



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Dinámica efectiva de un sistema de  $N$  qubits**

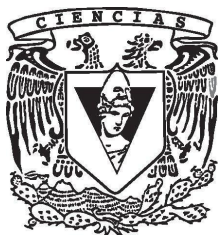
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**Físico**

**P R E S E N T A:**

**Adán Castillo Guerrero**



**DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. David Dávalos González**



## Dedicatoria

A mis padres, por proveerme con tantas oportunidades, con tanto conocimiento, y con tanto cariño. A mi hermana, en quien sé podré contar siempre. A Gabriela, por su inmenso amor, apoyo, y paciencia.



## Agradecimientos

A mi tutor, Dr. David Dávalos, por su continua disponibilidad hacia mí, sin importar las montañas o los océanos que nos separasen. Al Dr. Carlos Pineda, por las oportunidades que me ha brindado y por introducirme al campo de la información cuántica. Al Dr. Kenan Uriostegui y a Erick Navarrete, por todas las discusiones y conversaciones que tanto contribuyeron a la realización de este trabajo. Al grupo del Dr. Fernando de Melo, el Dr. Raúl Vallejos, y la Dra. Paola Obando, por sus aportaciones y la oportunidad de contribuir al esfuerzo científico. A Gabriel Villanueva y a Victor Oliva, por todas las tardes de descanso tan buenas para la salud mental. A le Ing. A. Muñoz, por su confianza y cariño. A Fernando L. Rodríguez, por su amistad.



*“Nadie sabe lo que es realmente la entropía, así que siempre tendrás la ventaja en cualquier debate.”*

— John von Neumann





## Resumen

En el presente trabajo se utiliza el Principio de Máxima Entropía para crear una aplicación (mapeo o *mapping* en inglés) de asignación que permita definir un estado microscópico dada una descripción *gruesa* de un sistema conformado por un número arbitrario de qubits. En particular, la descripción gruesa corresponde a la obtenida de un aparato de medición imperfecto. Por un lado, al realizar una medición de una partícula sobre un sistema de  $n$  partículas, existe una probabilidad no nula de que la medición se realice sobre una partícula diferente a la prevista. Además, el aparato no puede resolver todos los grados de libertad del sistema, de forma que únicamente mide un subconjunto de este. A través de la asignación de Máxima Entropía, y asumiendo que se conoce la evolución microscópica, se estudiaron diferentes dinámicas efectivas. Esto es, el cambio observable en la descripción gruesa del sistema. Algunas de las dinámicas estudiadas resultaron ser no lineales y dependientes en el estado efectivo inicial, cosa que ofrece un mecanismo prototípico para el surgimiento de la dinámica no lineal a partir de la mecánica cuántica. En particular, la dinámica inducida por evoluciones unitarias locales experimenta una pérdida de la periodicidad de la dinámica subyacente, pero muestra convergencia a una dinámica unitaria cuando el número de partículas crece. En otros casos, como el de los canales de desfaseamiento, el canal de despolarización, y un canal de estabilización, la dinámica efectiva resulta ser del mismo tipo que la dinámica subyacente y por lo mismo, un canal cuántico. Se encontró también que las dinámicas son lineales en el caso extremo en el que la probabilidad de error es nula, debido a que el único elemento no lineal de la dinámica, la aplicación de asignación, se hace lineal. Se estudió también, numéricamente, una cadena de Ising de hasta nueve partículas. Adicionalmente se compararon los resultados obtenidos de la aplicación de asignación de máxima entropía y otro tipo de aplicación, la aplicación de asignación promedio, que asigna a un estado efectivo el promedio de todos los estados microscópicos puros compatibles.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El Principio de Máxima Entropía y los modelos de grano grueso</b>	<b>3</b>
2.1. El operador de densidad . . . . .	3
2.1.1. Mezclas estadísticas . . . . .	3
2.1.2. Pureza . . . . .	5
2.1.3. Sistemas multipartitos . . . . .	7
2.1.4. Evolución y parametrización . . . . .	8
2.2. Entropía . . . . .	11
2.2.1. Entropía de Shannon . . . . .	11
2.2.2. Entropía de von Neumann . . . . .	12
2.3. El principio de máxima entropía . . . . .	13
2.3.1. El principio de máxima entropía clásico . . . . .	13
2.3.2. Extensión a la mecánica cuántica . . . . .	15
2.4. Modelos de grano grueso . . . . .	17
2.4.1. Descripciones efectivas . . . . .	17
2.4.2. Grano grueso en mecánica cuántica . . . . .	18
<b>3. La Asignación de Máxima Entropía y su evolución</b>	<b>19</b>
3.1. Un modelo de grano grueso y mediciones borrosas . . . . .	20
3.2. Construcción del estado de máxima entropía . . . . .	22
3.3. Análisis del estado de máxima entropía . . . . .	23
3.3.1. Factorizabilidad . . . . .	23
3.3.2. La relación entre multiplicadores y mediciones . . . . .	25
3.3.3. Otra expresión del estado de máxima entropía . . . . .	26
3.3.4. La asignación de máxima entropía . . . . .	27
3.4. Construcción de la dinámica . . . . .	29
<b>4. Dinámica efectiva</b>	<b>31</b>
4.1. Dinámicas locales . . . . .	31
4.1.1. Caso general . . . . .	32
4.1.2. Ejemplos particulares . . . . .	33
4.2. Compuertas de cómputo cuántico . . . . .	42
4.2.1. La compuerta cuántica SWAP . . . . .	42
4.2.2. La compuerta cuántica controlled not . . . . .	46

4.3.	Dinámicas especiales . . . . .	51
4.3.1.	Canales de Pauli . . . . .	51
4.3.2.	Canal de estabilización . . . . .	55
4.3.3.	Cadena de espines de Heisenberg . . . . .	56
<b>5.</b>	<b>La aplicación de asignación promedio</b>	<b>61</b>
5.1.	Definición y acercamiento . . . . .	61
5.2.	La diferencia entre asignaciones . . . . .	62
5.3.	Comparación de dinámicas efectivas . . . . .	63
5.3.1.	Dinámicas locales . . . . .	63
5.3.2.	La compuerta SWAP . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A.</b>	<b>Demostraciones de relaciones frecuentemente socorridas</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Muchas áreas de la física **tratan** casi exclusivamente con descripciones efectivas de los sistemas que estudian. Por ejemplo, la mecánica estadística y la mecánica clásica **tratan** con los efectos observables de una realidad microscópica. En mecánica clásica, la interacción entre dos superficies rugosas y la disipación de energía en forma de calor se **ve** como una fuerza que se opone al movimiento. En mecánica estadística, la energía cinética de miles de millones de partículas dentro de un recipiente es proporcional a la temperatura del gas. A este tipo de descripciones las llamamos modelos de grano grueso (*coarse-grained models*), mientras que a descripciones detalladas del comportamiento microscópico de un sistema se llaman modelos de grano fino (*fine-grained models*). Aunque *grano grueso* no sea un término que sea comúnmente leído en los libros de texto de física, está **al** centro del **progreso de la física como ciencia**. En efecto, la estructura gruesa atómica (*atomic gross structure*), en la que únicamente se **ve** la interacción de Coulomb entre electrones puntuales y un núcleo también puntual, puede verse como una descripción efectiva de la estructura fina del átomo, en la que sí se toma en cuenta la interacción espín-órbita, así como una corrección relativista a la energía cinética y el término de Darwin [1]. Esta, a su vez, puede verse como una descripción efectiva de la estructura hiperfina del átomo, que sí considera al espín nuclear y las interacciones que este tiene con el resto del sistema.

Aunque la mecánica cuántica describe con alta precisión los fenómenos del mundo microscópico, los objetos **macroscópicos son mejor descritos por la física clásica**. De acuerdo con el principio de correspondencia de Bohr, la mecánica cuántica debería **podría** realizar las mismas predicciones que la física clásica para **números cuánticos grandes**. La transición cuántica-clásica es objeto de estudio hasta el día de hoy. En este contexto, un modelo de grano grueso puede utilizarse para describir un número arbitrariamente grande de partículas utilizando un número pequeño de variables. De esta manera, los modelos de grano grueso podrían permitir echar una mirada a la transición entre el mundo cuántico y el mundo clásico.

Con esto en mente, nos preguntamos sobre las características de una **dinámica** que emerja de un modelo de grano grueso. En particular, por un modelo que concatene la posibilidad

de medir una partícula diferente a la pretendida y una falta de resolución en el aparato de detección. Se asume que el observador conoce tanto el número de partículas del sistema microscópico como la evolución experimentada por este, que se propaga siguiendo las leyes de la mecánica cuántica. Es aquí donde surge uno de los primeros problemas, pues si solo se tiene acceso a la información *gruesa*, ¿cómo saber qué estado microscópico es el que se propaga? En efecto, el estado observado puede ser compatible con un gran número de estados microscópicos. Una manera de enfrentarse a este problema es asumir que se cumple el *principio de mínima información*. Esto es, toda la información no contenida dentro del estado efectivo inicial se considera mínima. De esta forma será posible estudiar la dinámica efectiva.

Para abordar el problema, en el capítulo 2 se introducen los conceptos que serán fundamentales a lo largo del trabajo. Principalmente, el formalismo de operadores de densidad, el Principio de Máxima Entropía, y los modelos de grano grueso. Una vez establecida la base teórica, el capítulo 3 presenta la aplicación (mapeo o *mapping* en inglés) de grano grueso que se utilizará, así como la *aplicación de asignación de máxima entropía*, y se define matemáticamente a la dinámica efectiva como la evolución seguida por el sistema efectivo. Con dichas herramientas en mano, en el capítulo 4 se desarrolla el estudio de las dinámicas efectivas inducidas por diferentes tipos de dinámicas microscópicas. Se consideran evoluciones unitarias locales, algunas compuertas de uso común en cómputo cuántico, canales de Pauli, la cadena de Ising, entre otros. Finalmente, en el capítulo 5 se comparan los resultados obtenidos a través de la aplicación de asignación de máxima entropía con aquellos que pueden surgir del uso de otra aplicación de asignación: la *aplicación de asignación promedio*.

## Capítulo 2

# El Principio de Máxima Entropía y los modelos de grano grueso

El desarrollo del presente trabajo descansa completamente sobre los hombros de tres conceptos: el operador de densidad, el principio de máxima entropía, y los modelos de grano grueso. En este capítulo se introducirán cada una de estas ideas. Primero, se discutirá el formalismo del operador de densidad, introducido mediante la necesidad de este a la hora de estudiar mezclas estadísticas de estados cuánticos. Luego se analizará el concepto de entropía en los contextos de las teorías de información tanto clásica como cuántica, a través del cual se derivará la expresión de la inferencia de máxima entropía de un sistema cuántico. Finalmente, se comentará sobre los modelos de grano grueso, como descripciones *efectivas* de sistemas de dimensión alta, donde por *efectivas* nos referimos a descripciones en las que no se tiene acceso a todos los grados de libertad del sistema.

### 2.1. El operador de densidad

#### 2.1.1. Mezclas estadísticas

En el contexto de la mecánica cuántica nos enfrentamos a dos tipos de probabilidades. La primera, la probabilidad cuántica, está codificada dentro de los vectores de estado que se utilizan para describir el estado en el que se puede hallar un sistema. Sin embargo, los vectores de estado no contemplan el segundo tipo de probabilidad: la asociada a la ignorancia. Esta no es una probabilidad cuántica (aquella que se define como el valor absoluto al cuadrado de una amplitud de probabilidad), sino una clásica. Por esto, y porque será particularmente útil para nuestro trabajo, introducimos el concepto del operador de densidad (también llamado, en el caso discreto, que es el que nos incumbe, matriz de densidad).

Supóngase que en lugar de estudiar un sistema que está completamente descrito por

$|\varphi\rangle \in \mathbf{H}_n$ , con  $\mathbf{H}_n$  el espacio de Hilbert de dimensión  $n$ , i.e.  $\mathbf{H}_n = \mathbb{C}^n$ , se trabaja con uno que está en el estado  $|\varphi_j\rangle$  con probabilidad  $p_j$ , donde  $\{|\varphi_j\rangle\}_{j=1}^m$  es un conjunto no necesariamente ortogonal de  $m$  estados de  $n$  niveles  $|\varphi_j\rangle \in \mathbf{H}_n$ , y  $\{p_j\}_{j=1}^m$  es un conjunto de números reales no negativos tales que  $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ .

De este sistema se dice que se halla en un estado de *mezcla estadística*. Esto no debe confundirse con que el sistema se halle en una superposición coherente de estados  $|\varphi_j\rangle$  con coeficientes  $\sqrt{p_j}$ , ya que dicha superposición está bien determinada, y está completamente descrita por  $|\psi\rangle = \sum_j e^{i\theta_j} \sqrt{p_j} |\varphi_j\rangle$ , mientras que la mezcla no lo está, pues parte del elemento probabilístico está asociado a un grado de ignorancia sobre la preparación del sistema. La mezcla estadística, en este sentido, toma en cuenta no sólo la probabilidad intrínseca a cada estado cuántico, sino una probabilidad clásica,  $p_j$ .

Consideremos ahora un observable descrito por un operador hermítico  $A$ , se sabe que el valor de expectación del observable, con respecto a un estado  $|\varphi_j\rangle$ , está dado por  $\langle A \rangle_j = \langle \varphi_j | A | \varphi_j \rangle$ . El valor esperado de dicho observable con respecto a la mezcla estadística será, justamente, el promedio de los valores esperados respecto a los estados cuánticos en la mezcla:

$$\langle A \rangle = \sum_{j=1}^m p_j \langle \varphi_j | A | \varphi_j \rangle.$$

Pues bien, esta expresión puede ser manipulada a través de una base ortogonal  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^n$  del espacio  $\mathbf{H}_n$ :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{j=1}^m p_j \langle \varphi_j | A | \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^n p_j \langle e_l | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | e_k \rangle \langle e_k | A | e_l \rangle. \end{aligned}$$

Esta es una suma sobre los elementos de la matriz del observador  $A$  y los de las matrices definidas por  $|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ . Agrupando la suma sobre  $j$  y tomando en cuenta completez de la base  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^n$ ,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{k,l=1}^n \langle e_l | \left( \sum_{j=1}^m p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right) | e_k \rangle \langle e_k | A | e_l \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \langle e_l | \left( \sum_{j=1}^m p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right) A | e_l \rangle \\ &= \text{Tr} \left[ \left( \sum_{j=1}^m p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right) A \right], \end{aligned}$$

Con lo que la mezcla queda descrita por el operador de densidad  $\rho$ , definido según

$$\rho = \sum_{j=1}^m p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|. \quad (2.1)$$



Entonces podemos observar que es posible hallar el valor esperado de un observable respecto a un estado utilizando el operador de densidad, cuya expresión está dada por

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho). \quad (2.2)$$

Ahora, es necesario ser capaz de distinguir si un operador cualquiera corresponde a un operador de la forma (2.1). De esta definición destilan dos propiedades que permiten reconocer si un operador arbitrario es un operador de densidad válido, o no [2]:

1.  $\text{Tr}(\rho) = 1$
2.  $\rho \geq 0$ ,

donde  $\rho \geq 0$  se define como  $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0 \forall |\varphi\rangle \in \mathbf{H}_n$ . La primera propiedad es la condición de normalización de  $\rho$ . Deriva de la normalización de los estados  $|\varphi_j\rangle$  que definen al sistema y del requerimiento que  $\sum_j p_j = 1$ . La segunda establece que  $\rho$  es una matriz positiva semidefinida y puede interpretarse como la necesidad de que la probabilidad de que el sistema descrito por  $\rho$  se halle en alguno de los estados que conforman la mezcla sea mayor o igual a 0. Un operador es un operador de densidad si y solo si cumple con estas propiedades. Por esto, estos dos puntos funcionan como una definición alternativa al operador de densidad.

A partir de este momento se asume que todos los espacios de Hilbert con los que se trabaja son complejos y de dimension finita. Esto es, son todos del tipo  $\mathbf{H}_n = \mathbb{C}^n$ . Al conjunto de todos los operadores lineales acotados que actúan sobre un espacio  $\mathbf{H}_n$  se le denotará como  $\mathcal{B}(\mathbf{H}_n)$ . Luego, al conjunto de operadores lineales Hermitianos se le denotará mediante  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_n)$ . Finalmente, al conjunto de operadores de densidad se le denotará mediante  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$ . Como nos concentramos en espacios de dimension finita, los operadores tienen representación matricial. Los términos *matriz de densidad* y *operador de densidad* se consideran intercambiables.

### 2.1.2. Pureza

La diferencia entre una mezcla estadística y una superposición puede no ser del todo clara. ¿Cómo son diferentes un sistema que tiene una probabilidad  $p_j$  de hallarse en el estado  $|\varphi_j\rangle$  y otro que se halla en una superposición de cada estado  $|\varphi_j\rangle$  con coeficientes  $\sqrt{p_j}$ ?

Para responder, considérense dos sistemas de dos niveles. El primero puede hallarse en cualquiera de los siguientes estados

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con la misma probabilidad  $p = \frac{1}{2}$ . Entonces el operador de densidad que describe al sistema es

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_2.$$

Por otro lado, el segundo sistema se halla en una superposición de los mismos estados, con coeficientes  $\sqrt{p}$ . El operador de densidad que describe al segundo sistema es

$$|\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{con} \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Es claro que  $|\psi\rangle\langle\psi|$  y  $\rho$  no describen al mismo objeto, pues  $\rho \neq |\psi\rangle\langle\psi|$ . Si propusiéramos calcular la probabilidad de cada uno de hallarse en el estado  $|0\rangle$  encontraríamos que

$$\langle 0 | \rho | 0 \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \langle 0 | \psi \rangle \langle \psi | 0 \rangle = \frac{1}{2},$$

y el resultado es el mismo si se hiciera con el estado  $|1\rangle$ . Parecería entonces que los sistemas se hallan en el mismo estado. Esto es falso. Si realizamos un cambio de base, de  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  a  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , donde

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y calculamos la probabilidad de que cada sistema se halle en el estado  $|+\rangle$  encontraremos

$$\langle + | \rho | + \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{pero} \quad \langle + | \psi \rangle \langle \psi | + \rangle = 1.$$

El segundo resultado es de esperarse, pues  $|\psi\rangle\langle\psi|$  se halla en el estado  $|+\rangle$ . Por otro lado, el sistema  $\rho$  siempre tendrá una probabilidad  $\frac{1}{2}$  de hallarse en cualquiera de los dos elementos de cualquier base ortogonal que escojamos. La diferencia entre ambos sistemas es que el elemento probabilístico asociado a las mediciones sobre  $|\psi\rangle\langle\psi|$  es de naturaleza cuántica, y viene de que el sistema se halla en una superposición de estados ortogonales, mientras que en el caso de  $\rho$ , el elemento probabilístico se debe a nuestra ignorancia sobre la preparación del estado [3]. El hecho de que hallemos que  $\rho$  siempre tenga una probabilidad  $\frac{1}{2}$  de hallarse en alguno de los dos elementos de cualquier base ortogonal es una propiedad del estado máximamente mezclado, que puede verse como un estado de cuya preparación somos máximamente ignorantes.

Observamos entonces que hay una diferencia fundamental entre los sistemas que pueden ser descritos por un vector de estado y aquellos que no. Considérese el caso en que, dada la expresión 2.1, el estado del sistema es  $|\varphi_1\rangle$  con probabilidad  $p_1 = 1$ , i.e.  $\rho = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ . En tal caso decimos que  $\rho$  es un estado puro: los estados puros no pueden expresarse como una combinación convexa de otros estados. Claramente,  $\rho^2 = \rho$ . Esto hace de  $\rho$  un proyector de rango 1, de lo que se sigue que  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ .

Como en general se cumple que  $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i p_i^2 \leq 1$ , definimos a la pureza como una medida de que tan puro es un estado como [4]

$$\text{Pu}(\rho) = \text{Tr}(\rho^2).$$

De esta definición es posible afirmar que

- Un estado es puro si y sólo si  $\text{Pu}(\rho) = 1$ .
- Para todo estado  $\rho$ ,  $\frac{1}{n} \leq \text{Pu}(\rho) \leq 1$ .

### 2.1.3. Sistemas multipartitos

Hasta ahora hemos hablado de sistemas descritos por operadores de densidad en  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$ , pero, ¿qué sucede si el sistema que estudiamos está conformado por dos subsistemas, cada uno descrito a través de sus respectivos espacios de Hilbert? Sean, pues,  $A$  y  $B$  dos sistemas con espacios de Hilbert de dimensión finita  $\mathbf{H}^A$  y  $\mathbf{H}^B$ , y sea  $C$  un sistema compuesto por  $A$  y  $B$ . Entonces el producto tensorial de los espacios  $\mathbf{H}^A$  y  $\mathbf{H}^B$  es otro espacio de Hilbert, uno asociado al sistema  $C$ :

$$\mathbf{H}^C = \mathbf{H}^A \otimes \mathbf{H}^B.$$

La dimensión del espacio de Hilbert del sistema multipartito cumple

$$\dim(\mathbf{H}^C) = \dim(\mathbf{H}^A)\dim(\mathbf{H}^B).$$

Si  $A$  y  $B$  representaran dos partículas diferentes, entonces  $C$  representa a las partículas como conjunto, como sistema de dos partículas. Si cada una de las partículas puede ser descrita mediante un vector de estado, el estado del sistema es simplemente el producto tensorial de dichos vectores de estado:

$$|\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle \in \mathbf{H}^C \quad \forall |\psi^A\rangle \in \mathbf{H}^A, |\psi^B\rangle \in \mathbf{H}^B.$$

Si un estado puede escribirse como un producto tensorial de estados pertenecientes a los subsistemas del sistema multipartito, entonces se dice que es un estado *producto* o *separable*. Nótese que, en general, los estados del sistema compuesto no son estados separables. En realidad, dadas  $\{|\varphi_i^A\rangle\}$  y  $\{|\varphi_j^B\rangle\}$  bases ortonormales de los espacios  $\mathbf{H}^A$  y  $\mathbf{H}^B$  respectivamente, podemos escribir a todo estado puro  $|\psi^C\rangle$  del sistema multipartito como

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} |\varphi_j^A\rangle \otimes |\varphi_k^B\rangle.$$

El significado físico de que un sistema se halle en un estado producto es que el sistema se halla en un estado en el que no hay correlaciones entre sus subsistemas (de esto que puedan separarse). Un estado que no puede separarse tiene cierto grado de **entrelazamiento**, y por esto deja de tener sentido hablar de vectores de estado individuales a cada partícula. Ahora sean  $G^A$  y  $G^B$  dos operadores que actúan en  $\mathbf{H}^A$  y  $\mathbf{H}^B$  respectivamente, correspondientes a observables de cada subsistema. Entonces se cumple:

$$G^A |\psi^A\rangle \otimes G^B |\psi^B\rangle = (G^A \otimes G^B) |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle.$$

¿Qué sucede si únicamente nos es relevante el estado de una partícula? Es en este caso en el que surge el concepto de la matriz de densidad reducida. Si  $\rho^C$  es la matriz de densidad del sistema compuesto por  $A$  y  $B$ , entonces la matriz de densidad reducida del sistema  $A$  es

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^C),$$

donde  $\text{Tr}_B$  representa la operación de traza parcial con respecto al subsistema  $B$ . Si la traza de  $\rho^C$  es

$$\text{Tr}(\rho^C) = \sum_j \langle \varphi_j^C | \rho^C | \varphi_j^C \rangle,$$

para toda base ortonormal  $\{|\varphi_j^C\rangle\}$  de  $\mathbf{H}^C$ , entonces, para toda base ortonormal  $\{|\varphi_j^B\rangle\}$  de  $\mathbf{H}^B$  la traza parcial respecto a  $B$  es [5]

$$\text{Tr}_B(\rho^C) = \sum_j (\mathbb{1}^A \otimes \langle \varphi_j^B |) \rho^C (\mathbb{1}^A \otimes |\varphi_j^B\rangle). \quad (2.3)$$

Puede verse que el resultado de la operación es trazar sobre los elementos del sistema que no es de interés. La matriz reducida del sistema  $A$ , o traza parcial con respecto al sistema  $B$ , actúa como matriz de densidad de  $A$ , ya que contiene toda la descripción estadística de dicho subsistema. Ahora, sea  $G^A$  una observable del subsistema  $A$ . Esto quiere decir que  $G^A$  actúa sobre  $\rho^C$  como  $(G^A \otimes \mathbb{1}_B)$ . Obsérvese que

$$\langle G^A \rangle = \text{Tr}((G^A \otimes \mathbb{1}_B)\rho^C) = \text{Tr}(G^A \rho^A).$$

### 2.1.4. Evolución y parametrización

#### Evolución de sistemas cerrados

La evolución de un sistema cuántico cerrado descrito por un vector de estado está dada por la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle,$$

cuya solución formal está dada en términos de un operador unitario  $U(t, t_0)$  según

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad \text{con} \quad U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar},$$

siempre y cuando el hamiltoniano  $H$  no dependa explícitamente del tiempo. Pues bien, los postulados de la mecánica cuántica pueden adaptarse al formalismo de operadores de densidad. De la ecuación de Schrödinger se sigue que la evolución de un sistema descrito por un operador de densidad  $\rho$  está descrita por ecuación de Liouville-von Neumann,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)].$$

De la misma forma que antes, la solución queda expresada en términos de un operador unitario,

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0).$$

## Evolución de sistemas abiertos

Considérese, en cambio, que el sistema de interés  $S$  está acoplado a un entorno  $E$  cuyo estado es  $\rho_E$  y que, inicialmente, el conjunto de estos dos conforma un sistema cerrado descrito por el operador de densidad  $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E$ . Esta condición inicial está justificada experimentalmente si se considera que el sistema  $S$  se prepara al hacer una medición proyectiva, de tal manera que el estado total queda separable. Dado que el total es cerrado, este evoluciona siguiendo la ecuación de Liouville-von Neumann,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)] \quad \text{con} \quad \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E.$$

Sin embargo, para hallar la ecuación de la dinámica del sistema de interés es necesario trazar al entorno de ambos lados de esta ecuación, de forma que se halla

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_S(t) = \text{Tr}_E([H, \rho(t)]) \quad \text{con} \quad \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E,$$

cuya solución formal está dada en términos de un superoperador parametrizado por  $t$ ,  $\mathcal{E}_t$ ,

$$\rho_S(t) = \mathcal{E}_t(\rho_S(0)).$$

En esta ecuación,  $\mathcal{E}_t$  está definido como

$$\mathcal{E}_t(\rho_S(0)) = \text{Tr}_E [U(t, 0) (\rho_S(0) \otimes \rho_E) U^\dagger(t, 0)],$$

y cumple que es un canal cuántico [6] (también llamado operación cuántica [3] o aplicación dinámica [7])  $\forall t$ , y que  $\mathcal{E}_0 = \text{id}_S$ . El formalismo de los canales cuánticos queda fuera del alcance de este trabajo, y sin entrar en más detalle, basta con señalar que los canales cuánticos son aplicaciones lineales completamente positivas que preservan la traza, i.e. todo canal cuántico  $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$  cumple que [8]

1.  $\mathcal{E} \otimes \text{id}_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_k) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_k)$  es positivo para todo entero positivo  $k$ .
2.  $\text{Tr}(\mathcal{E}(\Delta)) = \text{Tr}(\Delta)$ .

Los canales cuánticos están relacionados directamente al esquema de sistemas abiertos a través del teorema de Stinespring [8], de acuerdo con el cual dado un canal cuántico

$$\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

existen un espacio de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$  y un operador unitario  $U$  que actúa sobre  $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  tales que

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_2 (U (\rho \otimes |e\rangle\langle e|) U^\dagger),$$

donde  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  y  $|e\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}$ .

## Parametrización del operador de densidad

Es común escoger alguna base hermítica para poder parametrizar a las matrices de densidad. El beneficio de hacer esto es que, por ser  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$  un subconjunto de  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_n)$ , dicha parametrización será real, y aún más: los parámetros serán promedios de observables. Dicho de otro modo, se puede escoger una base de tal forma que sea un conjunto de observables a través del cual sea posible reconstruir el estado de un sistema. Una elección común de base son las matrices generalizadas de Gell-Mann, junto a la matriz identidad.

Sea  $\{\varsigma_k\}_k$  el conjunto de  $n^2 - 1$  matrices generalizadas de Gell-Mann que generan a  $\text{SU}(n)$  y  $\rho$  una matriz de densidad  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$ . Entonces  $\rho$  puede expandirse en la base formada por dichas matrices y la identidad a través del producto punto de Hilbert-Schmidt como

$$\rho = \frac{1}{n} \left( \mathbb{1}_n \text{Tr}(\rho) + \sum_{k=1}^{n^2-1} \text{Tr}(\rho \varsigma_k) \varsigma_k \right).$$

Lo que significa que está completamente descrita por el vector generalizado de Bloch de dimensión  $n^2 - 1$ ,  $\vec{\gamma}$  definido a través de

$$\gamma_k = \text{Tr}(\rho \varsigma_k),$$

de tal manera que la matriz de densidad  $\rho$  puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{n} (\mathbb{1}_n + \vec{\gamma} \cdot \vec{\varsigma}). \quad (2.4)$$

Esta parametrización es especialmente útil en el caso en que  $n = 2$ , en el que los generadores corresponden a las matrices de Pauli,  $\sigma_j$ . Si  $n = 2$ , el conjunto de vectores de Bloch corresponde a la bola unitaria tridimensional (llamada *esfera de Bloch*), con los estados puros en la superficie y los estados mixtos en el interior. Esto permite visualizar dinámicas cuánticas de un qubit de forma geométrica. Por ejemplo, en la esfera de Bloch, las dinámicas unitarias se ven traducidas a rotaciones respecto al origen. Por esta razón, esfera de Bloch será una herramienta ampliamente utilizada a lo largo de este trabajo. Para casos en los que la dimensión es una potencia de 2, es posible obtener nuevos generadores a través de los productos tensoriales de las matrices de Pauli consigo mismas y con la matriz identidad. El caso  $n = 4$ , por ejemplo [3]:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^3 \gamma_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k,$$

donde  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  y

$$\gamma_{jk} = \text{Tr}(\sigma_j \otimes \sigma_k \rho). \quad (2.5)$$

Obsérvese que, como se mencionó previamente, los parámetros  $\gamma_{jk}$  son promedios de las observables  $\sigma_j \otimes \sigma_k$ . Combinar las ecuaciones (2.5) y (2.4) permite reconstruir el estado del sistema. A esto se le llama *tomografía de estados cuánticos*. Si un conjunto de operadores forman una base en el espacio de operadores acotados  $\mathcal{B}(\mathbf{H}_n)$ , se dice que dicho conjunto es *tomográficamente completo*, pues pueden utilizarse para realizar una tomografía *completa* del estado [3].

## 2.2. Entropía

### 2.2.1. Entropía de Shannon

A finales de los años cuarenta, Claude Shannon se preguntaba sobre una medida de la *incertidumbre*, o de la *información*<sup>1</sup> asociada a un proceso cuyo resultado estuviera descrito por una variable aleatoria  $X$  con distribución de probabilidad  $p(x_j)$ .

La cantidad de información provista por el resultado de un experimento depende de la probabilidad asociada a dicho suceso. Por ejemplo, al tirar un dado es mucho menos informativo saber que no cayó un 6 que saber que cayó un 6, ya que cada número tiene una probabilidad de  $\frac{5}{6}$  de no caer, pero sólo  $\frac{1}{6}$  de caer. Con la misma línea de razonamiento, conocer el resultado de un evento que ocurre con probabilidad  $p = 1$  no transmite ninguna información. Si a cada valor de  $X$  se le puede asociar una cantidad de información, entonces debe poder calcularse la cantidad de información promedio: esta es la medida que buscaba Shannon. La forma de esta medida, denotada  $H(p)$ , vino de las propiedades que el matemático estadounidense afirmó que debía cumplir [9, 10]

1.  $S_S(p)$  debe ser continua en  $p$ .
2.  $S_S(p)$  debe ser una función creciente, monotónica de  $n$  cuando  $p_j = \frac{1}{n}$ .
3. Si  $X$  e  $Y$  son procesos independientes,  $S_S(p_X(x_j)p_Y(y_l)) = S_S(p_X(x_j)) + S_S(p_Y(y_l))$ .

Además, demostró que

$$S_S = -k \sum_j p(x_j) \log p(x_j), \quad (2.6)$$

donde  $k$  es una constante que depende de la naturaleza del sistema estudiado. Fue a través de discusiones con von Neumann que Shannon descubrió que su medida ya era ampliamente utilizada en física, y que llevaba el nombre de *entropía* [11]. En efecto, la entropía de Gibbs es

$$S_G = -k_B \sum_j p_j \log p_j, \quad (2.7)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann, y  $p_j$  es la probabilidad de que el sistema se halle en la  $j$ -ésima configuración microscópica posible.

Como medida de incertidumbre, la entropía de Shannon (2.6) es máxima para distribuciones equiprobables. Retomando la idea del dado bien balanceado, como no es posible tener ningún tipo de seguridad sobre el resultado de un tiro, la incertidumbre (la entropía) es máxima.

---

<sup>1</sup>En teoría de información clásica, los términos *información*, *incertidumbre* y *sorpesa* se utilizan de manera intercambiable.

En teoría de información clásica, la entropía de Shannon se suele utilizar como la cantidad promedio de **bits** requerida para transmitir un mensaje, tomando el logaritmo en base 2 y  $k = 1$  en la ecuación (2.6). Para ejemplificar la naturaleza de “medida de información” de la entropía de Shannon, supóngase que se desea transmitir un mensaje encriptado en el que únicamente se utilizan los caracteres A, B, C y D. Si el método de encriptación es tal que todos los caracteres tienen la misma probabilidad de aparecer, entonces una forma de transmitir el mensaje es asignándoles los valores 00, 01, 10, y 11 respectivamente<sup>2</sup>. Calculando la entropía de Shannon se halla que, en promedio, se requieren dos bits para transmitir cada caracter del mensaje.

Si, en cambio, las probabilidades de que aparezca cada uno de los caracteres son  $p(A) = \frac{1}{2}$ ,  $p(B) = \frac{1}{4}$ ,  $p(C) = \frac{1}{8}$ ,  $p(D) = \frac{1}{8}$ . En este caso, una codificación posible, tal que no haya ambigüedad en la cadena de bits, es  $A \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow 10$ ,  $C \rightarrow 110$ ,  $D \rightarrow 111$ . Nótese que ahora solo se requiere un bit para transmitir la letra más común. Pues bien, si se calcula la entropía de Shannon, se encuentra que cada letra requerirá 1.75 bits para ser transmitida [12].

### 2.2.2. Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann, a pesar de haber sido obtenida veinte años antes, puede verse como la extensión cuántica de la entropía clásica de Shannon. Von Neumann introdujo el concepto del operador de densidad de forma paralela e independiente a L. Landau, y definió la entropía  $S$  asociada a un sistema descrito por un operador de densidad  $\rho$  como [13]

$$S_N(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (2.8)$$

La entropía de von Neumann puede interpretarse de manera similar a la entropía de Shannon. Si se desea transmitir un qubit preparado como  $|\psi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$ , entonces el operador de densidad que representa al estado enviado es justamente  $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . La cantidad de información recibida, o la incertidumbre sobre el qubit enviado, es justamente  $S(\rho)$ . Debe hacerse hincapié en el hecho que la entropía de un sistema cuántico es fundamentalmente diferente a la de un sistema clásico. El sistema cuántico presenta dos tipos de incertidumbres: la incertidumbre clásica, relacionada a nuestra falta de conocimiento relativa a un sistema, y **la incertidumbre cuántica, una propiedad intrínseca a los sistemas ondulatorios, matemáticamente expresada a través del Principio de Incertidumbre de Heisenberg** [10].



De la entropía de von Neumann de un sistema descrito por un operador de densidad  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_n)$ , nos interesan las siguientes propiedades [3]:

1. La entropía puede escribirse en términos de los eigenvalores de  $\rho$ ,  $\eta_j$ , como  $S_N(\rho) =$

<sup>2</sup>Esta forma de codificar los caracteres no es única, pero es la más sencilla. Otra sería asignarle a los caracteres A, B, C y D los valores 101, 1001, 10001 y 100001. Esta codificación, aunque produzca una cadena de bits que se traduzca de forma única a la cadena de caracteres, es altamente ineficiente.



$-\sum_j \eta_j \ln \eta_j$ . Esto coincide con la entropía de Shannon si se envían los eigenestados de  $\rho$  con probabilidades  $\eta_j$ .

2. La entropía es no negativa, y es nula si y sólo si  $\rho$  es de la forma  $|\psi\rangle\langle\psi|$  con  $|\psi\rangle \in \mathbf{H}_n$ .
3. La entropía es máxima cuando  $\rho = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n$ , y  $S_N(\rho) = n$ . Esto es de esperarse, de acuerdo con nuestra discusión previa, el estado máximamente mezclado es aquel del que somos máximamente ignorantes, y por lo mismo debe ser el que tiene la máxima entropía (recordando a la entropía como medida de incertidumbre).
4. La entropía de un estado producto es igual a la suma de las entropías de cada factor,  $S_N(\rho_A \otimes \rho_B) = S_N(\rho_A) + S_N(\rho_B)$ .

Nótese que la última propiedad es análoga al caso clásico en el que se tienen dos variables aleatorias independientes.

## 2.3. El principio de máxima entropía

### 2.3.1. El principio de máxima entropía clásico

Si se nos informa que el valor esperado de tirar un dado de seis caras particular es 3.5 (la variable aleatoria siendo el número de la cara), ¿cuál es la probabilidad asociada a cada cara del dado? En principio, el problema no puede resolverse, porque la distribución de probabilidad que da como resultado el valor esperado de 3.5 no es única. Sería igual de válido asumir que el dado está pesado de tal forma que cae la mitad de veces en 2, y la otra mitad de veces en 5, que suponer que todos los valores tienen una probabilidad  $\frac{1}{6}$ . La segunda opción, claro, parecería la más judiciosa. Esta opción es también la que más incertidumbre sobre cada resultado tiene asociada, y la que menos suposiciones sobre los pesos del dado hace. Aún más importante, asumir que todos los valores son igualmente probables equivale a escoger la distribución de probabilidad que maximiza la entropía.

El principio de máxima entropía fue introducido por E. T. Jaynes en 1957 [14]. En su artículo, *Information Theory and Statistical Mechanics*, Jaynes afirma que la distribución de probabilidad que maximice la entropía es la estimación menos sesgada que se puede hacer a través de la información disponible [14]. La estimación obtenida a través de la minimización de la entropía es, además, aquella que no introduce suposiciones espurias sobre el sistema.

Jaynes relaciona la teoría de información clásica con la mecánica estadística no por la simple coincidencia en la forma de las entropías de Shannon (2.6) y de Gibbs (2.7), sino a través de una reinterpretación de la mecánica estadística como una forma de inferencia estadística. En este contexto, viendo la entropía física como una medida de la incertidumbre asociada a una distribución de probabilidad, una distribución  $p$  que no maximice la entropía es una distribución que introduce información arbitraria no incluida en las hipótesis iniciales.

En efecto, el problema de hallar una distribución de probabilidad adecuada es también un problema de contaminación de la información accesible. Esta contaminación puede provenir de suposiciones arbitrarias accidentales y sin sustento físico, que pueden hacerse sobre el sistema. Utilizar el principio de máxima entropía permite hallar la distribución de probabilidad menos sesgada posible.

Sean  $x_j$  los valores de la variable aleatoria  $X$ . Sean, además  $f_k$ , funciones sobre  $X$ , de las que conocemos su valor esperado. La información accesible se puede escribir como el conjunto de restricciones

$$\langle f_l(x) \rangle = \sum_j p(x_j) f_l(x_j). \quad (2.9)$$

Buscamos  $p$  tal que maximice la entropía de Shannon (2.6),  $S_S(p)$ , sujeta a las restricciones experimentales (2.9). Para esto, utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange. A las restricciones anteriores debe añadirse la condición de normalización,

$$\sum_j p(x_j) = 1. \quad (2.10)$$

Buscamos el valor extremal respecto a las  $p(x_j)$  de la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -S_S(p) + \sum_l \lambda_l \left( \sum_j p(x_j) f_l(x_j) - \langle f_l(x) \rangle \right) + \mu \left( \sum_j p(x_j) - 1 \right).$$

En esta ecuación,  $\lambda_l$  es el multiplicador de Lagrange que pesa a la  $j$ -ésima restricción. Derivando e igualando a cero se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(x_j)} = k(1 + \log p(x_j)) + \sum_l \lambda_l f_l(x_j) + \mu = 0, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

de donde se obtiene la solución a cada componente

$$p(x_j) = \exp \left[ -\left(1 + \frac{\mu}{k}\right) - \frac{1}{k} \sum_l \lambda_l f_l(x_j) \right].$$

Esta es la distribución que maximiza a la entropía. Respecto a los multiplicadores de Lagrange, nótese que por la restricción (2.10) se cumple que

$$\frac{1}{e^{-(1+\mu)}} = \sum_j \exp \left[ -\frac{1}{k} \sum_l \lambda_l f_l(x_j) \right].$$

A partir de esta relación se define a la función de partición,

$$Z = \sum_j \exp \left[ -\frac{1}{k} \sum_l \lambda_l f_l(x_j) \right],$$

que satisface

$$\langle f_l(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_l} \ln Z.$$

Considerando lo anterior, el estimado para la distribución de probabilidad que maximiza la entropía, y que es compatible con las restricciones (2.9) tiene la forma

$$p(x_j) = \frac{1}{Z} \exp \left[ -\frac{1}{k} \sum_l \lambda_l f_l(x_j) \right]. \quad (2.11)$$

### Principio de máxima entropía en la mecánica estadística

El método anterior puede aplicarse a toda una variedad de sistemas y procesos. Considérese un conjunto de partículas que se halla en equilibrio con un reservorio térmico a temperatura  $T$ . El sistema tiene niveles energéticos  $\epsilon_j$ , pero únicamente conocemos la energía promedio  $E$ . Nos interesa conocer la probabilidad asociada a que el sistema se halle en el estado con energía  $\epsilon_j$ . Según lo discutido previamente, se busca maximizar la entropía de Gibbs dada por la ecuación (2.7). Continuando con el procedimiento, se halla que la distribución de máxima entropía compatible con la restricción  $\langle \epsilon \rangle = E$  es

$$p(x_j) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{k_B} \epsilon_j}}{Z}. \quad (2.12)$$

Para discernir el significado físico de dicho resultado, se puede sustituir esta distribución en (2.12), para encontrar que

$$S_G = \lambda \langle \epsilon \rangle + k_B \ln Z. \quad (2.13)$$

Como tratamos con un sistema en equilibrio térmico con un reservorio a una temperatura  $T$ , la física estadística establece que  $S_G$  coincide con la entropía termodinámica y

$$\lambda = \frac{1}{T},$$

con lo que se halla el significado físico del multiplicador de Lagrange. [15]

#### 2.3.2. Extensión a la mecánica cuántica

En su segundo artículo, Jaynes extiende el Principio de máxima entropía a la mecánica cuántica [16]. Considérese, en un primer momento, el caso en el que se conoce el valor esperado de la energía,  $\langle H \rangle$ , para un sistema termodinámico, es decir, podemos asumir que el estado del sistema no varía con el tiempo. Esta calidad de estado estacionario nos permite suponer que

$$[\rho, H] = 0.$$

Entonces existe una base en la que tanto  $\rho$  como  $H$  son diagonales. Sea  $\{|e_k\rangle\}_k$  dicha base, y  $E_k$  y  $\eta_k$  los  $k$ -ésimos elementos diagonales del hamiltoniano  $H$  y del operador  $\rho$  en ella, respectivamente. La entropía de von Neumann puede escribirse en términos de los eigenvalores de  $\rho$  como

$$S_N = - \sum_k \eta_k \log \eta_k.$$

Para maximizarla, volvemos a aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \sum_k \eta_k \log \eta_k + \lambda_0 \left( \sum_k \eta_k - 1 \right) + \lambda_1 \left( \sum_k \eta_k E_k - \langle H \rangle \right),$$

en donde la primera restricción es la normalización del estado  $\rho$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , y la segunda corresponde a la información experimental conocida. Nuevamente buscamos el valor extremal respecto a todos los  $\eta_k$ . Derivando e igualando a cero se halla el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = (1 + \log \eta_k) + \lambda_0 + \lambda_1 E_k = 0, \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

cuyas soluciones son

$$\eta_k = -e^{(\lambda_0 + 1 + \lambda_1 E_k)}.$$

Como  $\sum_k \eta_k = 1$ , podemos definir a la función de partición notando que

$$e^{1+\lambda_0} = \sum_k e^{-\lambda_1 E_k}.$$

Así que la expresión de los eigenvalores del estado  $\rho$  que maximiza a la entropía sujeto a la condición  $\langle H \rangle = \sum_k \eta_k E_k = E$  en términos de los eigenvalores de  $H$ ,  $E_k$  es

$$\eta_k = \frac{1}{Z} e^{-\lambda E_k}.$$

Utilizando notación de Dirac,  $\rho = \sum_k \eta_k |e_k\rangle\langle e_k|$ , podemos hallar el resultado independiente de la elección de la base:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\lambda H}. \quad (2.14)$$

Este resultado es fácilmente generalizable al caso en que contemos con un conjunto  $\{A_j\}_j$  de  $N$  observables tales que  $[A_j, \rho] = 0$ , de los que conozcamos sus valores esperados. En general, la expresión del estado de máxima entropía es

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_k \lambda_k A_k}. \quad (2.15)$$

Cabe señalar que este resultado también es válido cuando las observables  $A_k$  no conmutan entre sí o con  $\rho$ . Sin embargo la prueba es complicada y está más allá del alcance de esta tesis [17, 18].

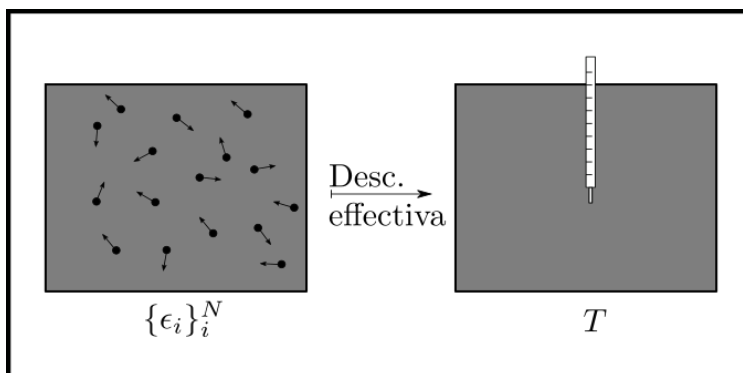
## 2.4. Modelos de grano grueso

### 2.4.1. Descripciones efectivas

En nuestro día a día no podemos procesar toda la información de todos los sistemas con los que interactuamos: no nos preocupa la energía cinética individual de cada una de las moléculas de agua presente en cada una de las gotas que caen sobre nosotros, sino qué tan caliente o frío parece el chorro que sale de la llave. Una descripción de *grano grueso* es aquella que no toma en cuenta todos los detalles de un sistema o fenómeno. Estas particularidades microscópicas suelen omitirse ya sea por la incapacidad del observador de procesar toda la información asociada a estas, o de no tener acceso a todos los grados de libertad de dicho sistema.

El conjunto de variables termodinámicas de un sistema en equilibrio térmico puede verse como una descripción efectiva de una realidad microscópica subyacente. En este sentido, de la mecánica estadística pueden obtenerse estas variables termodinámicas como promedios de propiedades microscópicas. A las colisiones de un número estadísticamente significativo de partículas contra las paredes de un objeto se les puede promediar y reducir a una única variable: presión. De manera similar, la temperatura de un gas ideal se relaciona con la energía cinética de las partículas de este explícitamente a través de un promedio utilizando la distribución de Boltzmann. En efecto,

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{2}{3} \langle E_{\text{cin}} \rangle.$$



**Figura 2.1:** Reducir las energías cinéticas individuales de  $N$  partículas a un temperatura es un modelo de grano grueso

En mecánica estadística se utiliza la estadística para pasar de una descripción fina a una gruesa, en la que cantidades arbitrariamente grandes de variables son sustituidas por distribuciones de probabilidad.

Los modelos de grano grueso son útiles porque permiten hacer predicciones sin tener que lidiar con cantidades de información que pueden ser no manejables, o simplemente no accesibles. Por esta razón, los modelos de grano grueso son comunes en física-química [19, 20, 21] .

### 2.4.2. Grano grueso en mecánica cuántica

En el contexto de la mecánica cuántica, un modelo de grano grueso puede obtenerse trazando sobre un subsistema del sistema de interés. Es importante notar que el subsistema ignorado no es necesariamente una parte que puede ser separada del sistema, como en el caso de dos partículas, sino que puede representar otros grados de libertad del sistema que se deciden ignorar, por ejemplo, al describir un ión atrapado en una trampa magnetoóptica, una opción es ignorar los grados de libertad espaciales y quedarse solo con el espín total del ión [22]. Ahora, la separación sistema-entorno no es siempre posible [23], por lo que nos limitamos a los casos en los que los grados de libertad ignorados pueden trazarse a través de la operación de traza parcial, como se discutió en la sección 2.1.3.

Un ejemplo sencillo de un modelo de grano grueso es el de un sistema de dos partículas, del cual únicamente nos importa una. En dicho caso, el modelo puede consistir en estudiar únicamente al operador de densidad reducido correspondiente a la partícula de nuestro interés. De forma general en el contexto de este trabajo, el modelo de grano grueso consiste en reducir la dimensión del sistema estudiado. En nuestro contexto, una aplicación de grano grueso  $\Lambda$  es tal que manda a un operador de densidad  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_n)$  a algún otro operador de densidad  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_m)$  con  $m < n$ . Esto es:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_m), n > m$$

## Capítulo 3

# La Asignación de Máxima Entropía y su evolución

Con las bases **asentadas**, es posible pasar al **estudio** del problema propuesto en este trabajo: el **estudio** de la dinámica efectiva asociada a un modelo de grano grueso y a una aplicación se asignación.

Supongamos que estudiamos un sistema cuántico de varias partículas, que hemos logrado aislarlo de forma que evolucione como un sistema cuántico cerrado, y que conocemos a ciencia cierta la forma de la evolución seguida por el sistema.

En principio, asumiendo que somos capaces de realizar una tomografía de estado, parecería que no tendríamos ningún problema para conocer el estado del sistema a un tiempo arbitrario, pues tenemos acceso al estado inicial del sistema. Sin embargo, al comenzar a realizar las mediciones necesarias para llevar a cabo la tomografía, nos damos cuenta de que nuestra instrumentación no sólo no puede resolver todos los grados de libertad del sistema, sino que tiene una probabilidad no nula de fallar (de inducir ruido).

Al no poder acceder a todos los grados de libertad del sistema, nuestra descripción es, efectivamente, un modelo de grano grueso. ¿Cómo podemos describir la evolución del sistema que estamos estudiando? ¿Cómo evoluciona el estado efectivo accesible?

En este capítulo describiremos matemáticamente la aplicación de grano grueso con la que se trabajará, luego se utilizará el Principio de Máxima Entropía para hallar el mejor estimado posible del estado microscópico dada nuestra descripción efectiva, y finalmente se propondrá un modelo de la dinámica efectiva. La dinámica efectiva siendo la evolución que el experimentalista observaría.

### 3.1. Un modelo de grano grueso y mediciones borrosas

Como se discutió previamente, es natural suponer que no siempre es posible disponer de toda la información sobre el estado del sistema de interés. Esto ya sea por insuficiencia en la resolución de los aparatos de medición o por el inevitable error inherente a las herramientas de medición. Un prototipo sencillo de error consiste en el inducido por un aparato que no distingue diferentes conjuntos de partículas entre sí. El caso más simple corresponde a la permutación de dos partículas. Este intercambio accidental a la hora de la medición es una *aplicación borrosa* [24].

Para ilustrar lo anterior, considérese dicha aplicación borrosa sobre un sistema de dos partículas. Para simplificarlo un poco más, supongamos que cada partícula es un sistema de dos niveles, esto es, el sistema está compuesto por los qubits  $A$  y  $B$ . El estado del sistema está caracterizado por un operador de densidad  $\varrho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2)$ . La acción de la aplicación borrosa se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2) \\ \varrho &\mapsto p\varrho + (1-p)S\varrho S, \end{aligned}$$

donde  $0 < p < 1$  es la probabilidad con la que el aparato de medición identifica correctamente a los dos subsistemas y  $S$  es el operador de transposición de dos partículas (llamado operador SWAP), definido como

$$S|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{H}_2.$$

El estado resultante,  $\mathcal{F}[\varrho_{AB}] = p\varrho_{AB} + (1-p)\varrho_{BA}$ , es una mezcla estadística del estado accesible con un detector perfecto,  $\varrho_{AB}$ , y el estado donde los qubits tienen las etiquetas equivocadas,  $\varrho_{BA} := S\varrho_{AB}S$ . Así, si quisiéramos hallar el valor esperado del observable  $\sigma_3 \otimes \mathbb{1}$  (el valor esperado de  $\sigma_z$  en la primera partícula), encontraríamos:

$$\langle \sigma_3 \otimes \mathbb{1} \rangle_{\mathcal{F}} = p \langle \sigma_3 \otimes \mathbb{1} \rangle + (1-p) \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_3 \rangle$$

donde por  $\langle A \rangle_{\mathcal{F}}$  nos referimos al valor esperado con respecto al estado del sistema descrito por  $\mathcal{F}(\varrho_{AB})$ .

Es importante notar que, aunque la aplicación borrosa modela el error asociado al aparato de medición, **no constituye por sí misma un modelo de grano grueso, pues conserva la dimensión del sistema: el aparato resuelve todos los grados de libertad.**

Al error se le añade la falta de resolución: solo se resuelve una partícula. Matemáticamente, la composición del error y de la falta de resolución puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbb{H}_2 \otimes \mathbb{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{H}_2) \\ \varrho_{AB} &\mapsto p\rho_A + (1-p)\rho_B, \end{aligned}$$

donde  $\rho_A = \text{tr}_B \varrho_{AB}$  y  $\rho_B = \text{tr}_A \varrho_{AB}$ , es decir, las matrices de densidad reducidas de las partículas  $A$  y  $B$ , respectivamente.



A diferencia de la aplicación borrosa, el modelo de grano grueso disminuye la dimensión del estado resultante. Además se puede mostrar que la ecuación anterior puede reescribirse en términos de la aplicación borrosa [24],

$$\mathcal{C}[\varrho] = (\text{Tr}_B \circ \mathcal{F})[\varrho].$$

En este contexto, diferenciamos al estado “microscópico” o “fino”, denotado por  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2)$ , y al estado “macroscópico”, “grueso”, o “efectivo” denotado por  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$ , a través de la relación

$$\rho_{\text{ef}} = \mathcal{C}[\varrho].$$

Es extremadamente importante notar que la expresión anterior no es invertible. Pueden existir una infinidad de estados  $\varrho$  tales que su descripción gruesa coincida con  $\rho_{\text{ef}}$ . Como ejemplo, supóngase que el estado efectivo está descrito por  $\rho_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ , el estado máximamente mezclado. Entonces cualquier sistema fino que se halle en un estado máximamente entrelazado será compatible con la descripción efectiva  $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ .

Pues bien, como se ha asumido que conocemos la evolución unitaria subyacente, requeirimos asignar a  $\rho$  un estado microscópico que cumpla con todas las restricciones impuestas por nuestras mediciones. Asumiremos que dicho estado asignado es el que experimenta la evolución.

La discusión anterior giró alrededor del caso en que el modelo de grano grueso reduce un espacio de dos qubits a uno de un solo qubit. Esto puede generalizarse al caso en que el aparato de medición sólo detecta una partícula cuando el sistema microscópico está conformado por  $n$  partículas. En particular, consideramos, nuevamente, subsistemas de dos niveles (qubits), de tal forma que  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2^{\otimes n})$ , donde  $\mathbf{H}_2^{\otimes n}$  representa el producto tensorial del espacio  $\mathbf{H}_2$  consigo mismo  $k$  veces. Sean  $p_i$  las probabilidades de medir cada una de las partículas. La aplicación borrosa pasa de ser un intercambio de dos partículas, a una serie de permutaciones entre la partícula de interés y el resto (sin pérdida de generalidad, asumiremos que la partícula de interés es la primera). Considerando un sistema de  $n$  subsistemas de dos niveles, la aplicación borrosa se define entonces como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{H}_2^{\otimes n}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{H}_2^{\otimes n}) \\ \varrho &\mapsto p_1 \varrho + \sum_{j=2}^n p_j (S_{1,j}) \varrho (S_{1,j}), \end{aligned}$$

donde  $S_{1,j}$  es el operador que permuta la primera y la  $j$ -ésima partícula. De esta manera, donde  $\text{Tr}_{\bar{i}}$  denota la traza parcial sobre todos menos el  $i$ -ésimo qubit, la aplicación de grano grueso que resuelve un qubit donde hay  $n$  qubits es

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbf{H}_2^{\otimes n}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{H}_2) \\ \varrho &\mapsto \text{Tr}_{\bar{1}}(\mathcal{F}[\varrho]). \end{aligned}$$

Reconocemos, según los valores de las probabilidades  $p_j$ , varios tipos de regímenes. Dos de estos serán analizados con más profundidad: si  $p_1 > p_j \forall j \neq 1$  se dice que el modelo tiene una partícula preferencial. Si  $p_j = \frac{1}{n} \forall j$  entonces no existe ninguna partícula preferencial, y se puede ver al sistema como una caja de gas en la que medir a cualquier partícula es igual de probable.

### 3.2. Construcción del estado de máxima entropía

Sea  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  el estado grueso accesible al observador, y sea  $\{A_j\}_j$  con  $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  un conjunto de observables tomográficamente completo. Si  $\rho_{\text{ef}}$  es un estado grueso correspondiente a un estado fino  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes n})$ , de acuerdo con lo discutido en el capítulo anterior, podemos asignar a  $\rho_{\text{ef}}$  un estado microscópico que maximice la entropía de Von Neumann que satisfaga las restricciones  $\langle A_j \rangle = \text{Tr}(\rho_{\text{ef}} A_j)$ . Escójase  $A_i = \sigma_i$ , las matrices de Pauli, y la aplicación de grano grueso desarrollada en la sección anterior, aquella del grano grueso y borroso dada por (3.1). Los valores esperados de los operadores se traducen como las componentes del vector de Bloch del operador  $\rho_{\text{ef}}$ . Las restricciones a las que se ve sujeto el operador  $\varrho_{\text{máx}}$  son

$$r_j = \text{Tr}[\sigma_j \rho_{\text{ef}}] \quad (3.1)$$

Aquí hay un problema: el estado que maximiza la entropía pertenece al espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{2^n})$ , mientras que las restricciones están definidas para un operador de densidad en  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ . Entonces, ¿cómo se traducen dichas restricciones en el nivel microscópico? Naturalmente, esto dependerá de la relación entre el estado efectivo  $\rho_{\text{ef}}$  y el estado subyacente  $\varrho$ ,  $\rho_{\text{ef}} = \mathcal{C}[\varrho]$ . Esto es, el estado de máxima entropía depende de la aplicación de grano grueso. Sustituyendo la relación entre algún estado microscópico compatible  $\varrho$  y el estado efectivo  $\rho_{\text{ef}}$  en la ecuación (3.1), y manipulando un poco se halla que

$$\begin{aligned} r_j &= \text{Tr}[\sigma_j \mathcal{C}[\varrho]] \\ &= \text{Tr} \left[ \sigma_j \text{Tr}_{\bar{1}} \left( p_1 \varrho + \sum_{k=2}^n p_k S_{1,k} \varrho S_{1,k} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-1}} \left( p_1 \varrho + \sum_{k=2}^n p_k S_{1,k} \varrho S_{1,k} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \left( p_1 (\sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-1}}) + \sum_{k=2}^n p_k S_{1,k} (\sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-1}}) S_{1,k} \right) \varrho \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \left( p_1 (\sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-1}}) + \sum_{k=2}^n p_k (\mathbb{1}_{2^{k-1}} \otimes \sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-k}}) \right) \varrho \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \left( \sum_{k=1}^n p_k (\mathbb{1}_{2^{k-1}} \otimes \sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-k}}) \right) \varrho \right]. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\hat{G}_j = \sum_{k=1}^n p_k (\mathbb{1}_{2^{k-1}} \otimes \sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-k}}), \quad (3.2)$$

las restricciones se pueden escribir como

$$r_j = \text{Tr}[\hat{G}_j \varrho]. \quad (3.3)$$

Estas restricciones ya se hallan en términos de observables y un operador de densidad que actúan sobre  $H_{2^n}$ . Para obtener el estado que maximiza la entropía se realiza el proceso desarrollado en el capítulo anterior. De acuerdo con la ecuación (2.15), el estado de máxima entropía compatible con (3.3) es

$$\varrho_{\text{máx}} = \frac{1}{Z} e^{\sum_j \lambda_j \hat{G}_j}. \quad (3.4)$$

Si se sustituye a  $\varrho_{\text{máx}}$  en las ecuaciones (3.3), se obtienen las relaciones entre los multiplicadores de Lagrange y los valores esperados de los operadores  $\sigma_j$ . Si se escribe

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2},$$

los resultados son

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \rangle &= \frac{\lambda_1}{\lambda} f(\lambda), \\ \langle \sigma_2 \rangle &= \frac{\lambda_2}{\lambda} f(\lambda), \\ \langle \sigma_3 \rangle &= \frac{\lambda_3}{\lambda} f(\lambda), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $f(\lambda)$  es una función biyectiva de  $\lambda$ , y cuya expresión será derivada en la siguiente sección de una forma que requiere muchas menos cuentas. Idealmente, la ecuación (3.4) se requiere en términos de los valores de expectación  $r_i = \text{Tr}(\sigma_i \rho_{\text{ef}})$ , y no de los multiplicadores de Lagrange. Aunque no es posible despejar a los multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones (3.5), la naturaleza de  $f(\lambda)$  nos permite asegurar que las relaciones son uno a uno y que tienen inversa.

A partir de este momento, cada vez que se hable del *estado de máxima entropía*, se entiende que se hace referencia al estado dado por la ecuación (3.4). Esto es, al estado de máxima entropía que es compatible con un estado efectivo inducido por nuestro modelo de grano grueso particular.

### 3.3. Análisis del estado de máxima entropía

#### 3.3.1. Factorizabilidad

Nótese que el argumento de la exponencial en la ecuación (3.4) está conformado por operadores que conmutan entre sí:

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j \hat{G}_j = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \sum_{k=1}^n p_k (\mathbb{1}_{2^{k-1}} \otimes \sigma_j \otimes \mathbb{1}_{2^{n-k}}).$$

Esto significa que el estado de máxima entropía es factorizable y tiene exactamente  $n$  factores. Explícitamente,

$$\varrho_{\text{máx}} = \bigotimes_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} \exp \left( p_k \sum_{j=1}^3 \lambda_j \sigma_j \right). \quad (3.6)$$

Un resultado así puede parecer demasiado sencillo, y puede propiciar preguntas como: ¿qué significa que el estado de máxima entropía sea factorizable? ¿Qué interpretación tienen las matrices de densidad reducidas del estado de máxima entropía? Es bien, primero hace falta ver que la información accesible al experimentalista no incluye las correlaciones entre los subsistemas. Para ver esto, considérese la parametrización de Bloch de un estado fino  $\varrho \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_4)$  como propuesta en (2.5). Esto es,

$$\varrho = \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^3 \gamma_{jk} \sigma_j \otimes \sigma_k \quad \text{con} \quad \gamma_{jk} = \text{Tr}(\sigma_j \otimes \sigma_k \varrho).$$

De acuerdo con la ecuación (2.3) las matrices de densidad reducidas de  $\varrho$  en términos de los parámetros  $\gamma_{jk}$  son

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \gamma_{0j} \sigma_j \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \gamma_{j0} \sigma_j.$$

La matriz de densidad reducida contiene la información estadística de dicho subsistema. Esto significa que las correlaciones entre los subsistemas están contenidas en los elementos  $\gamma_{jk}$  tales que  $j, k \neq 0$  (los elementos no presentes en las matrices de densidad reducidas). Ahora, la acción de la aplicación de grano grueso sobre la matriz de densidad es justamente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\varrho] &= \text{Tr}_2[(p\varrho + (1-p)S\varrho S)] \\ &= p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{1} + \sum_{k=1}^3 (p\gamma_{k0} + (1-p)\gamma_{0k}) \sigma_k \right). \end{aligned}$$

¡El estado efectivo no contiene información sobre las correlaciones del estado subyacente! Una consecuencia de esto es que todos los estados pertenecientes a un conjunto de estados microscópicos cuyas matrices de densidad reducidas coinciden tienen la misma imagen bajo la aplicación de grano grueso. Matemáticamente, si se tienen dos estados microscópicos,  $\varrho_A$  y  $\varrho_B$ , y estos estados cumplen que

$$\text{Tr}_2[\varrho_A] = \rho_1 \quad \text{Tr}_1[\varrho_A] = \rho_2 \quad \text{y} \quad \text{Tr}_2[\varrho_B] = \rho_1 \quad \text{Tr}_1[\varrho_B] = \rho_2,$$

entonces

$$\mathcal{C}[\varrho_A] = \mathcal{C}[\varrho_B].$$

Como el estado de máxima entropía respeta el hecho de que no tenemos acceso a las correlaciones, todas ellas, contenidas en los elementos  $\gamma_{jk}$  tales que  $j, k \neq 0$  se hacen cero<sup>1</sup>.

La expresión (3.6) es un producto tensorial de  $n$  operadores de densidad, a los que denotaremos como  $\rho_j$ , con  $\rho_j \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2)$ . Aún más, nótese que si definimos al vector unitario  $\hat{\lambda}$  a través de

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda},$$

con  $\lambda$  dada por la ecuación (3.5), entonces todos los factores pueden reescribirse como la exponencial real de  $\lambda(\hat{\lambda} \cdot \vec{\sigma})$  pesado por un factor probabilístico. Ahora, en virtud de la relación (A.2) hallamos

$$\rho_j = \frac{1}{Z_j} \left( \mathbb{1} \cosh p_j \lambda + \hat{\lambda} \cdot \vec{\sigma} \sinh p_j \lambda \right).$$

Para que las matrices reducidas representen estados válidos, las funciones de partición  $Z_j$  deben valer

$$Z_j = 2 \cosh p_j \lambda.$$

Las matrices de densidad reducidas del estado de máxima entropía tienen la forma

$$\rho_j = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \hat{\lambda} \cdot \vec{\sigma} \tanh p_j \lambda \right). \quad (3.7)$$

### 3.3.2. La relación entre multiplicadores y mediciones

El problema de la ecuación (3.6) es que el estado de máxima entropía está en términos de los multiplicadores de Lagrange, en lugar de cantidades con un significado físico claro. Si por alguna razón tuviéramos que resignarnos a trabajar con el estado en términos de los  $\lambda_i$ , será necesario conocer la expresión del estado macroscópico. Para hallarla, basta con pasar al estado de máxima entropía por la aplicación de grano grueso. Por construcción

$$\rho_{\text{ef}} = \mathcal{C} [\varrho_{\text{máx}}] = \sum_{j=1}^n p_j \rho_j.$$

Sustituyendo las fórmulas de  $\rho_j$ , obtenemos al estado grueso en términos de los multiplicadores de Lagrange.

$$\rho_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1} + (\hat{\lambda} \cdot \vec{\sigma}) \left( \sum_{j=1}^n p_j \tanh(p_j \lambda) \right) \right]. \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>Es importante señalar que esto no implica que las entradas  $\gamma_{jk}$  tales que  $j, k \neq 0$  de un estado de máxima entropía  $\varrho_{\text{máx}} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_4)$  sean nulas (basta con desarrollar la expresión (3.6) para ver que no es así), si no que las correlaciones contenidas en dichos elementos son nulas, esto es  $\gamma_{jk} = \gamma_{0k}\gamma_{j0}$ .

Pues bien, el estado efectivo tiene su propia parametrización de Bloch. Sea  $\vec{r}_{\text{ef}}$  el vector de Bloch de la partícula efectiva. Entonces es claro que

$$r_{\text{ef}} = \sum_{j=1}^n p_j \tanh(p_j \lambda) \quad \text{y} \quad \hat{r}_{\text{ef}} = \hat{\lambda},$$

que no son más que la norma y dirección del vector de Bloch del estado efectivo en términos de  $\lambda$ . De esta manera deducimos la relación entre los promedios de las observables a nivel grueso  $\langle \sigma_j \rangle = r_{\text{ef}} (\hat{r}_{\text{ef}})_j$  y los multiplicadores de Lagrange introducidos para la maximización de la entropía, y es

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\lambda} f(\lambda). \quad (3.9)$$

donde  $f(\lambda)$  es la función que aparece en las ecuaciones (3.5),

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^n p_j \tanh(p_j \lambda) \quad (3.10)$$

Ahora, la ecuación (3.10), fijadas  $p_j$ , es una suma de  $n$  funciones inyectivas, y como tal, es inyectiva también. Esto significa que existe la función inversa. La figura 3.1 muestra la forma de  $f(\lambda)$  para valores selectos de  $p_1$  en el caso en que  $n = 2$ . Después de una breve inspección de (3.10) se concluye que los estados puros corresponden al caso límite  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Cada multiplicador de Lagrange queda determinado de forma única a través de cantidades experimentales según

$$\lambda_i = f^{-1}(r_{\text{ef}}) \frac{\langle \sigma_i \rangle}{r_{\text{ef}}}, \quad (3.11)$$

y, por supuesto,

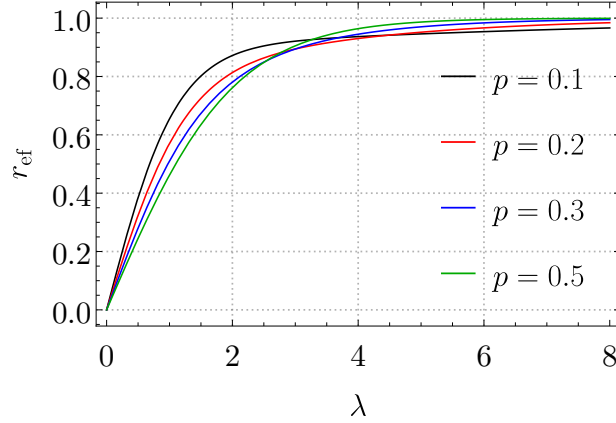
$$\lambda = f^{-1}(r_{\text{ef}})$$

Aunque siempre exista, no es posible hallar una expresión de  $f^{-1}$  para cualquier valor de  $p$  debido a que la ecuación (3.10) es una ecuación trascendental. Por esto, para escribir al estado de máxima entropía como una función de cantidades medibles, nos tendremos que conformar con llamar a  $f^{-1}$  de manera explícita.

### 3.3.3. Otra expresión del estado de máxima entropía

La ecuación (3.6) sugiere que el estado de máxima entropía puede expresarse como producto tensorial de potencias de un mismo estado. En efecto, dado un real  $q$  y una matriz cuadrada  $A$ , la potenciación  $A^q$  puede escribirse como  $e^{q \ln A}$ . Como las matrices  $e^{\sum_i \lambda_i \sigma_i}$  son positivas semidefinidas, su logaritmo es único en el caso de no ser degenerado, y en caso de degeneración, basta con tomar la rama principal [25, 26]. Entonces,

$$\varrho_{\text{máx}} = \bigotimes_{j=1}^n \frac{1}{Z_j} e^{p_j \sum_k \lambda_k \sigma_k} = \bigotimes_{j=1}^n \frac{1}{Z_j} \left( e^{\sum_k \lambda_k \sigma_k} \right)^{p_j}.$$



**Figura 3.1:**  $r_{\text{ef}}$  como función de  $\lambda$  para diferentes valores de  $p_1$  en el caso en que  $n = 2$ .

En virtud de (A.2), se cumple que

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{máx}} &= \bigotimes_{j=1}^n \frac{(\cosh \lambda (\mathbb{1} + \tanh \lambda (\hat{r}_\rho \cdot \vec{\sigma})))^{p_j}}{\text{Tr}[(\cosh \lambda (\mathbb{1} + \tanh \lambda (\hat{r}_\rho \cdot \vec{\sigma})))^{p_j}]} \\ &= \bigotimes_{j=1}^n \frac{(\mathbb{1} + \tanh \lambda (\hat{r}_\rho \cdot \vec{\sigma}))^{p_j}}{\text{Tr}[(\mathbb{1} + \tanh \lambda (\hat{r}_\rho \cdot \vec{\sigma}))^{p_j}]}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\Xi_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \tanh \lambda (\hat{r}_\rho \cdot \vec{\sigma})), \quad (3.12)$$

de tal manera que

$$\varrho_{\text{máx}} = \bigotimes_{j=1}^n \frac{(\Xi_{\text{máx}})^{p_j}}{\text{Tr}[(\Xi_{\text{máx}})^{p_j}]}. \quad (3.13)$$

### 3.3.4. La asignación de máxima entropía

El estado de máxima entropía nos otorga una herramienta de asignación para los estados efectivos. Después de todo, requerimos de una asignación razonable que pueda ser propagada según la dinámica microscópica conocida. Sea  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  un estado efectivo, entonces definimos a la aplicación de asignación de máxima entropía como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_{2^n}) \\ \rho_{\text{ef}} &\mapsto \bigotimes_{j=1}^n \frac{1}{Z_j} \exp \left( p_j \sum_{k=1}^3 \lambda_k \sigma_k \right). \end{aligned}$$

donde la dependencia de la asignación en el modelo de grano grueso se indica mediante un subíndice,  $\mathcal{C}$ , ver ecuación (3.1). Nótese que según los valores que puedan tomar las diferentes probabilidades  $p_j$ , el estado asignado tendrá diferentes propiedades. Nos concentramos en dos

casos particulares. El primero corresponde a  $p_1 = 1$ . En este caso se eliminan los términos de error, y el estado de máxima entropía es simplemente

$$\varrho_{\text{máx}} = \rho_{\text{ef}} \otimes \mathbb{1}^{2^{n-1}}, \quad (3.14)$$

Nótese que la aplicación de asignación se vuelve lineal si no hay error de medición. Esto debe verse como un caso límite. Este trabajo estudiará  $p_1 \rightarrow 1$  como el escenario en el que la probabilidad de detectar la partícula equivocada es pequeña. De acuerdo con esto, se le llamará *regimen de partícula preferencial*.

Ahora, si por otro lado,  $p_j = \frac{1}{n} \forall j$ , entonces el estado de máxima entropía es

$$\varrho_{\text{máx}} = \left[ \frac{1}{Z} \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \sigma_k \right) \right]^{\otimes n} = (\rho')^{\otimes n}.$$

Si se pasa este estado por la aplicación de grano grueso correspondiente el resultado es

$$\mathcal{C}[\varrho_{\text{máx}}] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \rho' = \rho',$$

de lo que se concluye que

$$\rho' = \rho_{\text{ef}},$$

y que por lo tanto el estado asignado es simplemente

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}) = \rho_{\text{ef}}^{\otimes n}. \quad (3.15)$$

Así, si  $p_j = \frac{1}{n} \forall j$ , la asignación de máxima entropía resulta en un estado factorizable de  $n$  partículas idénticas. A este caso se le llamará *régimen imparcial*.

Ahora supóngase que  $\varrho$  es un estado microscópico compatible con un estado efectivo puro  $\rho_{\text{ef}} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , y que  $p_j \neq 0 \forall j$ . Entonces, por (3.1) se cumple que

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{k=1}^n p_k \varrho_k,$$

donde  $\varrho_k \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  es la  $k$ -ésima traza parcial de  $\varrho$ . Pues bien, recordando que un estado puro es un punto extremo del conjunto de estados, la ecuación anterior solo se puede cumplir si  $\varrho_k = |\psi\rangle\langle\psi| \forall k$ . Si cada traza parcial de  $\varrho$  es igual al estado puro  $\rho_{\text{ef}}$  se sigue que

$$\varrho = (\rho_{\text{ef}})^{\otimes n}. \quad (3.16)$$

Nótese que para obtener (3.16) no se hizo ninguna suposición sobre la aplicación de asignación. Lo que se acaba de demostrar es que, dado que todas las trazas parciales participan en la aplicación de grano grueso, el único estado microscópico compatible con un estado efectivo puro es el  $n$ -producto de dicho estado. El estado (3.16) es un estado coherente de espín.



### 3.4. Construcción de la dinámica

Ahora que hemos establecido que usaremos como modelo de grano grueso uno que incluye tanto problemas de resolución como errores de permutación, y que hemos contruido nuestra aplicación de asignación a través del Principio de Máxima Entropía, podemos preguntarnos sobre la evolución del sistema efectivo, la “dinámica gruesa”, denotada como  $\Gamma_t$ . La dinámica efectiva es una aplicación dinámica que corresponde a la evolución observada por un experimentalista. Dado un estado efectivo inicial  $\rho_{\text{ef}}(0)$ ,

$$\begin{aligned}\Gamma_t : \mathcal{S}(\mathcal{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_2) \\ \rho_{\text{ef}}(0) &\mapsto \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}(0)).\end{aligned}$$

Debido a que asumimos que el estado que se propaga debido a la evolución subyacente es justamente un estado compatible con  $\rho_{\text{ef}}$ , seleccionado a través de una aplicación de asignación, a la dinámica gruesa la definimos como la composición

$$\Gamma_t := \mathcal{C} \circ \mathcal{V}_t \circ \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}, \quad (3.17)$$

como se ha hecho en trabajos similares [27], donde  $\mathcal{V}_t$  es la evolución seguida por el sistema microscópico. Esta puede ser unitaria, o un canal cuántico. El siguiente diagrama ilustra la ecuación anterior,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{\text{ef}}(0) & \xrightarrow{\Gamma_t} & \rho_{\text{ef}}(t) \\ \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}} \downarrow & & \uparrow \mathcal{C} \\ \varrho_{\text{máx}}(0) & \xrightarrow{\mathcal{V}_t} & \varrho_{\text{máx}}(t). \end{array}$$

Debe notarse que, debido a la no invertibilidad de la aplicación de grano grueso, en general

$$(\mathcal{U}_t \circ \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}})(\rho_{\text{ef}}) \neq (\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{V}_t \circ \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}})(\rho_{\text{ef}}),$$

que también puede escribirse como

$$\varrho_{\text{máx}}(t) \neq \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}(t))$$

Después de todo, la maximización de la entropía se restringe de acuerdo a las observaciones experimentales. Esto quiere decir que un estado construido a través del Principio de Máxima Entropía utilizando un conjunto particular de restricciones no tiene por qué satisfacer un conjunto diferente de restricciones.

En el siguiente capítulo se analizarán dinámicas efectivas generadas por diferentes dinámicas subyacentes. Si se asume que el sistema conformado por las partículas es cerrado, entonces la evolución  $\mathcal{V}_t$  será unitaria, generada por un hamiltoniano  $H$ . Algunos ejemplos de dinámicas subyacentes no unitarias son los canales de ruido usuales, como el canal de despolarización, el canal de amortiguamiento de amplitud, o el canal de amortiguamiento de fase.



A diferencia de los mapas dinámicos usualmente estudiados en teoría de sistemas cuánticos abiertos, la dinámica efectiva  $\Gamma_t$  no tiene por qué ser lineal (sí debe, por supuesto, mandar estados cuánticos a estados cuánticos), debido a que uno de los elementos de la composición que la originan no siempre es lineal: la aplicación de asignación. El estudio de las particularidades de algunas de estas dinámicas efectivas es el foco de este trabajo.

# Capítulo 4

## Dinámica efectiva

En este capítulo se estudiarán las dinámicas efectivas inducidas por diferentes tipos de dinámicas microscópicas. Primero, motivados por el hecho de que el estado de máxima entropía es factorizable, se analizarán dinámicas generadas por hamiltonianos que no tengan partes de interacción. Luego se estudiarán compuertas de dos qubits bien conocidas en cómputo cuántico: la compuerta SWAP y la compuerta CNOT (que sí presentan interacciones entre las dos partículas). Finalmente se profundizará en dinámicas más específicas, como una cadena de partículas con interacción Ising, así como evoluciones no unitarias, como el canal de despolarización, el canal de amortiguamiento de amplitud, entre otras.

### 4.1. Dinámicas locales

En la sección 2.1.3 se habló de estados factorizables como aquellos estados que, descritos por un operador de densidad  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_n)$ , tienen la forma

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B,$$

donde  $\rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_m)$ ,  $\rho_B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_l)$  y  $l + m = n$ . Siguiendo esta línea de pensamiento, con *dinámicas factorizables* nos referimos a dinámicas unitarias generadas por hamiltonianos que no contienen un término de interacción (que en el caso de dos partículas son hamiltonianos de la forma  $\mathcal{H} = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2$ ), y que por lo mismo son descritas por operadores  $\mathcal{U} \in U(n)$  del tipo

$$\mathcal{U} = U_A \otimes U_B.$$

De nuevo,  $U_A \in U(m)$ ,  $U_B \in U(l)$  y  $l + m = n$ . Los operadores locales están compuestos por operadores que actúan de forma independiente sobre diferentes subsistemas del sistema en cuestión. En el caso de un sistema compuesto por dos subsistemas de dos niveles, el operador local está compuesto por dos unitarias que actúan sobre  $\mathcal{H}_2$ . Como el estado de máxima entropía resulta ser factorizable, las dinámicas locales son una muy buena primera forma de aplicar el formalismo descrito en las secciones anteriores.

Considérese la aplicación de grano grueso de  $n$  a 1 partículas definida según (3.1), un estado efectivo  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  y la aplicación de máxima entropía compatible dada por (3.14). Si la evolución microscópica es local entonces es generada por un hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \omega_k \mathbb{1}_{2^{k-1}} \otimes H_k \otimes \mathbb{1}_{2^{n-k}},$$

siendo la unitaria

$$\mathcal{U}_t = \bigotimes_{k=1}^n \exp(-i\omega_k H_k t) = \bigotimes_{k=1}^n U_k(t). \quad (4.1)$$

A partir de este momento, para hacer más limpia la lectura de este documento se omitirán los productos tensoriales con operadores identidad. El subsistema sobre el que actúe un operador será denotado por un subíndice, de tal manera que el hamiltoniano previamente definido queda

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \omega_k H_k.$$

#### 4.1.1. Caso general

Si se considera una evolución unitaria de la forma (4.1), y se propaga al estado obtenido de la aplicación de máxima entropía, el estado evolucionado es

$$\varrho_{\text{máx}}(t) = \bigotimes_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} U_k(t) e^{(p_k \sum_j \lambda_j \sigma_j)} (U_k(t))^\dagger$$

El estado efectivo evolucionado en términos de los multiplicadores de Lagrange queda

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \sum_{k=1}^n p_k U_k(t) \rho_k (U_k(t))^\dagger. \quad (4.2)$$

donde  $\rho_k = \frac{1}{Z_k} e^{(p_k \sum_j \lambda_j \sigma_j)}$ .

Por supuesto, esta expresión puede expandirse en términos de exponenciales o de funciones hiperbólicas del vector de Bloch del estado efectivo inicial,  $\vec{r}_{\text{ef}}$ . Haciendo esto se obtiene una expresión para el valor esperado de  $\sigma_j$  a un tiempo  $t$ ,

$$\langle \sigma_i(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k \tanh(p_k \lambda) \text{Tr}[\sigma_j U_k(t) (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma}) (U_k(t))^\dagger]. \quad (4.3)$$

Si se piensa en el caso en que  $p_1 > p_j \forall j \neq 1$ , separar la contribución del sistema de interés,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j(t) \rangle &= \frac{1}{2} p_1 \tanh(p_1 \lambda) \text{Tr}[\sigma_j U_1(t) (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma}) (U_1(t))^\dagger] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n p_k \tanh(p_k \lambda) \text{Tr}[\sigma_j U_k(t) (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma}) (U_k(t))^\dagger], \end{aligned}$$

permite reconocer dos términos: uno asociado a la evolución *sin error* de nuestro sistema, descrita por el operador unitario  $U_1(t)$ , y un término de ruido. La acción de este término dependerá tanto de la naturaleza de las evoluciones locales del entorno, como del número de partículas en este.

Por otro lado, en el caso en el que no hay partícula prioritaria, i.e. ( $p_j = \frac{1}{n} \forall j$ ), la relación entre la magnitud del vector de Bloch del estado efectivo y los multiplicadores de Lagrange es  $\lambda = n \tanh^{-1}(r)$ . Esto significa que la expresión del valor esperado de  $\sigma_j$  a un tiempo  $t$  es

$$\langle \sigma_j(t) \rangle = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \text{Tr}[\sigma_j U_k(t) (\vec{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma})(U_k(t))^\dagger],$$

que no es más que una combinación lineal de las mismas componentes evolucionadas de formas diferentes.

### 4.1.2. Ejemplos particulares

#### Dinámica local simétrica

Comenzamos con el caso en el que la dinámica local es simétrica, esto es, el caso de una unitaria  $\mathcal{U} \in U(2^n)$  de la forma

$$\mathcal{U}_t = \bigotimes_{k=1}^n U(t),$$

donde  $U(t) \in U(2)$ . Se aplica la evolución al estado de máxima entropía compatible con un conjunto de observables tomográficamente completos en  $\mathbf{H}_2$  y se propaga al estado con la unitaria subyacente, para luego pasarlo por la aplicación de grano grueso y recuperar el estado efectivo evolucionado. Este caso es quizá el más sencillo, pues la simetría de la unitaria permite factorizarla:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left[ \bigotimes_{k=1}^n U(t) \rho_k (U(t))^\dagger \right] &= \sum_{k=1}^n p_k U(t) \rho_k (U(t))^\dagger \\ &= U(t) \left( \sum_{k=1}^n p_k \rho_k \right) (U(t))^\dagger \\ &= U(t) \rho_{\text{ef}} (U(t))^\dagger. \end{aligned}$$

La dinámica efectiva tiene la forma

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = U(t) \rho_{\text{ef}} U^\dagger(t). \quad (4.4)$$

Este resultado es natural debido a que no solo no hay interacción entre los diferentes subsistemas, significando esto que no se *filtra* ningún tipo de información entre la partícula de interés y el resto, sino que cada parte evoluciona de la misma manera. Bajo la aplicación de grano grueso, esto se ve como una mezcla de  $n$  entidades idénticas.

### Partículas no preferenciales invariantes

Centrémonos, momentáneamente, en el régimen de partícula preferencial, i.e.  $p_1 > p_j \forall j \neq 1$ . Asíumase que la probabilidad de detectar a la  $k$ -ésima partícula es la misma para todas excepto la primera. Entonces

$$p_k = \frac{(1 - p_1)}{n - 1} \quad \forall k \neq 1.$$

Si se sustituye eso en la expresión del estado de máxima entropía compatible con un estado efectivo  $\rho_{\text{ef}}$ , dada por la ecuación (3.6),

$$\varrho_{\text{máx}} = \bigotimes_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} \exp \left( p_k \sum_{j=1}^3 \lambda_j \sigma_j \right),$$

y se separa a la primera partícula en virtud de su preferencia, se encuentra que el estado de máxima entropía en este caso es

$$\varrho_{\text{máx}} = \rho_1 \otimes \left( \bigotimes_{k=2}^n \frac{1}{Z_k} e^{\frac{(1-p_1)}{n-1} \sum_j \lambda_j \sigma_j} \right),$$

donde, para todo  $k \neq 1$  se cumple que

$$\frac{1}{Z_k} e^{\frac{1-p_1}{n-1} \sum_j \lambda_j \sigma_j} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \tanh \left( \frac{1-p_1}{n-1} \lambda \right) \hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma} \right) \equiv \rho_{\text{np}}.$$

Como a cada partícula no preferencial se le asigna el mismo estado  $\rho_{\text{np}}$ , el estado del conjunto de partículas no preferenciales es

$$\bigotimes_{k=2}^n \rho_k = \rho_{\text{np}}^{\otimes(n-1)}.$$

Considérese ahora la dinámica local generada por el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \omega H_1.$$

Es decir, la dinámica en la que las partículas no preferenciales no varían, mientras que el subsistema de interés se propaga de forma unitaria. En este caso la dinámica efectiva es

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = p_1 U_1(t) \rho_1 (U_1(t))^\dagger + (1 - p_1) \rho_{\text{np}}.$$

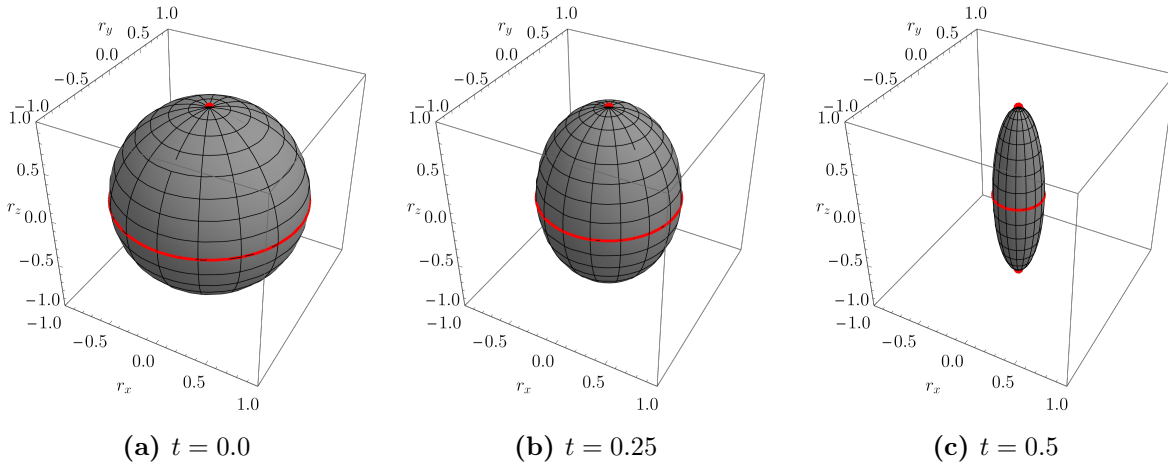
Con el objetivo de tener una representación geométrica, la dinámica puede reescribirse en términos del vector de Bloch del estado efectivo inicial. Como se discutió en la sección 2.1.4, un estado cuántico de dos niveles corresponde a un punto en la esfera de Bloch y las dinámicas unitarias se traducen en rotaciones de dicha esfera. Con esto en mente, sean  $r_1 = \tanh(p_1 \lambda)$ ,  $r_{\text{np}} = \tanh((1 - p_1) \lambda)$ , y  $R$  la rotación de la esfera generada por  $U_1$  (la unitaria que actúa sobre la primera partícula):

$$r_{\text{ef}} \hat{r}_{\text{ef}} \mapsto p_1 r_1 R \hat{r}_{\text{ef}} + (1 - p_1) r_{\text{np}} \hat{r}_{\text{ef}}.$$

Esta expresión parece no dar demasiada información: es simplemente la combinación lineal de dos vectores de Bloch, uno que ha sido rotado y otro al que no se le ha hecho nada, pero recordando que el vector de Bloch del estado efectivo inicial cumple  $r = p_1 r_1 + (1 - p_1) r_{np}$ , esta puede ser manipulada para ver que

$$r_{\text{ef}} \hat{r}_{\text{ef}} \mapsto R(r_{\text{ef}} \hat{r}_{\text{ef}} - (1 - p_1) r_{\text{np}} \hat{r}_{\text{ef}}) + (1 - p_1) r_{\text{np}} \hat{r}_{\text{ef}}.$$

La transformación que se aplica sobre  $r_{\text{ef}} \hat{r}_{\text{ef}}$  es de la forma  $T^{-1} \circ R_0 \circ T$ , con  $R_0$  una rotación a través de un eje que pasa por el origen y  $T$  una traslación. El resultado es una rotación alrededor de una línea que no pasa por el origen. Nótese que una transformación de esta naturaleza no tendría por qué mantener a los estados dentro de la esfera de Bloch. Por esta razón, la dinámica debe depender del estado mismo para asegurar que todos los puntos de la esfera sean enviados a otros puntos de la esfera (esto es, que la dinámica mande estados cuánticos a estados cuánticos).



**Figura 4.1:** Efecto de la dinámica efectiva inducida por la unitaria microscópica  $\mathcal{U} = U_1 \otimes \mathbb{1}_{2^{n-1}}$  sobre la esfera de Bloch cuando  $r_{\text{ef}} = 0.9$ ,  $p_1 = 0.6$  y  $U_1 = e^{-i\pi t \sigma_3}$ . La dramática contracción a lo largo de  $r_z$  se asocia al alto valor de  $1 - p_1$ .

En efecto, la traslación tiene una magnitud  $(1 - p_1) r_{\text{np}}$  (a notar que la traslación es pequeña, y corresponde al término de ruido) en la dirección opuesta a la del estado (i.e. depende del estado tanto en magnitud como en dirección). Así que, aunque esto podría parecer una transformación afín, no lo es, pues depende enteramente del estado. Esto significa que la evolución efectiva no es lineal, y no tiene expresión en términos de operadores de Kraus. La figura 4.1 muestra el efecto que una dinámica de este estilo tiene sobre la esfera de Bloch (en particular, el caso  $U_1 = e^{-i\omega t \sigma_3}$ ). La contracción a lo largo del eje  $r_z$  es un resultado del alto valor de  $(1 - p_1)$  (0.4), y no sería visible si  $p_1 \rightarrow 1$ .

En efecto, si  $p_1 \approx \frac{1}{2}$ , entonces  $\rho_1 \approx \rho_{\text{ef}}$ ,  $\rho_{\text{np}} \approx \rho_{\text{ef}}$ , y la dinámica efectiva no solo sería lineal, sino que se convertiría en un canal de desfase:

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) &= p_1 e^{-i\omega t \sigma_3} \rho_1 e^{i\omega t \sigma_3} + (1 - p_1) \rho_{\text{np}} \\ &\approx \frac{1}{2} (\rho_{\text{ef}} + e^{-i\omega t \sigma_3} \rho_{\text{ef}} e^{i\omega t \sigma_3}),\end{aligned}$$

cuyos operadores de Kraus son  $\frac{1}{\sqrt{2}} \{ \mathbb{1}, e^{i\omega t \sigma_3} \}$ .

### Partícula preferencial invariante

Ahora asumamos que es el sistema preferencial el que no evoluciona, mientras que las demás partículas sí lo hacen. Existen diferentes formas de abordar este problema, según la elección de las probabilidades y de la naturaleza de la evolución del resto de las partículas. Quizá el caso más sencillo es aquel en el que todas las partículas no preferenciales evolucionan de la misma forma. Esto es, una evolución generada por un hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \omega \sum_{k=2}^n H_k.$$

Sin pérdida de generalidad, tómese  $H_k = \sigma_3 \forall k$ . Recordando la ecuación (3.7), los valores de expectación de  $\sigma_j$  serán

$$\begin{aligned}\langle \sigma_1(t) \rangle &= p_1 \langle \sigma_1(0) \rangle_1 + \sum_{k=2}^n p_k \text{Tr} [\sigma_1 e^{-i\omega t \sigma_3} \rho_k e^{i\omega t \sigma_3}] \\ \langle \sigma_2(t) \rangle &= p_1 \langle \sigma_2(0) \rangle_1 + \sum_{k=2}^n p_k \text{Tr} [\sigma_2 e^{-i\omega t \sigma_3} \rho_k e^{i\omega t \sigma_3}] \\ \langle \sigma_3(t) \rangle &= \langle \sigma_3(0) \rangle_{\text{ef}},\end{aligned}$$

que quizá sea más clara escribiéndose en términos de las componentes de los vectores de Bloch de los estados de cada partícula (el primer subíndice indica la componente del vector, mientras que el segundo denota la partícula a la que pertenece):

$$\begin{aligned}r_{1,\text{ef}}(t) &= p_1 r_{1,1}(0) + \sum_{k=2}^n p_k (r_{1,k} \cos(2\omega t) - r_{2,k} \sin(2\omega t)) \\ r_{2,\text{ef}}(t) &= p_2 r_{2,1}(0) + \sum_{k=2}^n p_k (r_{2,k} \cos(2\omega t) + r_{1,k} \sin(2\omega t)) \\ r_{3,\text{ef}}(t) &= r_{3,\text{ef}}(0).\end{aligned}$$

Esto no es más que la aplicación de la misma rotación sobre todos los vectores de Bloch, a excepción del primero. Reescribiendo,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{ef}}(t) &= p_1 \vec{r}_1 + R_z(2\omega t) \vec{r}_e \\ &= \vec{r}_{\text{ef}}(0) + (R_z(2\omega t) - \mathbb{1}) \vec{r}_e\end{aligned}$$



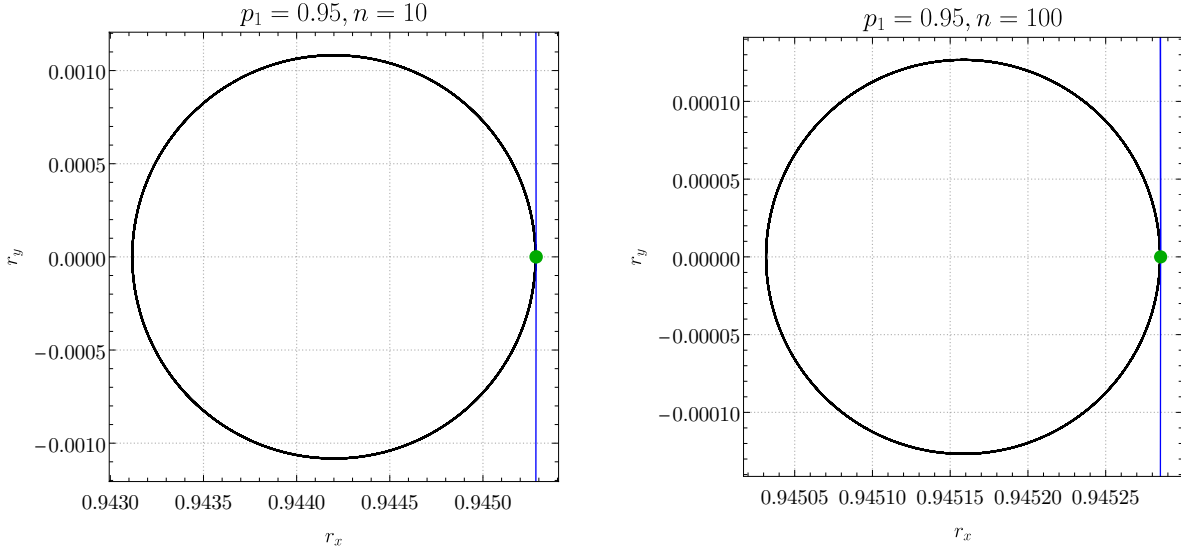
donde  $\vec{r}_e = \sum_{k=2}^n p_k \vec{r}_k$ . En este caso, el primer término es el término invariante, y sería lo único visible en el caso en que el aparato de medición no fallara, mientras que el segundo término corresponde a pequeñas oscilaciones completamente dependientes del estado efectivo inicial que nunca aumentan la pureza del estado. En efecto, considérese un estado efectivo inicial correspondiente a un sistema microscópico de 10 qubits cuyo vector de Bloch tiene radio  $r_{\text{ef}} = 0.95$  y tal que  $p_1 = 0.99$  y  $p_j = \frac{0.01}{9} \forall j \neq 1$ . La magnitud del error absoluto, esto es, la distancia del estado efectivo evolucionado al estado efectivo inicial es

$$\mathcal{O}_t = \|\vec{r}_{\text{ef}}(0) - p_1 \vec{r}_1 - R_z(2\omega t) \vec{r}_e\| = \|\vec{r}_e - R_z(2\omega t) \vec{r}_e\|.$$

Ahora, esta magnitud es máxima cuando  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ , pero depende también de las componentes de  $\vec{r}_{\text{ef}}$ . Por simplicidad, asumamos que el estado efectivo inicial no tiene componente en  $z$ . Entonces

$$\mathcal{O}_{\text{máx}} = \|-2\vec{r}_e\| = 1.08 \times 10^{-3}.$$

Estas pequeñas oscilaciones son, justamente, el término de ruido. La visualización a la solución del problema puede observarse en la Figura 4.2. Cada una de las componentes del vector de Bloch efectivo se ve como una suma de una constante con funciones periódicas que tienen el mismo periodo, o como la suma de una constante más una función periódica (viendo la combinación de los vectores de cada partícula no preferencial como una partícula efectiva). De cualquier forma, el resultado es una función periódica.



**Figura 4.2:** Oscilaciones periódicas correspondientes a la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano microscópico  $\mathcal{H} = \omega \sum_{k=2}^n \sigma_{3,k}$  en un sistema de  $n$  partículas. En azul, el conjunto de estados con el mismo radio de Bloch ( $r_{\text{ef}} = 0.95$ ) y el mismo  $r_z$  (aprox. 0.09) que el estado efectivo inicial (en verde).

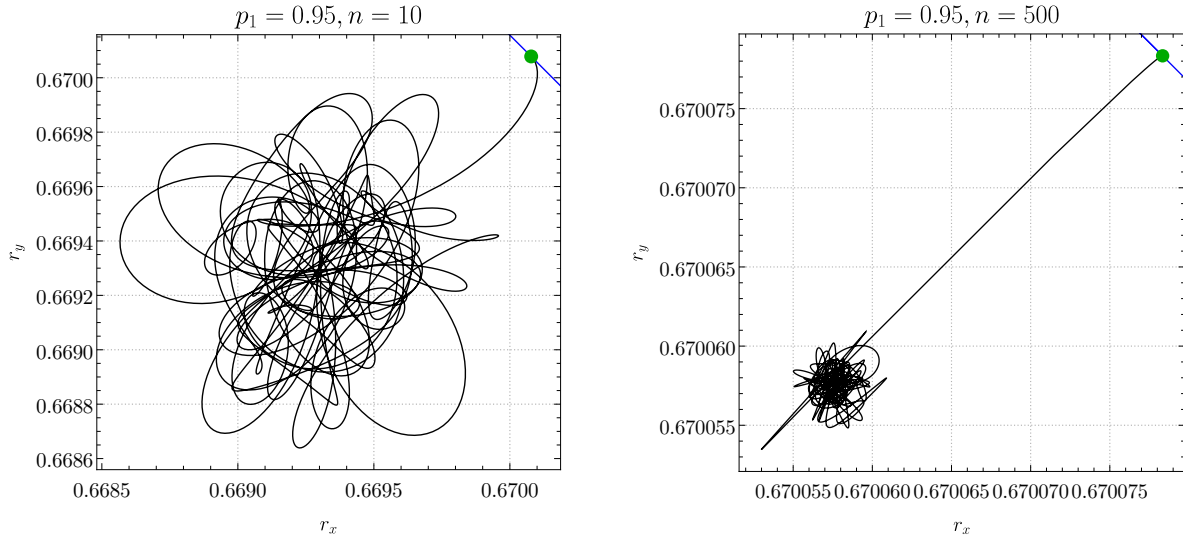
Si, por otro lado, quitamos la restricción de que todas las partículas no preferenciales evolucionen con la misma frecuencia, se vuelve imposible factorizar la rotación:

$$\vec{r}_{\text{ef}}(t) = p_1 \vec{r}_1 + \sum_{k=2}^n p_k R_z(2\omega_k t) \vec{r}_k.$$

Ahora cada partícula no preferencial contribuye al error de forma única, y a pesar de que la evolución de cada partícula no preferencial sea periódica, la combinación de estas no tiene por qué serlo. El resultado ahora depende de las frecuencias de evolución de cada partícula, de sus pesos  $p_k$ , y del número  $n$  de partículas en el sistema microscópico (si  $n = 2$  se recupera el caso anterior). Las componentes del vector de Bloch del estado efectivo evolucionado,

$$\begin{aligned} r_{1,\text{ef}}(t) &= p_1 r_{1,1}(0) + \sum_{k=2}^n p_k (r_{1,k} \cos(2\omega_k t) - r_{2,k} \sin(2\omega_k t)) \\ r_{2,\text{ef}}(t) &= p_2 r_{2,1}(0) + \sum_{k=2}^n p_k (r_{2,k} \cos(2\omega_k t) + r_{1,k} \sin(2\omega_k t)) \\ r_{3,\text{ef}}(t) &= r_{3,\text{ef}}(0). \end{aligned}$$

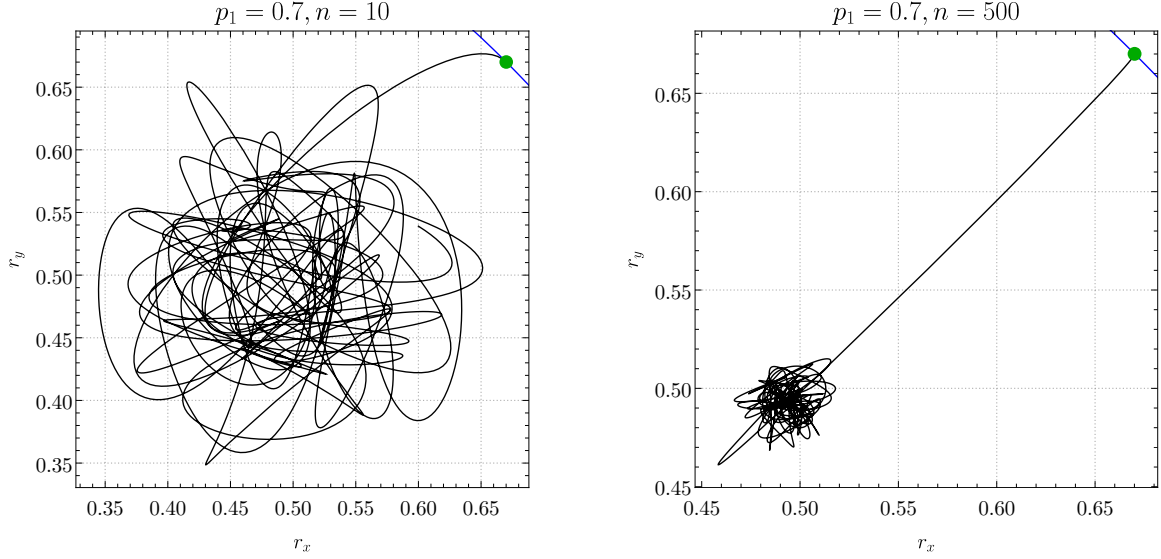
revelan la complejidad de la evolución, además de su no-linealidad, pues los vectores  $\vec{r}_k$  dependen del estado efectivo inicial a través del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Las figuras 4.3 y 4.4 muestran algunos ejemplos de la geometría de estas dinámicas, en las que las frecuencias  $\omega_k$  se obtuvieron de una distribución uniforme  $U[-3, 3]$ . En dichas figuras puede observarse la relación entre la amplitud de las variaciones y los parámetros  $p_1$  y  $n$ . En efecto, a mayor (menor) número de partículas corresponden variaciones de menor (mayor) amplitud. De manera similar, valores de  $p_1$  cercanos a 1 conducen a variaciones menos importantes.



**Figura 4.3:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_{k=2}^n \omega_k \sigma_{3,k}$  en un sistema de  $n$  partículas. En azul, el conjunto de estados con el mismo radio de Bloch ( $r_{\text{ef}} = 0.95$ ) y el mismo  $r_z$  (aprox. 0.07) que el estado efectivo inicial (verde). Nótese cómo el aumento del número de partículas conduce a variaciones menos importantes.

### Partículas no interactuantes con diferente frecuencia de transición

En los dos casos anteriores se permitió que alguna de las partes del sistema se mantuviera invariante, fuera la partícula preferencial o el resto. Veamos ahora qué sucede cuando se



**Figura 4.4:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_{k=2}^n \omega_k \sigma_{3,k}$  en un sistema de  $n$  partículas. En azul, el conjunto de estados con el mismo radio de Bloch ( $r_{\text{ef}} = 0.95$ ) y el mismo  $r_z$  (aprox. 0.07) que el estado efectivo inicial (verde). Nótese cómo el aumento del número de partículas conduce a variaciones menos importantes.

permite que todo el sistema evolucione. Considérese un hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \omega_k \sigma_{3,k},$$

de tal forma que toda la evolución mantenga constante la componente en  $\sigma_3$ . Explícitamente, las componentes del vector de Bloch del estado efectivo siguen las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_{1,\text{ef}}(t) &= p_1 r_{1,1}(t) - \sum_{k=2}^n p_k A_k \sin(2\omega_k t - \phi_k) \\ r_{2,\text{ef}}(t) &= p_2 r_{2,1}(t) + \sum_{k=2}^n p_k A_k \sin(2\omega_k t + \theta_k), \end{aligned}$$

donde se omite la tercera componente, que no cambia, y

$$A_k = \sqrt{r_{1,k}^2 + r_{2,k}^2} \quad \phi_k = \arccos \left( \frac{r_{2,k}}{\sqrt{r_{1,k}^2 + r_{2,k}^2}} \right) \quad \theta_k = \arcsin \left( \frac{r_{1,k}}{\sqrt{r_{1,k}^2 + r_{2,k}^2}} \right).$$

El comportamiento de los términos de suma depende de las frecuencias  $\omega_k$ , pero la amplitud de estas funciones oscilatorias puede acercarse arbitrariamente a  $\sum_{k=2}^n p_k A_k$ . Esto no significa que el error explote. En realidad, como  $0 \leq A_k \leq 1 \forall k$ , entonces  $0 \leq \sum_{k=2}^n p_k A_k \leq 1$ .

Para obtener resultados más específicos, asumamos que  $p_j = p_{\text{np}} = \frac{1-p_1}{1-n} \forall j \neq 1$  y que  $r_{3,\text{ef}} = 0$ . Por construcción del estado de máxima entropía compatible con  $\rho_{\text{ef}}$ ,

$$r_k = r_{\text{np}} = \tanh(p_{\text{np}}\lambda) \qquad r_{j,k} = r_{\text{np}} \frac{r_{j,\text{ef}}}{r_{\text{ef}}}.$$

Esto significa que las expresiones previas se simplifican considerablemente, en efecto, las primeras dos componentes del vector pasan a ser

$$\begin{aligned} r_{1,\text{ef}}(t) &= p_1 r_{1,1}(t) - p_{\text{np}} r_{\text{np}} \sum_{k=2}^n \sin(2\omega_k t - \phi) \\ r_{2,\text{ef}}(t) &= p_2 r_{2,1}(t) + p_{\text{np}} r_{\text{np}} \sum_{k=2}^n \sin(2\omega_k t + \theta). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aquí se hace claro que la amplitud máxima de la oscilación de error de cada componente es  $(1-p_1)r_{\text{np}}$ . Esto debido a que la suma de  $n-1$  senos<sup>1</sup> puede tener una amplitud máxima igual a  $n-1$ , de tal forma que la amplitud máxima de las oscilaciones es  $(n-1)p_{\text{np}}r_{\text{np}} = (1-p_1)r_{\text{np}}$ .

Para ver cómo afecta el valor de  $p_1$  a la amplitud de las variaciones, introduzcamos algunos números. Si  $r_{\text{ef}} = 0.9$ ,  $p = 0.95$  y  $n = 100$  entonces las variaciones pueden alcanzar un valor de  $(1-p_1)r_{\text{np}} = 4.79 \times 10^{-5}$ . Si se reduce la contribución de la primera partícula haciendo que  $p_1 = 0.5$ , y manteniendo los demás parámetros iguales, entonces las variaciones pueden alcanzar un valor de  $(1-p_1)r_{\text{np}} = 0.4$ . De esta forma, vemos que disminuir el valor de  $p_1$  conduce a variaciones mucho más importantes. Si se comparan, las figuras 4.5 y 4.6 son testimonios de esta dependencia.

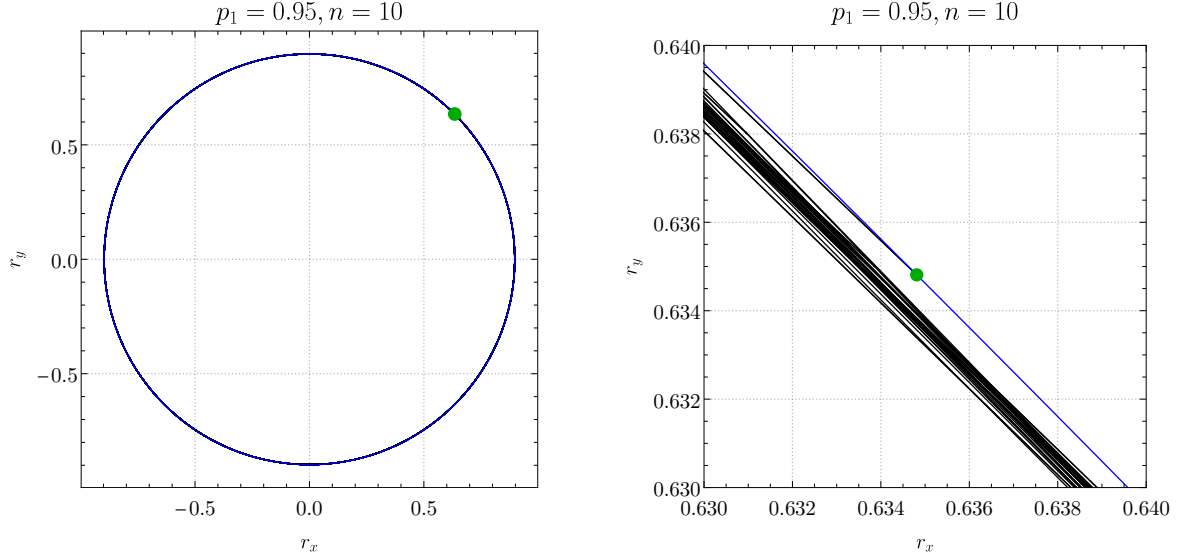
Otro resultado importante es el límite  $n \rightarrow \infty$ . En este límite las sumas trigonométricas que aparecen en la primera y segunda componentes no se anulan, pero estarán distribuidas normalmente con media 0, así que, en promedio, la dinámica efectiva es

$$\Gamma_{t \rightarrow \infty}(\vec{r}_{\text{ef}}) \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 r_{1,1}(t) \\ p_2 r_{2,1}(t) \\ r_3 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

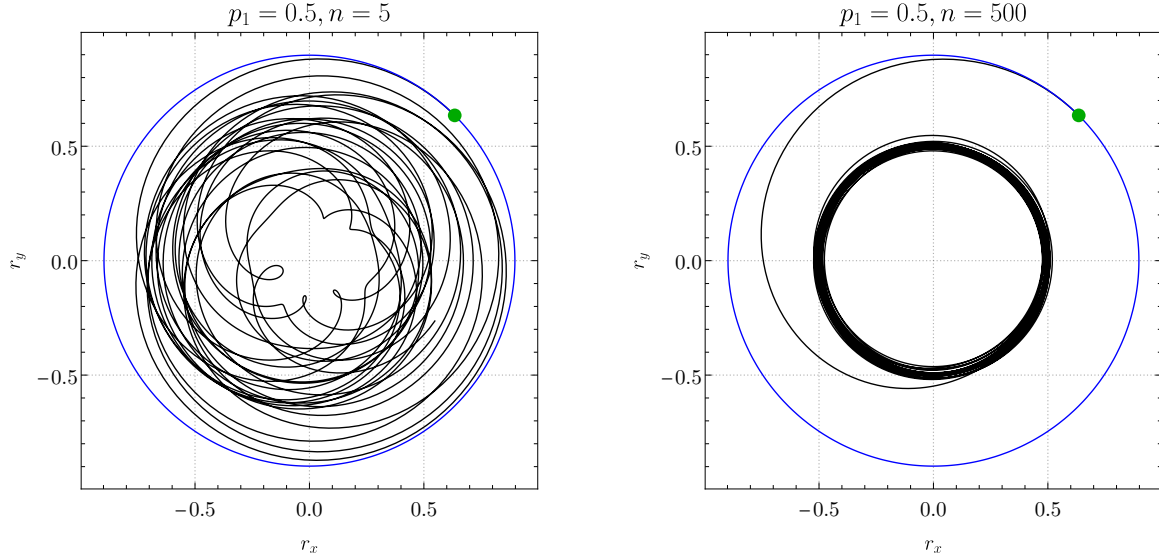
Esto significa que la dinámica tiende a la **seguida** por la primera partícula únicamente. Nuevamente, las figuras 4.5 y 4.6 revelan este resultado de manera geométrica.

---

<sup>1</sup>Senos con amplitud igual a 1.



**Figura 4.5:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \omega_k \sigma_{3,k}$  en un sistema de  $n$  partículas. Si  $r_{\text{ef}} = 0.9$  y  $p = 0.95$  las variaciones debidas al error son pequeñas. A la izquierda, toda la evolución. A la derecha, una ampliación para hacer visibles las variaciones. En verde, el estado efectivo inicial. En azul, la evolución del vector de Bloch que seguiría el sistema si  $p_1 = 1$ .



**Figura 4.6:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \omega_k \sigma_{3,k}$  en un sistema de  $n$  partículas. Si  $r_{\text{ef}} = 0.9$  y  $p = 0.5$  el alejamiento de la evolución esperada se hace notar. En verde, el estado efectivo inicial. Para valores grandes de  $n$  se vuelve dominante el término de  $p_1$ . En azul, la evolución del vector de Bloch que seguiría el sistema si  $p_1 = 1$ .

## 4.2. Puertas de cómputo cuántico

Las puertas cuánticas son el análogo cuántico de las puertas lógicas utilizadas en cómputo clásico. En un circuito cuántico, las puertas permiten manipular los qubits. Una puerta  $U$  válida es un operador de evolución unitario que actúa sobre el espacio generado por  $n$  qubits (esto es, actúa sobre  $H_{2^n}$ ):

$$U : H_{2^n} \rightarrow H_{2^n}.$$

Puertas de un qubit comunes incluyen a los operadores de Pauli, mientras que para dos qubits existen puertas como el SWAP, el controlled-not (CNOT), y la puerta de Hadamard. En este trabajo se analizará la evolución efectiva bajo evoluciones subyacentes descritas por las puertas SWAP y CNOT.

### 4.2.1. La puerta cuántica SWAP

La puerta SWAP,  $S$ , actúa sobre dos qubits permutándolos. Su acción sobre la base computacional de dos qubits es

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle &\mapsto |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes |1\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes |0\rangle \\ |1\rangle \otimes |0\rangle &\mapsto |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes |1\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned}$$

Si un sistema está descrito por un operador de densidad separable,  $\varrho = \rho_A \otimes \rho_B$ , entonces el efecto de la puerta SWAP es

$$S\varrho S = \rho_B \otimes \rho_A.$$

La puerta tiene representación como matriz de permutación

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Descrito de esta manera, el operador SWAP es un operador de evolución *discreto*. Esto es, lleva un estado  $\varrho$  a otro  $\varrho'$  sin considerar ninguna dependencia temporal ni ningún estado intermedio. Sin embargo, como esta evolución es unitaria, es extendible a cualquier tiempo dado el hamiltoniano adecuado. Consideramos entonces

$$H_S = \omega \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i$$

que, tomando  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , genera una compuerta SWAP al tiempo  $t = 1$ . Dado este hamiltoniano, la forma matricial del operador SWAP a un tiempo  $t$  es

$$S^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + e^{i\pi t}) & \frac{1}{2}(1 - e^{i\pi t}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - e^{i\pi t}) & \frac{1}{2}(1 + e^{i\pi t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{t\pi}{2}} \cos \frac{t\pi}{2} & -ie^{i\frac{t\pi}{2}} \sin \frac{t\pi}{2} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{t\pi}{2}} \sin \frac{t\pi}{2} & e^{i\frac{t\pi}{2}} \cos \frac{t\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

## Evolución discreta

Para estudiar la dinámica efectiva de una evolución subyacente descrita por el operador SWAP, primero analizaremos el caso en que no se ha introducido la dependencia temporal. Sea  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  el estado efectivo y  $\varrho_{\text{máx}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_4)$  el estado de máxima entropía compatible con  $\rho_{\text{ef}}$  y la aplicación de grano grueso descrita en la sección 3.1 según  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}) = \varrho_{\text{máx}}$ . Estudiaremos la asignación

$$\rho_{\text{ef}} \mapsto \mathcal{C}(S\varrho_{\text{máx}}S). \quad (4.8)$$

Como el estado de máxima entropía es separable, la acción del operador SWAP sobre este es

$$\frac{e^{p_1 \sum_i \lambda_i \sigma_i}}{Z_1} \otimes \frac{e^{p_2 \sum_i \lambda_i \sigma_i}}{Z_2} \mapsto \frac{e^{p_2 \sum_i \lambda_i \sigma_i}}{Z_2} \otimes \frac{e^{p_1 \sum_i \lambda_i \sigma_i}}{Z_1}.$$

El estado de la izquierda corresponde a  $\varrho_{\text{máx}}(t = 0)$ , mientras que el de la derecha corresponde a  $\varrho_{\text{máx}}(t = 1)$ . Con esto, basta con aplicar la aplicación de grano grueso a ambos estados para hallar a los estados efectivos inicial y final en términos de los multiplicadores de Lagrange:

$$\rho_{\text{ef}} = \frac{1}{2}[\mathbb{1} + (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma})(p_1 \tanh \lambda p_1 + p_2 \tanh \lambda p_2)], \quad (4.9)$$

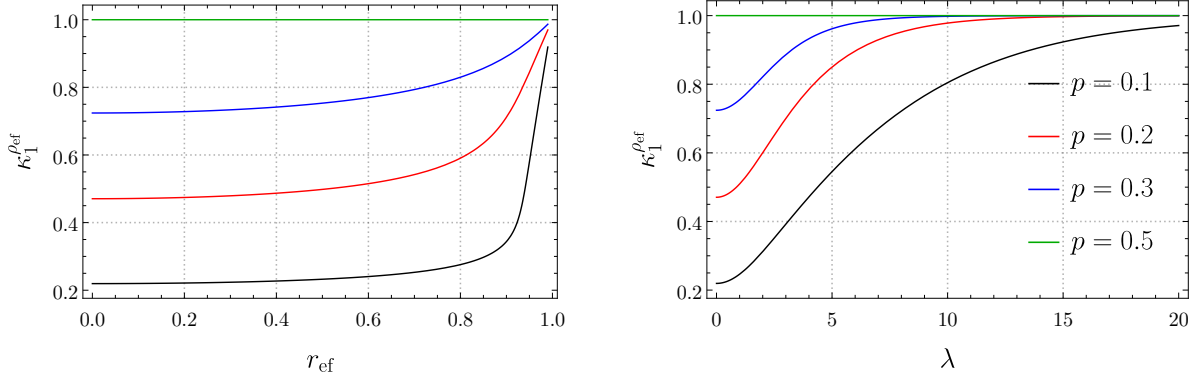
$$\Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2}[\mathbb{1} + (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma})(p_2 \tanh \lambda p_1 + p_1 \tanh \lambda p_2)]. \quad (4.10)$$

Vemos que ambos estados tienen la misma orientación (orientación significando la dirección del vector de Bloch) pero pureza distinta. Esto significa que el efecto del SWAP subyacente sobre la esfera de Bloch es comprimir al estado efectivo inicial con un coeficiente  $\kappa_1$  definido según

$$\kappa_1 = \frac{r_{\text{ef}}(t = 1)}{r_{\text{ef}}(t = 0)} = \frac{p_2 \tanh \lambda p_1 + p_1 \tanh \lambda p_2}{p_1 \tanh \lambda p_1 + p_2 \tanh \lambda p_2}. \quad (4.11)$$

Claro está, el factor de compresión depende del multiplicador de Lagrange, que a su vez es una función de la pureza del estado inicial. La figura 4.7 muestra dicha dependencia. Como la dependencia en el estado inicial incluye únicamente la pureza del mismo, por lo que la compresión no depende de la dirección. Esta dinámica no es sino un **canal de despolarización** no lineal. Si la dependencia del factor de despolarización en el estado efectivo inicial se denota por un superíndice, la dinámica efectiva puede escribirse como

$$\Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) = \kappa_1^{\rho_{\text{ef}}} \rho_{\text{ef}} + (1 - \kappa_1^{\rho_{\text{ef}}}) \frac{1}{2} \mathbb{1}. \quad (4.12)$$



**Figura 4.7:** Factor de despolarización  $\kappa_1^{\rho_{\text{ef}}}$  como función de  $r_{\text{ef}}$  (izq.) y como función de  $\lambda$  (der.), para diferentes valores de  $p_1$ .

De las ecuaciones (4.11) y (4.12) distinguimos lo siguiente:

- Si  $p_1 = \frac{1}{2}$ , entonces  $\kappa_1^{\rho_{\text{ef}}} = 1$ . Esto se debe a que la aplicación borrosa es invariante bajo el SWAP si  $p_1 = \frac{1}{2}$ . Así, todos los estado gruesos son puntos fijos bajo una evolución subyacente SWAP con aplicación de grano grueso con parámetro  $p_1 = \frac{1}{2}$ .
- $\kappa_1^{\rho_{\text{ef}}}$  no depende de la orientación del vector de Bloch, únicamente depende de la magnitud  $r_{\text{ef}}(0)$  y  $p_1$ .
- En los casos extremos,  $p_1 = 1$  o  $p_1 = 0$ , la esfera colapsa al origen.

Como el factor de despolarización depende de  $\lambda$ , la dinámica no es lineal, y por esto, el proceso no puede ser descrito a través del formalismo de las operaciones cuánticas (no tiene representación en operadores de Kraus) [3].

## Evolución continua

Utilizando la forma dependiente del tiempo del operador  $S$  dada por la ecuación (4.7), puede seguirse el mismo proceso para hallar una expresión del estado efectivo evolucionado como función del tiempo y en términos de los multiplicadores de Lagrange:

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{1} + (\hat{r}_{\text{ef}} \cdot \vec{\sigma}) \left[ \left( p_2 \cos^2 \frac{\pi t}{2} + p_1 \sin^2 \frac{\pi t}{2} \right) \tanh p_1 \lambda + \left( p_1 \cos^2 \frac{\pi t}{2} + p_2 \sin^2 \frac{\pi t}{2} \right) \tanh p_2 \lambda \right] \right\}. \quad (4.13)$$

El estado efectivo inicial siendo el mismo, el estado final vuelve a tener la misma orientación, y entonces es posible calcular el factor de despolarización como la razón entre las normas de

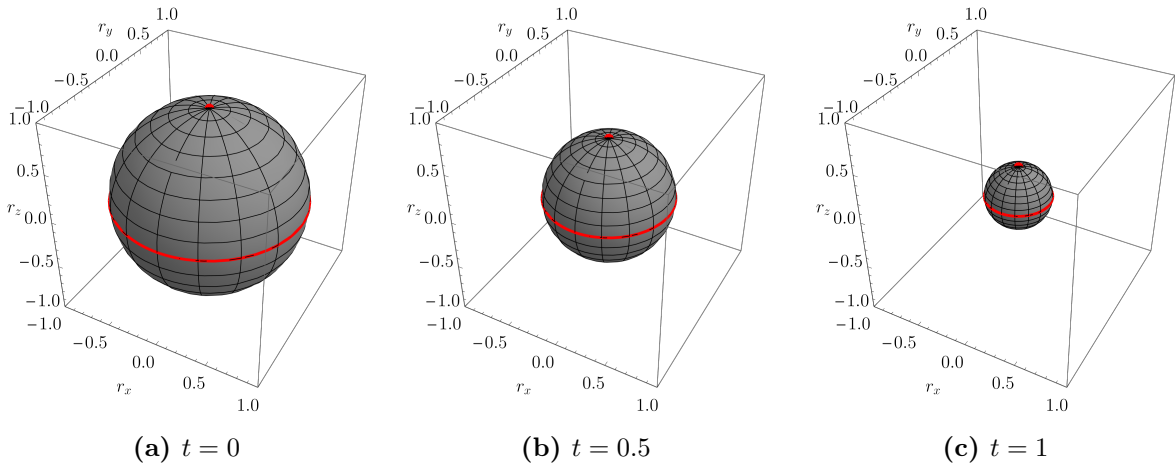


los vectores de Bloch de los estados inicial y final:

$$\kappa_t^{\rho_{\text{ef}}} = \frac{(p_2 \cos^2 \frac{\pi t}{2} + p \sin^2 \frac{\pi t}{2}) \tanh \lambda p_1 + (p_1 \cos^2 \frac{\pi t}{2} + p_2 \sin^2 \frac{\pi t}{2}) \tanh \lambda p_2}{p_1 \tanh \lambda p_1 + p_2 \tanh \lambda p_2}. \quad (4.14)$$

Nuevamente, el factor de despolarización (y por consiguiente, toda la evolución) depende de la pureza del estado efectivo inicial, codificada en los multiplicadores de Lagrange. El efecto gradual de la evolución sobre la esfera de Bloch puede verse en la figura 4.8. La dinámica efectiva puede escribirse como

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \kappa_t^{\rho_{\text{ef}}} \rho_{\text{ef}} + (1 - \kappa_t^{\rho_{\text{ef}}}) \frac{1}{2} \mathbb{1}. \quad (4.15)$$



**Figura 4.8:** Efecto sobre la esfera de Bloch de la dinámica efectiva inducida por la evolución SWAP continua a diferentes tiempos  $t$ . Se muestra una esfera inicial de radio  $r_{\text{ef}}(0) = 0.9$ . El parámetro de la aplicación de grano grueso es  $p_1 = 0.9$ .

De las ecuaciones (4.14) y (4.15) es posible concluir:

- $\kappa_t^{\rho_{\text{ef}}}$  es una función periódica del tiempo, y su periodo es de  $T = 2$  (observable en la figura 4.9).
- Se cumplen las observaciones hechas para el caso discreto: la esfera colapsa al origen si  $p_1 = 1$  o  $p_1 = 0$ , y los puntos se mantienen fijos si  $p_1 = \frac{1}{2}$ .

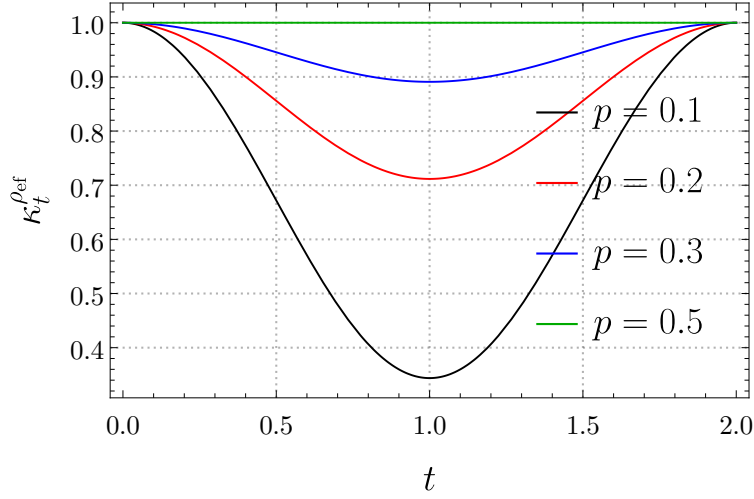
En términos del valor esperado del observable  $\sigma_3$ , la evolución del estado se da como

$$\langle \sigma_3(t) \rangle = \kappa_t^{\rho_{\text{ef}}} \langle \sigma_3(0) \rangle,$$

que puede escribirse, también, como las probabilidades de que  $\Gamma_t(\rho_{\text{ef}})$  se halle en el estado  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$

$$\langle 0 | \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) | 0 \rangle = \frac{1}{2} (1 + \kappa_t^{\rho_{\text{ef}}} \langle \sigma_3(0) \rangle) \quad \langle 1 | \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) | 1 \rangle = \frac{1}{2} (1 - \kappa_t^{\rho_{\text{ef}}} \langle \sigma_3(0) \rangle)$$

donde la dependencia temporal está completamente contenida dentro del factor  $\kappa_t^{\rho_{\text{ef}}}$ . Nótese que el efecto del canal de despolarización es hacer a los estados menos distinguibles entre sí.



**Figura 4.9:** Factor de despolarización  $\kappa_t^{\rho_{\text{ef}}}$  de la dinámica efectiva inducida por la evolución SWAP como función de  $t$ , para diferentes valores de  $p_1$  y  $r_{\text{ef}}(0) = 0.8$ .

### 4.2.2. La compuerta cuántica controlled not

La compuerta *controlled not*, o CNOT, es el análogo cuántico de la compuerta lógica XOR. La compuerta XOR recibe como entrada dos bits, y arroja uno que puede ser 0 si los bits de entrada tienen el mismo valor, o 1 si tienen valores diferentes. Por otro lado, la compuerta cuántica CNOT actúa sobre un sistema de dos qubits, aplicando sobre el segundo qubit la compuerta  $\sigma_1$  (NOT) si el primer qubit se halla en el estado  $|1\rangle$ , o dejándolo invariante si el primer qubit se halla en el estado  $|0\rangle$ . Esto es, cumple que [3]

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle &\mapsto |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes |1\rangle &\mapsto |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes |0\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes |1\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes |0\rangle. \end{aligned}$$

En la base computacional de dos qubits, la compuerta puede representarse como la matriz de permutación

$$C_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claro está, esta matriz corresponde a la evolución discreta. Considérese el hamiltoniano

$$H_{C_X} = -\omega(\sigma_3 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_1 - \sigma_3 \otimes \sigma_1), \quad (4.16)$$

que genera la compuerta CNOT al tiempo  $t = 1$  cuando  $\omega = \frac{\pi}{4}$ . Nótese que, por estar conformado por tres operadores que conmutan entre sí, la compuerta puede escribirse como la acción consecutiva de tres operadores unitarios que conmutan entre sí:

$$C_X = (e^{i\omega\sigma_3} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes e^{i\omega\sigma_1})e^{-i\omega\sigma_3 \otimes \sigma_1}.$$

### CNOT completo efectivo

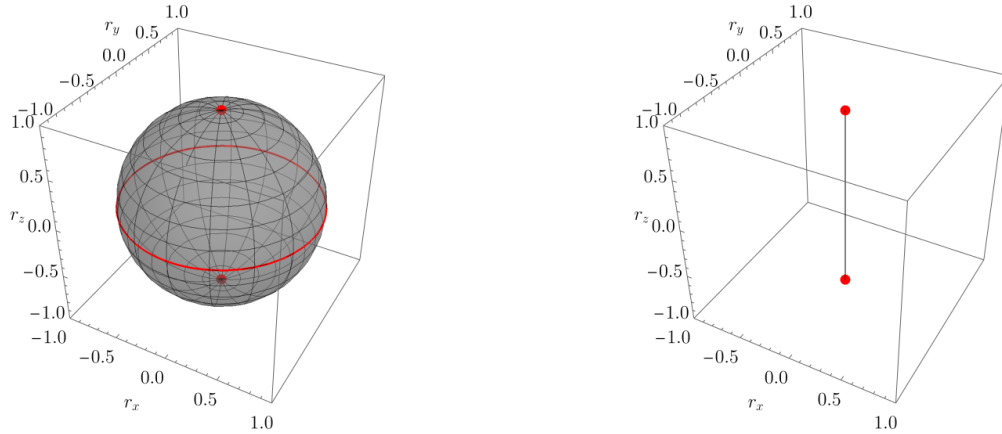
Para estudiar la dinámica efectiva del operador  $C_X$  son particularmente útiles las expresiones (3.7). Como el estado de máxima entropía compatible con la aplicación de grano grueso puede escribirse como  $\rho_{\text{máx}} = \rho_1 \otimes \rho_2$ , entonces hallar el estado efectivo final es un problema de álgebra. Si se aplica el operador  $C_X$  al estado de máxima entropía, y luego se pasa el resultado por la aplicación de grano grueso, el resultado es la dinámica efectiva

$$\begin{aligned} \Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) &= \frac{p_1}{2}(\rho_{\text{ef}} + \sigma_3 \rho_1 \sigma_3 + \text{Tr}\{\sigma_1 \rho_2\}[\rho_1 - \sigma_3 \rho_1 \sigma_3]) \\ &\quad + \frac{p_2}{2}(\rho_{\text{ef}} + \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 + \text{Tr}\{\sigma_3 \rho_1\}[\rho_2 - \sigma_1 \rho_2 \sigma_1]). \end{aligned}$$

La estructura del estado final es una consecuencia directa de la aplicación borrosa. Para entender el significado de cada uno de los términos, considérense dos casos extremos: primero, el caso en que el aparato de medición no tiene un error asociado ( $p_1 = 1$ ). En dicho caso, a través del principio de máxima entropía, el estado efectivo final es

$$\Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2}(\rho_{\text{ef}} + \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3),$$

que reconocemos como un **canal de desfase total** (ver figura 4.10). Este resultado



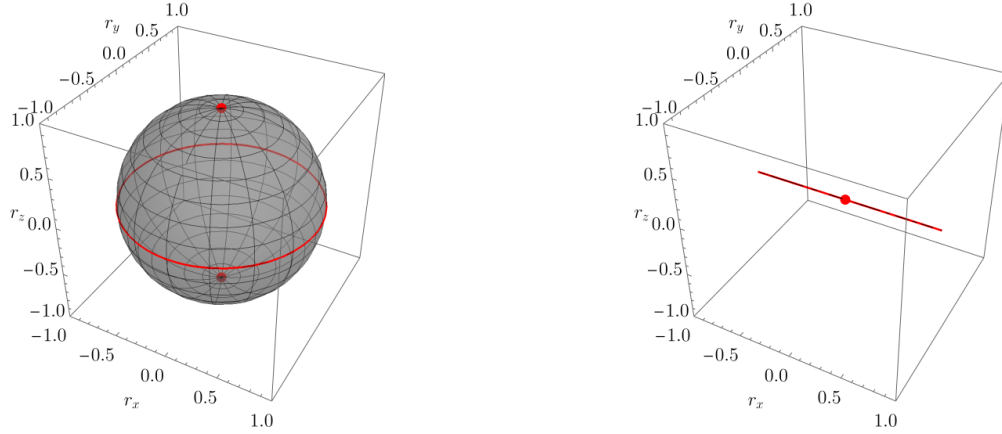
**Figura 4.10:** Efecto de un canal de desfase total sobre la esfera de Bloch.

viene del hecho que, en el caso  $p_1 = 1$ , el estado de máxima entropía es simplemente  $\rho_{\text{ef}} \otimes \frac{1}{2}$ . De manera similar, en el caso  $p_1 = 0$ , la dinámica efectiva es

$$\Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2}(\rho_{\text{ef}} + \sigma_1 \rho_{\text{ef}} \sigma_1),$$

que no es más que un **canal de bit flip** (ver figura 4.11). Sabiendo esto, es posible reacomodar la expresión de la dinámica efectiva para recuperar la transición entre estos casos extremos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{t=1}(\rho_{\text{ef}}) &= \frac{1}{2}\rho_{\text{ef}} \\ &\quad + \frac{p_1}{2} \left[ \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \rho_1 + (1 - \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2}) \sigma_3 \rho_1 \sigma_3 \right] \\ &\quad + \frac{p_2}{2} \left[ \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \rho_2 + (1 - \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1}) \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 \right]. \end{aligned}$$



**Figura 4.11:** Efecto del canal de *bit flip* total sobre la esfera de Bloch.

De esta forma, el efecto de la dinámica efectiva es una combinación de dos canales no lineales: un canal de despolarización total en el que los coeficientes probabilísticos dependen del estado inicial, y un canal de *bit flip* total con la misma característica.

### CNOT efectivo a un tiempo arbitrario

Estudiado el caso discreto, utilícese el hamiltoniano dado por la ecuación (4.16) para propagar al estado microscópico de forma continua en el tiempo. El estado efectivo es propagado por la evolución efectiva

$$\begin{aligned}
 \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = & \rho(\cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t)) \\
 & + p_1 \{ 2 \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \left[ \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_1} \rho_1 + \left( 1 - \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \right) \sigma_3 \rho_1 \sigma_3 \right] \right. \\
 & \quad \left. + i(\sin^3(\omega t) \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \cos^3(\omega t)) \left( 1 - \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \right) [\rho_1, \sigma_3] \right\} \\
 & + p_2 \{ 2 \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \left[ \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \rho_2 + \left( 1 - \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \right) \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 \right] \right. \\
 & \quad \left. + i(\sin^3(\omega t) \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \cos^3(\omega t)) \left( 1 - \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \right) [\rho_2, \sigma_1] \right\}.
 \end{aligned}$$

Esta expresión puede manipularse para recuperar algo más parecido a lo obtenido en el caso discreto,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = & \frac{1}{2} \rho_{\text{ef}} \\
 & + \frac{p_1}{2} \{ \rho_1 \cos^2(2\omega t) + \left[ \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \rho_1 + \left( 1 - \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \right) \sigma_3 \rho_1 \sigma_3 \right] \sin^2(2\omega t) \right. \\
 & \quad \left. - i \left( 1 - \langle \sigma_1 \rangle_{\rho_2} \right) \cos(2\omega t) \sin(2\omega t) [\rho_1, \sigma_3] \right\} \\
 & + \frac{p_2}{2} \{ \rho_2 \cos^2(2\omega t) + \left[ \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \rho_2 + \left( 1 - \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \right) \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 \right] \sin^2(2\omega t) \right. \\
 & \quad \left. - i \left( 1 - \langle \sigma_3 \rangle_{\rho_1} \right) \cos(2\omega t) \sin(2\omega t) [\rho_2, \sigma_1] \right\}. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

En esta ecuación ya se ve la acción de la evolución efectiva. El segundo y tercer términos pueden verse como canales de desfase en dirección  $\sigma_3$  y  $\sigma_1$  respectivamente, pero contaminados con factores dependientes de los valores de expectación  $\langle\sigma_3\rangle_{\rho_1}$  y  $\langle\sigma_1\rangle_{\rho_2}$ , que median la interacción entre las partículas. Para que esto sea aún más claro, volvamos a considerar los casos extremos de  $p_1$ .

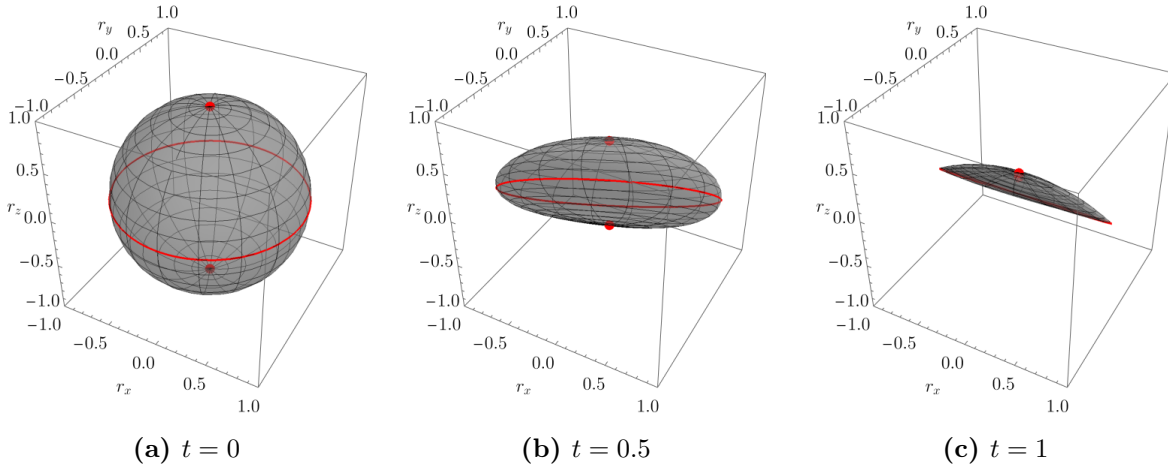
Si  $p_1 = 1$  entonces el estado de máxima entropía es  $\rho_{\text{ef}} \otimes \mathbb{1}_2$ , así que  $\langle\sigma_1\rangle_{\rho_2} = 0$ . La dinámica efectiva se reduce al canal de desfase en dirección  $\sigma_3$

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2}(\rho_{\text{ef}} + e^{i2\omega t\sigma_3}\rho_{\text{ef}}e^{-i2\omega t\sigma_3}).$$

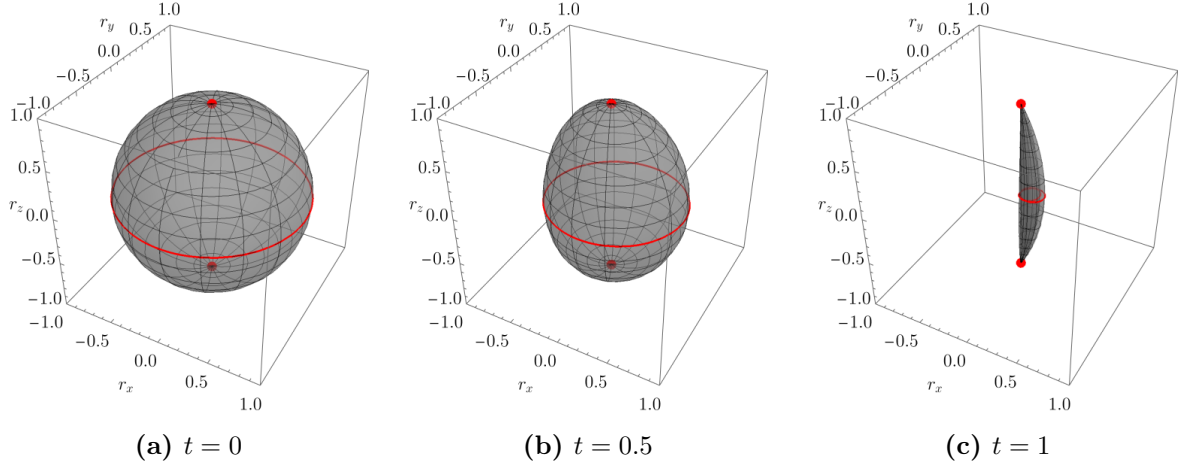
Por otro lado, si  $p_1 = 0$  el estado de máxima entropía es  $\mathbb{1}_2 \otimes \rho_{\text{ef}}$ , así que  $\langle\sigma_3\rangle_{\rho_1} = 0$  y la dinámica efectiva se reduce al canal de *bit flip*,

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2}(\rho_{\text{ef}} + e^{i2\omega t\sigma_1}\rho_{\text{ef}}e^{-i2\omega t\sigma_1}).$$

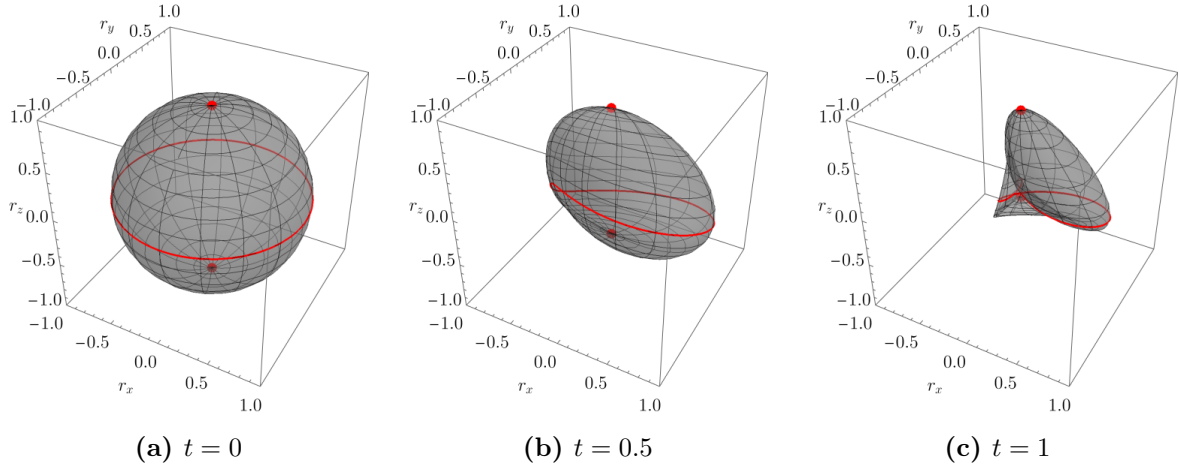
En ambos casos recuperamos los resultados del caso discreto al tiempo  $t = 1$  eligiendo  $\omega = \frac{\pi}{4}$ . La dinámica generada por la compuerta CNOT es, nuevamente, una dinámica no solo no unitaria, sino no lineal, pues depende del estado efectivo inicial a través del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . La figura 4.12 muestra la evolución para un valor de  $p_1$  cercano a 0, de tal forma que el término de *bit flip* es dominante. La figura 4.13, en cambio, muestra la evolución para un valor de  $p_1$  cercano a 1 así que la evolución es casi un desfase total. Finalmente, la figura 4.14 muestra la evolución para el caso  $p_1 = \frac{1}{2}$ , en el que ninguno de los términos es dominante.



**Figura 4.12:** Efecto sobre la esfera de Bloch de la dinámica efectiva inducida por la evolución CNOT continua a diferentes tiempos  $t$ . Se muestra una esfera inicial de radio  $r_{\text{ef}}(0) = 0.9$ . El parámetro de la aplicación de grano grueso es  $p_1 = 0.1$ . Nótese que a tiempo  $t = 1$  se recupera el *casi* canal de *bit flip*.



**Figura 4.13:** Efecto sobre la esfera de Bloch de la dinámica efectiva inducida por la evolución CNOT continua a diferentes tiempos  $t$ . Se muestra una esfera inicial de radio  $r_{\text{ef}}(0) = 0.9$ . El parámetro de la aplicación de grano grueso es  $p_1 = 0.9$ . Nótese que a tiempo  $t = 1$  se recupera el *casi* canal de desfaseamiento.



**Figura 4.14:** Efecto sobre la esfera de Bloch de la dinámica efectiva inducida por la evolución CNOT continua a diferentes tiempos  $t$ . Se muestra una esfera inicial de radio  $r_{\text{ef}}(0) = 0.9$ . El parámetro de la aplicación de grano grueso es  $p_1 = 0.5$ . La deformación (y rompimiento) de la esfera de Bloch es consecuencia de la combinación de dos canales no lineales.

## 4.3. Dinámicas especiales

### 4.3.1. Canales de Pauli

Los canales de Pauli son canales cuánticos en los que se aplica un operador de Pauli con alguna probabilidad. El canal de Pauli de un qubit más general está definido como

$$\mathcal{P} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$$

$$\mathcal{P}(\Delta) = \sum_{j=0}^3 q_j \sigma_j \Delta \sigma_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=0}^3 q_j = 1.$$

Reconociendo que cualquiera de los tres operadores de Pauli puede escribirse en términos de los otros dos, una manera de extender los canales de Pauli de un qubit a  $n$  qubits es [28]

$$\mathcal{P} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2^n}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2^n})$$

$$\mathcal{P}(\Delta) = \sum_{\vec{j}, \vec{k}} q_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}} \Delta \sigma_3^{\vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}}. \quad (4.18)$$

donde  $\sigma_j^{\vec{k}} = \sigma_j^{k_1} \otimes \sigma_j^{k_2} \otimes \dots \otimes \sigma_j^{k_n}$  y las entradas  $k_l$  del vector  $\vec{k}$  solo pueden valer 0 o 1.

### Canales de desfaseamiento

Por canales de desfaseamiento se entiende aquellos canales cuánticos cuyo efecto es amortiguar los elementos fuera de la diagonal del operador sobre el que actúan. A notar que esta definición es dependiente de la base sobre la que se está trabajando. Por ejemplo, sea  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ . Si se utiliza la base de eigenestados de  $\sigma_3$ , entonces el canal

$$\rho \mapsto q_1 \rho + q_2 \sigma_3 \rho \sigma_3$$

es un canal de desfaseamiento. En efecto, la acción de este canal sobre los elementos de matriz de  $\rho$  es

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & (q_1 - q_2) \rho_{0,1} \\ (q_1 - q_2) \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix},$$

mientras que el canal de *bit flip*,

$$\rho \mapsto q_1 \rho + q_2 \sigma_1 \rho \sigma_1,$$

no lo es, pues su acción sobre los elementos de matriz de  $\rho$  es

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + (q_1 - q_2)(2\rho_{0,0} - 1)) & \text{Re}(\rho_{0,1}) - i(q_1 - q_2) \text{Im}(\rho_{0,1}) \\ \text{Re}(\rho_{1,0}) + i(q_1 - q_2) \text{Im}(\rho_{1,0}) & \frac{1}{2}(1 - (q_1 - q_2)(1 - 2\rho_{1,1})) \end{pmatrix}.$$

Por supuesto, el canal de *bit flip* es un canal de desfaseamiento si se trabaja en la base de los eigenestados de  $\sigma_1$ , pues en esta base, la acción del canal de *bit flip* es

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & (q_1 - q_2)\rho_{0,1} \\ (q_1 - q_2)\rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Para extender la noción de canal de desfaseamiento a  $n$  qubits, primero nótese que dada la base de  $\mathbf{H}_2$  conformada por los eigenestados de  $\sigma_3$  (la base computacional),  $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle\}$ , es posible construir una base  $\{|e_{\vec{k}}\rangle\}_{\vec{k}}$  de  $\mathbf{H}_{2^n}$  como

$$\{|e_{\vec{k}}\rangle\}_{\vec{k}} = \left\{ |e_{\vec{k}}\rangle \in \mathbf{H}_{2^n} : |e_{\vec{k}}\rangle = \bigotimes_{j=1}^n |e_{k_j}\rangle, k_j \in \{0, 1\} \right\}.$$

Esto es, tomando los productos tensoriales de los eigenestados de  $\sigma_3$  consigo mismos. De esta manera podemos estudiar dos canales de desfaseamiento, el primero actuando en la base de productos tensoriales de eigenestados de  $\sigma_3$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\sigma_3} : \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) \\ \mathcal{P}_{\sigma_3}(\Delta) &= \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}} \sigma_3^{\vec{k}} \Delta \sigma_3^{\vec{k}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

que corresponde al canal de Pauli 4.18 cuando  $\vec{j} = \vec{0}$ , y el segundo definido sobre la base de productos tensoriales de eigenestados de  $\sigma_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\sigma_1} : \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) \\ \mathcal{P}_{\sigma_1}(\Delta) &= \sum_{\vec{j}} q_{\vec{j}} \sigma_1^{\vec{j}} \Delta \sigma_1^{\vec{j}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

que corresponde al canal de Pauli 4.18 cuando  $\vec{k} = \vec{0}$ .

Consideremos entonces un canal de desfaseamiento de dos qubits en cualquiera de las dos direcciones discutidas y con probabilidades como mencionadas anteriormente. Sea  $\rho_{\text{ef}}$  un estado efectivo en  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  correspondiente a un sistema  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$ , y sea  $\varrho_{\text{máx}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$  el estado de máxima entropía compatible con el estado efectivo. Recordemos que, de acuerdo con la ecuación 3.6, el estado de máxima entropía tiene la forma

$$\varrho_{\text{máx}} = \bigotimes_{k=1}^n \rho_k.$$

Si se propaga al estado de máxima entropía por medio de este canal y luego se pasa el resultado por la aplicación de grano grueso, el resultado es una dinámica efectiva

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \mathcal{C} \left[ \sum_{\vec{j}} q_{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{j}} \varrho_{\text{máx}} \sigma_3^{\vec{j}} \right] = \mathcal{C} \left[ \sum_{\vec{j}} q_{\vec{j}} \left( \bigotimes_{k=1}^n \sigma_3^{j_k} \rho_k \sigma_3^{j_k} \right) \right].$$



Para resolver el lado derecho de la ecuación, nótese que existen  $2^n$  posibles vectores  $\vec{j}$ , y dentro de estos,  $2^{n-1}$  tienen un 0 o un 1 en la  $\nu$ -ésima posición. Esto significa que hay  $\frac{2^{n-1}}{n}$  ceros y  $\frac{2^{n-1}}{n}$  unos en cada posible entrada de todos los  $\vec{j}$ . Entonces podemos usar el hecho de que tanto los operadores  $\sigma_3^{\vec{j}}$  como el estado de máxima entropía son factorizables, así como que la aplicación de grano es lineal para sumar sobre dichos ceros y unos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left[ \sum_{\vec{j}} q_{\vec{j}} \left( \bigotimes_{k=1}^n \sigma_3^{j_k} \rho_k \sigma_3^{j_k} \right) \right] &= \sum_{\vec{j}} q_{\vec{j}} \sum_{k=1}^n p_k \sigma_3^{j_k} \rho_k \sigma_3^{j_k} \\ &= \sum_{\{j_k: j_k=0\}} q_{j_k} \sum_{k=1}^n p_k \sigma_3^{j_k} \rho_k \sigma_3^{j_k} + \sum_{\{j_k: j_k=1\}} q_{j_k} \sum_{k=1}^n p_k \sigma_3^{j_k} \rho_k \sigma_3^{j_k} \\ &= q_{\vec{0}} \left( \sum_{k=1}^n p_k \rho_k \right) + \frac{1 - q_{\vec{0}}}{2^n - 1} (2^{n-1} - 1) \left( \sum_{k=1}^n p_k \rho_k \right) \\ &\quad + \frac{1 - q_{\vec{0}}}{2^n - 1} 2^{n-1} \left( \sum_{k=1}^n \sigma_3 p_k \rho_k \sigma_3 \right). \end{aligned}$$

Con lo que la dinámica efectiva es

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \left( q_{\vec{0}} + \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} (1 - q_{\vec{0}}) \right) \rho_{\text{ef}} + \left( \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} (1 - q_{\vec{0}}) \right) \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3.$$

Nótese que la dinámica efectiva es lineal, y que únicamente depende del número de partículas en el sistema microscópico. Aún más, este es un canal de desfaseamiento de un qubit en dirección de  $\sigma_3$  (ver ecuación (4.19)). Este resultado es análogo para el canal  $\mathcal{P}_{\sigma_1}$ , dado por (4.20). Para recuperar un canal de desfaseamiento total (en el que todos los elementos fuera de la diagonal se hacen cero) basta con elegir  $q_{\vec{j}} = \frac{1}{2^n} \forall \vec{j}$ . En dicho caso la dinámica efectiva se reduce a

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2} (\rho_{\text{ef}} + \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3). \quad (4.21)$$

Esto es, el desfaseamiento total en  $n$  partículas se traduce como un desfaseamiento total en una partícula.

### Canal de despolarización

El canal de despolarización es el canal cuántico que contrae de manera uniforme a todos los estados hacia el estado máximamente mezclado. Al canal de despolarización se le define como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q &: \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2^n}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2^n}) \\ \mathcal{D}_q(\Delta) &= q\Delta + (1 - q)\mathbb{1}_{2^n} \text{Tr}(\Delta). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora, nótese que el canal de despolarización total puede verse como una concatenación de dos canales de desfaseamiento total, uno en dirección  $\sigma_1$  y luego otro en dirección  $\sigma_3$  (el

orden es irrelevante). Para ver esto, es particularmente útil escribir a la matriz de densidad  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$  en términos de las componentes de su vector de Bloch,

$$\varrho = \frac{1}{2^n} \sum_{\vec{j}, \vec{k}} \gamma_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}},$$

y notar que el efecto de dichos canales se puede ver como

$$\mathcal{P}_{\sigma_1}(\varrho) = \frac{1}{2^n} \sum_{\vec{j}, \vec{k}} \delta_{\vec{k}, \vec{0}} \gamma_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{\sigma_3}(\varrho) = \frac{1}{2^n} \sum_{\vec{j}, \vec{k}} \delta_{\vec{j}, \vec{0}} \gamma_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}}$$

de tal forma que su composición es

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\sigma_1} \circ \mathcal{P}_{\sigma_3})(\varrho) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\vec{j}, \vec{k}} \delta_{\vec{j}, \vec{0}} \delta_{\vec{k}, \vec{0}} \gamma_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \gamma_{\vec{0}, \vec{0}} \mathbb{1}_{2^n}. \end{aligned}$$

Que es precisamente el efecto del canal de despolarización total. Ahora, sea  $\rho_{\text{ef}}$  un estado efectivo en  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  correspondiente a un sistema  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$ , y sea  $\varrho_{\text{máx}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$  el estado de máxima entropía compatible con el estado efectivo. Es inmediato ver que la dinámica efectiva correspondiente a un canal de despolarización total es otro canal de despolarización total, i.e.

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_2. \quad (4.23)$$

Ahora, sabiendo que

$$(\mathcal{P}_{\sigma_1} \circ \mathcal{P}_{\sigma_3})(\varrho) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\vec{j}, \vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}} \varrho \sigma_3^{\vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}} = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{2^n}$$

la ecuación 4.3.1 puede reescribirse como

$$\mathcal{D}_q(\varrho) = q\varrho + (1-q) \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\vec{j} \wedge \vec{k} \neq \vec{0}} \sigma_1^{\vec{j}} \sigma_3^{\vec{k}} \varrho \sigma_3^{\vec{k}} \sigma_1^{\vec{j}}.$$

Donde es explícitamente claro que el canal de despolarización es un canal de Pauli. La dinámica efectiva que corresponde al canal de despolarización no completo es simplemente

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = q\rho_{\text{ef}} + (1-q)\mathbb{1}_2. \quad (4.24)$$

Esto es, la dinámica efectiva correspondiente a un canal de despolarización siempre es un canal de despolarización. Nótese que este resultado es muy similar al obtenido para una evolución unitaria subyacente generada por un hamiltoniano de la forma  $\mathcal{H} = H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H$ . En dicho caso, la dinámica efectiva era, justamente, la unitaria generada por el hamiltoniano  $H$ , esto como consecuencia de la simetría de la evolución: la misma para cada partícula, sin interacción. Este caso es el mismo, el canal de despolarización actúa de la misma forma sobre cada partícula, y es completamente isotrópico dentro del subespacio de cada partícula.

### 4.3.2. Canal de estabilización

En esta sección estudiaremos un canal que envía todos los estados a un estado puro dado  $|\psi\rangle$  de forma exponencial en el tiempo, como si el átomo de dos niveles tendiera a estabilizarse en dicho estado. Aunque esto pueda recordar al canal de amortiguamiento de amplitud, no son lo mismo. El canal de amortiguamiento de amplitud funciona como un modelo simple de emisión espontánea. En efecto, un átomo de dos niveles acoplado a un campo electromagnético experimenta emisión espontánea, y puede demostrarse que este proceso corresponde a un canal de amortiguamiento de amplitud si se traza al campo y se considera que la frecuencia del campo es igual a la frecuencia de resonancia de transiciones entre los niveles del átomo [22]. El canal de amortiguamiento de amplitud tiene el efecto de enviar todos los estados al estado base.

Considérese entonces que un sistema de  $n$  partículas evoluciona siguiendo el canal cuántico

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\psi,t} : \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{H}_{2^n}) \\ \mathcal{E}_{\psi,t}(\Delta) &= e^{-t\mu} \varrho + (1 - e^{-t\mu}) |\psi\rangle\langle\psi| \text{Tr}(\Delta).\end{aligned}$$

donde  $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$ . Para ver que el canal de estabilización y el canal de amortiguamiento de amplitud son diferentes, véase que si se escoge  $n = 1$  y  $|\psi\rangle = |0\rangle$  en la expresión del canal de estabilización, no se recupera el canal de amortiguamiento de amplitud. El canal de amortiguamiento de amplitud tiene el siguiente efecto sobre la matriz de densidad

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-\gamma)\rho_{0,0} + \gamma & \sqrt{1-\gamma}\rho_{0,1} \\ \sqrt{1-\gamma}\rho_{1,0} & (1-\gamma)\rho_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde  $\gamma$  puede verse como la probabilidad de emisión de un fotón. Por otro lado, el canal  $\mathcal{E}_{|0\rangle,t}$  tiene el efecto

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-\gamma)\rho_{0,0} + \gamma & (1-\gamma)\rho_{0,1} \\ (1-\gamma)\rho_{1,0} & (1-\gamma)\rho_{1,1} \end{pmatrix}.$$

donde se ha hecho  $e^{\mu t} = \gamma$ . Es claro que el canal de amortiguamiento y el canal de estabilización tienen efectos diferentes en las fases del estado. Aún más, mientras que la extensión del canal de estabilización a  $n$  partículas es directa, la generalización del canal de amortiguamiento de amplitud es no trivial, ya que no hay una forma única de conectar los amortiguamientos entre los niveles energéticos.

Ahora, sea  $\rho_{\text{ef}}$  un estado efectivo en  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  y  $\varrho_{\text{máx}}$  el estado de máxima entropía en  $\mathcal{S}(\mathbf{H}_{2^n})$  compatible con este. Aplicando el modelo de grano grueso al estado de máxima entropía propagado por el canal de estabilización se obtiene que

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = e^{-t\mu} \rho(0) + (1 - e^{-t\mu}) \mathcal{C}(|\psi\rangle\langle\psi|).$$

Obsérvese que la dinámica efectiva es un canal cuántico, pero no necesariamente un canal de estabilización, pues el estado al que tiende el sistema efectivo,  $\mathcal{C}(|\psi\rangle\langle\psi|)$  no tiene por qué ser un estado puro. En realidad, en el caso en que  $|\psi\rangle$  es un estado máximamente entrelazado,  $\mathcal{C}(|\psi\rangle\langle\psi|)$  es el estado máximamente mezclado, de tal manera que la dinámica efectiva es un canal de despolarización.

### 4.3.3. Cadena de espines de Heisenberg

El modelo  $XZY_s$  **unodimensional** de Heisenberg consiste en una cadena de  $n$  partículas de espín  $s$  en la que se consideran interacciones de espín entre primeros vecinos. Se ha demostrado que la cadena de Heisenberg describe el comportamiento de algunos metales y cristales [29]. El hamiltoniano del modelo de Heisenberg en el caso de espín  $\frac{1}{2}$  es

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n (J_1 \sigma_{1,k} \sigma_{1,k+1} + J_2 \sigma_{2,k} \sigma_{2,k+1} + J_3 \sigma_{3,k} \sigma_{3,k+1}) - g \sum_{k=1}^n \sigma_{2,k}, \quad (4.25)$$

donde  $J_k$  son las constantes de acoplamiento,  $\sigma_{j,k}$  es el operador de Pauli  $j$  que actúa sobre la  $k$ -ésima partícula, y  $g$  es la constante del campo transversal. Existen diferentes simplificaciones que pueden hacerse del modelo de Heisenberg. La primera es el caso  $J_1 = J_2 = J_3$ , llamado modelo  $XXX_{\frac{1}{2}}$ . La segunda es considerar que las interacciones entre las partículas se da únicamente en la dirección de  $\sigma_3$ , que corresponde al modelo unidimensional de Ising. Además, en ambos casos es posible hacer nulo el campo transversal, i.e.  $g = 0$

#### Modelo de Ising

Considérese el modelo de Ising, correspondiente a la cadena de espines de Heisenberg tal que  $J_1 = J_2 = 0$  y sin campo transversal (i.e.  $g = 0$ ). En este caso, el hamiltoniano se reduce a

$$\mathcal{H} = \omega \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{3,k} \sigma_{3,k+1}$$

si la cadena es abierta (ver figura 4.15a). Para que la cadena sea cerrada (ver figura 4.15b) basta con añadir el término de interacción entre la primera y la  $n$ -ésima partícula,

$$\mathcal{H} = \omega \left( \sigma_{3,1} \sigma_{3,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{3,k} \sigma_{3,k+1} \right).$$

Sea entonces  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  un estado efectivo correspondiente a un sistema de  $n = 2$  partículas, y  $\varrho_{\text{máx}}$  el estado microscópico compatible con  $\rho_{\text{ef}}$  que maximiza la entropía. El hamiltoniano del sistema microscópico es, explícitamente,

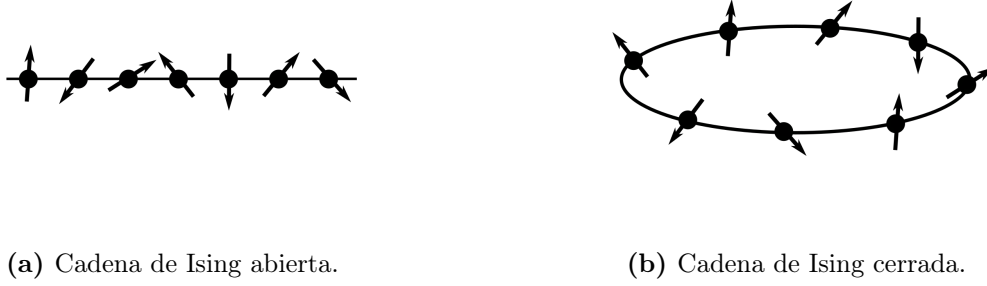
$$\mathcal{H} = \omega(\sigma_3 \otimes \sigma_3),$$

de tal forma que dicho sistema evoluciona de acuerdo al operador unitario

$$\mathcal{U}_t = \mathbb{1} \cos(\omega t) + i \sigma_3 \otimes \sigma_3 \sin(\omega t).$$

Si se propaga al estado de máxima entropía con dicho operador y se le pasa por la aplicación de grano grueso, la dinámica efectiva es

$$\begin{aligned} \Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = & \rho_{\text{ef}} \cos^2(\omega) + \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3 \sin^2(\omega t) \\ & + i \sin(\omega t) \cos(\omega t) (p_1 \langle \sigma_3 \rangle_2 [\sigma_3, \rho_1] + p_2 \langle \sigma_3 \rangle_1 [\sigma_3, \rho_2]). \end{aligned}$$

**Figura 4.15:** Diagrama de la cadena de Ising.

Dentro de la expresión de la dinámica efectiva reconocemos dos términos. El primero es un canal de desfase sobre el estado efectivo, mientras que el segundo depende tanto de los parámetros de la aplicación de grano grueso,  $p_1$  y  $p_2$ , como de valores esperados con respecto a los operadores de densidad reducidos del estado de máxima entropía. En efecto, el caso límite  $p_1 = 1$  ve la dinámica efectiva reducida a un canal de desfase en el tiempo,

$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \rho_{\text{ef}} \cos^2(\omega t) + \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3 \sin^2(\omega t),$$

mientras que el caso  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  puede ser más informativo respecto al segundo término, pues en dicho caso

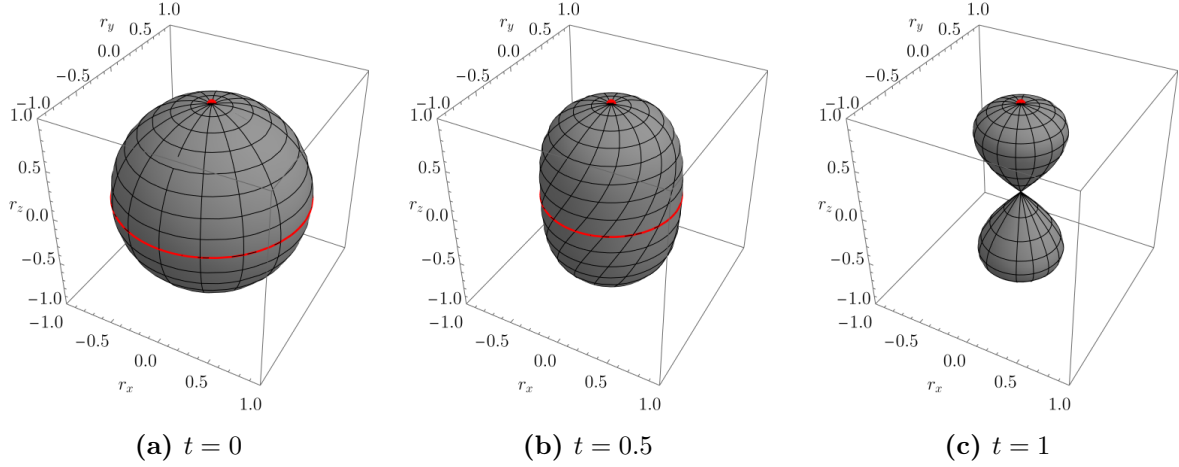
$$\Gamma_t(\rho_{\text{ef}}) = \rho_{\text{ef}} \cos^2(\omega) + \sigma_3 \rho_{\text{ef}} \sigma_3 \sin^2(\omega t) + i \langle \sigma_3 \rangle [\sigma_3, \rho_{\text{ef}}] \sin(\omega t) \cos(\omega t).$$

Nótese que si  $\langle \sigma_3 \rangle = 1$ , la evolución experimentada por el estado efectivo inicial es una rotación respecto al eje  $r_z$  (con el detalle de que los estados tales que  $\langle \sigma_3 \rangle = 1$  son invariantes bajo dichas rotaciones). Sin la dependencia en  $\langle \sigma_3 \rangle$ , la dinámica efectiva no solo sería lineal, sino unitaria. El efecto de la dinámica gruesa sobre el estado es más clara en términos del vector de Bloch del estado inicial,  $\vec{r}_{\text{ef}}$ .

$$\Gamma_t(\vec{r}_{\text{ef}}) = \begin{pmatrix} r_x \cos(2\omega t) - r_y r_z \sin(2\omega t) \\ r_x r_z \sin(2\omega t) + r_y \cos(2\omega t) \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

La dinámica aplicada al vector de Bloch desplaza este en trayectoria elíptica centrada en el origen. A diferencia de una rotación circular, que tiene como único parámetro al ángulo de rotación, una rotación elíptica depende de los parámetros de la elipse, ambos semiejes y un argumento de rotación de la elipse, además del ángulo de rotación. En este caso, el vector de Bloch rota  $2\omega t$  grados, a lo largo de la elipse de semieje mayor  $\sqrt{1 - r_z^2}$ , semieje menor  $r_z \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$  y argumento de rotación  $\arccos(r_x)$ . Esto es, los parámetros de la transformación dependen completamente del estado efectivo inicial. Por esta razón, la dinámica es no lineal y no universal. La figura 4.16 presenta la evolución de la esfera de Bloch para el caso especial  $p_1 = \frac{1}{2}$ .

Como es natural, la expresión de la dinámica efectiva se vuelve cada vez más complicada y menos informativa conforme se aumenta el número de partículas. La dinámica unitaria



**Figura 4.16:** Efecto sobre la esfera de Bloch de la dinámica efectiva inducida por el hamiltoniano de la cadena de Ising de dos partículas a diferentes tiempos  $t$ . Nótese que el desfaseamiento sólo se completa para estados tales que  $r_z = 0$ .

general para la cadena de Ising cerrada sin campo transversal es

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t = & (\cos^n(\omega t) + (-i)^n \sin^n(\omega t)) \mathbb{1} \\ & + \sum_{k=2}^{n-1} (-i)^{n-k} \cos^k(\omega t) \sin^{n-k}(\omega t) \sum_{k_1 < k_2} (\sigma_{3,k_1} \sigma_{3,k_1+1}) (\sigma_{3,k_2} \sigma_{3,k_2+1}), \end{aligned}$$

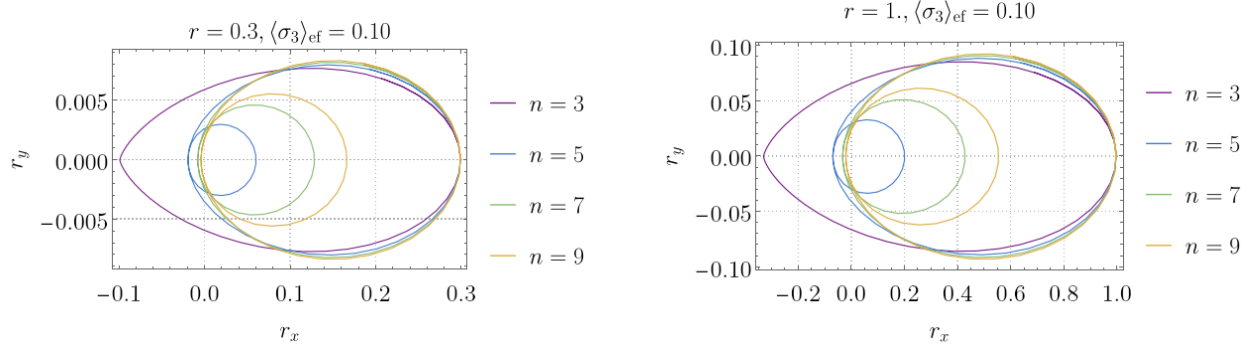
mientras que para la cadena de Ising abierta es

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t = & \cos^n(\omega t) \mathbb{1} + (-i)^n \sin^n(\omega t) \sigma_{3,1} \sigma_{3,n} \\ & + \sum_{k=2}^{n-1} (-i)^{n-k} \cos^k(\omega t) \sin^{n-k}(\omega t) \sum_{k_1 < k_2} (\sigma_{3,k_1} \sigma_{3,k_1+1}) (\sigma_{3,k_2} \sigma_{3,k_2+1}). \end{aligned}$$

Si se quisiera hallar la dinámica efectiva siguiendo el mismo procedimiento que se ha utilizado hasta ahora, esta tendría términos dependientes de los valores esperados de cadenas de Pauli  $\vec{\sigma}_3^j$ , donde  $\vec{j}$  tiene  $n-1$  entradas, cosa que se traduce en un aumento exponencial en el número de términos conforme crezca  $n$ . Aunque en este trabajo no se buscarán dichas expresiones, es posible usar calculadoras simbólicas para obtener visualizaciones de dichas dinámicas efectivas.

La figura 4.17 muestra la misma evolución pero en el caso del régimen imparcial. A notar que la forma de la evolución no parece depender del radio de Bloch inicial, pero que cambia considerablemente conforme aumenta el número de partículas  $n$ . Además, la evolución, lejos de ser una rotación alrededor de  $r_z$ , a cualquier tiempo  $t \neq 0$  conlleva cierto grado de desfaseamiento. Esto es,  $r_{\text{ef}}(t) < r_{\text{ef}}(0)$ . Queda por ser estudiado el límite  $n \rightarrow \infty$ , para el que parece se completa el desfaseamiento.

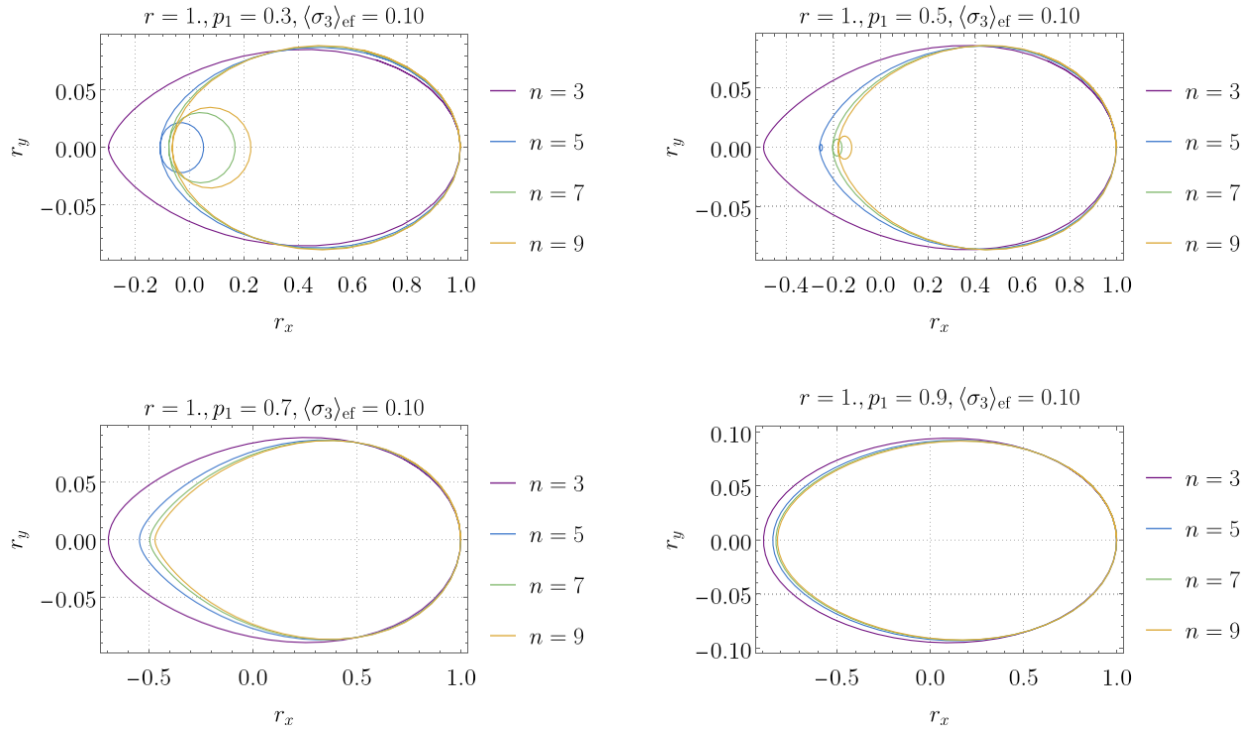
Por otro lado, figura 4.18 muestra la evolución del vector de Bloch del estado efectivo,  $\vec{r}_{\text{ef}}(t)$ , en el plano  $r_z = 0.1$ , en el caso del régimen preferencial, para diferentes valores de



**Figura 4.17:** Evolución del vector de Bloch de un estado efectivo inicial tal que  $r_z = 0.1$  en el régimen imparcial, inducida por el hamiltoniano de la cadena de Ising abierta de  $n$  partículas, para diferentes valores de  $n$  y dos valores distintos del radio de Bloch inicial  $r_{\text{ef}}$ .

$p_1$ . Nuevamente, el valor inicial del vector de Bloch no tiene efecto en la forma general de la evolución, por lo que solo se muestra el caso en el que el estado efectivo inicial es puro. A notarse que la dinámica se aleja cada vez más de una evolución unitaria conforme disminuye  $p_1$  y aumenta el número de partículas  $n$ .

En ambos casos las dinámicas son no lineales, y, en algunos casos particulares parecen tener derivadas no continuas en casos particulares (ver figura 4.18, caso  $n = 3$ ).



**Figura 4.18:** Evolución del vector de Bloch de un estado efectivo inicial tal que  $r_z = 0.1$  en el régimen de partícula preferencial, inducida por el hamiltoniano de la cadena de Ising abierta de  $n$  partículas, para diferentes valores de  $n$  y cuatro valores del parámetro probabilístico asociado a la partícula preferencial,  $p_1$ .



# Capítulo 5

## La aplicación de asignación promedio

En este apéndice se comparan dos tipos de aplicaciones de asignación diferentes: la aplicación de asignación de máxima entropía, construida en este trabajo, y la aplicación de asignación promedio.

### 5.1. Definición y acercamiento

Nos interesamos en este apéndice en la *asignación de aplicación promedio* [23]. Esta aplicación asigna a un estado efectivo  $\rho_{\text{ef}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$  un estado microscópico  $\varrho_{\text{avg}} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_m)$  que es una mezcla estadística de estados finos. Más específicamente, le asigna el promedio del conjunto de todos los estados puros microscópicos tales que son compatibles con el estado efectivo bajo una aplicación de grano grueso en particular (en este trabajo, la dada por la ecuación 3.1). Dicho conjunto de estados puros microscópicos queda definido como

$$\Omega_{\mathcal{C}}(\rho_{\text{ef}}) = \{|\psi\rangle \in \mathbf{H}_m : \mathcal{C}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho_{\text{ef}}\}. \quad (5.1)$$

La aplicación de asignación promedio es el promedio sobre dicho conjunto, i.e.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}) = \overline{\Omega_{\mathcal{C}}(\rho_{\text{ef}})} = \int d\mu \, \delta(\mathcal{C}(|\psi\rangle\langle\psi|) - \rho_{\text{ef}}) |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (5.2)$$

donde  $d\mu$  es la medida de Haar sobre los estados puros de  $\mathbf{H}_m$ . La delta de Dirac asegura que únicamente se tomen en consideración a los estados puros compatibles, y la medida de Haar, que la integración sobre dicho conjunto sea uniforme. Dicho de otra forma, la aplicación de asignación promedio asume dos cosas sobre el sistema microscópico: que puede estar en un estado puro, y que todos los estados puros son igualmente probables.

La solución analítica a la ecuación (5.2) es complicada y no se discutirá en este trabajo, pero ha sido encontrada por los doctores C. Pineda y R. Uriostegui del Instituto de Física

de la UNAM, para el caso en que la aplicación de grano grueso va de  $\mathcal{S}(\text{H}_4)$  a  $\mathcal{S}(\text{H}_2)$ <sup>1</sup>. Esto es, del espacio de dos partículas de dos niveles, al espacio de una partícula de dos niveles. En este trabajo no se profundizará en dicho resultado, pero se utilizará para poder comparar ambas aplicaciones de asignación.

## 5.2. La diferencia entre asignaciones

Aunque las hipótesis de la aplicación de asignación promedio puedan parecer razonables, Jaynes, en su artículo, argumenta que estas son tan arbitrarias como cualquier otra suposición, a menos que algún tipo de simetría del sistema sugiera lo contrario. Nos preguntamos sobre la diferencia entre el estado de máxima entropía y el estado promedio, como una función del parámetro  $p_1$  de la aplicación de grano grueso (recuérdese que en el caso  $n = 1$  el segundo parámetro es simplemente  $(1 - p_1)$ ) y del radio de Bloch del estado efectivo inicial  $r_{\text{ef}}$ , i.e.

$$d_F(\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}), \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}})) = d_F(\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}), \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}))(p_1, r_{\text{ef}}),$$

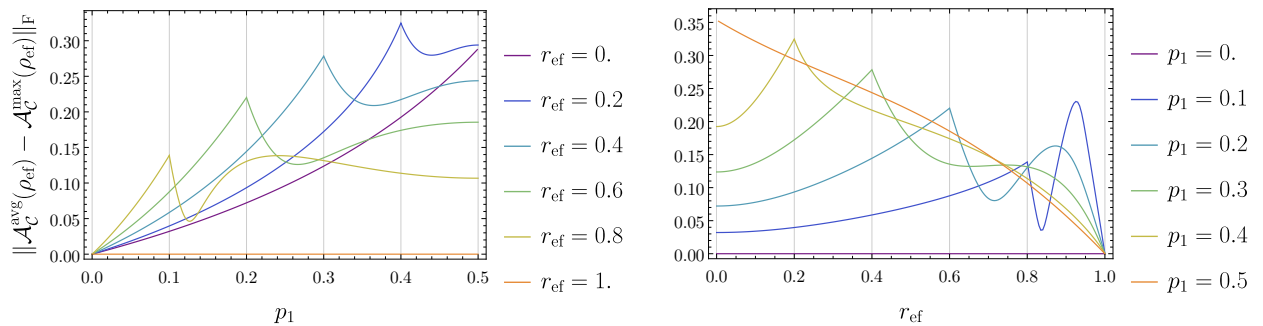
donde  $d_F(A, B)$  designa a la distancia entre dos matrices inducida por la norma de Frobenius. La norma de Frobenius de una matriz  $A$  es

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(AA^\dagger)},$$

de tal forma que

$$d_F(A, B) = \|A - B\|_F.$$

Como se mencionó previamente, la expresión de  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}})$  no es sencilla, así que esta distancia se analizará de manera cuantitativa. La figura 5.1 muestra dicha distancia, primero como función del parámetro de ruido  $p_1$  para diferentes valores del radio de Bloch del estado efectivo inicial,  $r_{\text{ef}}$ , y luego como función de  $r_{\text{ef}}$  para diferentes valores de  $p_1$ .

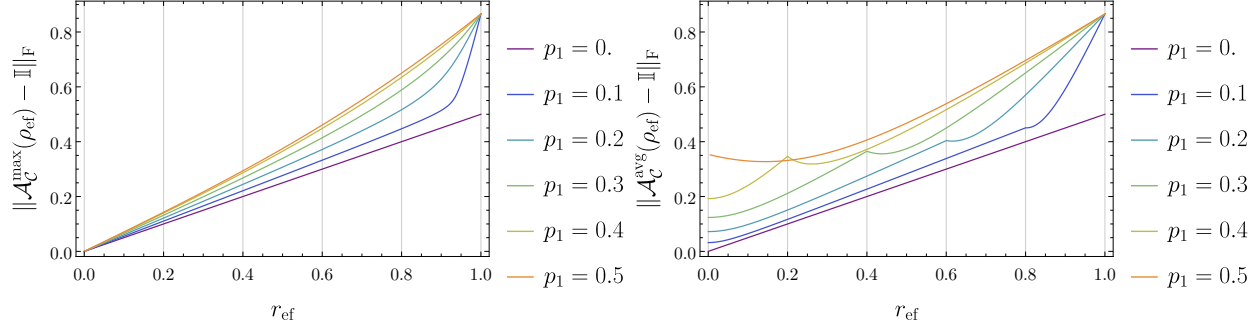


**Figura 5.1:** Distancia de Frobenius entre asignaciones como función de  $p_1$  para diferentes valores de  $r_z$ , y como función de  $r_z$  para diferentes valores de  $p_1$ .

Lo primero que puede observarse en dichas gráficas es que la distancia no es diferenciable para valores de  $r_{\text{ef}}$  y  $p_1$  tales que  $r_z = 1 - 2p_1$ . Esta característica es una consecuencia del

<sup>1</sup>Debido a que el trabajo no ha sido publicado aún, no hay una referencia disponible.

comportamiento de la asignación promedio, y no de la asignación de máxima entropía. Para convencerse de esto basta con observar la figura 5.2, que muestra las distancias de Frobenius de la asignación de máxima entropía y de la asignación promedio al estado máximamente mezclado.



**Figura 5.2:** Distancia entre asignaciones y el estado máximamente mezclado.

De las figuras 5.1 y 5.2 se puede extraer información interesante. Por un lado, hay dos casos en los que las asignaciones son iguales. El primero siendo el caso en el que el estado efectivo inicial es puro, i.e.  $r_{\text{ef}} = 1$ . Este resultado ya había sido previamente discutido y demostrado: de acuerdo con la ecuación (3.16),  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}) = \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}) = \rho_{\text{ef}} \otimes \rho_{\text{ef}}$ . El segundo siendo el caso en que la aplicación de grano grueso se reduce a una traza parcial ( $p_1 \in \{0, 1\}$ ), para el que el estado asignado en ambos casos es  $\mathbb{1} \otimes \rho_{\text{ef}}$  o  $\rho_{\text{ef}} \otimes \mathbb{1}$ . Por otro lado, mientras que la asignación de máxima entropía asigna al estado máximamente mezclado  $\mathbb{1}_2/2$  el estado máximamente mezclado correspondiente,  $\mathbb{1}_4/4$ , la asignación promedio no hace esto.

Las diferencias y similitudes entre las asignaciones tendrán efectos en las dinámicas efectivas. Recordando que el estado efectivo evolucionado está dado por la composición

$$\rho_{\text{ef}}(t) = (\mathcal{C} \circ \mathcal{E}_t)(\mathcal{A}_{\mathcal{C}}(\rho_{\text{ef}}(0))),$$

es natural que siempre que  $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}(\rho_{\text{ef}}(0)) = \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}(0))$  coincidan, entonces  $\Gamma_t^{\text{avg}} = \Gamma_t^{\text{máx}}$ . Sin embargo, como hemos visto, las asignaciones no suelen coincidir.

## 5.3. Comparación de dinámicas efectivas

### 5.3.1. Dinámicas locales

#### Dinámica local simétrica

Consideramos la unitaria local simétrica

$$\mathcal{U}_t = U_t \otimes V_t,$$

donde  $U_t, V_t \in U(2)$  y  $U_t = V_t$ . Debido a que el promedio es lineal, la dinámica simétrica se factoriza cuando se utiliza la aplicación de asignación promedio. Para ver esto, nótese que

$$U_t \otimes U_t = (\mathbb{1} \otimes U_t)(\varrho_{\text{avg}})(\mathbb{1} \otimes U_t^\dagger).$$

Luego, descomponiendo al estado efectivo evolucionado en la base de las matrices de Pauli,

$$\rho_{\text{ef}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \text{Tr}[\sigma_j \rho_{\text{ef}}(t)] \sigma_j \quad \text{con} \quad \text{Tr}[\sigma_j \rho_{\text{ef}}(t)] = \text{Tr} \left\{ \sigma_j \mathcal{C} \left[ \mathcal{U}_t(\varrho_{\text{avg}}) \mathcal{U}_t^\dagger \right] \right\}.$$

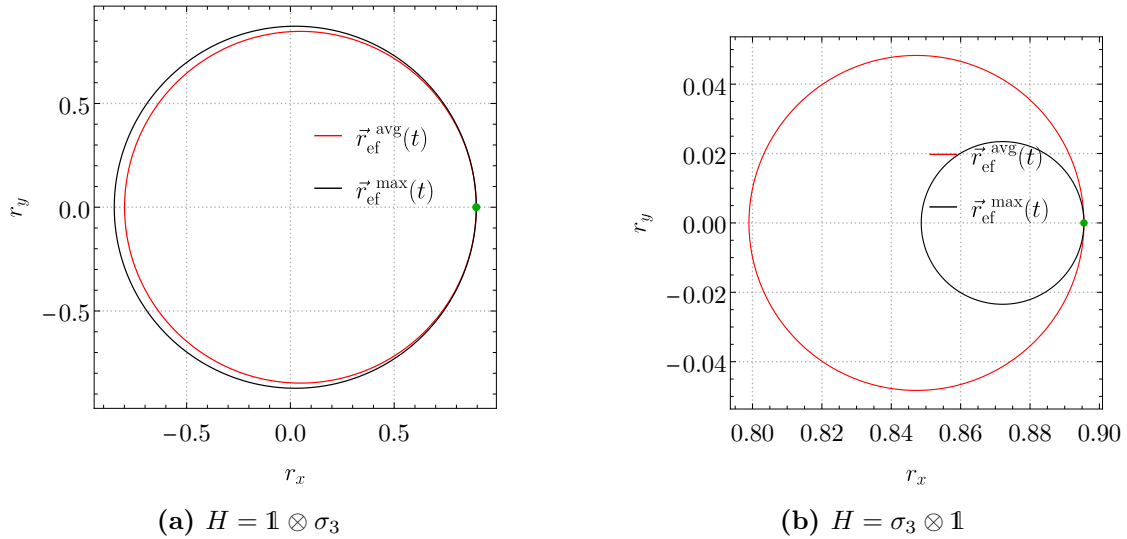
Como  $\text{Tr}[(A \otimes \mathbb{1})\varrho] = \text{Tr}[\text{Tr}_2(\varrho)]$  y gracias a la propiedad cíclica de la traza es inmediato que la dinámica efectiva es

$$\Gamma_t^{\text{avg}}(\rho_{\text{ef}}) = U(t)\rho_{\text{ef}}(U(t))^\dagger.$$

Por lo que, en este caso, las dinámicas gruesas coinciden.

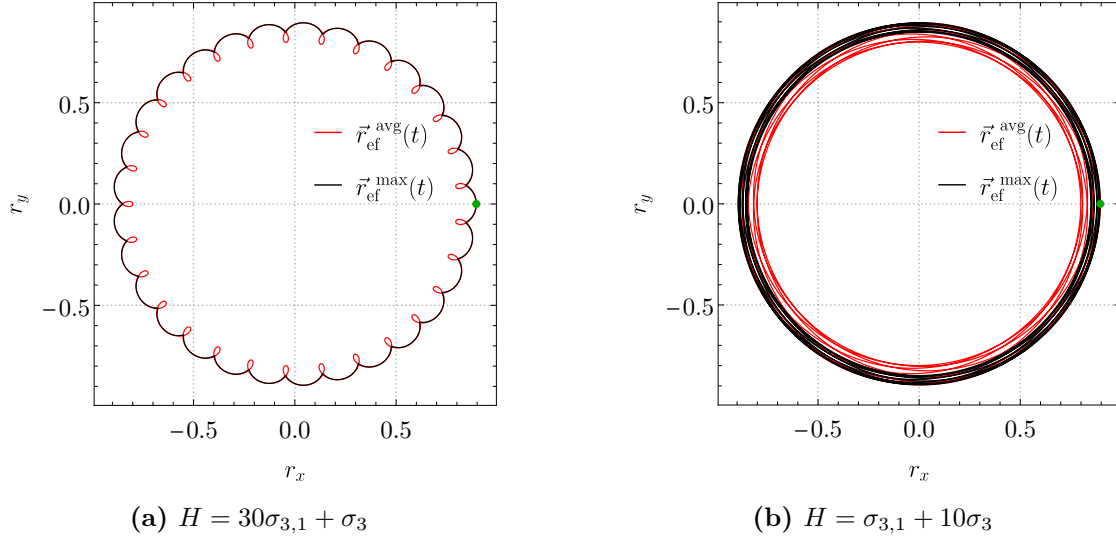
## Dinámica general

Debido a que la aplicación promedio crea correlaciones que la aplicación de máxima entropía no, la dinámicas efectivas generadas por una evolución local no coinciden en general, como lo demuestran las figuras 5.3 y 5.4.



**Figura 5.3:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por diferentes hamiltonianos en un sistema de dos partículas partiendo de un estado efectivo inicial (verde) tal que  $r_{\text{ef}} = 0.9$  y  $r_z \approx 0.09$ . En rojo, la evolución del estado promedio. En negro, la del estado de máxima entropía.

Debido a que la aplicación de asignación promedio únicamente toma en cuenta estados puros, la contribución del entrelazamiento es más importante. Esto conduce a una mayor pérdida de información bajo la aplicación de grano grueso y, como consecuencia, una mayor contracción en la esfera de Bloch, que es lo que podemos observar en las figuras 5.3 y 5.4.



**Figura 5.4:** Variaciones correspondientes a la dinámica efectiva inducida por diferentes hamiltonianos en un sistema de dos partículas partiendo de un estado efectivo inicial (verde) tal que  $r_{\text{ef}} = 0.9$  y  $r_z \approx 0.09$ . En rojo, la evolución del estado promedio. En negro, la del estado de máxima entropía.

### 5.3.2. La compuerta SWAP

La dinámica efectiva generada por la compuerta cuántica SWAP y la aplicación de asignación promedio es, de manera similar a como ocurrió cuando se utilizó la aplicación de asignación de máxima entropía, un canal de despolarización. Estos canales de despolarización coinciden de forma trivial cuando las asignaciones lo hacen, esto es, para  $p_1 \in \{0, 1\}$  y también cuando  $r_{\text{ef}} = 1$ . Sin embargo, resulta que las dinámicas coinciden también cuando  $p_1 = \frac{1}{2}$ . Aún más, la dinámica es la misma independientemente de la asignación que se escoja. Sea  $\rho_{\text{ef}}(0) \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$  el estado efectivo inicial y  $\varrho = \mathcal{A}(\rho_{\text{ef}}(0))$  un estado compatible bajo la aplicación de grano grueso cuando  $p_1 = \frac{1}{2}$ . La dinámica efectiva:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{t=1}^{\mathcal{A}}(\rho_{\text{ef}}(0)) &= \mathcal{C}[S\varrho S] \\
 &= \text{Tr}_2 \left[ S \left( \frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}S\varrho S \right) S \right] \\
 &= \text{Tr}_2 \left[ \frac{1}{2}S\varrho S + \frac{1}{2}\varrho \right] \\
 &= \rho_{\text{ef}}(0)
 \end{aligned}$$

Esto es, toda la esfera de Bloch es invariante bajo la dinámica efectiva inducida por una evolución microscópica SWAP si el parámetro de la aplicación de grano grueso es  $p_1 = \frac{1}{2}$ . Fuera de estos casos particulares, el canal de despolarización efectivo no es necesariamente el mismo cuando se usan diferentes **aplicaciones de asignación**.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis se estudió la dinámica efectiva que emerge de considerar un modelo de grano grueso y el principio de máxima entropía (o de mínima información) para lidiar con la no reversibilidad del modelo de grano grueso. En particular estudiamos el escenario en el que se relacionan sistemas de  $n$  qubits, que evolucionan de acuerdo a la mecánica cuántica, con un sistema de un qubit.

Se estudió la dinámica efectiva que emergió de considerar una aplicación de grano grueso resultante de concatenar dos tipos de errores. El primero es el inducido por un aparato que tiene una probabilidad no nula de medir una partícula diferente a la pretendida. El segundo proviene de la incapacidad del detector de resolver todos los grados de libertad del sistema. Esta falta de resolución provoca que el sistema de  $n$  qubits se vea como un sistema de uno solo. Se construyó una aplicación de asignación basada en el Principio de Máxima Entropía para hallar al estado microscópico menos sesgado posible, tal que fuera compatible con un estado efectivo dado. Asumiendo que el sistema fino evoluciona de manera que cumple con las leyes de la mecánica cuántica, la dinámica efectiva estudiada es la composición de la aplicación de asignación, las evoluciones microscópicas, y la aplicación de grano grueso, como se ve en la ecuación 3.17.

Como se discutió en el capítulo 3, del modelo de grano grueso utilizado se reconocieron dos regímenes particularmente interesantes, el *régimen imparcial*, asociado a una caja de  $n$  partículas idénticas en la que cada una es igualmente probable de ser medida, y el régimen de partícula preferencial, en el que una partícula tiene una probabilidad mucho mayor de ser medida. En estos regímenes, la asignación de máxima entropía está dada por las ecuaciones (3.15) y (3.14) respectivamente. Además, el estado asignado a través del Principio de Máxima Entropía resultó ser un estado mixto y factorizable (esto es, sin correlaciones entre los subsistemas), como se aprecia en la ecuación (3.6). Esta propiedad es un resultado natural del principio de mínima información. En efecto, debido a que las correlaciones entre los subsistemas no son accesibles a través de la descripción gruesa, estas son minimizadas.

De acuerdo a lo hallado en el capítulo 4, a través de la aplicación de grano grueso y

la aplicación de asignación de máxima entropía se estudió la dinámica efectiva de sistemas de muchas partículas. A lo largo de este análisis, se hallaron comportamientos más afines a la física clásica que a la mecánica cuántica, como la no linealidad de las evoluciones. Casos como el de las dinámicas inducidas por las compuertas SWAP y CNOT resultaron ser versiones no lineales de canales cuánticos conocidos. En particular, la compuerta SWAP efectiva (4.15) corresponde a un canal de despolarización no lineal, mientras que la compuerta CNOT efectiva es una combinación de un canal *phase flip* y un canal *bit flip* no lineales. Sin embargo, las no linealidades encontradas, a diferencia de las dinámicas clásicas no lineales, no son universales. Esto debido a que todas resultaron dependientes del estado efectivo inicial.

Otra diferencia viene del hecho de que las evoluciones deterministas no conllevan cambios en la entropía del sistema, mientras que las evoluciones efectivas estudiadas se traducían en contracciones de la esfera de Bloch, quizá mejor representadas por la compuerta SWAP efectiva (4.15), caso en el que la no linealidad de la dinámica se halla enteramente en términos de la pureza del estado efectivo inicial. Dicho de otra forma, las dinámicas efectivas resultaron ser procesos irreversibles, manifestado en el aumento de la entropía del sistema.

Alguna de las dinámicas estudiadas, particularmente aquellas generadas por evoluciones subyacentes con fuertes simetrías, resultaron ser no solo lineales, sino canales cuánticos, como el caso de ciertos tipos de canales de Pauli, (4.21) y (4.24), y el canal de estabilización (4.25), o aún más, evoluciones unitarias, como el caso de la dinámica local simétrica (4.4).

Ninguna de las dinámicas estudiadas es no lineal en el caso en que las partículas no preferenciales tienen una probabilidad nula de ser detectadas, esto es, cuando el error es nulo, que equivale al caso en que la aplicación de medición borrosa sale del escenario. Aunque el único elemento no lineal en la composición que define a la dinámica efectiva es la aplicación de asignación, queda por investigar si es la aplicación de asignación o la aplicación de medición borrosa la causante de las no linealidades en las dinámicas efectivas.

Finalmente, de la comparación entre las aplicaciones de asignación de máxima entropía y promedio realizada en el capítulo 5, se encontró que estas coinciden en los casos en que no existe la posibilidad de que se detecte una partícula diferente a la pretendida. Además, se demostró que todas las aplicaciones de asignación deben coincidir cuando el estado efectivo inicial es puro y hay participación de todos los subsistemas en la aplicación de medición borrosa (esto es, todas las permutaciones tienen una probabilidad no nula de ocurrir). En este caso, cualquier aplicación de asignación debe asignar al estado efectivo un estado coherente de espín, dado por la ecuación 3.16.



# Apéndice A

## Demostraciones de relaciones frecuentemente socorridas

### Cuadrado de vector de pauli

Se cumple que

$$\begin{aligned}(\hat{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_j r_j \sigma_j \sum_k r_k \sigma_k \\&= \sum_j r_j \sum_k r_k \sigma_j \sigma_k \\&= \sum_j r_j \sum_k r_k (\mathbb{1} \delta_{jk} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l) \\&= \sum_j r_j \sum_k r_k (\mathbb{1} \delta_{jk}) + i \sum_j r_j \sum_k r_k \epsilon_{jkl} \sigma_l \\&= \mathbb{1}\end{aligned}$$

Donde en la última línea se ha utilizado la antisimetría del tensor de Lévi-Civita y  $\hat{r}$  es un vector unitario. Se sigue que para todo entero positivo  $p$

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^{2p} = \mathbb{1} \tag{A.1}$$

### Exponencial real de vector de Pauli

Si se expande la serie de Taylor usando como argumento un vector de pauli  $r\hat{r} \cdot \vec{\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} e^{r\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (r\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^k \\ &= \sum_k \frac{r^{2k} (\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^{2k}}{(2k)!} + \sum_k \frac{r^{2k+1} (\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1}}{(2k+1)!}, \end{aligned}$$

se puede usar (A.1) para ver que

$$e^{r\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \sum_k \frac{r^{2k}}{(2k)!} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma} \sum_k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

que, claro está, corresponde a

$$e^{r\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \cosh r + \hat{r} \cdot \vec{\sigma} \sinh r \quad (\text{A.2})$$

### Exponencial compleja de un vector de Pauli

Si se expande la serie de Taylor usando como argumento un vector de pauli  $r\hat{r} \cdot \vec{\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} e^{ir\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ir\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^k \\ &= \sum_k \frac{r^{2k} (\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^{2k}}{(2k)!} + i \sum_k \frac{r^{2k+1} (\hat{r} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1}}{(2k+1)!}, \end{aligned}$$

se puede usar (A.1) para ver que

$$e^{ir\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \sum_k (-1)^{2k} \frac{r^{2k}}{(2k)!} + i\hat{r} \cdot \vec{\sigma} \sum_k (-1)^{2k+1} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

que, claro está, corresponde a

$$e^{ir\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \cos r + i\hat{r} \cdot \vec{\sigma} \sin r \quad (\text{A.3})$$

### Unitaria generada por un operador hermítico

Toda unitaria de  $2 \times 2$  puede generarse a través de un operador hermítico  $H$  como

$$U = e^{-iH}.$$

---

Pues bien, como el conjunto de las matrices de Pauli, junto a la identidad, forman una base del espacio de operadores (respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt),  $H$  puede expandirse como  $H = r_0 \mathbb{1} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z$ . Si se utiliza este para construir una unitaria, desarrollando la serie se encuentra que

$$\begin{aligned} e^{iH} &= e^{i(r_0 \mathbb{1} + r \hat{r} \cdot \vec{\sigma})} \\ &= e^{ir_0 \mathbb{1}} e^{ir \hat{r} \cdot \vec{\sigma}} \\ &= e^{ir \hat{r} \cdot \vec{\sigma}} \end{aligned}$$

Por (A.3), se sigue que

$$e^{-iH} = \mathbb{1} \cos r + i(\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \sin r \quad (\text{A.4})$$

### **Evolución de operador de densidad por operador unitario**

Podemos expandir la ecuación

$$\rho(t) = (e^{-i\omega t \hat{r} \cdot \vec{\sigma}}) \rho(0) (e^{i\omega t \hat{r} \cdot \vec{\sigma}})$$

haciendo uso de la ecuación (A.3) como

$$\rho(t) = \rho(0) \cos^2(\omega t) + (\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \rho(0) (\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \sin^2(\omega t) + i \sin(\omega t) \cos(\omega t) [\rho(0), \hat{r} \cdot \vec{\sigma}] \quad (\text{A.5})$$



# Bibliografía

- [1] B. Bransden and C. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*. Prentice Hall, 2003.
- [2] A. Holevo, *The Standard Statistical Model of Quantum Mechanics*. 01 2001.
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] G. Jaeger, *Quantum Information*. Springer, 2007.
- [5] W. Steeb and Y. Hardy, *Problems And Solutions in Quantum Computing And Quantum Information*. USA: World Scientific Publishing Co., Inc., 2006.
- [6] T. Heinosaari and M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*. Cambridge University Press, 2011.
- [7] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*. Great Clarendon Street: Oxford University Press, 2002.
- [8] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*. Cambridge University Press, 2018.
- [9] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, 1948.
- [10] M. M. Wilde, *From Classical to Quantum Shannon Theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [11] M. Tribus and E. C. McIrvine, “Energy and information,” *Scientific American*, vol. 225, pp. 179–188, 1971.
- [12] B. Schneier, *Applied Cryptography*. Wiley, 2nd ed., 1996.
- [13] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [14] E. T. Jaynes, “Information theory and statistical mechanics,” *Phys. Rev.*, vol. 106, pp. 620–630, May 1957.
- [15] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. NY: Springer New York, 1987.

- [16] E. T. Jaynes, “Information theory and statistical mechanics. ii,” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 171–190, Oct 1957.
- [17] E. H. Wichmann, “Density matrices arising from incomplete measurements,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 7, pp. 884–896, 1963.
- [18] E. H. Wichmann, “Density Matrices Arising from Incomplete Measurements,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, pp. 884–896, jul 1963.
- [19] S. Kmiecik, D. Gront, M. Kolinski, L. Wieteska, A. Badaczewska-Dawid, and A. Kolinski, “Coarse-grained protein models and their applications,” *Chemical Reviews*, vol. 116, 06 2016.
- [20] K. R. Hadley and C. McCabe, “Coarse-grained molecular models of water: a review,” *Molecular Simulation*, vol. 38, no. 8-9, pp. 671–681, 2012. PMID: 22904601.
- [21] A. E. Badaczewska-Dawid, A. Kolinski, and S. Kmiecik, “Computational reconstruction of atomistic protein structures from coarse-grained models,” *Computational and Structural Biotechnology Journal*, vol. 18, pp. 162–176, 2020.
- [22] M. Fox, *Quantum optics: an introduction*. Oxford master series in atomic, optical, and laser physics, Oxford: Oxford Univ. Press, 2006.
- [23] P. S. Correia, P. C. Obando, R. O. Vallejos, and F. de Melo, “Macro-to-micro quantum mapping and the emergence of nonlinearity,” *Physical Review A*, vol. 103, May 2021.
- [24] C. Pineda, D. Davalos, C. Viviescas, and A. Rosado, “Fuzzy measurements and coarse graining in quantum many-body systems,” *Physical Review A*, vol. 104, Oct 2021.
- [25] W. J. Culver, “On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 17, no. 5, pp. 1146–1151, 1966.
- [26] D. Davalos, M. Ziman, and C. Pineda, “Divisibility of qubit channels and dynamical maps,” *Quantum*, vol. 3, p. 144, may 2019.
- [27] C. Duarte, G. D. Carvalho, N. K. Bernardes, and F. de Melo, “Emerging dynamics arising from coarse-grained quantum systems,” *Physical Review A*, vol. 96, Sep 2017.
- [28] I. Djordjevic, *Quantum Information Processing and Quantum Error Correction*. Oxford: Academic Press, 2012.
- [29] G. Grosso and G. P. Parravicini, *Magnetic Ordering in Crystals*. Amsterdam: Academic Press, second edition ed., 2014.