Berechenbarkeit und Komplexität

Übung Nr. 02
Abgabe: 07.11.2018

Georg Dorndorf
Adrian Hinrichs

# 1	# 2	# 3	Σ
/5	/4	/5	/14

Aufgabe 1

/5

Problem: Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \overline{q}, \delta)$ eine TM, welche nur Bandzellen zwischen einschließlich Positionen 0 und $s(n) - 1$ besucht. Zeigen Sie: Wenn M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann hält M auf w nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

Beweis: Sei eine Turingmaschine M wie oben gegeben. Wir können mit sicherheit sagen, dass diese Turingmaschine nicht hält, wenn eine Konfiguration — also die Kombination aus dem beschriebenen Band, dem aktiven Zustand des Steuerautomaten und der Position des Schreib–/Leselopf — zwei mal erreicht wird, da ein deterministischer Automat in zwei identischen Situationen *ipso facto* keine unterschiedlichen Entscheidungen treffen kann.

Da alle Bandzellen zweischen einschließlich den Postionen 0 und $s(n) - 1$ besucht werden, ist die Anzahl der besucheten Zellen $s(n)$[1]. Die Menge der Konfigurationen ist nun gegeben durch:

$$Q \times (\Gamma^{s(n)}) \times [0, s(n) - 1]$$

Die mächtigkeit dieser Menge ist nun:

$$\begin{aligned}
&\left|Q \times (\Gamma^{s(n)}) \times [0, s(n) - 1]\right| \\
&= \left|Q \times (\Gamma^{s(n)})\right| \cdot s(n) \\
&= |Q| \cdot \left|\Gamma^{s(n)}\right| \cdot s(n) \\
&= |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)
\end{aligned}$$

Also kann eine Turingmaschine die auf einer Eingabe der länge n hält höchstens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)$ Schritte gehen, bevor sie den Ednzustand erreicht. Sie terminiert alsi nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

QED

[1] Zelle 0 wird auch besucht

Aufgabe 2

/4

Problem: Sei $L = \{w\#\overline{w} | w \in \{0, 1\}\}$ (über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$), wobei $\overline{w}$ die bitweise Negation von w ist (zB. $\overline{\texttt{1011}} = \texttt{0100}$). Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 2–Band–TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Lösung: Die 2–Band–Turingmaschine kann L Zeiteffizienter als eine 1–Band–Turingmaschine entscheiden:

1. Terminiere mit `accept`, wenn ein Blank gelesen wird, ansonsten führe 2 aus, ohne Kopfpositionenn oder Bandbelegungen zu ändern.

2. Wenn auf Band 1 `0` oder `1` gelesen wird, schreibe dies auf Band 2; bewege beide Bänder nach rechts und bleibe in diesem Zustand, Wenn auf Band 1 `#` gelesen wird, bewege Band 1 nach rechts, und auf Band 2 nach links, ändere beide Bandbelegungen nicht und gehe in Zustand 2. Wenn ein Blank gelesen wird, terminere mit `reject`

3. Ändere Kopfpostion und Bandbelegung auf Band 1 nicht, gehe auf Band 2 nach links, falls das auf Band 2 gelesene Zeichen `1` oder `0` ist, verwerfe falls es `#` ist[2] und gehe nach rechts und in Zustand 3, falls ein Blank auf Band 2 gelesen wird

[2] Kann zwar nicht passieren, aber Vor– ist ja besser als Nachsicht

4. Terminiere mit `accept`, falls auf beiden Bändern ein Blank gelesen wird. Gehe ohne zu Terminieren auf beiden Bändern nach rechts, falls auf den Bändern 1 und 2 zusammen genau ein mal `0` und `1` gelesen werden[3]. Terminere mit reject sonst.

Komplexitätsanalyse Sei $w_1, w_2, w \in 0, 1, \#^*$ mit $w = w_1\#w_2$ wenn $w \in L$ oder $w = w_1w_2$ sonst. Seien ferner $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $|w| = n, |w_1 = n_1|$ und $|w_2| = n_2$.

Wenn w ein Wort aus L ist, Läuft die Turingmaschine über die erste Hälfte des Eingabewortes (bis zum Doppelkreuz) und schreibt dabei das gelesene auf das andere Band, danach läuft sie diese Strecke auf Band 2 wieder zurück, ohne auf Band 1 die Postion zu ändern. Danach läuft sie auf beiden Bändern bis zum Ende (also nochmal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ schritte). Da in jedem Schritt eine Bewegung auf dem Band 2 gemacht wird, lässt sich aus der Tatsache, dass jede der $\frac{n}{2}$ beschriebenen Zellen dieses Bandes genau 3 mal Besucht werden herleiten, dass sowohl Laufzeit- als auch Speicherkomplexität in diesem Fall in $O(n)$ ist.

Falls das Wort kein Doppelkreuz besitzt, kopiert die Turingmaschine alle n Zeichen von Band 1 auf Band 2, bevor sie mit reject Terminiert, die Laufzeit– und Speicherkomplexität ist also wiederum jeweils $O(n)$

Wenn das Wort zwar ein Doppelkreuz besitzt, aber aus anderen Gründen nicht in der Sprache ist, kopiert die TM wieder alle w_1 Zeichen des ersten Teilwortes auf Band 2, bevor sie dort zurück zum Anfang läuft um anschließend auf beiden Bändern wieder nach rechts zu Laufen und Terminiert nach spätestens w_2 Schritten mit reject. Die TM benötigt also $w_1 \cdot 2 + w_2$ Schritte; Laufzeit– und Speicherkomplexität liegen also wieder in $O(n)$.

Aufgabe 3

/5

> **Problem:** Eine TM mit einseitig unendlichem Band ist eine TM, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt. Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM (mit Akzeptieren oder Verwerfen als Ausgabe) durch eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band simuliert werden kann. Geben Sie ein möglichst effiziente Simulation. Wie groß ist der Zeitverlust Ihrer Simulation?

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ welche $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ beliebige Bandzellen besucht. Dann gibt es eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band, welche die Turingmaschine M simuliert. Diese TM markiert mit einem Zeichen, das nicht in Γ ist, die erste Zelle des Bandes. Wenn diese Zelle besucht und oder beschrieben werden soll verschiebt die TM das bisher auf dem Band vorhandene Wort um eine Stelle nach rechts. Dies kann bei einer TM mit endlichem Alphabet gemacht werden, indem die TM sich über verschiedene Zustände merkt, welches Zeichen auf der aktuellen Position ist und dieses mit dem der vorherigen ersetzt. Dann bewegt sich die TM einen schritt weiter nach rechts und wiederholt den Vorgang. Wenn der Bandinhalt um eine Stelle nach rechts verschoben wurde, kann die TM wieder zurück an die zweite Bandzelle gehen und dort normal weiterarbeiten oder noch das Zeichen einfügen und dann weiterarbeiten. Der Kontext der TM wird dabei nicht verletzt, da die Kopfposition relativ zu den anderen Informationen bestehen bleibt. Das verschieben des gesamten Bandinhalts und das zurückgehen auf die erste Zelle dauert für $m \in \mathbb{N}$ beschriebene Zellen $2m$. Bei einer TM, die insgesamt $p \in \mathbb{N}$ Zellen besucht können im Worst-Case alle Zellen links des Bandbegins liegen, es ergibt sich also im Worst-Case eine Verlangsamung der Laufzeit der Simulation um $n!$ Schritte.

[3] Also die beiden Köpfe auf zwei unterschiedliche Symbole aus {0,1} stehen