

# Proyecto de Tesis de Licenciatura en Física

Presenta: Adán Castillo Guerrero

15 de febrero de 2022

A continuación se presenta el proyecto de Tesis de Licenciatura en Física que desarrollará el alumno **Adán Castillo Guerrero**, bajo la dirección del **Dr. David Dávalos González**. El título del proyecto es “DINÁMICA DE UN SISTEMA DE DOS QUBITS BAJO UN MODELO DE GRANO GRUESO”.

## 1. Objetivos de la tesis

Bajo el marco de la *teoría de sistemas cuánticos abiertos y sistemas de muchos cuerpos*, se estudiarán las propiedades de dinámicas *de grano grueso* (hispanización del concepto en inglés *coarse graining*). Esto es, dinámicas que emergen cuando cuando no es posible tener la descripción completa del sistema cuántico, por ejemplo por parte del experimental. Los objetivos particulares consisten en: i) el estudio de un prototipo de descripción de grano grueso formalizada en términos de una *aplicación lineal* sobre el conjunto de *matrices de densidad* (estados cuánticos), en particular se utilizarán sistemas compuestos de dos o más *sistemas de dos niveles* (qubits); ii) construcción de las dinámicas emergentes en base a la descripción de grano grueso a nivel de los estados; iii) se utilizarán dinámicas sencillas pero bien conocidas para entender qué aspectos de ellas son más afectados, así como qué propiedades prevalecen cuando no se tiene acceso a todo el sistema cuántico. Por último se utilizarán herramientas computacionales, tales como *Mathematica*, para probar las hipótesis y calcular los casos no accesibles analíticamente.

## 2. Descripción del proyecto

### 2.1. Antecedentes

Dentro del marco de la *teoría de información cuántica*, especialmente en conexión con la parte experimental, es natural suponer que no siempre es posible disponer de toda la información sobre el *estado* del sistema de interés. Esto ya sea por insuficiencia en la resolución de los aparatos de medición o por el inevitable error inherente a las herramientas de medición. Un prototipo sencillo de error consiste en el inducido por un aparato que no distingue diferentes conjuntos de partículas entre sí. El caso más simple corresponde a la permutación de dos partículas. Este intercambio accidental a la hora de la medición es una *aplicación borrosa* [1].

Para ilustrar lo anterior, considérese dicha aplicación borrosa sobre un sistema de dos qubits (llámense qubit  $A$  y qubit  $B$ ). El estado del sistema está caracterizado por un operador de densidad  $\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2)$ , donde  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2)$  denota el espacio convexo de los operadores de densidad que actúan sobre  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ , donde  $\mathcal{H}_2$  es el espacio de Hilbert correspondiente a un qubit.

La acción de la aplicación borrosa se escribe como sigue,

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2) \\ \rho &\mapsto p\rho + (1-p)S\rho S,\end{aligned}$$

donde  $0 < p < 1$  es la probabilidad con la que el aparato de medición identifica erroneamente a los dos subsistemas,  $S$  es el operador de transposición de dos partículas, definido como

$$S|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbf{H}_2.$$

El estado resultante,  $\mathcal{F}[\rho_{AB}] = p\rho_{AB} + (1-p)\rho_{BA}$ , es una mezcla estadística (matemáticamente descrita como una combinación convexa) del estado accesible con un detector perfecto,  $\rho_{AB}$ , y el estado donde los qubits tienen las etiquetas equivocadas,  $\rho_{BA} := S\rho_{AB}S$ . Nótese que la aplicación borrosa es lineal y conserva la dimensión del sistema. Esto es, si bien el aparato comete errores, este resuelve todos los grados de libertad del sistema.

Considere ahora el caso en que el aparato de medición, además de describir ruido proveniente de errores de etiquetado, es incapaz de resolver todos los grados de libertad del sistema. Como prototipo de esto, se tiene el caso en el que se detecta solo una partícula en el lugar en el que hay dos. Matemáticamente, lo anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{H}_2) \\ \rho_{AB} &\mapsto p\rho_A + (1-p)\rho_B,\end{aligned}$$

donde  $\rho_A = \text{tr}_B \rho_{AB}$  y  $\rho_B = \text{tr}_A \rho_{AB}$ , es decir, las matrices de densidad reducidas de la partículas  $A$  y  $B$ , respectivamente. A diferencia de la aplicación borrosa, el modelo de grano grueso disminuye la dimensión del estado resultante. Además se puede mostrar que la ecuación anterior puede reescribirse en términos de la aplicación borrosa [1],

$$\mathcal{C}[\rho] = (\text{Tr}_B \circ \mathcal{F})[\rho].$$

En este contexto, diferenciamos al estado “microscópico” o “fino”, denotado por  $\rho_f \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2)$ , y al estado “macroscópico” o “grueso”, denotado por  $\rho_g \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2)$ , a través de la siguiente relación,

$$\rho_g = \mathcal{C}[\rho_f].$$

Cabe señalar que la relación anterior no es invertible, por lo que la manera de asignar un estado microscópico a uno macroscópico, no es única. En la literatura se pueden encontrar propuestas para hacer dicha asignación. Por ejemplo se ha utilizado el *principio de máxima entropía* [2] en la ejecución de tomografía cuántica [3]. También han sido propuestas asignaciones directamente en el caso de aplicaciones lineales de grano grueso basadas en la información macroscópica [4], donde además los autores muestran que los estados finos resultantes dependen de los parámetros de los estados gruesos manera no lineal. Esto tiene relevancia central en la física, ya que muestra un camino para la emergencia de dinámica no lineal a partir de dinámica lineal microscópica.

## 2.2. Propuesta

La meta del proyecto es la construcción y estudio de ‘dinámicas gruesas’, denotadas como  $\Gamma_t$ , basadas en la aplicación lineal de grano grueso descrita anteriormente sobre estados microscópicos asignados apropiadamente. Todo esto dada una dinámica microscópica unitaria, denotada por  $\mathcal{U}_t$ . Concretamente se construirá lo siguiente,

$$\begin{aligned}\Gamma_t : \mathcal{S}(\mathbf{H}_2) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{H}_2) \\ \rho_g(0) &\mapsto \rho_g(t),\end{aligned}$$

donde la dinámica gruesa se define como la composición,

$$\Gamma_t := \mathcal{C} \circ \mathcal{U}_t \circ \mathcal{A}_\mathcal{C}.$$

El siguiente diagrama ilustra la ecuación anterior,

$$\begin{array}{ccc} \rho_g(0) & \xrightarrow{\Gamma_t} & \rho_g(t) \\ \mathcal{A}_\mathcal{C} \downarrow & & \uparrow \mathcal{C} \\ \rho_f(0) & \xrightarrow{\mathcal{U}_t} & \rho_f(t). \end{array}$$

Aquí  $\mathcal{A}_\mathcal{C}$  denota una aplicación que asigna un estado fino  $\rho_f(0)$  al estado  $\rho_g(0)$ . Como ya se mencionó, no hay una forma única de hacer dicha asignación. En este trabajo se explorarán dos formas de hacerlo. La primera de ellas consiste en definir  $\rho_f(0)$  como el promedio sobre todos los estados compatibles con  $\rho_g(0)$  [4], es decir

$$\rho_f(0) = \overline{\Omega(\rho_g(0))},$$

donde

$$\Omega(\rho) = \{|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2) \mid \mathcal{C}[|\psi\rangle\langle\psi|] = \rho\}.$$

A esta asignación la llamaremos *asignación promedio*. La segunda forma de asignación consiste en usar el principio de máxima entropía, dados los promedios de un conjunto de observables tomográficamente completo del sistema al nivel grueso. Esto es, asignaremos al estado  $\rho_g(0)$  un estado fino que formalmente sea totalmente imparcial y no añada ninguna cantidad de información arbitraria además de las restricciones  $\langle A_i \rangle = \text{tr}[A_i \rho_g(0)]$ , donde el conjunto  $\{A_i\}$  es tomográficamente completo [2]. A esta asignación la denotaremos como *asignación MaxEnt*. Cabe señalar que por entropía, nos referimos a la entropía de Von Neumann,  $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \log(\rho)]$ .

Para estudiar la emergencia de la no linealidad, se considerarán varias dinámicas microscópicas. Entre ellas destacan aquellas que son simétricas bajo el intercambio de partículas, tales como la transposición de partículas o  $\mathcal{U}_t[\rho] = (U_t \otimes U_t)\rho(U_t \otimes U_t)^\dagger$ ; así como las que no son simétricas, tales como la compuerta *controlled not* (CNOT).

El programa del proyecto es el siguiente:

- Exploración numérica de la asignación promedio, en particular conocer las simetrías del estado resultante. Para esto se utilizará el algoritmo de Metropolis.
- Exploración analítica de la asignación MaxEnt. Para ello se hará el computo analítico o numérico, según se obtengan ecuaciones trascendentales o no, de los multiplicadores de Lagrange asociados.
- Construcción de dinámicas gruesas para estados gruesos puros. Cálculos preliminares muestran que esto es posible de manera analítica.
- Construcción de dinámicas gruesas para estados iniciales generales. Se contempla primero una exploración numérica, sin embargo usando el asignación MaxEnt se espera desarrollar resultados analíticos.
- Por último, se asesorará a Adán en la escritura del documento de la tesis. Este comprenderá un marco teórico que incluya conceptos de información cuántica y teoría de sistemas cuánticos abiertos. Luego se presentarán los resultados a manera de un catálogo usando las diferentes dinámicas y asignaciones. Hecho esto, se discutirá la emergencia y rol de la no linealidad de las dinámicas resultantes.



---

Adán Castillo Guerrero  
Estudiante de Física  
Facultad de Ciencias, UNAM

---

Dr. David Dávalos Gonzáles  
Investigador asociado  
Centro de Investigación en Información Cuántica (RCQI)  
Instituto de Física, Academia Eslovaca de Ciencias (SAV)

## Referencias

- [1] C. Pineda, D. Davalos, C. Viviescas, and A. Rosado, “Fuzzy measurements and coarse graining in quantum many-body systems,” *Physical Review A*, vol. 104, Oct 2021.
- [2] Edwin T. Jaynes, “On The Rationale of Maximum-Entropy Methods,” 1982.
- [3] V. Bužek and G. Drobný, “Quantum tomography via the MaxEnt principle,” *Journal of Modern Optics*, vol. 47-14, no. 15, pp. 2823–2839, 2000.
- [4] P. S. Correia, P. C. Obando, R. O. Vallejos, and F. de Melo, “Macro-to-micro quantum mapping and the emergence of nonlinearity,” *Physical Review A*, vol. 103, May 2021.