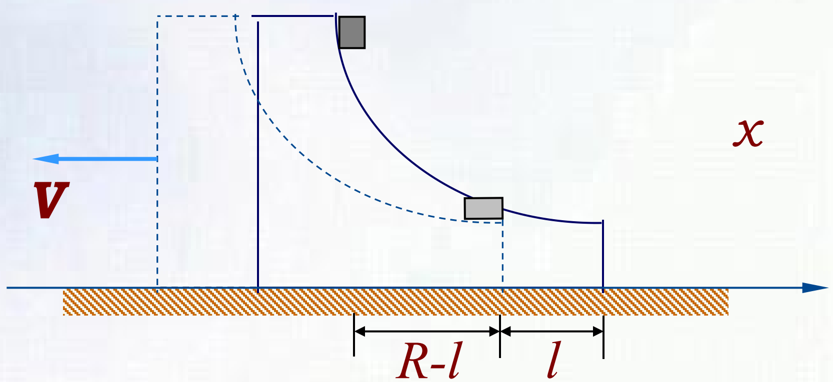
解： 系统在水平方向受力（$F_x=0$），故质心水平位矢分量 x_C 始终不变。设开始下滑时，两物坐标为：x_{10}、x_{20}。小物滑到槽底时两物坐标为：x_1、x_2

则：
$$x_C = \frac{mx_{10} + Mx_{20}}{m+M} = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M} \quad ①$$

设槽向左移动的距离为l：

$$l = x_{20} - x_2 \quad ②$$

小物向右移的水平距离为：



$$x_1 - x_{10} = R - l \quad ③$$

联立①②③式，可解得： $l = \dfrac{mR}{M + m}$

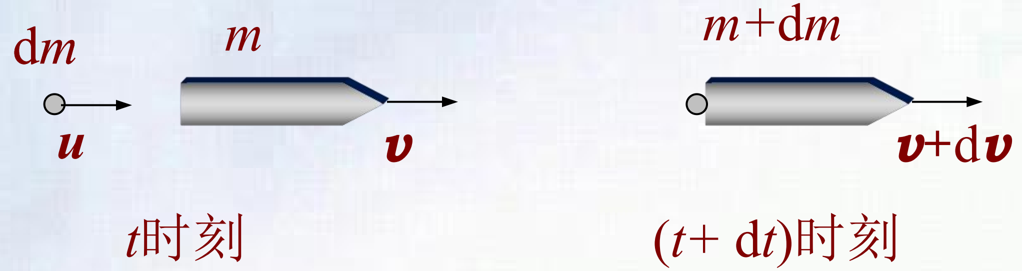
问：质心竖直位矢分量 y_C 是否保持不变？

$$y_C = \frac{my_1 + My_2}{m + M}$$

§2.6 密舍尔斯基方程 火箭运动

一、密舍尔斯基方程

研究主体质量及其流动问题：设t时刻主体质量m、速度为$\boldsymbol{v}$，dt时间内有质量dm、速度为$\boldsymbol{u}$的流动物加到主体上。在（t+dt）时刻，主体质量变为（m+dm），速度为（$\boldsymbol{v}$+d$\boldsymbol{v}$）。



则：t 时刻系统动量为$(m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\mathrm{d}m)$，$(t + \mathrm{d}t)$ 时刻系统动量为 $(m + \mathrm{d}m)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v})$

若主体受外力$\boldsymbol{F}$，流动物受外力$\boldsymbol{f}$，则由质点系牛顿第二定律：

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{(m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) - (m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}dm)}{dt}$$

一般情况 $f \ll F$，在上式中略去二阶小量，得：

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{dt}$$

（$\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$）是流动物相对主体的速度，用$\boldsymbol{v}'$表示：

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt}$$

上式称**主体运动方程**，即**密舍尔斯基方程**。

方程中各量的意义：

m为 t 时刻主体质量；$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 为 t 时刻主体加速度；$\boldsymbol{v}'$ 表示流动物即将加到主体上时相对主体的速度；$\frac{dm}{dt}$ 为主体质量随时间的变化率；

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt}$$

$\boldsymbol{F}$为t时刻主体所受的合外力。

对于主体质量不断流出的情况，$\frac{dm}{dt}<0$。

与牛顿定律比较，$\boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt}$ 式的物理意义？

以dm为研究对象，在dt时间内它的动量增加为：

$$d\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})dm-\boldsymbol{u}dm=(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})dm-(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})dm=-\boldsymbol{v}'dm$$

按牛顿第二定律，主体对流动物的作用力：

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=-\boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt}$$

这个力的反作用力$\boldsymbol{v}'\dfrac{dm}{dt}$就是d$m$对主体的作用力。

对火箭运动，$\dfrac{dm}{dt}<0$， 而$\boldsymbol{v}'$方向与火箭前进方向相反，$\boldsymbol{v}'\dfrac{dm}{dt}$与火箭前进方向相同。

二、火箭运动

1. 在重力场中竖直发射

设初始质量为m_0， 喷气速率为 $\boldsymbol{v}'$（相对火箭）， 则：

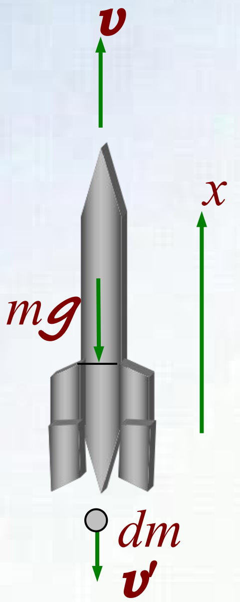
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt}$$

以竖直方向为 x 轴正向，分量式为：

$$m\frac{dv}{dt}=(-mg)+(-v')\frac{dm}{dt}$$

分离变量，积分(t=0, m=m_0 , v=v_0)：

$$v=v_0+v'\ln\frac{m_0}{m}-gt$$



2. 在不受外力情况下发射

反冲力远大于重力时，重力忽略：

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon' \ln \frac{m_0}{m} \quad ①$$

飞行距离($\upsilon_0 = 0$)： $$L = \int_0^t \upsilon dt = \int_0^t \upsilon' \ln \frac{m_0}{m} dt \quad ②$$

需要知道$m(t)$的关系，才能求出飞行速度和距离。

一般有两种函数关系：

线性关系： $m = m_0(1-\alpha t)$ 代入①②式可得：

$$\boxed{\upsilon = -\upsilon' \ln(1-\alpha t)}$$

$$L=\frac{v'}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t]$$

指数关系： $m=m_0e^{-\alpha t}$ 代入①②式可得：

$$v=\alpha v't \qquad L=\frac{\alpha v'}{2}t^2$$

由①式可知，单级火箭的末速度为：$v=v'\ln m_0/m_e$，其中m_e为燃料烧完后的火箭质量。若 $v'=2500\,\mathrm{m/s}$，$m_0/m_e\approx 6$，最终速度$v_e\approx 4500\mathrm{m/s}$，不到第一宇宙速度(使物体绕地球作圆周运动的速度，7900m/s)，因而需用多级火箭。

思考 1：提高火箭速度的两大途径是什么？

第一加大喷气速度v'，第二加大质量比。 $v = v' \ln \dfrac{m_0}{m_e}$

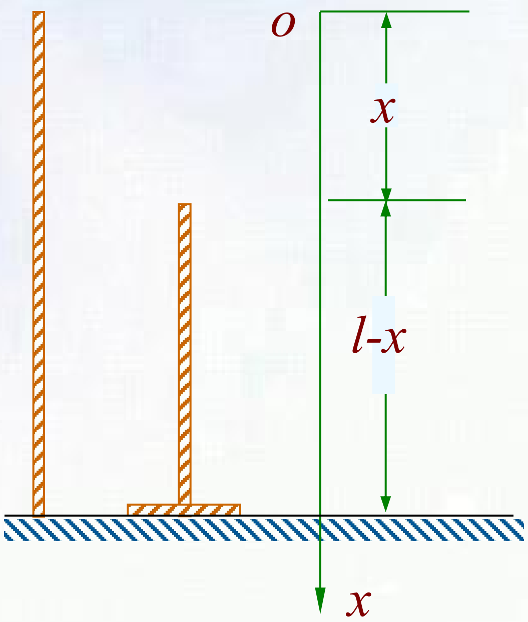
思考 2：多级火箭的工作原理如何？

多级火箭在飞行过程中，当某级火箭燃料燃尽时，这一级火箭自动脱落，下一级火箭开始工作。设有n级火箭，则可求出最终速度。

例题14*

长 l 的柔软均匀绳子竖直下垂，下端刚好接触水平地面，单位长绳子的质量为 λ。若让它由静止开始自由下落，求已落下x长一段时，地面所受的压力。

解： 取已落到地面的一段绳子为主体。已落下x时, $m=\lambda x$, $\upsilon=0$, $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t=0$。所受外力：$mg$重力、$N$ 地面支持力。流动物 dm 相对主体的速度大小 $\upsilon' = \sqrt{2gx}$



则：

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\upsilon}'\frac{dm}{dt}$$

$$0=(mg-N)+\upsilon'(\lambda\frac{dx}{dt})=mg-N+\lambda\upsilon'^2$$

即： $N=(\lambda x)g+\lambda(2gx)=3\lambda gx$

§2.7 功 质点动能定理

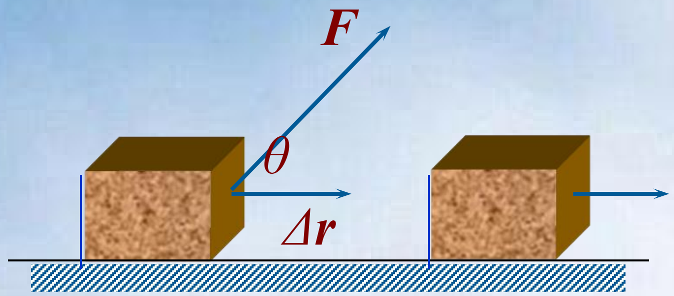
一、功

已知力与空间的位置关系***F***(***r***)，**求力的空间积累—功。**

设恒力***F***作用质点沿直线移动$\Delta \boldsymbol{r}$，定义力与位移的标积 A 表示功：

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F \left| \Delta \boldsymbol{r} \right| \cos \theta = F_{\tau} \left| \Delta \boldsymbol{r} \right|$$

恒力做功



功是标量，当 $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $A > 0$, $\boldsymbol{F}$ 做正功，

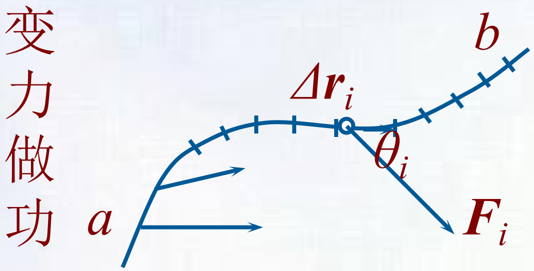
$\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi$, $A < 0$, $\boldsymbol{F}$ 做负功，质点反抗力$\boldsymbol{F}$做功。

$\theta = \pi / 2$, $A = 0$, $\boldsymbol{F}$ 不做功。

力$\boldsymbol{F}$只有切向力做功，法向力不做功。功的单位为**焦耳**，1J=1N·m。

对于变力$\boldsymbol{F}$做功的情况，采用以直代曲的方法，如图ab段做功为：

$$A \approx \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i$$



若把ab分为无限多个小段，任一小段上的元功：

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F\left|d\boldsymbol{r}\right|\cos\theta = F\cos\theta dl = F_\tau dl$$

质点沿路径从a移动到b过程中，力$\boldsymbol{F}$对质点做功的准确值：

$$A=\int_{(a)}^{(b)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{(a)}^{(b)}F\cos\theta dl$$

选用直角坐标系：

$$A=\int_{(a)}^{(b)}(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k})\cdot(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k})$$

$$=\int_{(a)}^{(b)}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

注意：功是过程量，与路径有关。功是标量，但有正负。合力的功为各分力功的代数和。

例题15

质量为$2kg$的质点在力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ (SI)的作用下，从静止出发，沿 x 轴正向作直线运动。求前3秒内该力所作的功。

解：

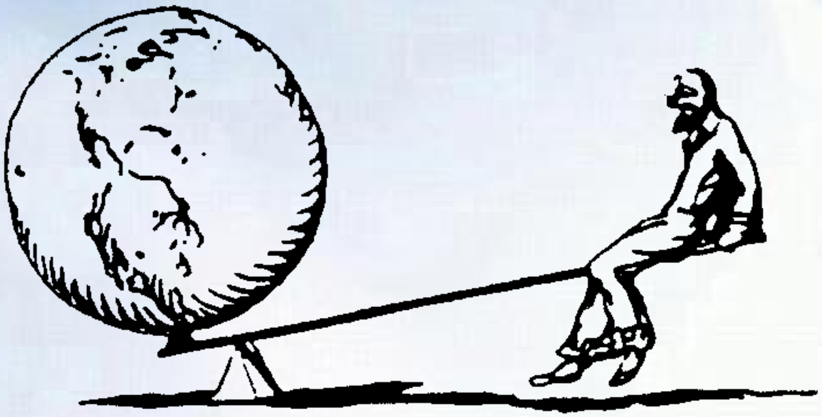
$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int 12t\upsilon dt$$

$$\upsilon=\upsilon_0+\int_0^t a dt=0+\int_0^t \frac{F}{m}dt=\int_0^t \frac{12t}{2}dt=3t^2$$

$$\therefore A=\int_0^3 12t\cdot 3t^2 dt=\int_0^3 36t^3 dt=9t^4\Big|_0^3=729(J)$$

功率：做功快慢的量度：

若阿基米德要举起地球，取杠杆短臂1/3m，则长臂为3×10^{22}m, 为银河系的40倍。为节省空间，建议阿基米德用螺杠千斤顶。要想举起地球1m，设摇柄长一尺，每分中转12转，每天干24小时，需要4×10^{13}年，才能作出同等的功来。可见不是阿基米德举不动地球，而是做功效率太低。



给我一个支点，我可以举起地球——阿基米德

单位时间作的功称为功率：

$$P = \frac{dA}{dt}$$

由于 $dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ ， 则：

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

功率的单位称**瓦特**， 1W=1J/s

二、质点动能定理

合力的时间积累改变质点的动量$m\boldsymbol{v}$，而合力的空间积累改变质点的 $\frac{1}{2}mv^2$，杨氏称它为动能：

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

下面证明功与质点的动能之间的关系：

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_\tau dl$$

按牛顿第二定律： $F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$

故：
$$dA = m\frac{d\upsilon}{dt}dl = m\upsilon d\upsilon$$

以υ_0和υ分别表示质点在a点和b点的速率：

$$\int_{(a)}^{(b)} dA = \int_{(\upsilon_0)}^{(\upsilon)} m\upsilon d\upsilon \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2}$$

或：
$$A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

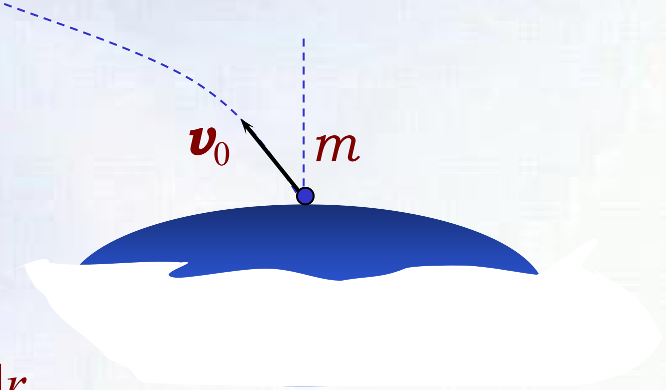
上式称为**质点动能定理**：**合力对质点所作的功等于质点动能的增量。**

例题16 逃逸速度问题（第二宇宙速度）

摆脱地球引力束缚，飞离地球的速度叫第二宇宙速度

解：忽略空气阻力，

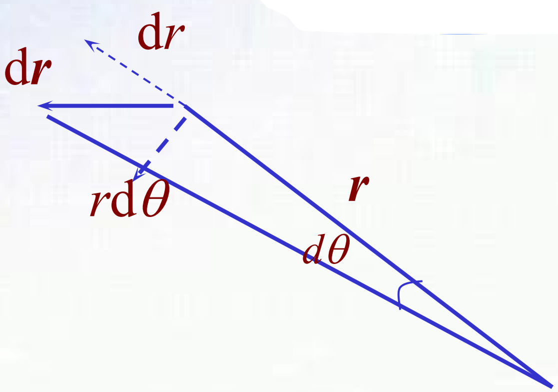
$$\boldsymbol{F} = -\frac{GM_e m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -mg\frac{R_e^2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$



式中： $g = GM_e / R_e^2$

质点任意轨道元位移：

$$d\boldsymbol{r} = dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-mg\frac{R_e^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot(dr\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})=-mg\frac{R_e^2}{r^2}dr$$

按动能定律，有：

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=-mgR_e^2\int_{R_e}^{r}\frac{dr}{r^2}=mgR_e^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_e})$$

在 $r=\infty$ 时，取υ=0，可得逃逸速度υ_0：

$$\upsilon_0=\sqrt{2gR_e}=1.1\times10^4\,\mathrm{m/s}$$

逃逸速度与发射方向无关。但若考虑地球自转，物体应向东方水平方向发射，因为这时地球表面的转动线速度加大了发射速度。

三、高速运动物体的动能

静止物体的能量 $E_0 = m_0 c^2$，以速率υ运动物体的能量：

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

物体的动能：

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right)$$

当 $\upsilon \ll c$ 时：

$$\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{-1/2} \approx 1 + \upsilon^2/2c^2$$

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2$$

动量与动能的关系

物理量	动量 (momentum)	动能 (kinetic energy)
表达式	$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$	$E_K=1/2mv^2$
单位	$kg\cdot m\cdot s^{-1}$ (千克·米·秒$^{-1}$)	J(焦耳) (或N·m，牛顿·米)
性质	矢量	标量
变化量	$\triangle \boldsymbol{P}$由力的冲量决定	$\triangle E_k$由力的功决定
	对于给定两个时刻t_0和t: $\triangle \boldsymbol{P}$与惯性系的选择无关	对于给定两个时刻t_0和t: $\triangle E_k$随惯性系的不同而不同
关系	$E_k=P^2/(2m)$	

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_0'+\boldsymbol{u}$$

$$\Delta \boldsymbol{P}=m\Delta\boldsymbol{v}=m\Delta\boldsymbol{v}'=\Delta\boldsymbol{P}'$$

$$\Delta E_k=\boldsymbol{P}^2/2m-\boldsymbol{P}_0^2/2m$$
$$=(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\cdot(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_0)/2m$$