

# 第十周

大学物理教案

## 第10章 机械波

§ 10.3, § 10.4, § 10.5(一般了解)

## 第11章 气体动理论

§ 11.1, § 11.2, § 11.3, § 11.4

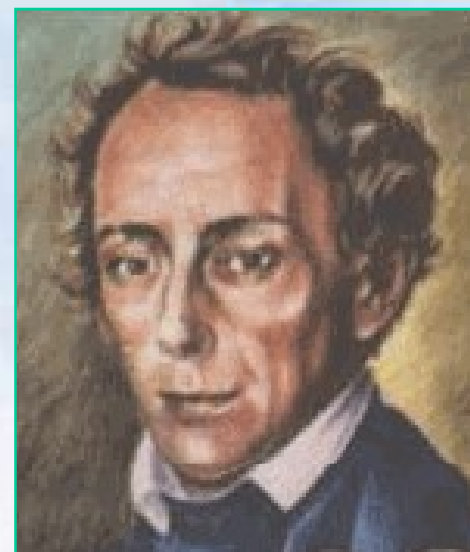
作业: P157 10-21, 10-22

P177 11-3, 11-8, 11-9, 11-10

## § 6.9 多普勒效应 激波

### 一、多普勒效应

当鸣笛的火车开向站台，站台上的观察者听到的笛声变尖，即频率升高；相反，当火车离开站台，听到的笛声频率降低。



J.C.Doppler

波源与观察者之间有相对运动时，观察者接受到的波的频率 $\nu_R$ 与波源的振动频率 $\nu_s$ 不同，这种现象称为多普勒效应。机械波的多普勒效应称为经典多普勒效应。

利用声波的多普勒效应可以测定流体的流速、潜艇的速度，还可以用来监测车速。在医学上，利用超声波的多普勒效应对心脏跳动情况进行诊断，故可做成超声心动、多普勒血流仪等。

设波源和观察者的运动在两者的连线上，设波源运动速度  $v_s$ ，观察者运动速度  $v_R$ 。

感觉频率，即观察者接收到的波的频率  $\nu_R$ ：单位时间内接收到的完全波的数目(波速/波长)。

以下分四种情况讨论：

## 1. 波源和观察者都不运动

$$v_S=0, v_R=0 :$$

$$v_R = \frac{u}{\lambda} = v_S$$

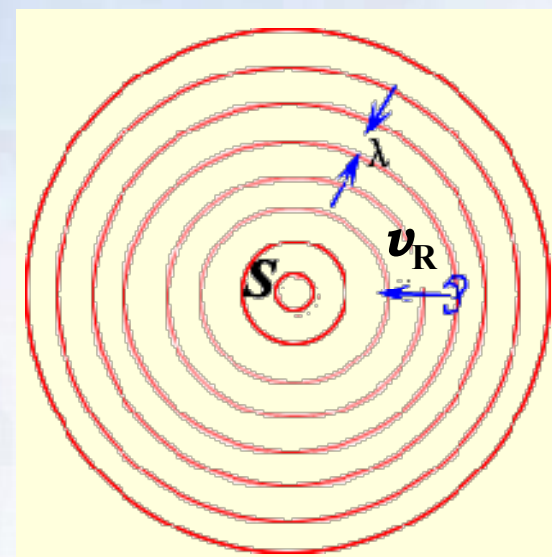
2. 相对于媒质，波源不动，观察者以速度  $v_R$  向着或远离波源运动（ $v_S=0, v_R \neq 0$ ）

观察者向波源运动（如图所示），单位时间内所接收到波的数目：

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u T_S} = \left( \frac{u + v_R}{u} \right) \nu_S$$

观察者向着波源运动时，接收到的频率大于波源的频率；当观察者远离静止波源运动时，接收到的频率小于波源的频率：

$$\nu_R = \left( \frac{u - v_R}{u} \right) \nu_S$$



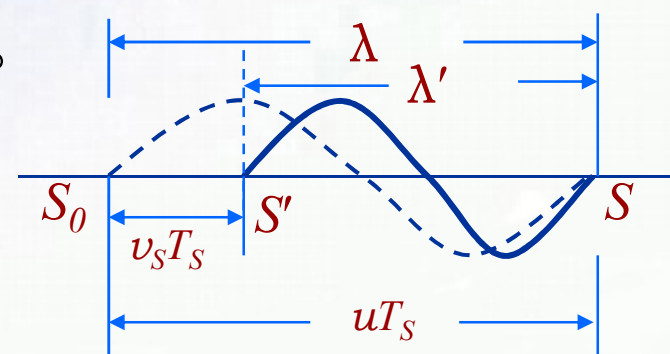
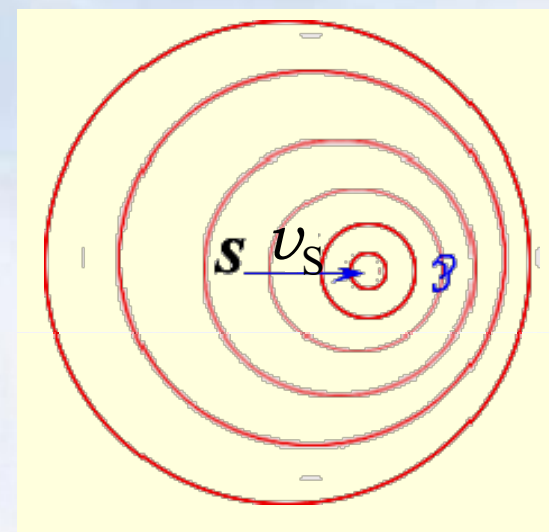
当观察者远离静止波源运动，且  $v_R = u$  时，观察者和波一起运动，  $\nu_R = 0$ 。



### 3. 相对于媒质，观察者不动，波源以速度 $v_s$ 向着观察者运动( $v_s \neq 0$ , $v_R = 0$ )

波源运动时，波的频率不再等于波源的频率。当波源 $S_0$ 发出的波其波头到达 $S$ 处时，波源已经向前运动了 $S_0S'$ 。波的尾端是在 $S'$ 发出的，相当于波长被压缩了。

波源静止时，波长  $\lambda = uT_s$



而现在媒质中的波长为：

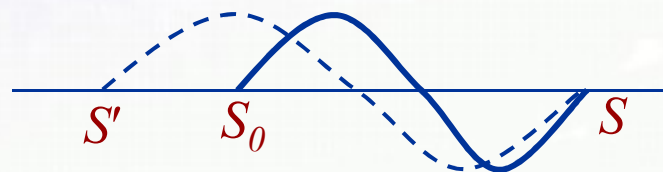
$$\lambda' = \lambda - v_s T_s = (u - v_s) T_s$$

现在波的频率（即观察者接收的频率）为：

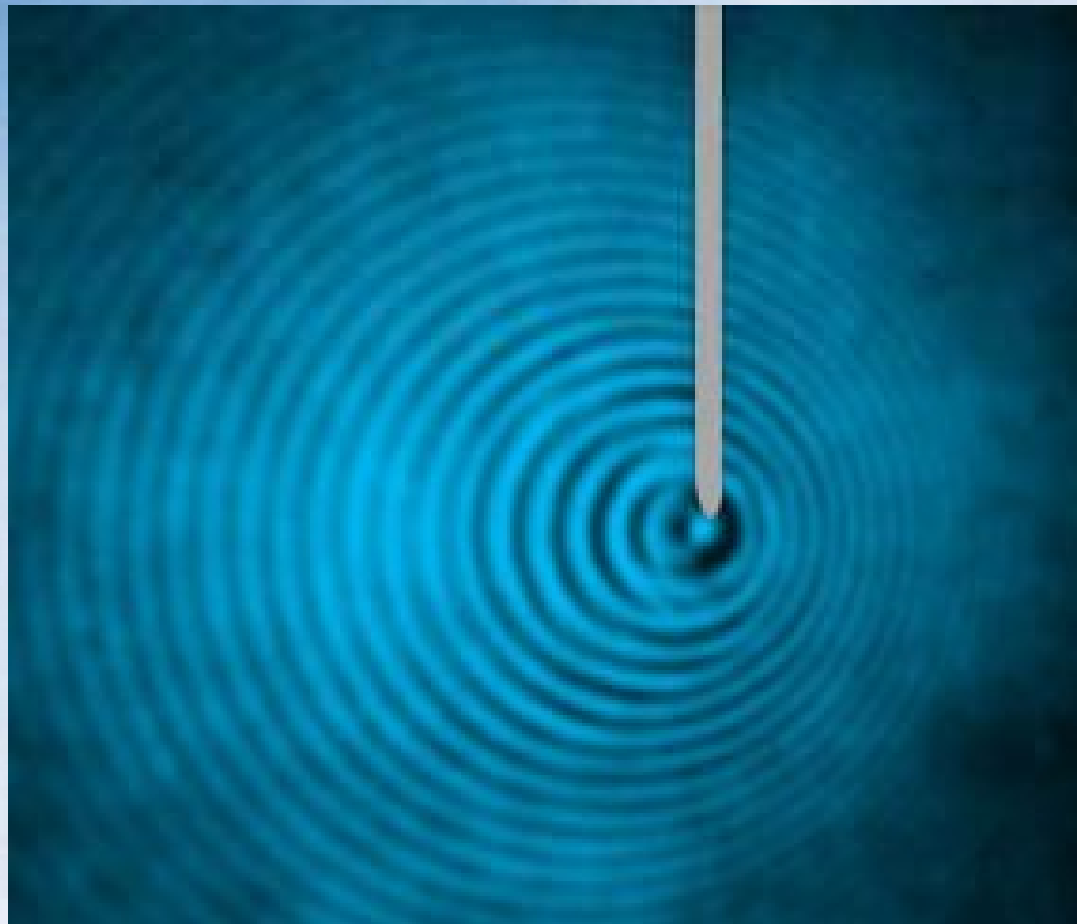
$$\nu_R = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{(u - v_s) T_s} = \frac{u}{u - v_s} \nu_s$$

因此波源向着观察者运动时，观察者接收到的频率大于波源的频率；当波源远离观察者运动时，观察者接收到的频率小于波源的频率：

$$\nu_R = \frac{u}{u + v_s} \nu_s$$



下图是振动源向右运动时产生的水波多普勒效应。





#### 4. 相对于媒质，观察者和波源同时运动 ( $v_S \neq 0, v_R \neq 0$ )

综合上述两种情况，可得当波源和观察者同时运动时，观察者接收到的频率为：

$$\nu_R = \frac{u \pm v_R}{\lambda \mp v_S T_S} = \frac{u \pm v_R}{u \mp v_S} \nu_S$$

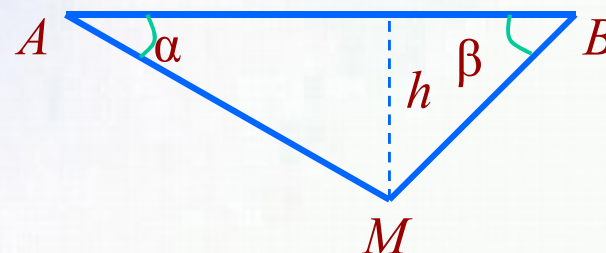
以上讨论的是波源和观察者的运动在两者的连线上。如果观察者和波源的运动并不在两者的连线上，则将速度在连线上投影后再代入公式。

## 例题6:

飞机在上空以速度  $v=200\text{m/s}$  作水平飞行，发出频率  $\nu_0=2000\text{Hz}$  的声波。静止在地面上的观察者测得飞机发出的声波频率：当飞机越过观察者上空时，观察者在  $4\text{s}$  内测得的频率由  $\nu_1=2400\text{Hz}$  降为  $1600\text{Hz}$ 。已知声波在空气中的速度  $V=330\text{m/s}$ 。试求：飞机的飞行高度  $h$ 。

解：如图，设飞机在  $t=4\text{s}$  内从 A 点水平飞至 B，飞行高度为  $h$ ，声源在 AM 方向的分速度为：

$$u_{AM} = v \cos \alpha$$



声源在BM方向的分速度为：

$$u_{BM} = v \cos \beta$$

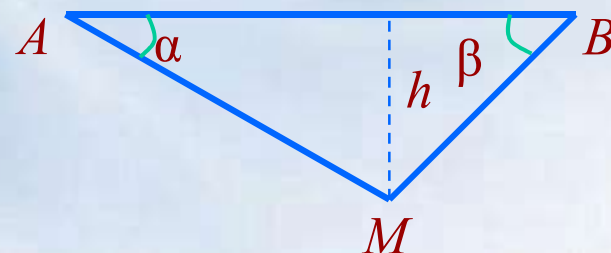
由多普勒效应公式：

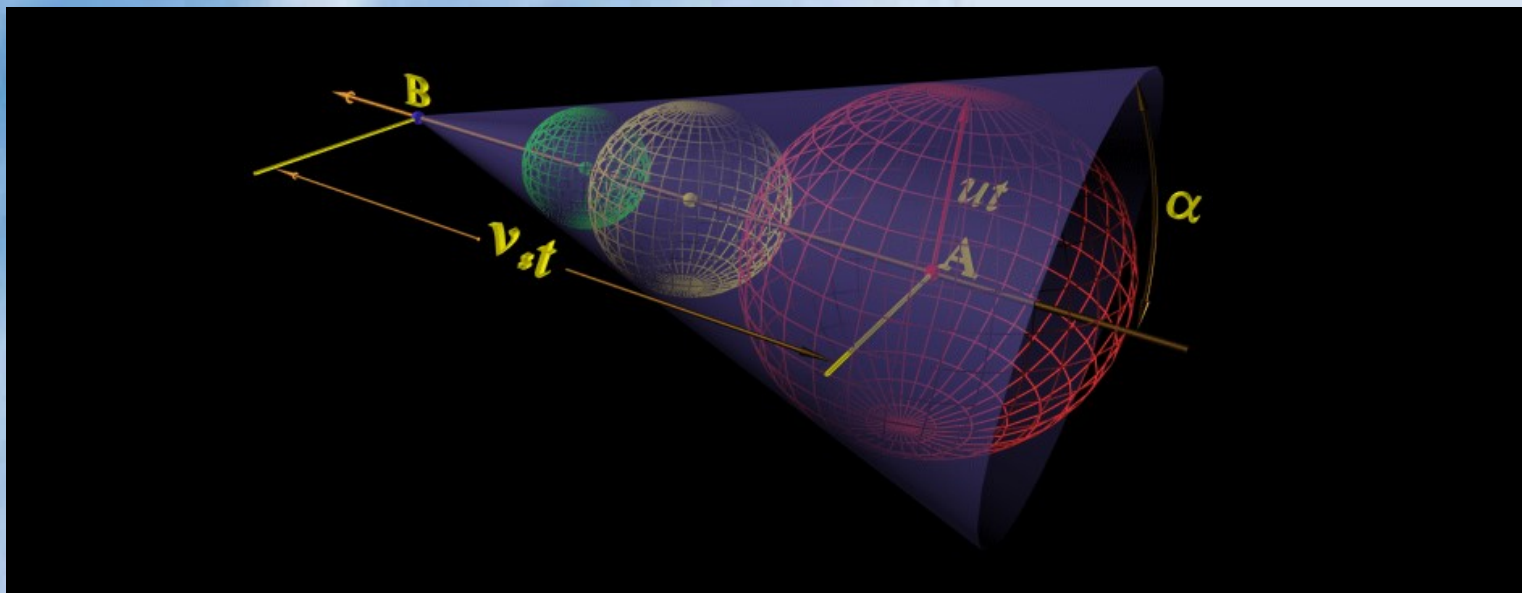
$$\nu_1 = \frac{V}{V - u_{AM}} \nu_0 = 2400 \text{ Hz} \Rightarrow \cos \alpha = 0.275$$

$$\nu'_1 = \frac{V}{V + u_{BM}} \nu_0 = 1600 \text{ Hz} \Rightarrow \cos \beta = 0.42$$

由几何关系得：

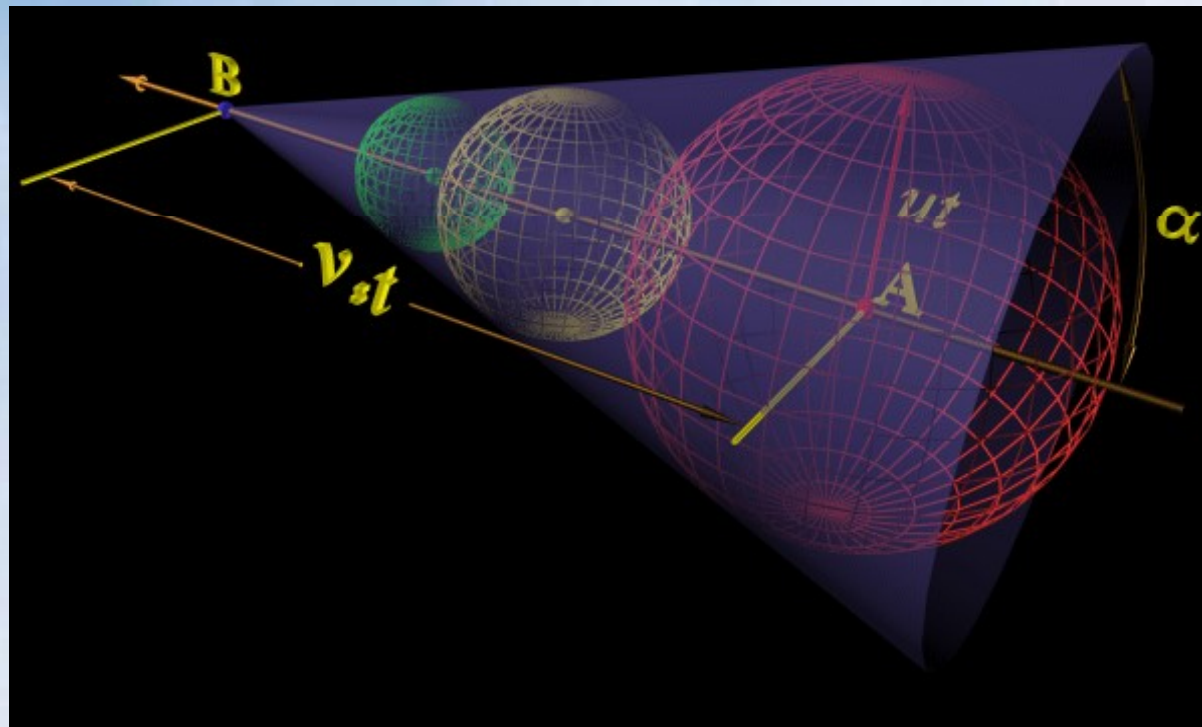
$$AB = vt = h \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \Rightarrow h = 1.08 \times 10^3 \text{ m}$$





当波源速度  $v_s$  大于波速  $u$  的时候，波源位于波前的前方。设在时间  $t$  内点波源由  $A$  运动到  $B$ ， $AB = v_s t$ ，而在同一时间内， $A$  处波源发出的波才传播了  $ut$ 。这时波源在不同时刻发射的波面相交，它们的包络面是以波源为顶点的一个圆锥面，称为马赫锥。其半顶角  $\alpha$  满足关系：

$$\sin \alpha = \frac{ut}{v_s t} = \frac{u}{v_s}$$





$v_s/u$ 是一个很重要的参数，称为马赫数。奥地利物理学家马赫首先研究了冲击波。下图是飞机以超音速飞行时产生的冲击波。



随着时间的推移，各波前不断扩展，锥面也不断扩展。对于空气中的冲击波的情况，马赫锥内外的空气密度、压强、温度存在突变。



# 热学

**热学**—研究热运动的规律及其对物质宏观性质的影响，以及与物质其他运动形态之间的转化规律。

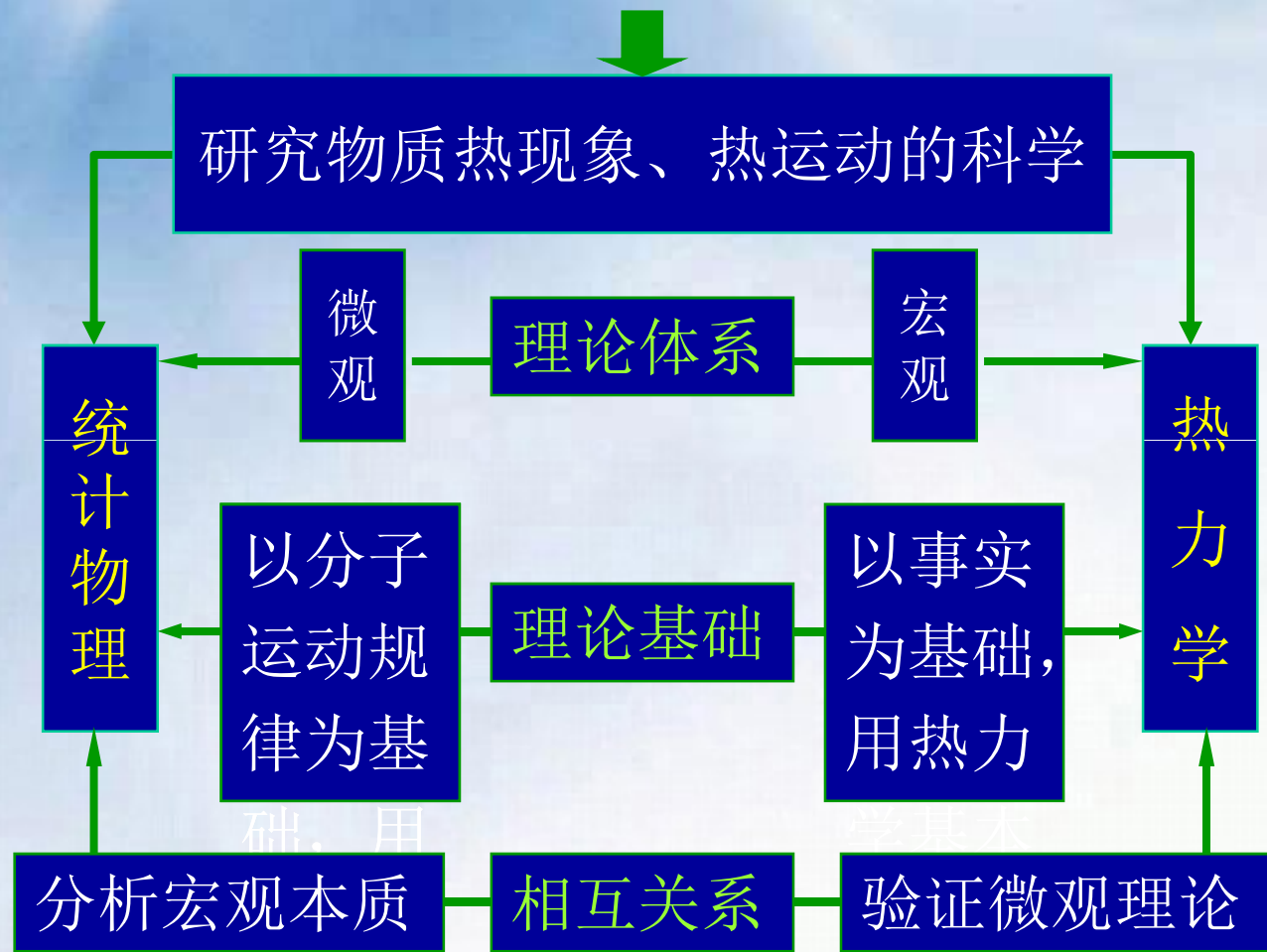
**热运动**—组成宏观物体的大量微观粒子的一种永不停息的无规则运动。

对热现象的研究方法不同产生两门分支学科：**热力学和统计物理学**。

热力学是研究物质热运动的宏观理论。从基本实验定律出发，通过逻辑推理和数学演绎，找出物质各种宏观性质的关系，得出宏观过程进行的方向及过程的性质等方面的结论。

统计物理学或统计力学的研究方法：从物质的微观结构出发，按每个热力学系统中的粒子所遵循的力学规律，用统计方法求出系统的宏观的热学规律，揭示热现象的微观本质。

# 热学



# 第十一章 气体分子动理论

气体分子动理论是统计物理学最基本、最简单的内容，它是从物质的分子结构概念出发，对气体分子运动及相互作用提出一定的假设模型，再根据每个气体分子所遵从的力学规律，利用统计方法找出热运动的宏观量（如压强、温度等）与分子运动微观量的统计平均值之间的关系。

## § 11.1 热力学系统 平衡态 状态参量

### 一、热力学系统

热力学系统可分为三类：

- (1) 孤立系统：与外界无物质、能量交换。
- (2) 封闭系统：无物质交换，但有能量交换。
- (3) 开放系统：有物质交换，又有能量交换。

本章主要讨论封闭系统。

## 二、平衡态

当系统处在热平衡（温度均衡），力学平衡（压强均衡），化学平衡（化学成分均衡），

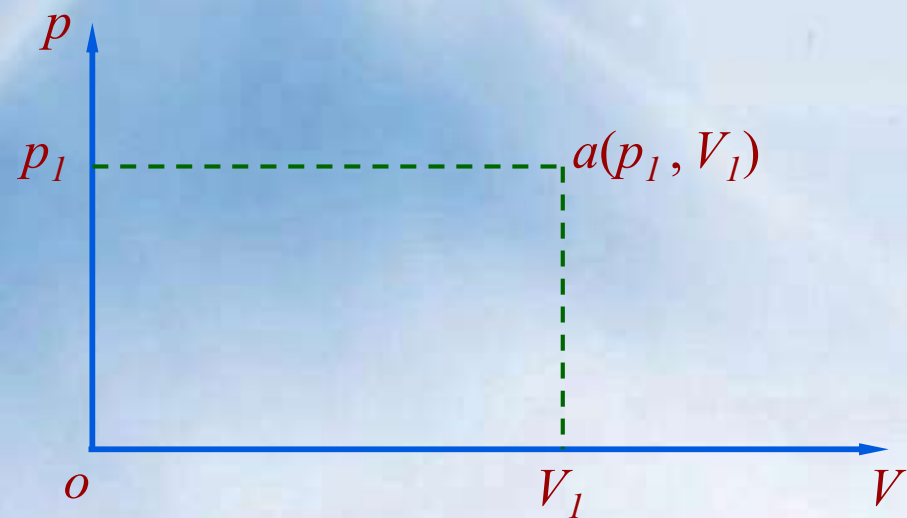


这种状态称为平衡态。平衡态指宏观状态参量的平衡，而大量分子仍做无规则运动。

热力学过程：系统与外界交换能量，旧平衡破坏到新平衡建立的过程。

### 三、状态参量

描写系统处于平衡态时的独立的宏观量，称为系统的状态参量。对于气体处于平衡态时， $p$ 、 $V$ 、 $T$ 中的其中任意两个可作为状态参量。以独立的状态参量为坐标所作的图称状态图。



## § 11.2 气体分子动理论的基本假设

### 一、分子及其运动假设

(1) 气体由大量分子组成。

(2) 大量分子做**无规则**运动叫做分子的热运动。分子热运动的基本特征是分子的**永恒**运动和**频繁**的相互碰撞。

分子热运动具有混乱性（无序性）及统计性。

分子做无规则运动的具体表现：

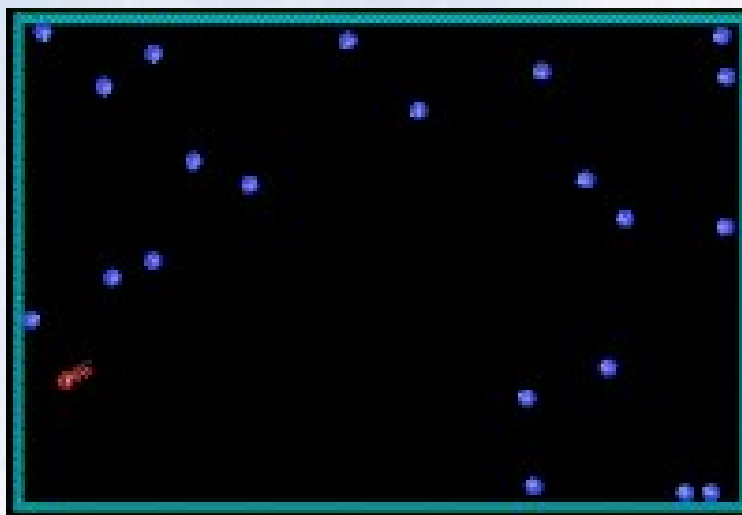
### 1. 扩散：

气体的扩散：两种气体在连通容器中的扩散。

液体：墨水滴的扩散。

固体：半导体掺杂。

2. 布朗（R.Brown）在1927年，用显微镜观察悬浮在水中的植物花粉，发现花粉作纷乱的无定向运动。这就是布朗运动。布朗运动是由杂乱的流体分子碰撞植物颗粒引起的，它虽不是流体分子本身的热运动，却反映了流体分子热运动的情况。



## 二、统计假设:

(1) 气体处于平衡态时，分子的空间分布均匀；  
即气体分子的数密度  $n=N/V$  处处相等。

(2) 气体处于平衡态时，分子沿各方向运动的概率相等。

由此假设可得：
$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

上式为统计平均值：

$$\overline{v_x^2} = \sum v_{ix}^2 / N \quad \overline{v_y^2} = \sum v_{iy}^2 / N \quad \overline{v_z^2} = \sum v_{iz}^2 / N$$

统计假设说明，虽然个别分子的运动是无序的，

具有偶然性，但是大量分子的整体表现却是有规律的。统计规律：乱中有序，偶然中有必然，不同于力学规律的另一种规律。

### 三、理想气体的微观假设

1. 分子本身的大小比起分子之间的距离小得多，分子可视为半径非常小的刚性球。
2. 除碰撞的一瞬间外，分子间的相互作用力可忽略不计。分子在两次碰撞间作自由的匀速直线运动。
3. 分子之间及分子与器壁间的碰撞是完全弹性碰撞，能量守恒。

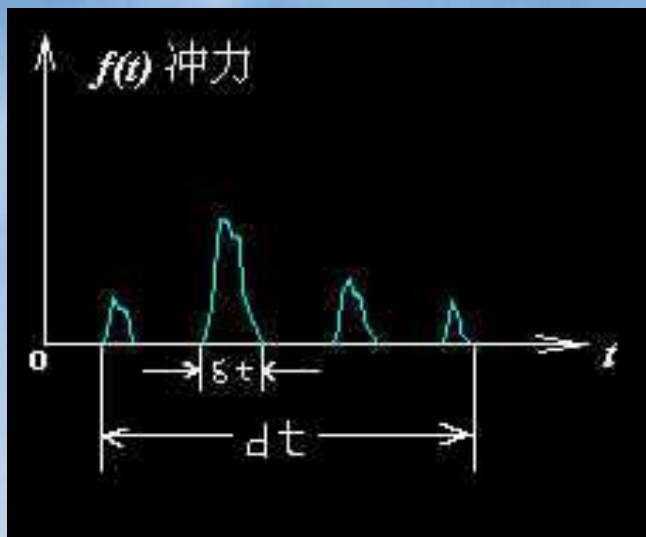


理想气体是突出气体共性，忽略次要因素而提出的理想化模型。许多气体在压强不太大、温度不太低时，皆可作为理想气体处理。

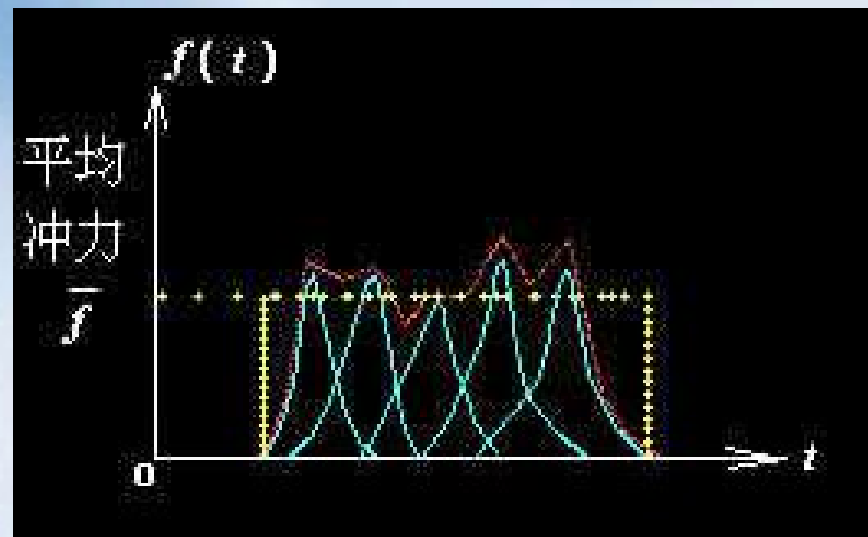
## § 11.2 理想气体的压强公式

### 一、压强公式的导出

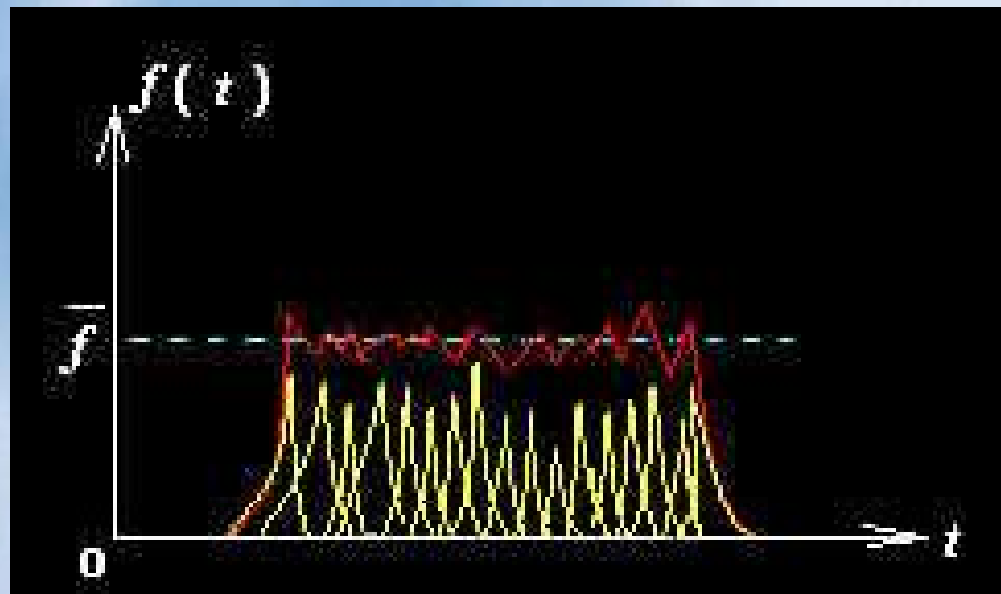
从微观上看，气体的压强等于大量分子在单位时间内施加在单位面积器壁上的平均冲量，就像密集的雨点打在雨伞上对伞产生一种压力那样。



单个分子撞击器壁的  
冲力曲线：



多个分子合冲力曲线



大量分子产生持续的平均冲力曲线

压强：  $p = \frac{\bar{f}}{S} = \frac{\sum f \delta t}{dtS}$ ，式中  $S$  为器壁截面积。

研究对象：立方容器：

$x, y, z$ ；总分子数  $N$ 。

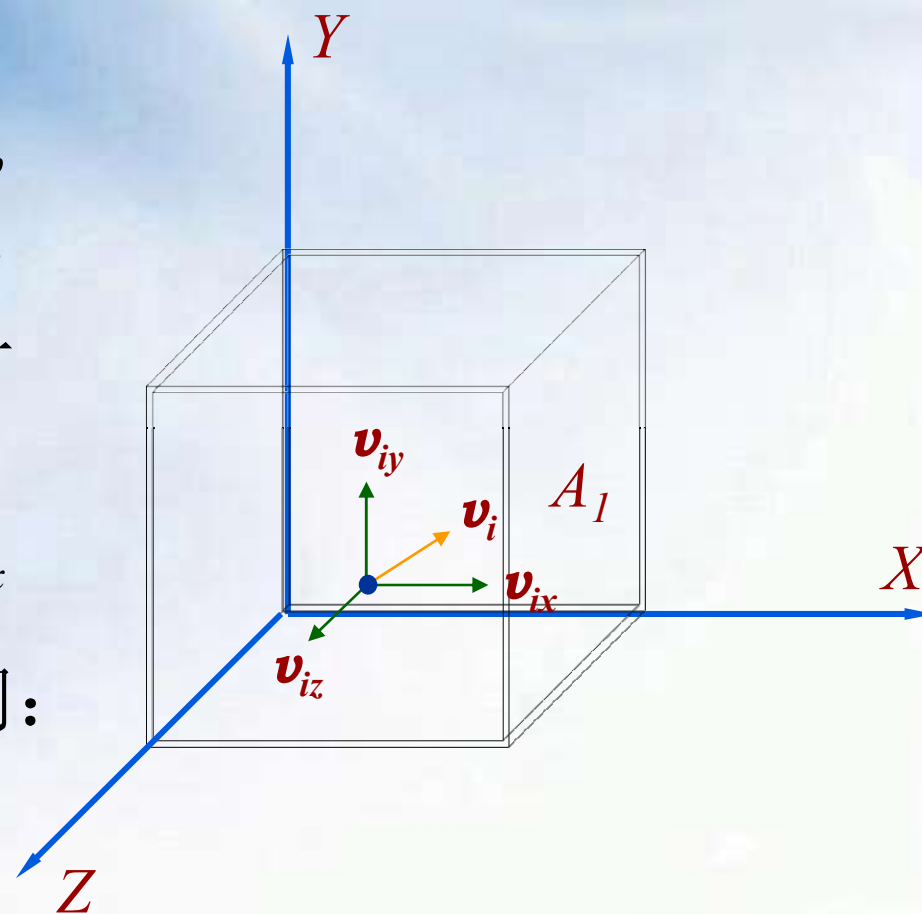
平衡态：各处  $p$  相同，  
故只研究一个器壁  $A_1$ 。

先考虑一个分子撞击一次：

$$I_i = -mv_{ix} - mv_{ix} = -2mv_{ix}$$

平均碰撞一次所用时间：

$$t = \frac{2x}{v_{ix}}$$



单位时间内碰撞次数:  $z = \frac{v_{ix}}{2x}$

单位时间内对A<sub>1</sub>面冲量:  $2mv_{ix} \cdot \frac{v_{ix}}{2x} = \frac{mv_{ix}^2}{x}$

平均冲力:  $\bar{f} = I / \Delta t = \frac{mv_{ix}^2}{x}$

$N$  个分子对A<sub>1</sub>面的平均冲力:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{x}$$

对A<sub>1</sub>面的压强:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\overline{F}}{A_1} = \frac{\overline{F}}{yz} = \frac{1}{yz} \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{x} \\ &= \frac{1}{xyz} \cdot mN \sum \frac{v_{ix}^2}{N} = \frac{1}{xyz} \cdot mN \cdot \overline{v_x^2} \\ &= \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v^2} \quad (\because \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}) \end{aligned}$$

理想气体压强公式:  $p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$

$$\rightarrow p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon_k}$$



其中： $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$  为分子的平均平动动能。

压强是大量气体分子与器壁碰撞的平均结果，反映了大量气体分子的统计规律。

## 二、涨落

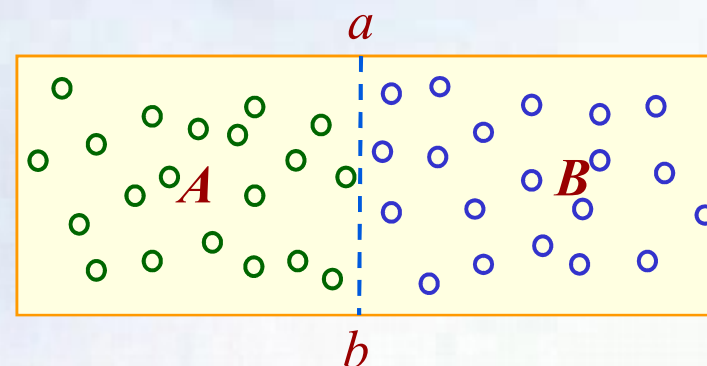
在一定的宏观条件下，大量分子运动的各种分布在一定的平均值附近上、下起伏变化，称为**涨落现象**。在任一给定瞬间或在系统中任一给定局部范围内，观测值都与统计平均值有偏差。

## § 11.3 温度与分子平均平动动能的关系

### 理想气体状态方程

#### 一、温度与分子平均平动动能的关系

设A、B两系统冷热程度不同， $ab$  为导能板。接触后达到热平衡态，此状态所具有的共同的宏观物理性质称为温度。



A、B两系统达到热平衡的过程是通过导能板 $ab$ 交换分子平均平动动能的结果。

系统达到热平衡状态后，态函数温度 $T$ 与分子平均平动动能之间有单值函数关系，定义为：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2}kT$$

可见：从微观角度看，温度 $T$ 是分子 $\overline{\varepsilon_t}$ 大小的量度，表征大量气体分子热运动剧烈程度，是一统计平均值，对个别分子无意义。

上式中  $k=1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$  称为玻尔兹曼常数。

**注意：**(1) 系统整体运动的动能与温度无关。 $\overline{\varepsilon_t}$  是相对系统质心的。

(2) 温度是微观量的统计平均值。

(3) 热力学温度与摄氏温度： $T=t+273.15$

## 二、气体分子的方均根速率

由  $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$  可得：

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$R=N_Ak=6.02\times 10^{23}\times 1.38\times 10^{-23}=8.31[\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})]$$

R称为摩尔气体常数， $N_A$ 称为阿佛伽德罗常数。

$\mu=N_A m$  为气体的摩尔质量。

### 三、理想气体状态方程

由  $\overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2}kT$  和  $p = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$  可得：

$$p = nkT$$

由于  $n = N/V$ ,  $R = N_A k$

$$pV = \nu RT$$

$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{M}{\mu}$  摩尔数（代表物质的量）。

## § 11.3 能量均分原理 理想气体的内能

不同的分子具有不同的结构，理想气体分子除平动外，**还有转动与振动**，因此在研究分子无序运动的平均能量时，对微观模型应做适当的修正。

### 一、自由度

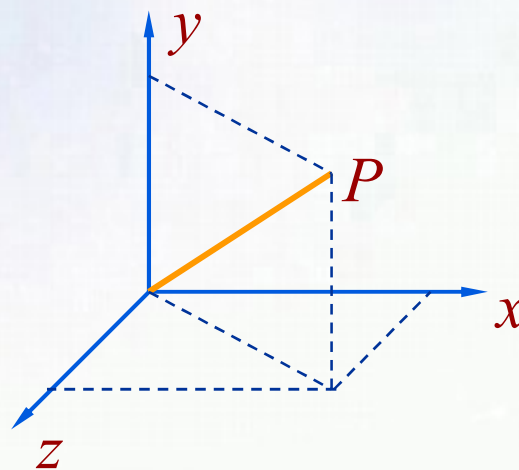
自由度是指决定一个物体的空间位置所需要的独立坐标数。

1) 质点的自由度

空间：3个独立坐标；

平面：2个独立坐标；

直线：1个独立坐标。





## 2) 刚体的自由度

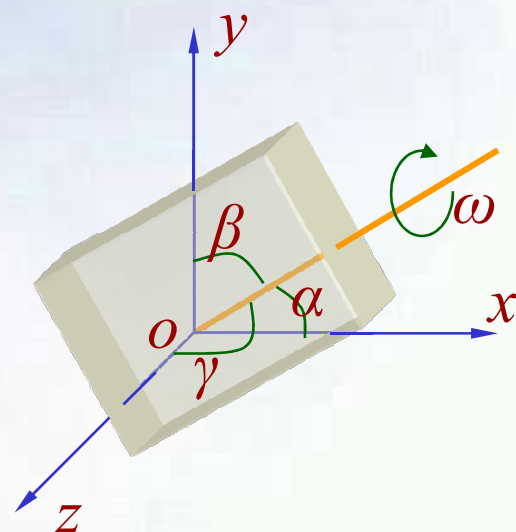
质心位置：3（平动自由度）；

转轴方位：2（转动自由度）；

方位角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  相关方程

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

绕转轴转动：1（转动自由度）。



### 3) 气体分子运动自由度

单原子分子：3个平动自由度， $i=3$ ；

双原子分子：3个平动自由度(质心)，2个转动自由度(轴线方位角)，1个振动自由度， $i=6$ ；

刚性双原子分子：在一般温度下，振动可忽略：  
 $i=5$ ；

刚性多原子分子：看成刚体，故 $i=6$ 。

## 二、能量均分定理

理想气体的一个分子平均平动动能为：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{1}{2} \overline{m\mathbf{v}^2} = \frac{1}{2} \overline{mv_x^2} + \frac{1}{2} \overline{mv_y^2} + \frac{1}{2} \overline{mv_z^2} = \frac{3}{2} kT$$

在平衡态下  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$

故有：

$$\frac{1}{2} \overline{mv_x^2} = \frac{1}{2} \overline{mv_y^2} = \frac{1}{2} \overline{mv_z^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \overline{m\mathbf{v}^2} \right) = \frac{1}{2} kT$$

分子的每一个平动自由度的平均动能等于 $1/2kT$ ，这是气体分子无规则碰撞的结果；也是分子运动无序性的表现，即分子在平动时，对于大量分子来说，在能量上没有哪个方向特别占优势。

将上述结果推广到转动等其它运动形式，可得到能量均分定理：在温度为 $T$ 的平衡态下，气体分子每个自由度的平均动能都相等，等于 $1/2kT$ 。

若分子的自由度为 $i$ ，则分子的平均动能为：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{i}{2} kT$$

对于单原子分子：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{3}{2} kT$$

对于刚性双原子分子：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{5}{2} kT$$

对于刚性多原子分子：

$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{6}{2} kT$$

**能量均分定理**是一条重要的统计规律，适用于大量分子组成的系统，包括气体和较高温度下的液体和固体，适用于分子的平移、转动和振动。经典统计物理可给出定理的严格证明。

### 三、理想气体的内能 (热力学能)

气体分子的运动（平移、转动和振动）能量和分子与分子之间的势能构成气体内部的总能量，称为气体的**内能**。理想气体不计分子与分子之间的相互作用力，所以分子与分子之间的相互作用势能也就可以忽略不计。理想气体的内能只是分子各种运动能量之和。按能量均分定理，若分子具有 $t$ 个平移自由度， $r$ 个转动自由度， $s$ 个振动自由度，则分子的平均能量：

$$\bar{\varepsilon} = (t + r + 2s) \frac{1}{2} kT$$



式中振动自由度 $s$ 前面的因子2是由于振动具有动能和势能，而平均势能也具有 $1/2kT$ 的能量。如果分子无振动，则其平均能量等于

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT$$

式中 $i$ 表示一个刚性分子的总自由度。上式是一个理想气体分子的平均能量，因而 $\nu$ 摩尔理想气体的内能是：

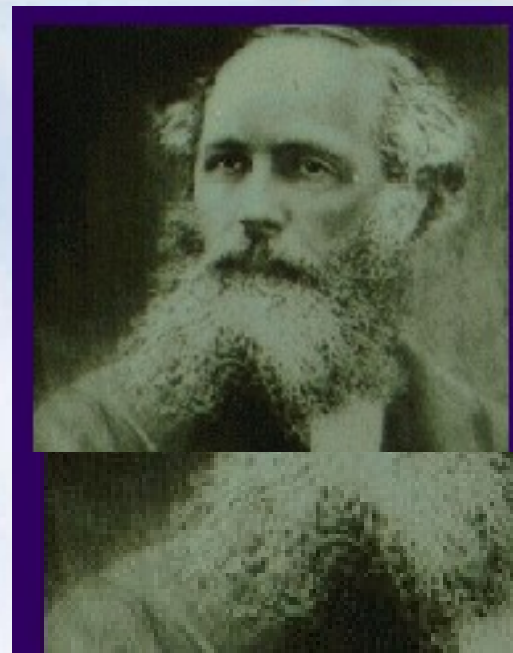
$$\bar{E} = \nu N_A \left( \frac{i}{2} kT \right) = \nu \frac{i}{2} RT$$

由此可知，一定量的理想气体的内能完全取决于气体分子的自由度和气体的热力学温度，且与热力学温度成正比，而与气体的压强和体积无关。理想气体的内能只是温度的单值函数，这个结论在与室温相差不大的温度范围内与实验近似相符。

## § 11.4 麦克斯韦气体分子速率分布

麦克斯韦是十九世纪最伟大的数学家及物理学家，是现代电磁学的奠基人；他也是热力学、统计物理学的创建者之一。

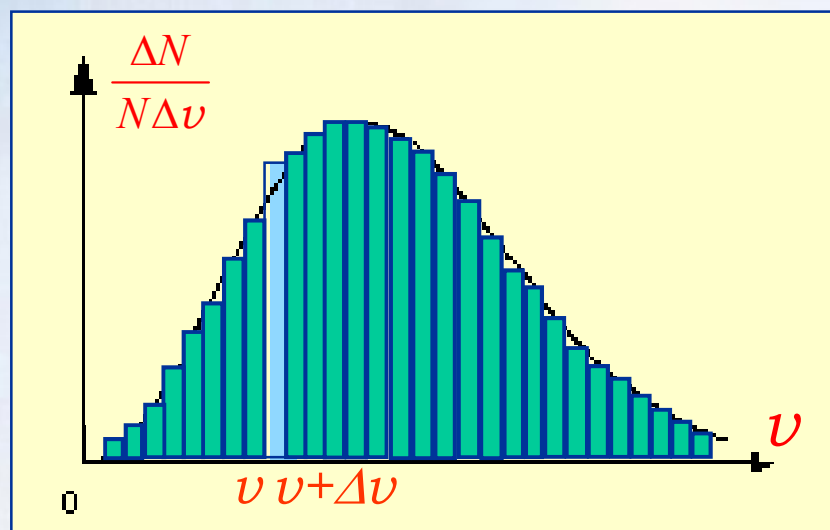
1859年麦克斯韦首先从理论上导出，在平衡态下理想气体分子速率分布的统计规律-----麦克斯韦速率分布规律(Maxwell speed distribution)。下面将首先介绍统计分布规律的概念。



## 一、速率分布函数

对大量分子的整体，在一定条件下，实验和理论都证明它们的速率分布遵从一定的统计规律。

理想气体分子按速率间隔分布的规律称为麦克斯韦速率分布规律。为了寻找这一规律，把速率分成很多小的区间 $\Delta v$ ，以 $\Delta N$ 表示 $N$ 个分子中分布在区间 $v \rightarrow v + \Delta v$ 中的分子数。



$$\frac{\Delta N}{N}$$

表示 $N$  个分子分布在 $v$  附近 $\Delta v$  速率区间中的分子数占总分子数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N\Delta v}$$

表示 $N$  个分子分布在 $v$  附近单位速率区间中的分子数占总分子数的百分比

当 $N$ 足够大， $\Delta v$ 取的充分小时， $\Delta N/(N\Delta v)$ 则与 $\Delta v$ 、 $N$ 无关，可用来描述分子按速率的分布规律。

定义：速率分布函数

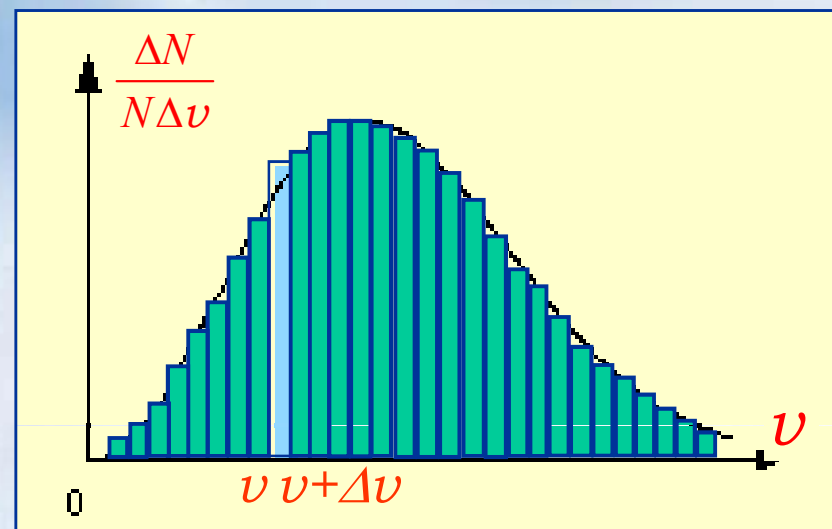
$$f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N \Delta v} = \frac{dN}{N dv}$$

即在速率 $v$ 附近，单位速率区间内的分子数在总分子数中所占的比率。

分布函数 $f(v)$ 为速率 $v$ 的连续函数。

思考以下表达式的物理意义：

(1)  $f(v)dv$





$f(v)dv = \frac{dN}{N}$  表示在总分子  $N$  中，速率在  $v \sim v+dv$  区间的分子数占分子总数的百分比。

(2)  $Nf(v)dv$

$Nf(v)dv = dN$  表示速率在  $v \sim v+dv$  区间内的分子数。

(3)  $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$

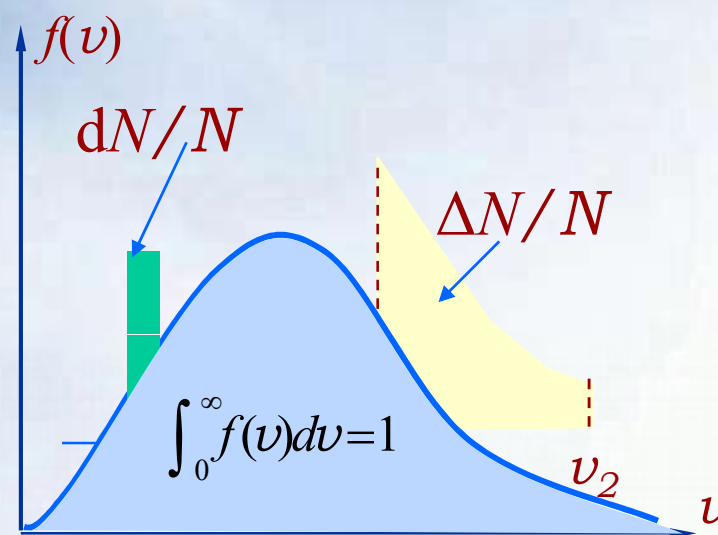
$\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN}{N} = \frac{\Delta N}{N}$  表示在总分子数  $N$  中，速率在  $v_1 \sim v_2$  区间的分子数占总分子数的百分比。

$$(4) \quad \int_0^{\infty} f(v) dv$$

速率在  $0 \sim \infty$  整个速率范围内的分子数占总分子数的比率，也就是速率分布曲线下的总面积，即100%。故：

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

上式称为  $f(v)$  的归一化条件。



## 二、麦克斯韦速率分布律

1859年，麦克斯韦从理论上导出理想气体在某一平衡态下的速率分布函数 (function of speed distribution)，即麦克斯韦速率分布函数：

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

式中， $m$  为分子质量， $T$  为温度， $k$  为玻尔兹曼常数。

平衡态下，若已知  $f(v)$ ，则气体分子分布在任一速率区间  $v \sim v+dv$  内的分子数占总分子数的比率为：

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

上式称为麦克斯韦速率分布律。

由麦克斯韦速率分布函数可求出三种统计速率：

最概然速率：

气体分子的最概然速率  $v_p$  (most probable speed), 是速率分布函数  $f(v)$  取极大值的速率, 意即如果把整个速率区间分成许多相等的小区, 则分布在  $v_p$  所在的小区内的分子比率最高。

$$\text{令: } b = \frac{m}{2kT} \quad f(v) = 4\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-bv^2} v^2$$

$$\left. \frac{df}{dv} \right|_{v=v_p} = 4\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} [2ve^{-bv^2} - v^2 2bve^{-bv^2}]_{v=v_p}$$

$$= 8\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v_p e^{-bv_p^2} [1 - v_p^2 b] = 0$$

解得：

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{b}}$$

由此得：

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

了解最概然速率可以粗略判断热动平衡态下气体分子速率的分布情况。



## 平均速率:

大量分子速率的算术平均值，称为平均速率：

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v N f(v) dv = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

$$= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$$

令：  $b = \frac{m}{2kT}$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-bv^2} v^3 dv = 2\sqrt{\frac{1}{b\pi}}$$

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-bv^2} v^3 dv = \frac{1}{2b^2}\right)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

平均速率用于研究气体分子平均自由程及迁移现象等。

## 方均根速率：

分子速率平方的平均值开平方，称为方均根速率。

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 N f(v) dv = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-bv^2} v^4 dv = \frac{3}{2b}$$

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-bv^2} v^4 dv = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{b^5}} \right)$$

由上式解得：

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

方均根速率用于研究理想气体压强及分子平均平动动能等问题。

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

三种速率大小的比率关系：

$$v_p : \bar{v} : \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3}$$

# 麦克斯韦速率 分布曲线

## 温度 $T$ 对速率分布曲线的影响

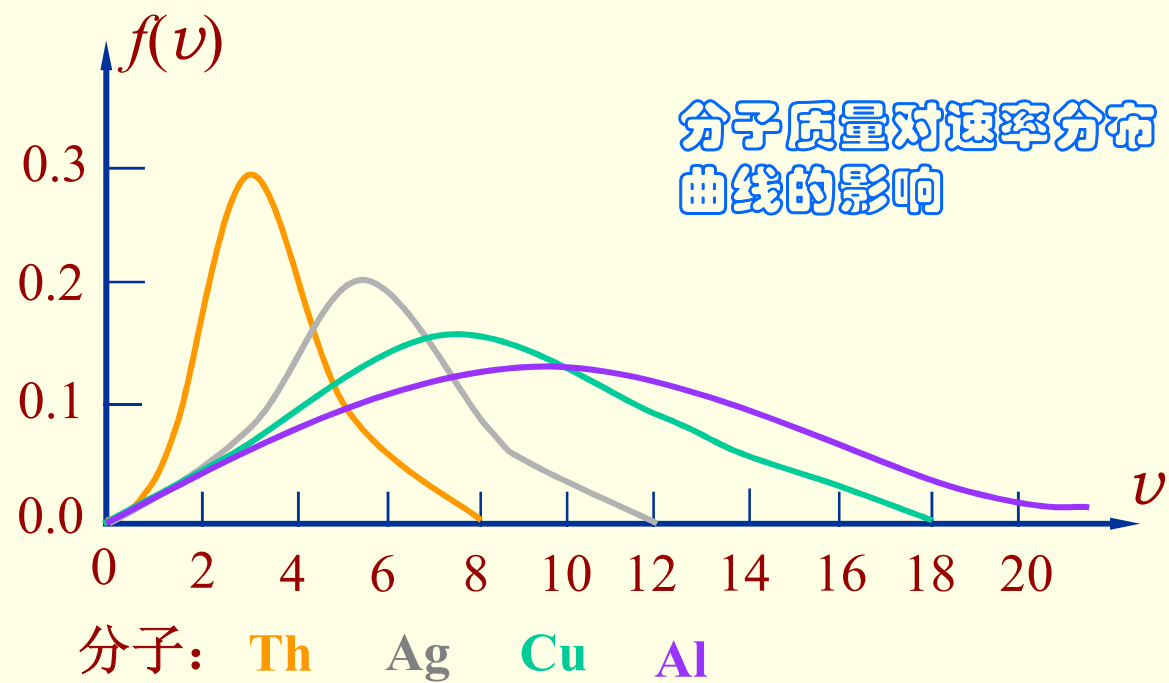
同一种理想气体在热动平衡状态下，温度升高时速率分布曲线变宽、变平坦，但曲线下总面积不变。说明随着温度的升高，速率较大的分子在分子总数中的比率增大。



## 分子质量 $m$ 对速率分布曲线的影响

改变分子的质量 $m$ 值，在温度 $T$ 保持不变时，观察速率分布曲线如何变化。发现同一温度下，分子质量 $m$ 越小，曲线越宽越平坦，说明在分子总数中速率较大的分子所占比率越高。





## 例题一：

设氢气的温度是300K，求速率在3000~3010m·s<sup>-1</sup>之间的分子数 $\Delta N_1$ 与速率在1500~1510m·s<sup>-1</sup>之间的分子数 $\Delta N_2$ 之比。

解一：由麦克斯韦速率分布公式

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

$$\Delta N_1 = Nf(v_1)\Delta v_1; \quad \Delta N_2 = Nf(v_2)\Delta v_2$$

$$\Delta N_1 / \Delta N_2 = [f(v_1)\Delta v_1] / [f(v_2)\Delta v_2]$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left( \frac{3000}{1500} \right)^2 \cdot \frac{\exp(1500/1579)^2}{\exp(3000/1579)^2} = 0.27$$

解三：将麦克斯韦速率分布公式改写为：

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \left( \frac{v^2}{v_p^3} \right); \quad \Delta N = N f(v) \Delta v$$

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N x^2 e^{-x^2} \Delta x, \quad \text{式中} \quad x = \frac{v}{v_p}, \quad \Delta x = \frac{\Delta v}{v_p}$$

氢气（H<sub>2</sub>）在温度  $T=300\text{K}$  时的最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{0.002}} = 1579(m/s)$$

所以速率在3000到3010间的分子数

$$\Delta N_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left( \frac{3000}{1579} \right)^2 \cdot e^{-(3000/1579)^2} \cdot \left( \frac{10}{1579} \right)$$

速率在1500到1510间的分子数

$$\Delta N_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left( \frac{1500}{1579} \right)^2 \cdot e^{-(1500/1579)^2} \cdot \left( \frac{10}{1579} \right)$$

所以

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left( \frac{3000}{1500} \right)^2 \cdot \frac{\exp(1500/1579)^2}{\exp(3000/1579)^2} = 0.27$$

## 例题二：

容器内有一定量的氧气（ $O_2$ ），温度  $T=273K$ ，  
麦克斯韦速率分布函数为：

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

- (1) 氧分子在最概然速率  $v_p$  附近的微小速率区间  
( $\Delta v = 10m/s$ ) 内的分子数  $\Delta N_p$  占分子总数  $N$  的百分比为多少？
- (2) 氧分子在速率  $v=600m/s$  附近，相同微小速率区间  
( $\Delta v = 10m/s$ ) 内的分子数  $\Delta N$  占总分子数  $N$  的百分比  $\Delta N/N$  与  $\Delta N_p/N$  相比较，哪个大？



(3) 当氧气温度升高时，氧分子在同一速率  $v=600\text{m/s}$  附近，同一速率区间 ( $\Delta v=10\text{m/s}$ ) 内的分子数  $\Delta N$  占总分子数  $N$  的百分比  $\Delta N/N$  如何变化？

**解题思路：** (1) 按照速率分布函数的定义：

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} \quad \frac{\Delta N}{N} = \int_{\Delta v} f(v)dv$$

表示气体分子在某一速率  $v$  附近  $\Delta v$  速率间隔内的分子数占总分子数的百分比，若  $\Delta v$  很小时

$$\frac{\Delta N}{N} \approx f(v)\Delta v$$

(2) 在一定的热动平衡态下, 对应各速率的分布函数中,  $f(v_p)$  最大

$$f(v_p) > f(v)$$

解: (1) 因为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 377(m/s)$$

$$\text{又: } f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi} v_p^3} e^{-(v/v_p)^2}$$

故在  $v=v_p$  附近的微小区间,  $\Delta v=10\text{m/s}$ , 有:

$$\frac{\Delta N_p}{N} = f(v_p) \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_p} e^{-1} \Delta v = 0.022$$

解：(2) 由

$$\frac{\Delta N}{N} \approx f(v) \Delta v \quad \frac{\Delta N_p}{N} \approx f(v_p) \Delta v$$

因为对应各个速率的分布函数中  $f(v_p)$  最大，故：

$$f(v) < f(v_p) \quad \therefore \frac{\Delta N}{N} < \frac{\Delta N_p}{N}$$

解：(3) 温度升高时， $\Delta N/N$  增大、减小或不变都有可能：



### 例题三:

导体中自由电子的运动可看作类似于气体分子的运动(故称电子气)。设导体中共有 $N$ 个自由电子, 其中电子的最大速率为 $v_F$ (称为费米速率)。电子在速率 $v \sim v+dv$ 之间的分布为:

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv & (0 < v < v_F) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

(1)画出分布函数图；(2)用 $N$ 、 $v_F$ 定出常数 $A$ ；(3)证明电

子气体中电子的平均动能  $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$

**解：** (1)根据题给函数关系，分布函数 $f(v)$ 的表达式为：

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = \frac{4\pi A}{N} v^2 = K v^2$$

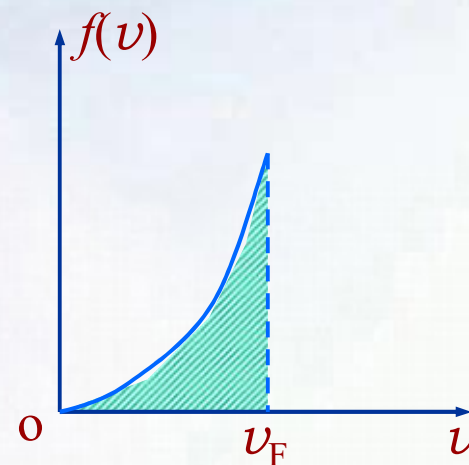
式中 $K$ 是一个常数，显然这是一个抛物线方程。又依题意，当 $v=v_F$ 时， $f(v)$ 突然下降为零，即速率大于 $v_F$ 的电子数为零，故 $f(v)$ 与 $v$ 的关系曲线如图所示。

(2)因为  $\frac{dN}{N} = \frac{4\pi A}{N} v^2 dv$  所以：

$$N = \int_0^N dN = 4\pi A \int_0^{v_F} v^2 dv = 4\pi A \frac{v_F^3}{3}$$

$$\text{即： } A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}$$

$$(3) \text{根据 } dN = 4\pi A v^2 dv = \frac{3N}{v_F^3} v^2 dv$$





$$\text{则: } \overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_0^{v_F} v^2 \left( \frac{3N}{v_F^3} v^2 dv \right) = \frac{3}{5} v_F^2$$

$$\text{于是得: } \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} m v_F^2 \right) = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

### 三、速率分布实验验证

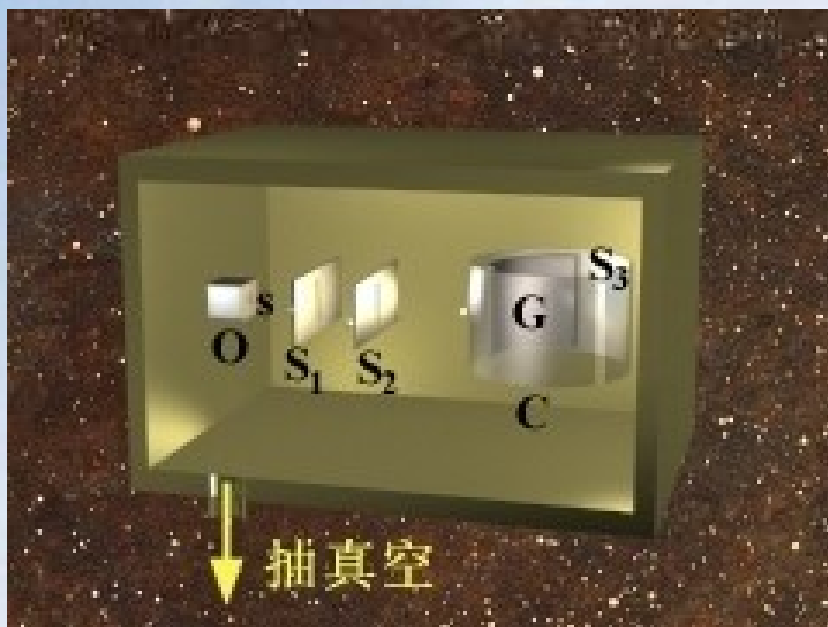
20世纪20年代以后，许多实验成功地证实了麦克斯韦速率分布规律。本部分内容简要说明葛正权及密勒-库什所做的实验，介绍实验装置，说明实验原理。

# 葛正权实验装置图

普通物理教案

1920年斯特恩首先测定了银分子的速率，葛正权对其方法进行了改进。

**葛正权：**1929年自费赴美留学，在加州大学伯克利研究院攻读博士学位。1933年回国，先后在武汉大学，解放军第二军医大学任教。1988年3月因病逝世。



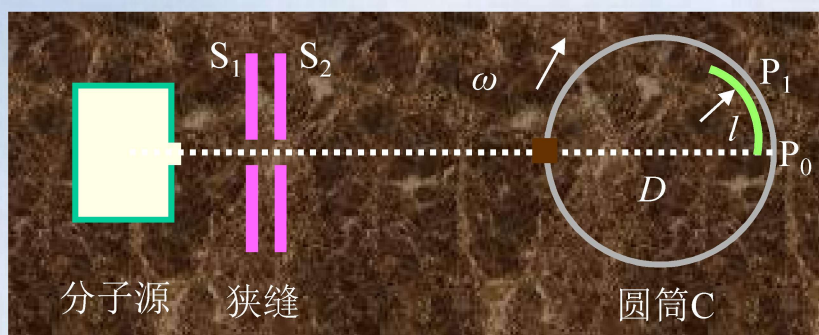
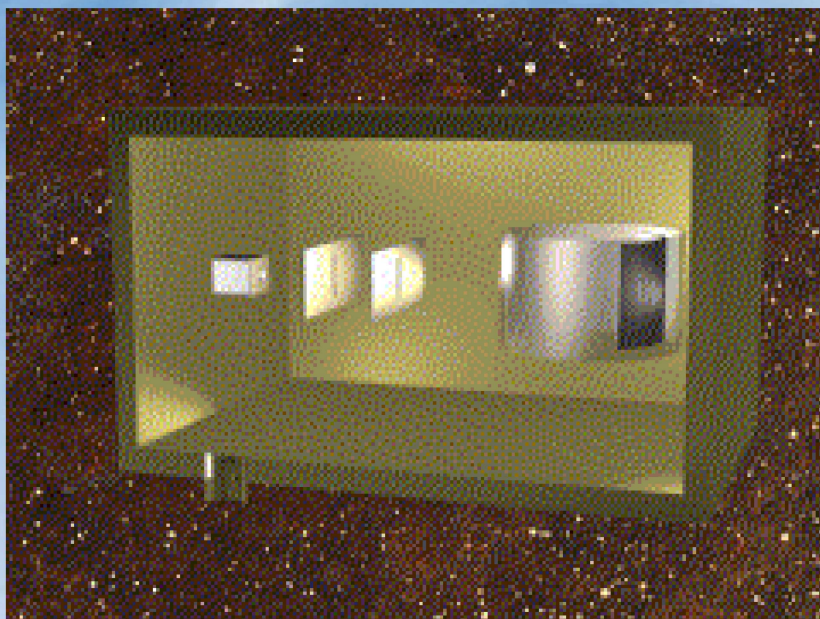
模拟分子束速率分布实验图

O --- 分子源

C --- 圆筒

G --- 玻璃板

$S_1, S_2, S_3$  ---- 狭缝



铋分子从分子源开口逸出，通过狭缝 $S_1$ ， $S_2$ 后，进入圆筒C，撞击并粘附在弯曲玻璃板G上。

分子源开口逸出的分子束中分子的速率为：

$$t = D/v, \quad t = l/(\omega D/2)$$

$$v = \frac{D^2 \omega}{2l}$$



## 密勒-库什实验 \*

1955年，利用已经相当成熟的分子束实验技术，美国哥伦比亚大学的密勒(R.C.Miller)和库什(P.Kusch)以更高的分辨率，更强的分子射束和螺旋槽速度选择器，测量了钾和铯的蒸汽分子的速率分布，所得实验数据与理论曲线符合得极好。

