

# 非线性系统与混沌的研究进展

张琦 2013301510086

武汉大学物理科学与技术学院 物理弘毅班

**摘要：**本文介绍了利用数值计算的方法对非线性系统的研究，重点阐述了受到简谐性周期外力时的非线性系统稳定性与混沌现象。利用数值计算的方法来对系统周期运动稳定性、分岔、混沌等情况下的图像，并对系统的分岔与混沌现象进行讨论，并展望其发展趋势。

**关键词：**稳定性，混沌，分岔，振动，非线性

## 1 引言

振动是我们日常生活和实际生产的过程中经常见到的一种现象，其研究涉及工程机械、应用物理、应用数学等多个专业领域。振动系统各个参数的变化，将会引起系统动力学相应的本质变化，产生分岔、混沌现象。

混沌是指确定性动力学系统因对初值敏感而表现出的不可预测的、类似随机性的运动。混沌理论是指在一定参数条件下非线性系统展现的分岔、周期运动与非周期运动的纠缠，以至于通向某种非周期有序运动的理论。1963年，美国气象学家爱德华·劳伦次提出的混沌理论，非线性系统具有多样性和多尺度性。

混沌系统有三种性质：(1)受初始状态影响的敏感性。初始条件微小的变动可以导致最终状态的巨大差别。(2)具有拓扑混合性。系统会将初始空间的拓扑性质彻底打乱，使得任何初始状态变换到其他任何位置。(3)周期轨道稠密。在任何初始值附近都可以找到具有周期轨道的值。

本文主要是利用数值计算的方法来研究单摆在简谐的周期性外力作用下表现出的性质。

## 2 非线性系统

单摆在微小角度运动时，可以利用近似 $\sin\theta \approx \theta$ 使其成为一种线性系统，这显然不是本文想要考虑的。在角度稍大时，该近似不成立，此时单摆是一个非线性系统，这是我们想研究的，也是非常重要的一种非线性系统。对于单摆的运动，假设 $\theta$ 为摆线与竖直方向的夹角， $g$ 为重力加速度， $l$ 为摆长，则单摆在只受重力作用下的运动方程为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

考虑阻力 $-q(d\theta/dt)$ 与周期性外力 $F_D\sin(\Omega_D t)$ 等因素时，运动方程可以写成：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta + q\frac{d\theta}{dt} - F_D\sin(\Omega_D t)$$

将驱动、阻尼和非线性这三个因素加在一起后，单摆的运动将会变得有趣，适当调整各项参数，系统将会出现各种各样的性质。为了方便起见，本文采用国际单位制，未标明单位的物理量均为国际单位制。

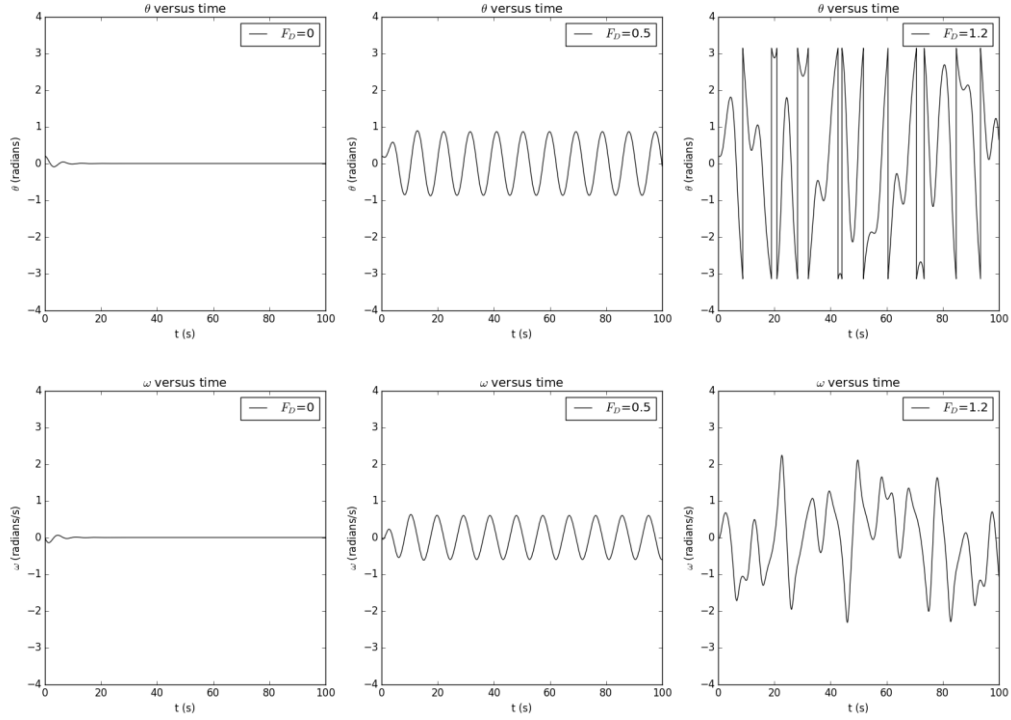


图 1:  $\theta - t$  与  $\omega - t$  图, 参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.001$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

利用 Euler-Cromer 方法计算在三种不同大小的驱动力下, 摆的运动情况, 并作出相应的图形, 如图 1。驱动力的振幅分别为  $F_D = 0$ ,  $F_D = 0.5$ ,  $F_D = 1.2$ 。当驱动力始终为 0 时, 摆的动能迅速衰减。当驱动力更大一些时, 经过几个周期后摆动由最初的状态过渡到了稳定的振动状态。当驱动力特别大时, 摆的运动杂乱无章, 也就是说, 摆的运动进入了混沌状态。

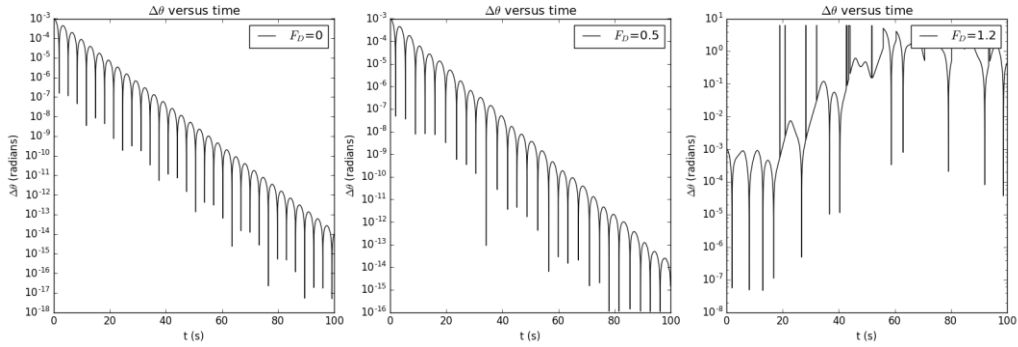


图 2:  $\Delta\theta - t$  图, 参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.001$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\Delta\theta(0) = 0.001$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

为了进一步研究混沌状态下摆的运动规律, 以及找出摆进入混沌状态的原因。计算出初值相差很小, 其他状况完全相同时摆的运动情况, 并作出相应的图形, 如图 2。观察非混沌状态下的摆动状况, 可以发现摆的摆角差异逐渐减小。而在混沌情况下, 摆角的差距则是逐渐增大到一极限值。方程给定了初始条件之后, 存在唯一的解, 在非混沌状态下解是稳定的, 但是在非混沌状态下的解释不稳定的, 对初始值十分敏感, 导致了之后的运动状态是不可预测的, 这就是混沌现象产生的原因。

### 3 相图与庞加莱映射

相图是用绘图的方式在相平面上表示动态系统的轨迹，可以很方便的看出在不同的初始参数下，系统是否有吸引子、排斥子或者极限环。对单摆的运动用这种方式研究可以更直观的观察它的运动规律。

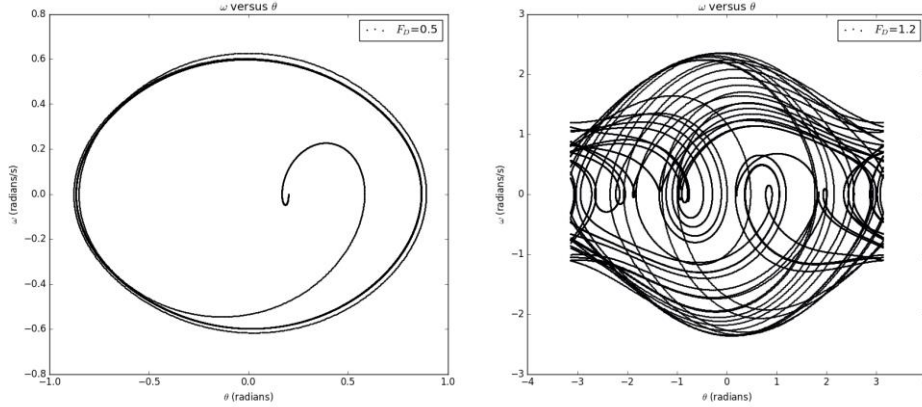


图 3: 相图，参数为 $q = 1/2$ ， $l = g = 9.8$ ， $\Omega_D = 2/3$ ， $dt = 0.01$ ， $t = 300$ ，初始条件为 $\theta(0) = 0.2$ ， $\omega(0) = 0$ 。

如图 3 所示，就是单摆系统的相图。可以发现，当 $F_D = 0.5$ 时，图形很有规律，单摆的运动状态被吸引到了一个圆环，也就是极限环上，随后的运动便稳定在了这个极限环上。而在 $F_D = 1.2$ 时，在图像的两端，有许多点突然从 $\theta = \pi$ 处跳跃到了 $\theta = -\pi$ 处，或者从 $\theta = -\pi$ 处跳跃到了 $\theta = \pi$ 处。虽然利用了相图来分析混沌现象，但是得到的图像依然杂乱无章，无从下手。

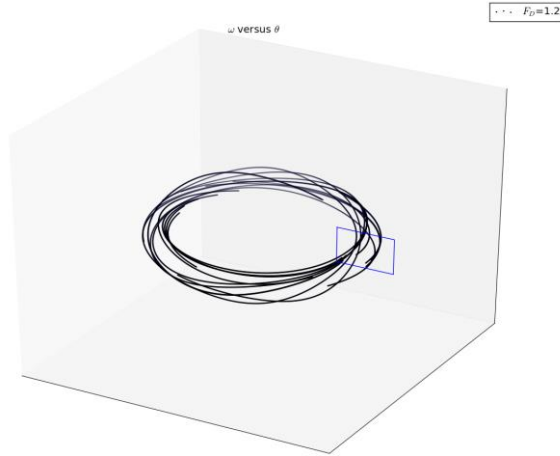


图 4: 庞加莱映射图，参数为 $q = 1/2$ ， $l = g = 9.8$ ， $\Omega_D = 2/3$ ， $dt = \pi/300$ ， $t = 100$ ，初始条件为 $\theta(0) = 0.2$ ， $\omega(0) = 0$ 。由于仅作示意图，介绍庞加莱映射的原理，因此坐标均未给出。相轨线每穿过一次庞加莱截面，如图中的方框，就在截面上留下一个点，这样可以得到庞加莱截面图。

相图虽然可以把非线性系统的状态形象地描绘出来，但是在混沌状态下的图像变得十分复杂。在相空间中取一常数坐标截面，称为庞加莱截面。用来研究相轨线与该截面的交点来分析系统复杂的运动行为，这种方法称为庞加莱映射。图 4 就是庞加莱截面的示意图，相轨线绕着一个吸引子一圈又一圈地不停转动，使相空间中的图像越来越复杂。使用庞加莱映射可见，虽然相轨线及其复杂，但是并不是毫无规律的。

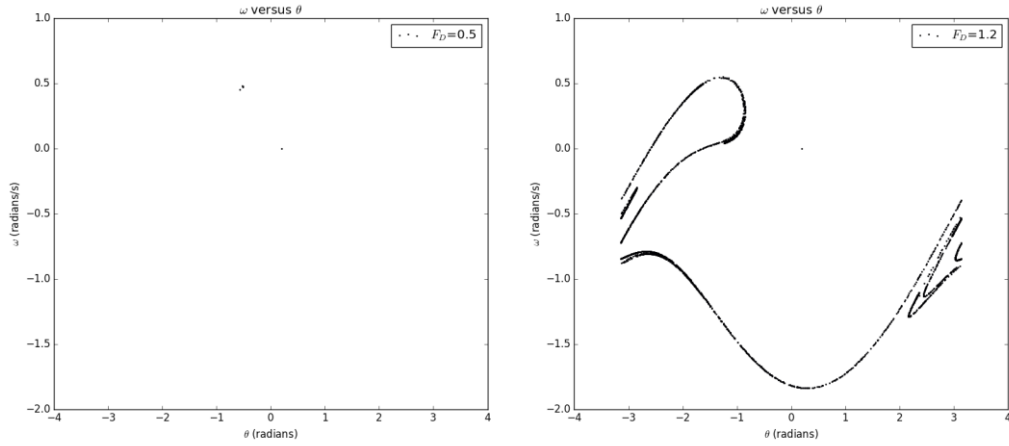


图 5: 庞加莱截面图 (同相), 参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = \pi/300$ ,  $t = 30000$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

图 5 给出了单摆运动与驱动力同相时的庞加莱截面图。可以发现, 在非混沌状态下, 系统稳定之后, 轨迹总是重复地运行在原有的轨道上, 截面上只留下一个点。也就是说, 该情况下系统做单周期运动。观察混沌状态下的图像, 发现截面上会留下无穷多点, 系统做无周期运动。以下给出几个不同相位下的截面图像。

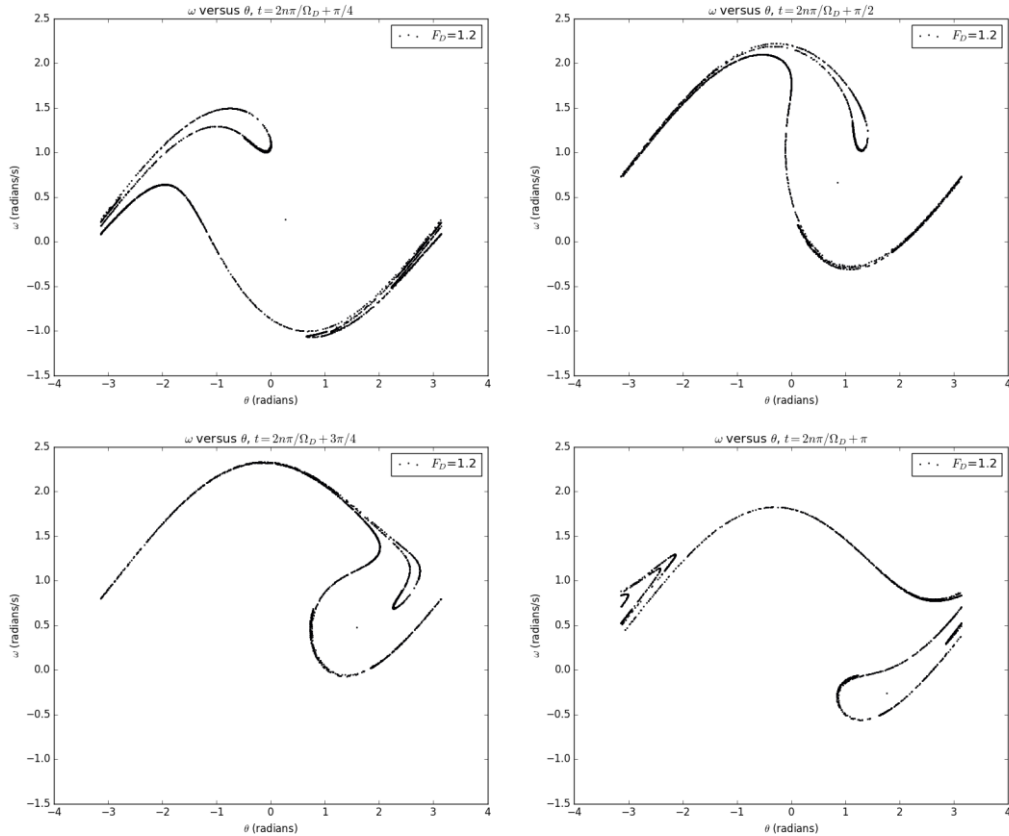


图 6: 庞加莱截面图 (不同相位), 参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = \pi/300$ ,  $t = 30000$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

混沌状态并不是混乱的一片。从相图来看, 相轨线的分布虽然在空间弥散开来, 但并不是均匀地分布在整个空间中, 而是有规律的分布。在庞加莱截面上, 如图 6, 经过足够长的时间之后, 一种由相点描绘的内部结构也逐渐显露出来。

#### 4 从分岔到混沌

我们发现，随着驱动力的逐渐增加，系统会产生混沌运动。系统进入混沌状态具有多种典型的途径，具有代表性的有，倍周期分岔道路，准周期道路，阵发混沌道路。

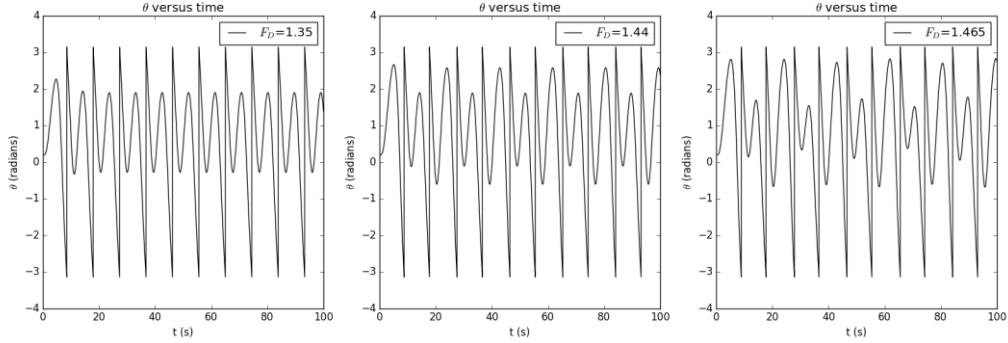


图 7:  $\theta - t$  图，参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.001$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

可以看出随着驱动力振幅的增加，系统运动状态的摆角在整数周期附近取值的个数也在逐渐增加，从刚开始的 1 个增加到 2 个，再变为 4 个。这就是引起混沌产生的周期倍增现象。为了更清晰的呈现这种关系，下面利用分岔图来具体分析系统从稳定状态过渡到混沌状态。

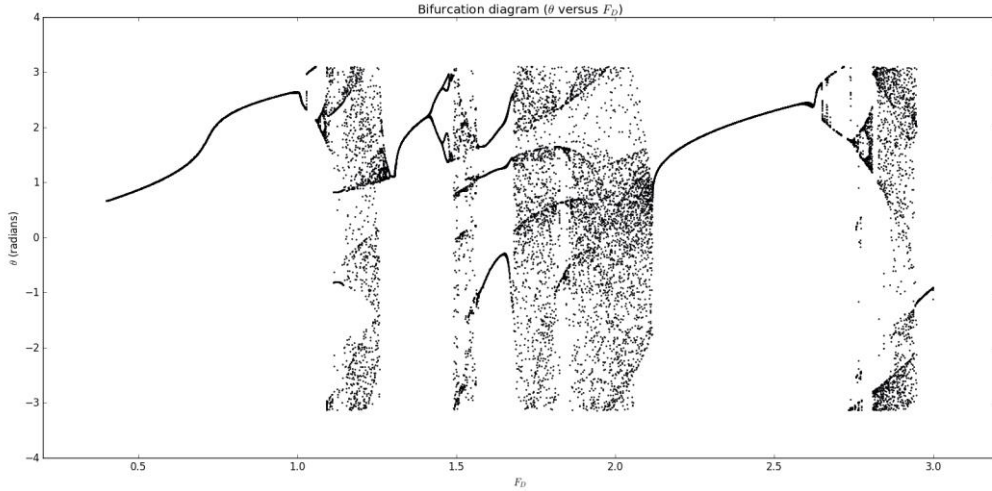


图 8: 分岔图，参数为  $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.001$ , 初始条件为  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

在图 8 中可以很清楚地看到随着驱动力振幅的增加，系统稳定状态与混沌状态交替出现，可以用来分析各种方式产生的混沌现象的原因。同时也可以用来找出混沌临界状态下的驱动力大小。例如在  $F_D = 1.0$  附近，系统产生对称性破缺进而引发混沌。在  $F_D = 1.4$  附近，混沌产生的原因就是倍周期分岔道路。这附近的一些性质将在图 9 得到更清楚的展示。

利用分岔图可以很容易的得到混沌的临界状态下驱动力的振幅。如图 10 展示的就是  $F_D = 1.4906$  和  $F_D = 1.4907$  的相图。令人惊奇的是，十分小的驱动力改变，就让系统从稳定的状态突然转换到混沌状态，同时这也是混沌系统本身的一个特点。

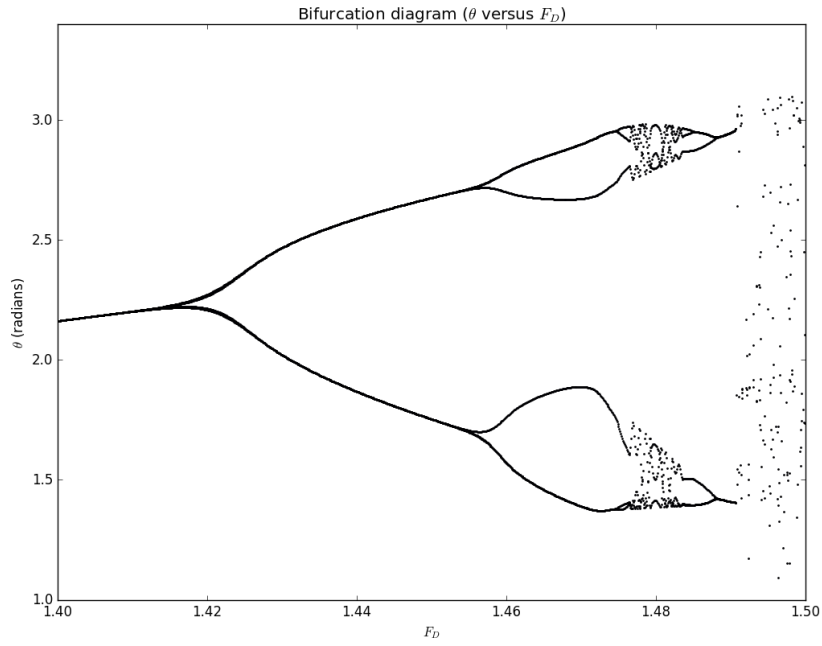


图 9: 分岔图, 参数为 $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.001$ , 初始条件为 $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

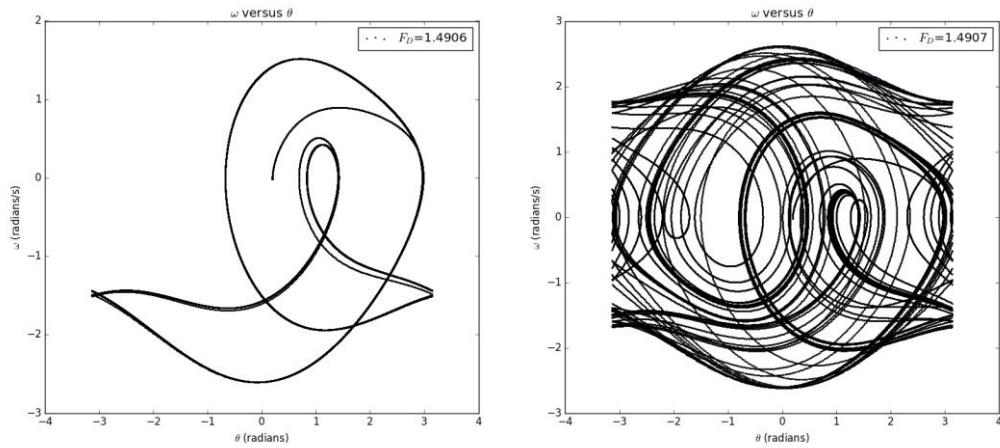


图 10: 相图, 参数为 $q = 1/2$ ,  $l = g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.01$ ,  $t = 500$ , 初始条件为 $\theta(0) = 0.2$ ,  $\omega(0) = 0$ 。

## 5 结论

非线性系统的分岔、混沌理论上的研究仍然存在着众多的问题。对非线性系统的研究只有在数值模拟的基础上, 从不同的方面进行分析。随着控制技术等的迅速发展, 对系统的控制在航空、航天、车辆、船舶、机械、建筑等方面得到越来越多的应用。要将理论与具体的应用结合起来, 尚需进行切实可行的实验, 精确捕捉系统运行过程中的各种影响因素, 形成相应的算法, 让数值模拟的方法可以真正应用到实际问题当中, 对实际的系统进行故障诊断、可靠性分析等。

### 参考文献

- [1] Giodano, N.J., Nakanishi, H. Computational Physics. 清华大学出版社, December 2007.
- [2] 丁旺才,谢建华. 碰撞系统分岔与混沌的研究进展. 力学进展, 2005. 35(4).
- [3] 混沌理论. 维基百科.
- [4] 混沌. 百度百科.
- [5] 陈洋遥. 计算物理第九次作业.
- [5] 张琦. Homework9.(自己的作业)
- [6] 非线性振动初步. 非线性物理摆.
- [7] Chen Meng-Jiao, Li Heng-Li, Liu Yi-Hui, Qu Shi-Xian, Ren Wei. Bifurcation diagram globally underpinning neuronal firing behaviors modified by  $S_k$  conductance. Chin.Phys.B. Vol.23,No.2 (2014) 028701
- [8] 王在华,胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用. 力学进展, 2013. 45(1).