第 六 周

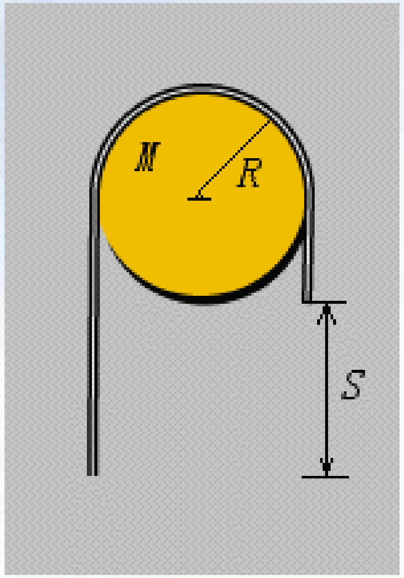
第6章 刚体力学

§6.3(5，6，7)，§6.4（一般了解)，
§6.5(一般了解)

作业： P83 6-19，6-20，6-22，6-24

例题2：滑轮上悬挂软绳的运动

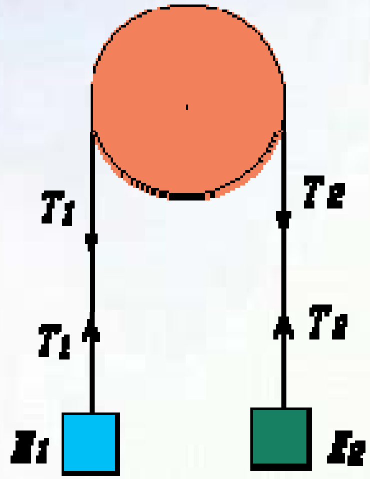
质量为M =2.0kg的匀质圆盘，半径R=0.2m，可绕过盘中心且与盘面垂直的水平光滑轴转动，其上挂有质量m=4.0kg，长为 l =2.0m 的匀质柔绳。设绳与盘无相对滑动，求圆盘两侧绳长之差S=0.50m时，绳的加速度。



思考与分析：

思考1：此题与滑轮上挂一条不计质量的细绳，在细绳两端分别连接物体M_1、M_2(如图)有什么区别？

答：若绳子的质量不计，选滑轮作为研究对象时，可以包括与滑轮接触的那段绳子，因而作用在绳子上的张力T_1、T_2可以认为是作用在滑轮边缘的切向力。



如果不能忽略绳子的质量，则绳子中的张力是两段绳间的相互作用力，它并不作用在滑轮上。作用在滑轮上的力是绳与滑轮间的摩擦力。

思考2：绳与滑轮间的摩擦力有什么特点？

答：绳子与滑轮接触的各点，相互作用的摩擦力的大小是不同的，它们的方向都沿各点的切线方向。各点的摩擦力方向虽然不同，但它们对转轴的力矩的方向都是一样的。力臂的大小也相同。

思考3：在这个问题中怎样使用隔离体法更好些？

答：因滑轮两边的绳子都做直线运动，而滑轮上面的绳子作圆周运动，所以把绳子分成三段为好。

解答8

解： 设绳的线密度为$\rho=m/L$，圆盘两侧绳长分别为x_1、x_2 ($x_1<x_2$)，绳的加速度大小为a，盘的角加速度为β

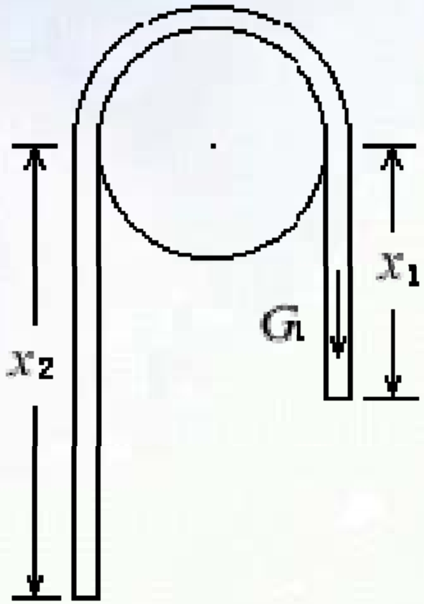
1. 分别选长为x_1、x_2 的绳子为研究对象

$$T_1 - G_1 = x_1\rho a \qquad (1)$$

其中 $G_1=x_1\rho g$

$$G_2 - T_2 = x_2\rho a \qquad (2)$$

其中 $G_2=x_2\rho g$



2. 选与盘接触的弧形绳为研究对象

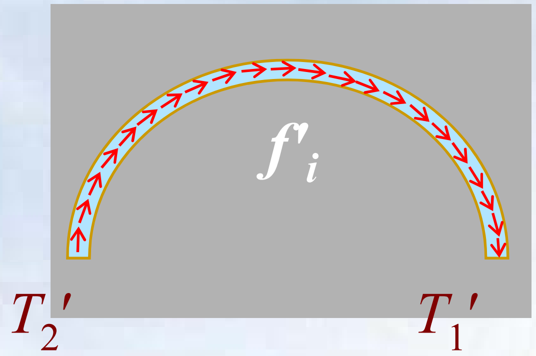
摩擦力 f_i' 的力矩之和为 $f'R$

$$(T_2' - T_1' - f')R=(l-x_1-x_2)\rho R^2\beta \quad (3)$$

其中 $T_2'=T_2$， $T_1'=T_1$， $f'=f$

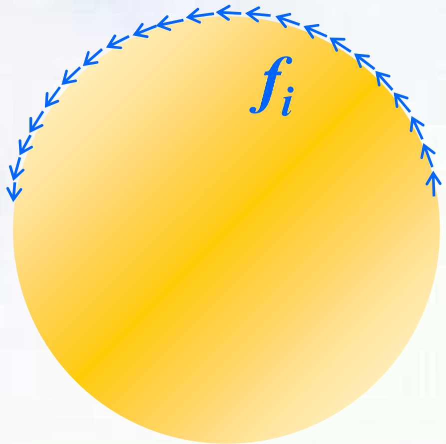
f、f'是绳与盘间相互作用的摩擦力的大小

$$f' = \sum f'_i$$



3. 选圆盘为研究对象

圆盘在绳对盘边缘各点的摩擦力 f_i 的力矩之和(数值上为 fR)的作用下加速转动



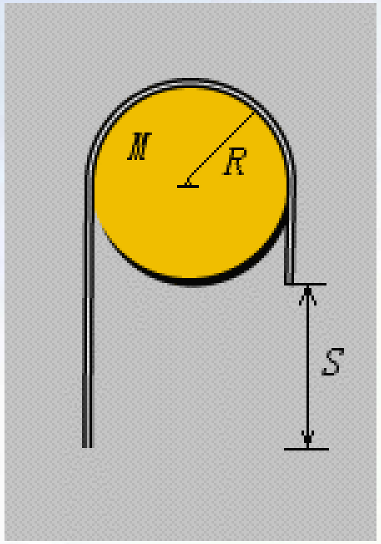
$$fR = J\beta = \frac{1}{2}MR^2\beta \quad (4)$$ 方向⊙

因绳与盘间无滑动，故有 $a=R\beta$ (5)

解得：

$$a = \frac{(x_2 - x_1)\rho g}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{Smg}{(m + \frac{1}{2}M)l}$$

$$= g/5 = 1.96\text{m}/\text{s}^2$$



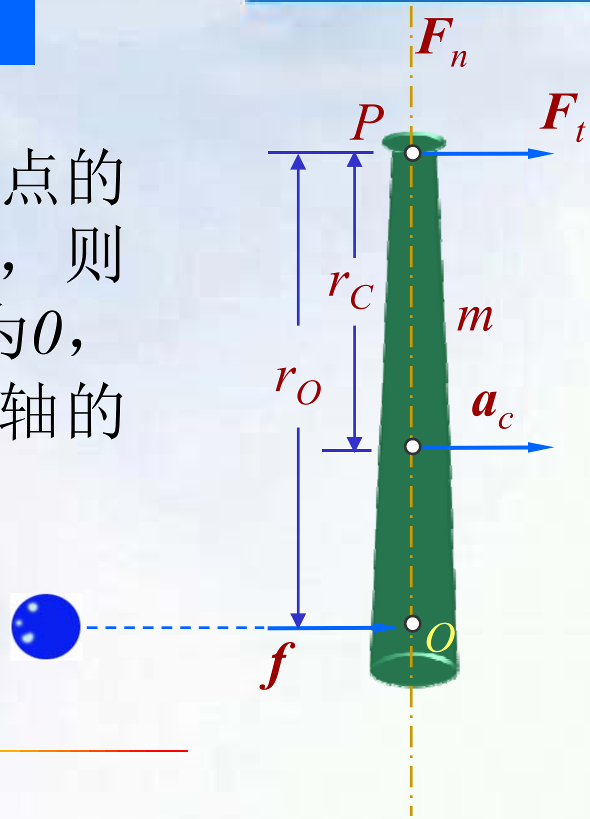
思考题：转动方程是否可写为

$$T_2R - T_1R = (J_1 + J_2)\beta = \frac{1}{2}MR^2\beta + (l - x_1 - x_2)\rho R^2\beta$$

请想一想，对不对？

例题3. 打击中心问题

如图所示，以水平力f打击悬挂在P点的刚体，打击点为O，若打击点合适，则打击过程中，轴对刚体的切向力F_t为0，该点称为打击中心，求打击中心到轴的距离r_O。



解答：

刚体在水平力的力矩 fr_O 作用下做定轴转动。设刚体的转动惯量为J，棒的角加速度为β，则转动定律为：

$$fr_O = J\beta = mR_G^2\beta$$

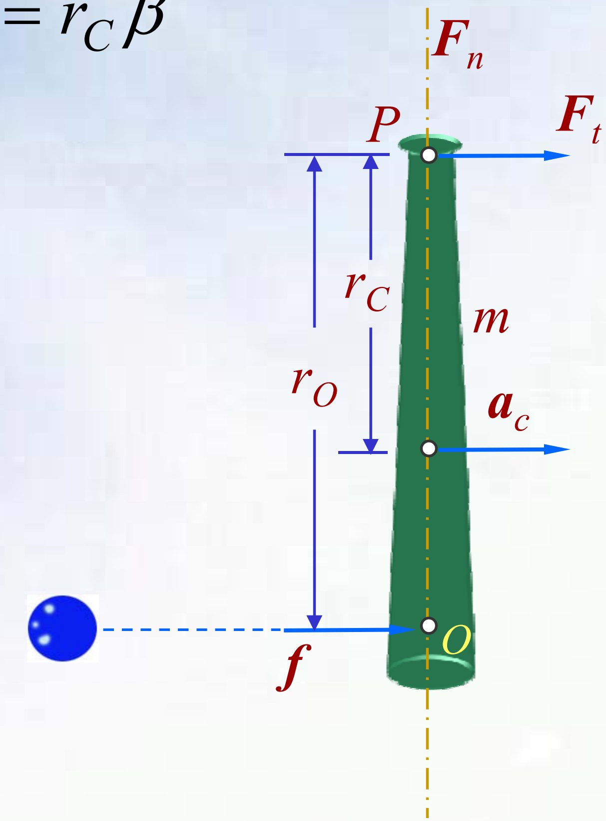
刚体质心的切向加速度为：$a_{Ct} = r_C\beta$

沿此方向质心的运动方程为：

$$F_t + f = ma_{Ct} = mr_C\beta$$

从以上两式消去β，得：

$$F_t = \left(\frac{r_O r_C}{R_G^2} - 1\right)f$$



要使轴对棒的切向力F_t为0，应有

$$r_O = \frac{R_G^2}{r_C}$$

对于悬挂于端点的均匀细棒，

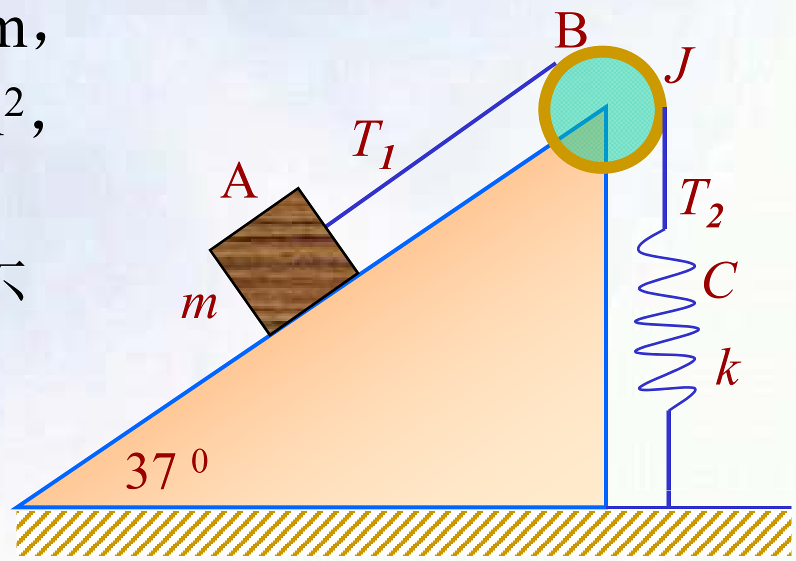
$$r_C = l/2 \qquad R_G^2 = l^2/3$$

则有：

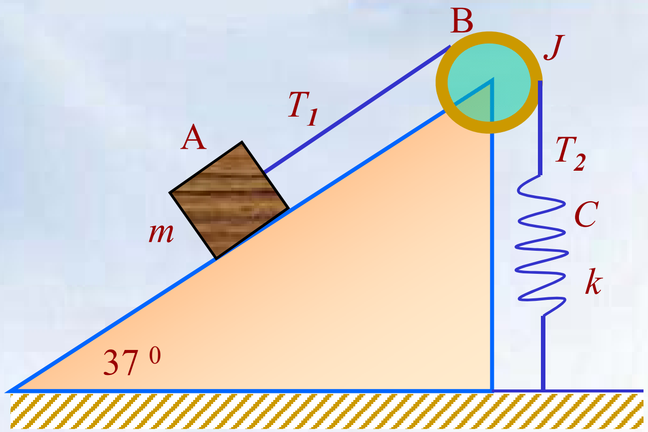
$$r_O = 2l/3$$

例题4：斜面、滑轮与弹簧组成系统的运动

一质量为m=2.0kg的物体A，用细绳跨过一滑轮B和一弹簧C相连接，如图所示。已知弹簧的劲度系数k=20N/m，滑轮的半径R=0.1m，绕轴的转动惯量 J=0.03kg·m^2，设绳与滑轮之间不打滑，A与斜面间及滑轮转轴处摩擦不计， 绳轻且不可伸长，斜面倾角为37°，取重力加速度g=10m/s^2。A从静止释放（此时弹簧处原长），求：



1. A下滑x时的加速度；
2. A下滑的最大速率；
3. A沿斜面下滑的最大距离。



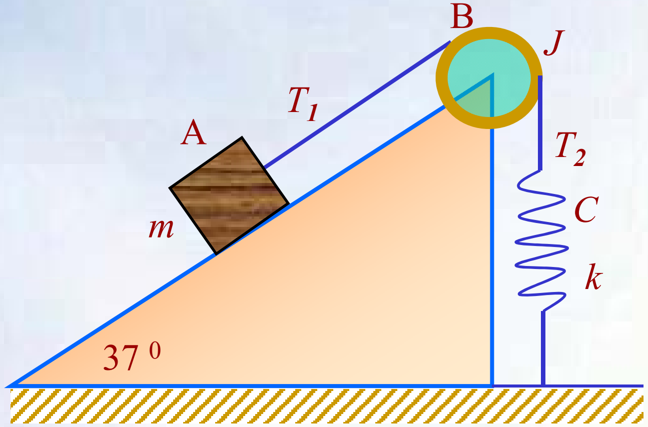
思考与分析：

这是一个由质点、刚体和弹簧组成的系统。当质点A由静止释放后，A沿斜面下滑，滑轮B同时转动，弹簧被拉长。A开始做变加速运动，当弹簧被拉到某一长度时，作用在A上的合外力为零，作用在B上的合外力矩亦同时为零，此时A的速度最大，B的角速度最大。若此时A所处的位置为O，则物体A以O为平衡位置在斜面上做周期振动。

处理这类问题常用的方法有两种：

方法一：应用隔离体法，对质点应用牛顿定律，对刚体应用转动定律，再由运动学关系，可以得到所求的任何物理量。

方法二：应用机械能守恒定律。



解答中分别采用两种方法求解：

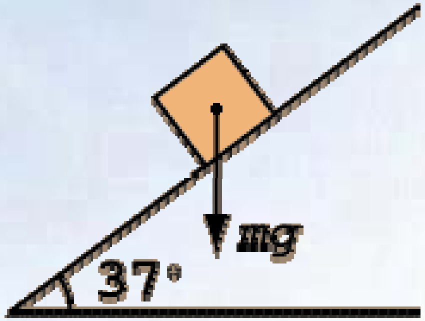
解答：

方法一：应用隔离体法

当A从静止下滑x时，选质点A为研究对象，受力如图

$$mg\sin 37^0 - T_1 = ma \qquad (1)$$

选圆盘B为研究对象，受力如图

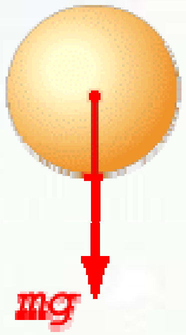


$$T_1R - T_2R = J\beta = \frac{1}{2}MR^2\beta \qquad (2)$$

a 就等于滑轮边缘的切向加速度：

$a=R\beta \quad (3) \qquad T_2=kx \quad (4)$

由(1)式—(4)式解得：（$\beta \;\; a \;\; T_1 \;\; T_2$）



$$a = \frac{mg\sin 37^0 - kx}{\frac{1}{2}M + m} = 2.4 - 4x(\mathrm{m/s^2})$$

当 $x=0.6m$ 时， $a=0$

$x<0.6m$ 时， $a>0$ 方向沿斜面向下

$x>0.6m$ 时， $a<0$ 方向沿斜面向上

由运动学关系知:

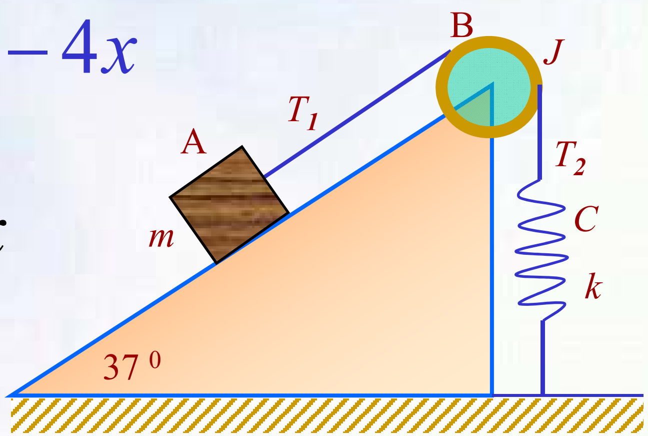
$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=2.4-4x$$

积分： $$\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\int_0^{x}(2.4-4x)dx$$

得： $$\upsilon=\sqrt{4.8x-4x^2}$$

当$a=0$时，$x=0.6m$， $\upsilon=\upsilon_m=1.2m/s$

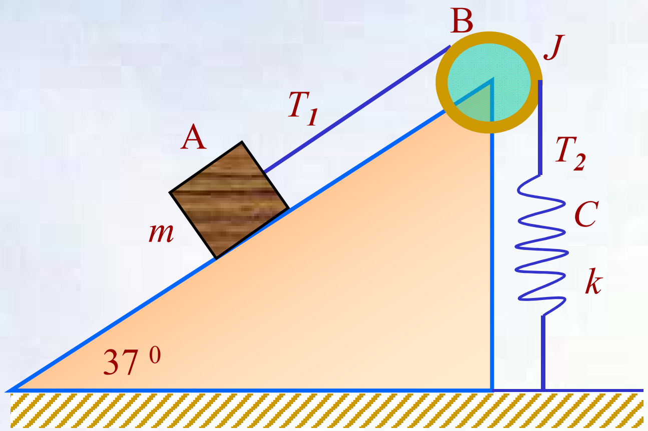
当$\upsilon=0$时， $x=x_m=1.2m$



方法二：应用机械能守恒定律

选质点A，圆盘B，弹簧C和地球作为研究对象，系统机械能守恒。

取弹簧原长时为初态，且为势能零点，弹簧伸长x时为末态：



$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin 37^0 = 0 \quad (5)$$

将上式对时间求导，并考虑到

$$\upsilon=\frac{dx}{dt},\quad a=\frac{d\upsilon}{dt},\quad \omega=\frac{\upsilon}{R},\quad J=\frac{1}{2}MR^2$$

解得：
$$a=\frac{mg\sin 37^0-kx}{\frac{1}{2}M+m}=2.4-4x(\mathrm{m/s^2})$$

当a=0时，x=0.6m，由(5)式得： $\upsilon=\upsilon_\mathrm{m}=1.2\mathrm{m/s}$

当υ=0时，由(5)式得： $mgx_m\sin 37^0=\frac{1}{2}kx_m^2$

$$x_m=\frac{2mg\sin 37^0}{k}=1.2\mathrm{m}$$

§3.4 刚体定轴转动的动能定理

一、刚体定轴转动的动能

设刚体以角速度ω绕定轴转动，刚体中所有质点由于转动所获得的动能之和为：

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2=\frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\omega^2$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

刚体绕定轴转动的动能等于刚体的转动惯量与角速度平方乘积的一半。

根据平行轴定理 $J = J_C + mh^2$,

转动动能可改写为:

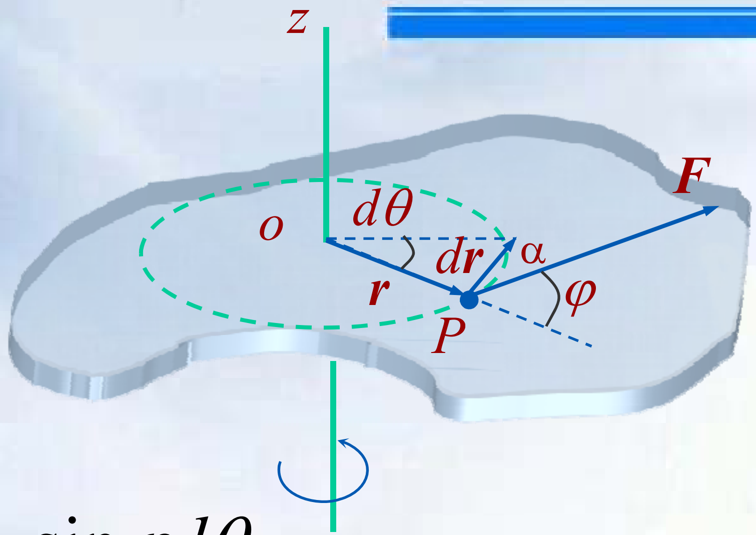
$$E_k = \frac{1}{2}(J_C + mh^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}mh^2\omega^2$$

上式中 $h\omega$ 为刚体的质心速度 v_C ，故

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2}$$

刚体定轴转动的动能可分解为绕通过质心轴的转动动能和随质心的平动动能。

二、力矩的功



功的定义： $A=\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

设$\boldsymbol{F}$在与轴垂直的转动平面内，作用在P点上，P点位矢为$\boldsymbol{r}$，则 $|d\boldsymbol{r}|=rd\theta$

$$dA=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=Frd\theta\cos\alpha=Fr\sin\varphi d\theta$$

上式中φ为$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{F}$的夹角，$Fr\sin\varphi$为M，则：

$dA=Md\theta$，刚体从$\theta_0\rightarrow\theta$的过程中，$\boldsymbol{F}$做功为：

$$\boxed{A=\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta}$$

刚体在定轴转动过程中，力对刚体所做的功，等于力矩与元角位移乘积的积分，称为力矩的功。

力矩的功率：

$$P=\frac{dA}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega$$

力矩的功率等于力矩与角速度的乘积。

三、刚体定轴转动的动能定理

刚体定轴转动时，合外力矩为：

$$M=J\beta=J\frac{d\omega}{dt}$$

$$Md\theta = J\frac{d\theta}{dt}d\omega = J\omega d\omega \qquad \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} J\omega d\omega$$

得：

$$\boxed{A = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J{\omega_0}^2}$$

合外力矩对定轴转动刚体所做的功等于刚体转动动能的增量—定轴转动的动能定理。

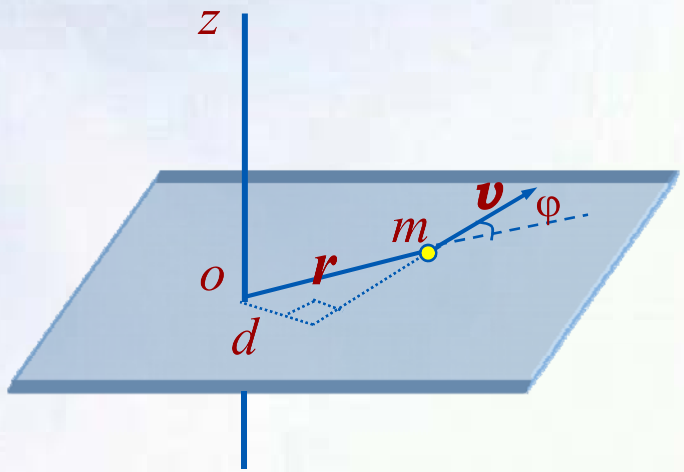
由于刚体内质点无相对位移，刚体的内力做功为零，刚体动能的变化只取决于外力的功。对于包含刚体在内的系统，只要计入刚体的转动动能，功能原理仍然适用：

$$A_{外} + A_{内非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

§ 3.5 定轴转动的角动量定理和角动量守恒定理

一、质点对轴的角动量

质点的质量m、速度$\boldsymbol{v}$，在与轴垂直的平面内，质点对o点的位矢为$\boldsymbol{r}$，则定义该质点对oz轴的角动量L为：



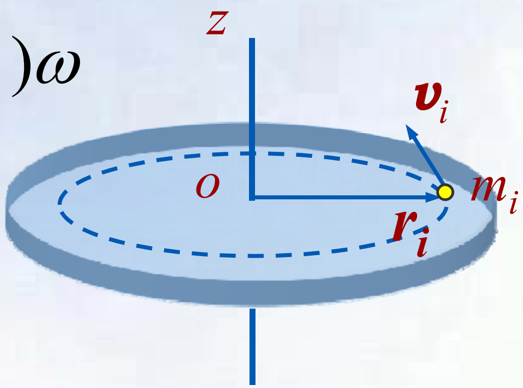
$$\boxed{L = mvr\sin\varphi}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

二、刚体对轴的角动量

刚体对轴的角动量等于刚体中所有质点对轴的角动量之和：

$$L=\sum m_i \upsilon_i r_i=\sum m_i(\omega r_i)r_i=(\sum m_i r_i^2)\omega$$



即： $\boxed{L=J\omega}$

刚体对轴的角动量$\boldsymbol{L}$等于转动惯量J与角速度$\boldsymbol{\omega}$的乘积。

三、定轴转动的角动量定理

由质点系角动量定理在Z轴的分量式，可以得到

$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d(J\omega)}{dt}$$

上式为定轴转动的角动量定理。适用范围比转动定律广，它允许J变化。上式对时间积分后，得：

$$\int_{t_0}^{t} Mdt = J\omega - J_0\omega_0$$

$\int_{t_0}^{t} Mdt$ 为合外力矩对转轴的冲量矩。上式称为定轴转动的角动量定理的积分形式。**定轴转动的质点系所受对转轴的冲量矩等于质点系对该转轴角动量的增量。**

四、 定轴转动的角动量守恒定律

$$M = 0 \Rightarrow \quad J\omega = \text{常量}$$

若定轴转动的质点系所受对转轴的合外力矩为零，则质点系对该转轴的角动量守恒—定轴转动的角动量守恒定律。

平动和转动的比较：

平动和转动的公式列表

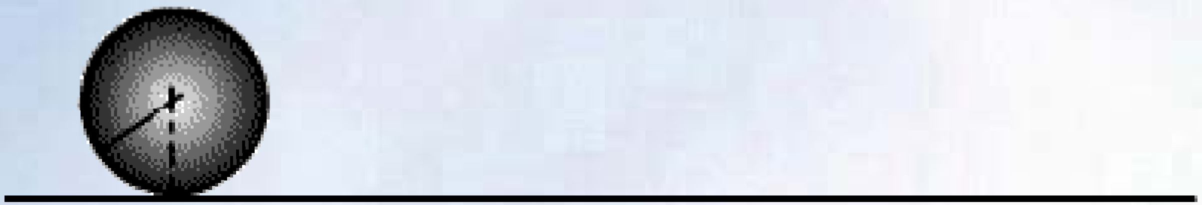
质点直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
匀速直线运动 $s=vt$	匀角速转动 $\theta=\omega t$
匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0^2=2as$	匀变速转动 $\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\beta\theta$

力F，质量 m 牛顿第二定律 $F=ma$	力矩 M，转动惯量 J 转动定律 $M=J\beta$
动量mv，冲量Ft（常力） 动量定理 $Ft=mv-mv_0$（常力）	角动量 $J\omega$，冲量矩 Mt（常力矩） 角动量定理 $Mt=J\omega-J_0\omega_0$（常力矩）
动量守恒定律 $\sum mv=$常量	角动量守恒定律 $\sum J\omega=$常量
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A=Fs$ 动能定理 $Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A=M\theta$ 动能定理 $M\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

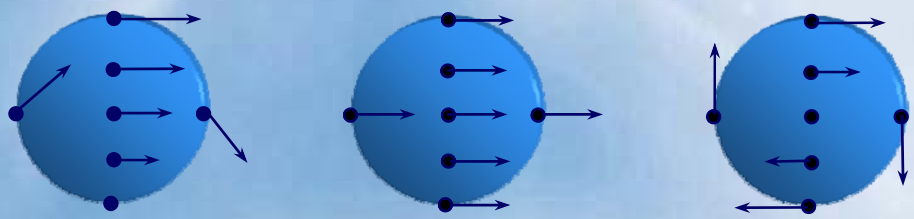
§ 3.6 刚体的平面运动 *

一、刚体平面运动的特征

刚体中的所有质量元都在一些平行平面中运动。例如：圆柱体沿一个二维平面的滚动，研究时通常只要取一个剖面。



从运动叠加原理，任何刚体的平面运动均可分解成随质心的平动和绕质心轴的转动。



（a）刚体平面运动（b）随质心的平动 （c）绕质心轴的转动

刚体上任一点的速度：

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{iC}$$

特别注意： 绕质心轴和绕其他轴的角速度是相同的。

二、刚体平面运动的基本动力学方程

$$\begin{cases} \text{质心的平动} & \sum \boldsymbol{F}_{\text{外}} = m\boldsymbol{a}_C \\ \text{绕质心的转动} & \sum \boldsymbol{M}_{C\text{外}} = J_C \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$

三、刚体平面运动中的动能

刚体作平面运动时，其动能等于随质心平动的动能与绕质心轴转动的动能之和：

$$E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

刚体动能定律、角动量定律例题

思考题、　1、2、3、4、5

例题一、 人、重物、滑轮系统

例题二、 发射考察探测器的着陆速度

例题三、 均匀细棒在竖直平面内的转动

思考题 1

一刚体以每分钟60转绕Z轴做匀速转动（$\vec{\omega}$ 沿Z轴正方向)。设某时刻刚体上一点P的位置矢量为 $\vec{r}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$，其单位为“$10^{-2}m$”，若以“$10^{-2}m\cdot s^{-1}$”为速度单位，则该时刻P点的速度为：

（A）$\vec{v}=94.2\vec{i}+125.6\vec{j}+157.0\vec{k}$

（B）$\vec{v}=-25.1\vec{i}+18.8\vec{j}$

（C）$\vec{v}=-25.1\vec{i}-18.8\vec{j}$

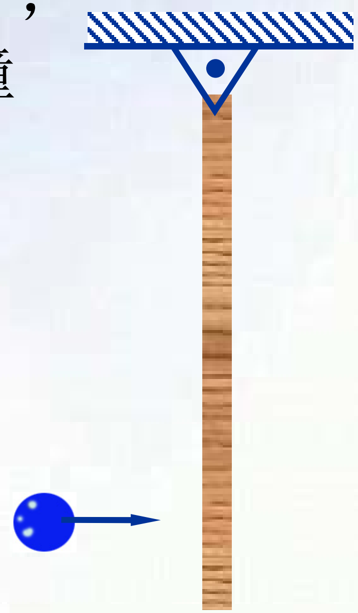
（D）$\vec{v}=31.4\vec{k}$

答　B

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}(x、y\text{分量})=(\frac{60}{60}\cdot 2\pi)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}(x、y\text{分量})$$

思考题 2

如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 转动，初始状态为静止悬挂。现有一个小球自左方水平打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统



（A）只有机械能守恒

（B）只有动量守恒

（C）只有对转轴 O 的角动量守恒

（D）机械能、动量和角动量均守恒

答　C　　外力通过转轴，合外力矩为零

思考题 3

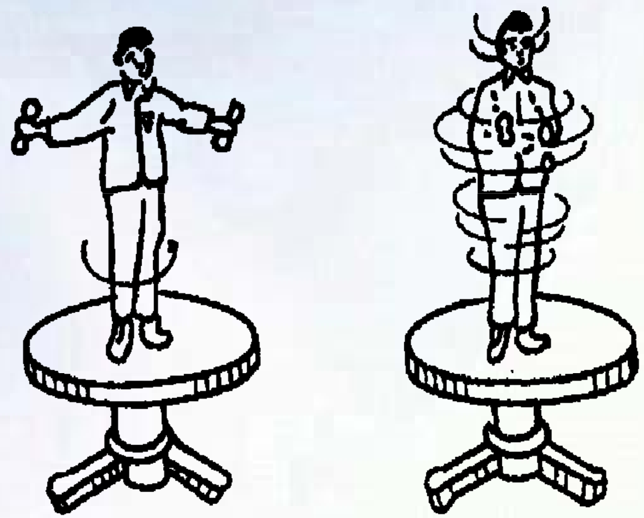
一个人站在有固定转轴(无摩擦)的转动平台上，双臂水平地举二哑铃。在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中，人、哑铃与转动平台组成的系统的

（A）机械能守恒，角动量不守恒

（B）机械能守恒，角动量守恒

（C）机械能不守恒，角动量守恒

（D）机械能不守恒，角动量也不守恒



答 C

外力平行转轴，$M=0, J\omega=$常量

$1/2J\omega^2 \neq$ 常量, ω 增加, $1/2J\omega\cdot\omega$ 增加

思考题 4

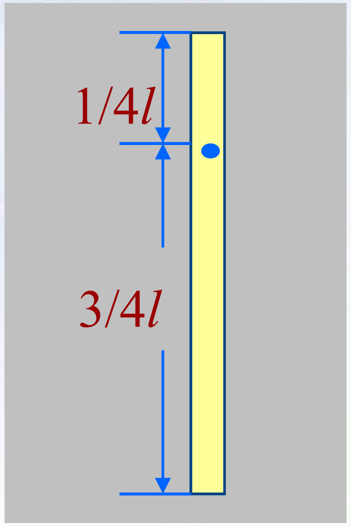
一均匀细杆可绕垂直它而离其一端$l/4$ (l 为杆长)的水平轴O在竖直平面转动，杆的质量为m，当杆自由垂挂时，给它一个起始角速度ω_0，如杆能持续转动而不做往复摆动(一切摩擦不计)，则需要：

(A) $\omega_0 \geq 4\sqrt{\dfrac{3g}{7l}}$

(B) $\omega_0 \geq 4\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(C) $\omega_0 \geq \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(D) $\omega_0 \geq \sqrt{\dfrac{12g}{l}}$



答　A　机械能守恒, $1/2J\omega_0^2 = mgL/2,\ J = 7/48ml^2$

思考题 5

一个物体正在绕固定光滑轴自由转动

（A）它受热膨胀或遇冷收缩时，角速度不变

（B）它受热时角速度变大，遇冷时角速度变小

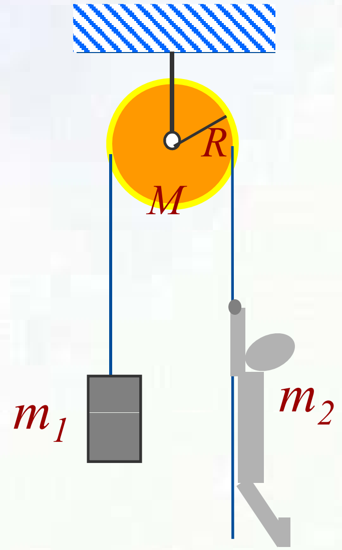
（C）它受热或遇冷时，角速度均变大

（D）它受热时角速度变小，遇冷时角速度变大

答　D　角动量$J\omega$守恒，受热J增加，ω减小

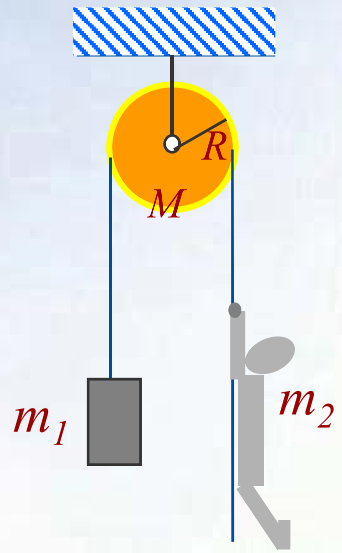
人、重物、滑轮系统

轻绳跨过质量为M，半径为R的圆柱形定滑轮，一端挂一质量为m_1的物体，质量为m_2的人抓住绳的另一端从静止开始上爬，若人相对绳以速率v上爬，则物体以多大速度上升？（设绳与滑轮间无相对滑动，滑轮与转轴间摩擦可忽略。 $m_1 = m_2 = m$）



解：滑轮的重力和轴对滑轮的约束力通过转轴，不产生力矩，人和物体的重力产生的力矩相互抵消，系统角动量守恒。设物体以V向上运动，滑轮角速度为ω，在地面参照系中，人向上运动的速率为$(v-V)$。以顺时针为正方向，由定轴转动角动量守恒定律：

$$m_1VR - m_2(\upsilon - V)R + \frac{1}{2}MR^2\omega = 0$$

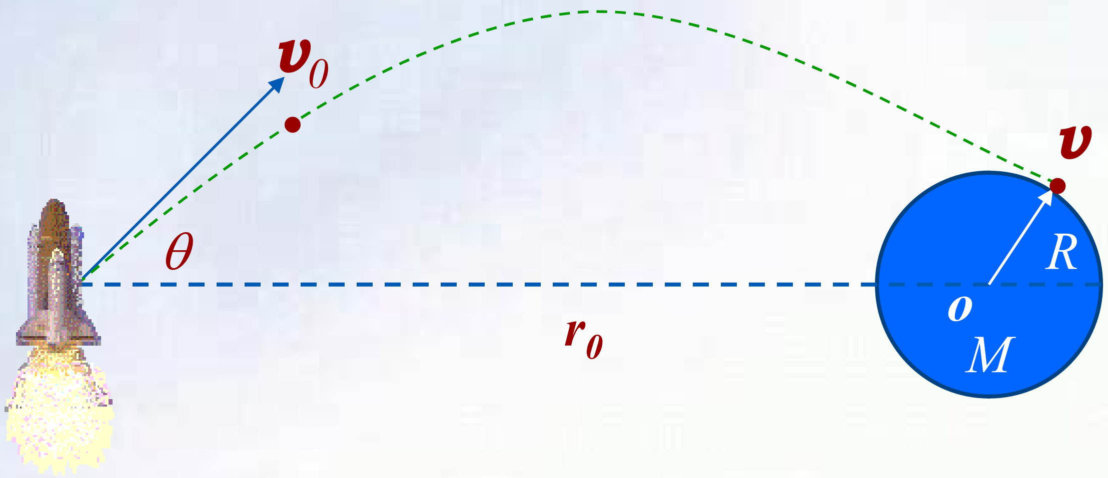


绳与滑轮间无相对滑动，则 $V = \omega R$
解得：

$$V = \left(\frac{m}{2m + \frac{1}{2}M}\right)\upsilon$$

发射考察探测器的着陆速度

发射一宇宙飞船去某行星考察，此行星的质量为M，半径为R。飞船静止，距行星中心r_0。现以速度$\boldsymbol{v}_0$发射一质量为$m(m<<M)$的仪器，要使此仪器恰好贴着行星表面着陆，试问发射仰角θ应为多少？着陆滑行初速度v会有多大？(设$r_0=4R$)



考虑以下问题：

（1）探测器处在行星的有心力场中，因此探测器对行星中心：

①角动量守恒　②动量守恒　③动能守恒　（选哪项？）

（2）探测器受行星引力属于保守力场，因此探测器与行星系统：

①机械能守恒　②动能守恒　③动量守恒　（选哪项？）

解答：

考虑到探测仪器处在行星的有心力场中，故探测仪器对行星中心的角动量守恒，所以有：

$m\upsilon_0 r_0 \sin(\pi-\theta)=m\upsilon R$，　得：

$$\upsilon=\frac{\upsilon_0 r_0\sin\theta}{R}=\frac{\upsilon_0 4R\sin\theta}{R}=4\upsilon_0\sin\theta \qquad (1)$$

又由于行星引力是保守力场，故仪器的机械能也守恒

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GMm}{R} \qquad (2)$$

将①式代入②式得：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2-\frac{GMm}{4R}=\frac{1}{2}m(4\upsilon_0\sin\theta)^2-\frac{GMm}{R}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{16} + \frac{3}{32}\frac{GM}{Rv_0^2} \qquad \sin\theta = \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

$$\theta = \arcsin\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

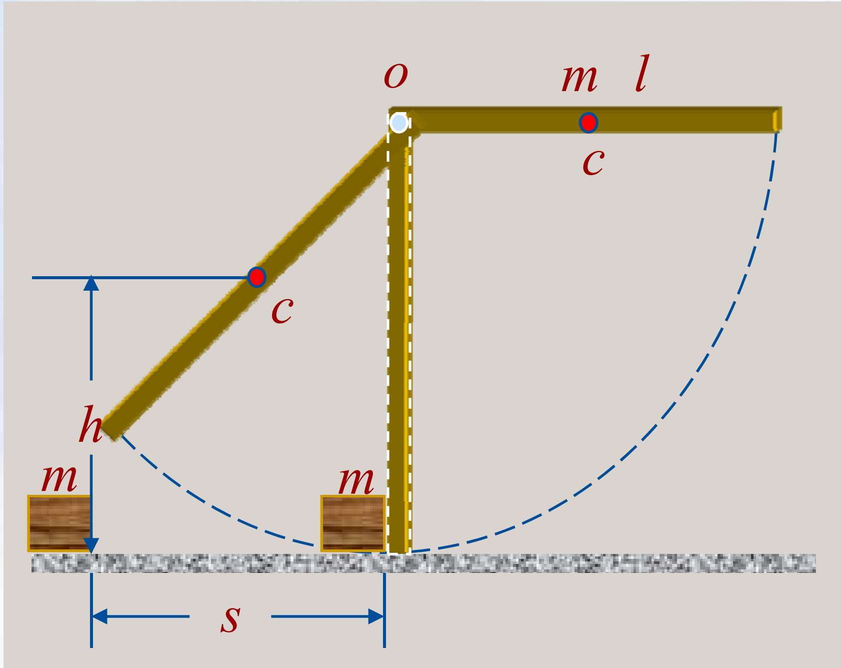
由①式：

$$v = 4v_0\sin\theta = v_0\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

(式中G为引力常数)

均匀细棒在竖直平面内的转动

如图所示，一均匀细棒，长为l，质量为m，可绕过棒端且垂直于棒的光滑水平固定轴o在竖直平面内转动，棒被拉到水平位置从静止开始下落，当它转到竖直位置时，与放在地面上一静止质量亦为m的小滑块碰撞，碰撞时间极短，小滑块与地面间的摩擦系数为μ，碰后滑块移动距离s后停止，而棒继续沿原转动方向转动，直到达到最大摆角。



求：碰撞后棒的中点c离地面的最大高度h。

分析

本题有三个物理过程：

过程I：棒由水平转到竖直的过程，这个过程中，对棒和地球系统，外力（轴对棒）不作功，仅有保守内力作功，机械能守恒。

过程II：棒与滑块碰撞过程。由于碰撞时间极短，并且摩擦力为恒力，因此在碰撞过程中摩擦力对轴o的冲量矩可忽略（碰撞时间极短），可近似地用对o轴的角动量守恒定律求解。

过程III：碰撞之后，棒继续上摆，棒地系统机械能守恒；滑块在水平面上受摩擦力匀减速运动。

解答

过程I：棒下落过程，棒、地球系统，机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega_0{}^2 \qquad (1)$$

其中 $J=\frac{1}{3}ml^2$ $\quad \therefore \omega_0=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

过程II：棒与滑块系统碰撞过程中，对o轴的角动量守恒

$$J\omega_0=J\omega+mv_0l \qquad (2)$$

过程III：对滑块由动能定理

$$-\mu mgs = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (3)$$

对棒、地球系统，棒上升过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mgl = mgh \qquad (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式，得：

$$h = l + 3\mu s - \sqrt{6\mu sl}$$