Sebastian Thomas

RWTH Aachen, WS 2016/17
26.10.2016–07.11.2016

Diskrete Strukturen
Vorlesungen 3 bis 5

2 Mengen

Unser nächstes Ziel ist die Einführung von Mengen und einiger damit verbundener Konzepte wie Mengenoperationen. Hierbei wollen wir nicht genau sagen, was eine Menge ist, sondern lediglich, was wir uns hierunter vorstellen und wie wir mit Mengen umgehen. Um Mengen auf einer soliden mathematischen Basis einführen zu können, bedarf es weiterer Formalismen innerhalb der *mathematischen Logik*, welcher den Rahmen unserer einführenden Veranstaltung sprengen würde. Für das erfolgreiche Studium der meisten Gebiete der Informatik (und auch der Mathematik) genügt jedoch eine Kenntnis über Mengen im Umfang dieser Anfängervorlesung. Dafür ist es nicht wichtig, zu wissen, was eine Menge ist, sondern eine gewisse Vorstellung von Mengen zu entwickeln und den Umgang mit Mengen zu verinnerlichen.
Die durch Anführungsstriche markierten Wörter in diesem Abschnitt werden nicht genauer präzisiert.

Begriffsbildung

Wir beginnen mit der Beschreibung dessen, was wir uns unter einer Menge vorstellen wollen, sowie einigen sprachlichen Konventionen.

(2.1) Vorstellung (Menge; Cantor, 1895)**.**

(a) Unter einer *Menge* verstehen wir eine „Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen".

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Diejenigen Objekte, welche durch X zusammengefasst werden, bezeichnen wir als *Elemente* von X. Ist ein Objekt x ein Element von X, so schreiben wir $x \in X$, andernfalls $x \notin X$.

(c) Mengen X und Y sind *gleich*, geschrieben $X = Y$, falls sie die gleichen Elemente enthalten, d.h. falls für jedes Objekt x genau dann $x \in X$ gilt, wenn $x \in Y$ gilt.

Nach (2.1)(a) ist eine Menge X allein durch ihren „Umfang" bestimmt, d.h. durch ihre Elemente festgelegt (*Extensionalitätsprinzip*): Für ein gegebenes Objekt x gilt entweder $x \in X$ oder $x \notin X$. Demnach kann ein Objekt auch nicht „mehrfach" als Element vorkommen und es gibt auch keine „Ordnung" der Elemente.
Im Folgenden werden wir einige Notationen zur Beschreibung von Mengen angeben. In aller Regel erfolgt eine solche Beschreibung durch die Angabe einer „Eigenschaft" ([1]), welche die Elemente einer Menge erfüllen, oder durch eine einfache „Aufzählung" ihrer Elemente. Letzteres wird vor allem bei einer Menge mit „endlich" vielen Elementen gemacht – etwas unpräzise aber auch bei „unendlich" vielen Elementen, sofern aus dem Kontext klar ist (bzw. klar sein sollte), welche Objekte aufgezählt werden.

(2.2) Notation.

(a) Es seien eine Menge X und eine Eigenschaft φ gegeben. Besteht X aus genau denjenigen Objekten, welche φ erfüllen, so schreiben wir

$$\{x \mid x \text{ erfüllt } \varphi\} := X.$$

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Für eine Eigenschaft φ schreiben wir

$$\{x \in X \mid x \text{ erfüllt } \varphi\} := \{x \mid x \in X \text{ und } x \text{ erfüllt } \varphi\}.$$

[1] Die formale Behandlung einer axiomatischen Mengenlehre im Rahmen dieser Vorlesung scheitert unter anderem an der unzureichenden Behandlung der Prädikatenlogik in Abschnitt 1; Eigenschaften lassen sich als (1-stellige) Prädikate präzisieren.

(c) Es seien Objekte a_1, …, a_n gegeben. Wir schreiben

$$\{a_1, \dots, a_n\} := \{x \mid x = a_1 \text{ oder } \dots \text{ oder } x = a_n\}.$$

(d) Für jede natürliche Zahl i sei ein Objekt a_i gegeben. Wir schreiben

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} := \{x \mid \text{es gibt eine natürliche Zahl } i \text{ mit } x = a_i\}.$$

Wir erinnern daran, dass das „oder" in der Mathematik, siehe Notation (2.2)(c), gemäß der semantischen Interpretation des Junktors $\vee$ in Definition (1.7)(b) für ein *einschließendes oder* steht: Für Objekte x, a und b gilt also genau dann $x = a$ oder $x = b$, wenn $x = a$ und $x \neq b$, oder wenn $x \neq a$ und $x = b$, oder wenn $x = a$ und $x = b$ gilt, d.h. wenn das Objekt x gleich einem oder beiden der beiden Objekte a und b ist. ([2]) Wenn wir sagen möchten, dass das Objekt x identisch zu genau einem der beiden Objekte a und b ist, so betonen wir dies und sagen „entweder $x = a$ oder $x = b$". Ähnlich für beliebig viele Objekte.
Entsprechend bedeutet die Existenz eines Objektes mit einer vorgegebenen Eigenschaft, vgl. Notation (2.2)(d), dass es *mindestens* ein Objekt mit dieser Eigenschaft gibt.
Obwohl es sehr natürlich scheint, Mengen durch Eigenschaften zu beschreiben, möchten wir betonen, dass *nicht* jede Eigenschaft eine Menge beschreibt. Beispielsweise ist es nicht möglich, $\{x \mid x \text{ ist eine Menge}\}$ zu bilden. Es ist jedoch stets möglich, Mengen wie in (2.2)(b) zu bilden, d.h. Mengen, deren Elemente alle in einer bereits gegebenen Menge X liegen und zusätzlich eine gegebene Eigenschaft φ erfüllen. (*Aussonderung*)

(2.3) Beispiel. Wir wollen davon ausgehen, dass wir wissen, was die folgenden Mengen sind. ([3])

(a) Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist durch

$$\mathbb{N} = \{x \mid x = 1 \text{ oder es gibt eine natürliche Zahl } y \text{ mit } x = y + 1\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

gegeben. Die *Menge der natürlichen Zahlen mit Null* ist durch

$$\mathbb{N}_0 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ oder } x = 0\}$$

gegeben.

(b) Die *Menge der ganzen Zahlen* ist durch

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ oder } x = 0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\}$$

gegeben.

(c) Die *Menge der rationalen Zahlen* ist durch

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ für } p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0\}$$

gegeben.

(d) Die *Menge der reellen Zahlen* wird als $\mathbb{R}$ notiert.

(2.4) Beispiel.

(a) Es ist $\{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$ eine Menge.

(b) Es ist $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$ eine Menge.

(c) Es ist $\{-3, 1, 19\}$ eine Menge.

Man beachte, dass Mengen beliebige Objekte zusammenfassen, also beispielsweise auch wieder Mengen:

[2] Tritt der Fall $x = a$ und $x \neq b$ oder der Fall $x \neq a$ und $x = b$ ein, so gilt notwendigerweise $a \neq b$; tritt der Fall $x = a$ und $x = b$ ein, so gilt notwendigerweise $a = b$. Wir haben aber weder vorausgesetzt, dass $a \neq b$ gilt, noch dass $a = b$ gilt. Durch die Verwendung des *einschließenden oder* ist es uns möglich, beide Fälle simultan zu betrachten.

[3] Man kann diese Mengen geeignet aus der leeren Menge, siehe Definition (2.8), konstruieren; dies wollen wir aber in diesem Kurs nicht machen. Um die meisten Konzepte der Mengenlehre einzuführen und die grundlegenden Aussagen zu beweisen, benötigen wir diese Mengen nicht. Sie helfen uns jedoch insofern, dass wir durch sie erläuternde Beispiele angeben können.

(2.5) Beispiel. Es sind $\{1\}$, $\{\{1\}\}$ und $\{1, \{1\}\}$ Mengen.

Bei der Beschreibung einer Menge durch Aufzählung ihrer Elemente kommt es nach dem Extensionalitätsprinzip nur auf die Elemente selbst an, nicht auf die Reihenfolge und die Häufigkeit des Auftretens einzelner Elemente innerhalb der Aufzählung (vgl. Notation (2.2)(c), man beachte die einschließende Bedeutung von „oder“).

(2.6) Beispiel.

(a) Es ist $\{-3, 1, 19\} = \{1, 19, -3\} = \{1, 19, -3, 1\}$.

(b) Es ist $\{1\} = \{1, 1, 1\}$.

(c) Es ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x = 3x^2\} = \{0, 1, 2\}$.

(d) Es ist $\{1\} \neq \{1, 2\}$.

(e) Es ist $\{1\} \neq \{\{1\}\}$ und $\{1\} \neq \{1, \{1\}\}$ und $\{\{1\}\} \neq \{1, \{1\}\}$.

Wir können Mengen auch benutzen, um Zusammenfassungen des täglichen Lebens zu modellieren ([4]):

(2.7) Anwendungsbeispiel.

(a) Das lateinische Alphabet lässt sich als Menge $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \dots, \mathrm{Z}\}$ auffassen.

(b) Eine Platzierung in der Tabelle der Fußball-Bundesliga lässt sich als ein Element der Menge $\{1, 2, \dots, 18\}$ auffassen.

(c) Eine Medaille bei den Olympischen Spielen lässt sich als ein Element der Menge $\{\mathrm{gold}, \mathrm{silber}, \mathrm{bronze}\}$ auffassen.

(d) Eine Kartenfarbe lässt sich als ein Element der Menge $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ auffassen.

(e) Eine Position in einer Reihe von Objekten lässt sich als ein Element von $\mathbb{N}$ auffassen.

(f) Die Anzahl der Objekte in einer Ansammlung lässt sich als ein Element von $\mathbb{N}$ auffassen.

Auf Grund des Extensionalitätsprinzips gibt es nur eine Menge, welche keine Elemente enthält. Wir benutzen folgende Bezeichnung:

(2.8) Definition (leere Menge)**.** Die Menge, welche keine Elemente enthält, heißt *leere Menge* und wird als $\emptyset$ notiert.

Im Folgenden werden wir des Öfteren Mengen bestehend aus endlich vielen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen betrachten. Aus diesem Grund führen wir folgende Schreibweise ein:

(2.9) Notation. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b + 1$ schreiben wir

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}.$$

(2.10) Beispiel.

(a) Es ist $[1, 3] = \{1, 2, 3\}$.

(b) Es ist $[-2, 1] = \{-2, -1, 0, 1\}$.

(c) Es ist $[-1, -1] = \{-1\}$.

(d) Es ist $[2, 1] = \emptyset$.

---

[4] Bei einer axiomatischen Behandlung der Mengenlehre beinhalten Mengen nur „mathematische Objekte“, so dass erst mal nicht klar ist, was eine Menge der Form $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ wie in Beispiel (2.7)(d) sein soll. Dies ist aber nicht weiter tragisch, da wir nicht sagen, was die Elemente dieser Menge sind. Zu Modellierungszwecken könnten wir etwa zuvor $\heartsuit := 0$, $\diamondsuit := 1$, $\spadesuit := 2$, $\clubsuit := 3$ setzen, oder aber $\heartsuit := \emptyset$ (siehe Definition (2.8)), $\diamondsuit := \{\emptyset\}$, $\spadesuit := \{\{\emptyset\}\}$, $\clubsuit := \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Die präzise Definition dieser Elemente ist für Anwendungszwecke nicht relevant, weswegen wir in solchen Anwendungsbeispielen darauf verzichten werden – wichtig ist lediglich, dass die Elemente einer solchen Menge „wohlunterschieden“ sind.

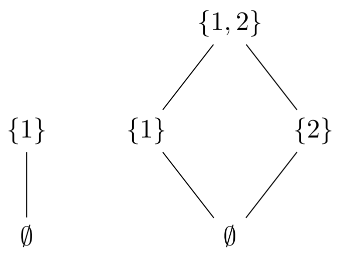

Abbildung 1: Teilmengen von $\{1\}$ und $\{1, 2\}$

Teilmengen

Wir wollen dem Konzept aus Notation (2.2)(b) einen Namen geben:

(2.11) Definition (Teilmenge)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Eine *Teilmenge* von X ist eine Menge U derart, dass X alle Elemente von U enthält, d.h. so, dass aus $u \in U$ stets $u \in X$ folgt.
Eine Teilmenge U von X heißt *echt* (oder *strikt*), falls $U \neq X$ gilt.
Ist U eine Teilmenge von X, so schreiben wir $U \subseteq X$. Ist U keine Teilmenge von X, so schreiben wir $U \nsubseteq X$.
Ist U eine echte Teilmenge von X, so schreiben wir $U \subset X$.

Die Teilmengennotation ist innerhalb der Mathematik nicht einheitlich: Manche Autoren schreiben $U \subset X$ anstatt $U \subseteq X$ und $U \subsetneq X$ anstatt $U \subset X$. Da Mathematik von Menschen gemacht wird, sind abweichende Notationen etwas ganz Normales und teilweise auch unvermeidbar. In vielen Bereichen haben sich jedoch Standardnotationen eingebürgert, und in aller Regel versucht man, sich auch an solche Standardnotationen zu halten. Es wäre zum Beispiel in einem vorliegenden mathematischen Text völlig korrekt, für „U ist eine Teilmenge von X“ stets $U \% X$ zu schreiben, sofern man sich in diesem Text vorher auf diese Notation festgelegt hat. Ein solcher Text wäre jedoch auch für einen geübten Mathematiker nur schwer lesbar. Wir werden im Folgenden meist nicht auf alternative Notationen anderer Autoren eingehen.

(2.12) Beispiel.

(a) Es ist $\{2, 3, 4, 7\}$ eine Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(b) Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. es ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, es ist $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und es ist $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(2.13) Bemerkung (Gleichheitskriterium für Mengen)**.** Es seien Mengen X und Y gegeben. Genau dann ist $X = Y$, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ gilt.

Beweis. Genau dann gilt $X = Y$, wenn für jedes Objekt x genau dann $x \in X$ gilt, wenn $x \in Y$ gilt, d.h. falls aus $x \in X$ stets $x \in Y$ folgt und falls aus $x \in Y$ stets $x \in X$ folgt. Nun folgt aus $x \in X$ jedoch genau dann stets $x \in Y$, wenn $X \subseteq Y$ gilt, und entsprechend folgt aus $x \in Y$ genau dann stets $x \in X$, wenn $Y \subseteq X$ gilt. Insgesamt haben wir genau dann $X = Y$, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ gilt. $\square$

Die Teilmengen einer gegebenen Menge X können wieder zu einer Menge zusammengefasst werden:

(2.14) Definition (Potenzmenge)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Die *Potenzmenge* von X ist definiert als

$$\operatorname{Pot}(X) := \{U \mid U \subseteq X\}.$$

(2.15) Beispiel.

(a) Es ist $\operatorname{Pot}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

(b) Es ist $\operatorname{Pot}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Familien

Ein klassisches Beispiel für Mengen von Paaren geht zurück auf René Descartes (17. Jahrhundert): Durch Einführung eines Koordinatenkreuzes werden die Punkte der Anschauungsebene durch Paare reeller Zahlen modelliert; die Ebene entspricht dann

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrische Objekte innerhalb der Ebene lassen sich durch diese Formalisierung analytisch beschreiben, zum Beispiel der Einheitskreis als

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

oder die Gerade durch $(3, 0)$ und $(0, 2)$ als

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6\}.$$

Als Verallgemeinerung dieser Paare führen wir als nächstes Familien ein. Diese können wir uns als eine Art „beschriftete“ oder „parametrisierte Mengen“ vorstellen, an Stelle der Reihenfolge des Auftretends in einem Paar als erste bzw. zweite Komponente tritt hierbei die Parametrisierung durch die Elemente einer gegebenen Menge. Bei der Begriffsbildung verzichten wir auf eine formale Definition und geben lediglich eine charakterisierende Beschreibung von Familien über ein Gleichheitskriterium an, welches wir von einer parametrisierten Menge erwarten: zwei gegebene „beschriftete Mengen“ sind genau dann gleich, wenn die „Mengen der Beschriftungen“ gleich sind und für jede „Beschriftung“ die damit „beschrifteten Elemente“ gleich sind.

(2.16) Vorstellung (Familie)**.**

(a) Es seien eine Menge I und für jedes $i \in I$ ein Objekt x_i gegeben. Wir nennen $x = (x_i)_{i \in I}$ eine *Familie* über I. Die Menge I wird *Indexmenge* von x genannt, ihre Elemente heißen *Indizes* (oder *Stellen*) von x. Für $i \in I$ heißt x_i die *Komponente* (oder der *Eintrag*) von x an der Stelle i.

(b) Es seien Mengen I und J, eine Familie $x = (x_i)_{i \in I}$ über I und eine Familie $y = (y_j)_{j \in J}$ über J gegeben. Die Familien $x = (x_i)_{i \in I}$ und $y = (y_j)_{j \in J}$ sind *gleich*, geschrieben $x = y$, wenn $I = J$ und für $i \in I$ stets $x_i = y_i$ gilt.

Eine Familie über einer gegebenen Indexmenge setzt sich nach (2.16)(a) also gewissermaßen aus ihren Komponenten zusammen und nach dem Gleichheitskriterium für Familien (2.16)(b) sind gegebene Familien über dieser Indexmenge genau dann gleich, wenn alle Komponenten jeweils gleich sind. Im Gegensatz zu den Elementen einer Menge sind die Komponenten einer Familie noch durch die Elemente der Indexmenge „gekennzeichnet“, so dass Komponenten zu verschiedenen Stellen einer gegebenen Familie gleich sein können.

(2.17) Beispiel.

(a) Es ist $x = (x_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ gegeben durch $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = \sqrt{7}$ eine Familie über $\{1, 2, 3\}$.

(b) Es ist $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $x_i = i^2 + 1$ für $i \in \mathbb{N}_0$ eine Familie über $\mathbb{N}_0$.

(c) Es ist $(i^2 - 1)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Familie über $\mathbb{Z}$.

(d) Es sei $I := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Dann ist $x = (x_i)_{i \in I}$ gegeben durch $x_\emptyset = 0$, $x_{\{1\}} = \{\{1\}\}$, $x_{\{1,2\}} = \{3\}$ eine Familie über I.

(e) Es gibt keine Familie $x = (x_i)_{i \in \{2,5\}}$ über $\{2, 5\}$ mit $x_2 = 0$ und $x_2 = 1$.

(2.18) Beispiel.

(a) Es sei eine Familie x über $\{-1, 1\}$ gegeben durch $x = (i^2)_{i \in \{-1,1\}}$. Ferner sei eine Familie y über $\{-1, 1\}$ gegeben durch $y_{-1} = 1$, $y_1 = 1$. Dann ist $x = y$.

(b) Es seien Familien x und y über $\{0, 1\}$ gegeben durch $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$. Dann ist $x \neq y$.

(c) Es sei eine Familie x über $\{0, 1\}$ gegeben durch $x_i = 0$ für $i \in \{0, 1\}$. Ferner sei eine Familie y über $\{-1, 0, 1\}$ gegeben durch $y_j = 0$ für $j \in \{-1, 0, 1\}$. Dann ist $x \neq y$.

Beweis.

(a) Wegen

$$x_{-1} = (-1)^2 = 1 = y_{-1},$$
$$x_1 = 1^2 = 1 = y_1$$

gilt $x = y$.

(b) Wegen

$$x_0 = 1 \neq 2 = y_0$$

gilt $x \neq y$.

(c) Da x eine Familie über $\{0, 1\}$ und y eine Familie über $\{-1, 0, 1\}$ ist und $\{0, 1\} \neq \{-1, 0, 1\}$ gilt, ist $x \neq y$. □

(2.19) Anwendungsbeispiel.

(a) Eine Belegung einer Küche lässt sich als Familie über der „Menge der Küchenmöbel" auffassen. Ist die Menge der Küchenmöbel K etwa modelliert durch

$$K = \{\text{Hängeschrank}, \text{Bodenschrank}, \text{Schublade}, \text{Backofen}, \text{Kühlschrank}, \text{Kühltruhe}, \text{Waschmaschine}\},$$

so kann eine typische Belegung etwa modelliert werden durch eine Familie b über K gegeben durch

$$\begin{aligned} b_{\text{Hängeschrank}} &= \text{Geschirr}, \\ b_{\text{Bodenschrank}} &= \text{Töpfe}, \\ b_{\text{Schublade}} &= \text{Besteck}, \\ b_{\text{Backofen}} &= \text{Pizza}, \\ b_{\text{Kühlschrank}} &= \text{Bier}, \\ b_{\text{Kühltruhe}} &= \text{Pizza}, \\ b_{\text{Waschmaschine}} &= \text{Unterhosen}. \end{aligned}$$

(b) Ein 239-seitiges Buch mit sechsseitigem Vorwort lässt sich als Familie über der Menge

$$\{n \mid n \in \{\text{i}, \text{ii}, \text{iii}, \text{iv}, \text{v}, \text{vi}\} \text{ oder } n \in [1, 239]\}$$

auffassen.

(c) Ein Warenkatalog lässt sich als Familie über der „Menge der Artikelnummern" des Katalogs auffassen.

(d) Eine (reale) Familie bestehend aus Vater, Mutter, einem Sohn und einer Tochter lässt sich als eine (formale) Familie über der Menge $R = \{\text{Vater}, \text{Mutter}, \text{Sohn}, \text{Tochter}\}$ auffassen. Eine typische Familie kann etwa modelliert werden als (formale) Familie Maier über R gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Maier}_{\text{Vater}} &= \text{Hans}, \\ \text{Maier}_{\text{Mutter}} &= \text{Katrin}, \\ \text{Maier}_{\text{Sohn}} &= \text{Uwe}, \\ \text{Maier}_{\text{Tochter}} &= \text{Chantal}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass in unserem mathematischen Modell in Anwendungsbeispiel (2.19)(a) offenbar

$$b_{\text{Backofen}} = \text{Pizza} = b_{\text{Kühltruhe}}$$

gilt, während im wahren Leben die Pizzen im Backofen und in der Kühltruhe natürlich nicht identisch sind. Wollen wir diese unterscheiden, benötigen wir ein feineres Modell, etwa gegeben durch die Familie b' über K gegeben durch

$$b'_m = \begin{cases} \text{Pizza1}, & \text{für } m = \text{Backofen}, \\ \text{Pizza2}, & \text{für } m = \text{Kühltruhe}, \\ b_m, & \text{für } m \in K \text{ mit } m \neq \text{Backofen und } m \neq \text{Kühltruhe}. \end{cases}$$

Eine weitere Familie c über K ist etwa gegeben durch $c_m = \text{Bier}$ für jedes $m \in K$; ein theoretisch mögliches mathematisches Modell muss also keiner sinnvollen Belegung im wahren Leben entsprechen.
Oft liegen die Komponenten einer Familie in einer gegebenen Menge. Wir vereinbaren hierfür folgende Sprachregelung:

(2.20) Definition (Familie)**.** Es seien eine Menge X und eine Menge I gegeben. Die *Menge der Familien* in X über I ist definiert als

$$X^I := \{x \mid x \text{ ist eine Familie über } I \text{ mit } x_i \in X \text{ für } i \in I\}.$$

Ein Element von X^I wird eine *Familie* in X über I genannt.

(2.21) Beispiel. Es sei $I := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ und es sei eine Familie x über I gegeben durch $x_\emptyset = 0$, $x_{\{1\}} = 1$, $x_{\{2\}} = 1$, $x_{\{1,2\}} = 0$.

(a) Es ist x eine Familie in $\mathbb{Z}$.

(b) Es ist x eine Familie in $\mathbb{Q}$.

(c) Es ist x eine Familie in $\{0, 1\}$.

Beweis.

(a) Wegen $x_\emptyset, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}} \in \mathbb{Z}$ ist x eine Familie in $\mathbb{Z}$.

(b) Wegen $x_\emptyset, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}} \in \mathbb{Q}$ ist x eine Familie in $\mathbb{Q}$.

(c) Wegen $x_\emptyset, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}} \in \{0, 1\}$ ist x eine Familie in $\{0, 1\}$. □

(2.22) Beispiel. Es seien Familien a, b, c, d, e, f, g, h in $\{-1, 1\}$ über $\{0, 1, 2\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &a_0 = -1, && a_1 = -1, && a_2 = -1, \\ &b_0 = 1, && b_1 = -1, && b_2 = -1, \\ &c_0 = -1, && c_1 = 1, && c_2 = -1, \\ &d_0 = 1, && d_1 = 1, && d_2 = -1, \\ &e_0 = -1, && e_1 = -1, && e_2 = 1, \\ &f_0 = 1, && f_1 = -1, && f_2 = 1, \\ &g_0 = -1, && g_1 = 1, && g_2 = 1, \\ &h_0 = 1, && h_1 = 1, && h_2 = 1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\{-1, 1\}^{\{0,1,2\}} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

(2.23) fehlt

(2.24) Notation. Es seien eine Menge I und eine Eigenschaft φ mit $I = \{i \mid i \text{ erfüllt } \varphi\}$ gegeben. Für eine Familie x über I schreiben wir

$$\{x_i \mid i \text{ erfüllt } \varphi\} := \{z \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } z = x_i\}.$$

Da für jede Menge I insbesondere $I = \{i \mid i \in I\}$ gilt, haben wir nach Notation (2.24) für jede Familie x über I stets

$$\{x_i \mid i \in I\} = \{z \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } z = x_i\}.$$

Diese Menge fasst die Komponenten der Familie x zusammen. Die Schreibweise stellt eine Verallgemeinerung der Beschreibung aus Notation (2.2)(c), (d) dar, an Stelle der Aufzählung tritt eine Parametrisierung durch die Elemente der Indexmenge I.
Umgekehrt lässt sich wie folgt zu jeder Menge eine Familie konstruieren:

(2.25) Bemerkung. Für jede Menge X haben wir die Familie $(x)_{x \in X}$ über X.

(2.26) Definition (leere Familie)**.** Die Familie über der leeren Menge $\emptyset$ wird *leere Familie* genannt und als $()$ notiert.

Tupel

Die häufigsten Varianten von Familien tragen eigene Namen und Schreibweisen. Als nächstes betrachten wir Familien über einem „Anfangsstück“ der natürlichen Zahlen. Die „Anordnung“ dieser natürlichen Zahlen liefert eine naheliegende aufzählende Notation für solche Familien:

(2.27) Definition (Tupel)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

(a) Ein *n-Tupel* ist eine Familie über $[1, n]$. ([5])
Für ein n-Tupel x schreiben wir auch

$$(x_1, \dots, x_n) := x.$$

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die *Menge der n-Tupel* in X ist definiert als

$$X^n := X^{[1,n]}.$$

Ein Element von X^n wird *n-Tupel* in X genannt.

(2.28) Definition (leeres Tupel, Paar, Tripel, Quadrupel, Quintupel)**.**

(a) Das 0-Tupel wird auch das *leere Tupel* genannt.

(b) Ein 1-Tupel wird auch *Single* genannt.

(c) Ein 2-Tupel wird auch *Paar* genannt.

(d) Ein 3-Tupel wird auch *Tripel* genannt.

(e) Ein 4-Tupel wird auch *Quadrupel* genannt.

(f) Ein 5-Tupel wird auch *Quintupel* genannt.

(2.29) Beispiel.

(a) Es ist $(1, 2, 4)$ ein Tripel.

(b) Es ist $x = (x_i)_{i \in [1,9]}$ gegeben durch $x_i = i - i^2$ für $i \in [1, 9]$ ein 9-Tupel.

(c) Es ist $(\{1\}, \{2\})$ ein Paar.

(d) Es gibt kein Quadrupel x in $\mathbb{Z}$ mit $x_2 = 0$ und $x_2 = 1$.

[5] In manchen Texten werden auch Familien über $[0, n-1]$ als n-Tupel bezeichnet. Allgemeiner: Für $k \in \mathbb{Z}$ wird eine Familie über $[k+1, k+n]$ auch ein *durch $[k+1, k+n]$ indiziertes n-Tupel* genannt.

(2.30) Beispiel.

(a) Es sei ein Quadrupel x gegeben durch

$$x = (i^3)_{i \in [1,4]}.$$

Dann ist $x = (1, 8, 27, 64)$.

(b) Es ist $(3, \{4\}) \neq (\{4\}, 3)$.

(c) Es ist $(1, 2, 3) \neq (1, 2, 3, 2)$.

Beweis.

(a) Es ist

$$x = (i^3)_{i \in [1,4]} = (1^3, 2^3, 3^3, 4^3) = (1, 8, 27, 64).$$

(b) Es seien $x := (3, \{4\})$ und $y := (\{4\}, 3)$. Wegen

$$x_1 = 3 \neq \{4\} = y_1$$

gilt $x \neq y$.

(c) Es seien $x := (1, 2, 3)$ und $y := (1, 2, 3, 2)$. Da x ein Tripel, d.h. eine Familie über $[1, 3]$, und y ein Quadrupel, d.h. eine Familie über $[1, 4]$, ist und $[1, 3] \neq [1, 4]$ gilt, ist $x \neq y$. □

(2.31) Beispiel. Es ist

$$\{-1, 1\}^3 = \{(-1, -1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

(2.32) Anwendungsbeispiel.

(a) Eine (einfache) Belegung einer TV-Fernbedienung lässt sich als 9-Tupel auffassen. In Deutschland wird eine typische Belegung etwa durch das 9-Tupel

$$(\text{DasErste}, \text{ZDF}, \text{RTL}, \text{Sat1}, \text{ProSieben}, \text{RTL2}, \text{kabeleins}, \text{VOX}, \text{3sat})$$

modelliert.

(b) Ein Fotoalbum mit 64 Fotos lässt sich als 64-Tupel auffassen.

(c) Eine Beamerpräsentation mit 23 Folien lässt sich als 23-Tupel auffassen.

(d) Ein Speicher mit 256 Speicherplätzen lässt sich als 256-Tupel auffassen. ([6])

(e) Eine Ziehung der Lottozahlen lässt sich als 49-Tupel in $\{\text{gezogen}, \text{nicht gezogen}\}$ auffassen.

Anwendungsbeispiel. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Eine Interpretation der Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ lässt sich als n-Tupel in $\{0, 1\}$ modellieren. ([7])

Folgen

Bei diskreter Zeitmodellierung spielen Familien über den natürlichen Zahlen eine Rolle. Für diese führen wir nun eine eigene Terminologie ein:

(2.33) Definition (Folge)**.** Eine *Folge* ist eine Familie über $\mathbb{N}$. ([8])
Für eine Folge x schreiben wir auch

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) := x.$$

(2.34) Beispiel. Es ist $(2i)_{i \in \mathbb{N}} = (2, 4, 6, \ldots)$ eine Folge.

[6] In der Informatik würde man die Komponenten üblicherweise mit Elementen der Menge $[0, 255]$ indizieren und damit einen solchen Speicher eher als Familie über $[0, 255]$ auffassen.

[7] Die vereinbarte Notation aus Definition (1.7)(a) entspricht dann der Notation für Strings aus Definition (6.23).

[8] Gelegentlich werden auch Familien über $\mathbb{N}_0$ als Folgen bezeichnet. Allgemeiner: Für $a \in \mathbb{Z}$ seien $\mathbb{Z}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq a\}$ und $\mathbb{Z}_{\leq a} := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\}$. Eine Familie über $\mathbb{Z}_{\geq a}$ wird dann auch eine *durch $\mathbb{Z}_{\geq a}$ indizierte Folge* und eine Familie über $\mathbb{Z}_{\leq a}$ auch eine *durch $\mathbb{Z}_{\leq a}$ indizierte Folge* genannt.

Innere Mengenoperationen

Wir betrachten Mengenoperationen, d.h. Methoden, um Mengen aus gegebenen Mengen zu bilden. Hierbei beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf sogenannte innere Mengenoperationen, d.h. solche, welche angewandt auf die Elemente einer Potenzmenge wieder ein Element dieser Potenzmenge ergeben.

(2.35) Definition (Differenz)**.** Es seien Mengen X und Y gegeben. Die Menge

$$X \setminus Y := \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin Y\}$$

heißt *Differenz* von X und Y.

(2.36) Beispiel. Es ist

$$\{1,2,3\} \setminus \{1,4\} = \{2,3\},$$
$$\{1,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}.$$

(2.37) Definition (Schnitt, Vereinigung)**.**

(a) (i) Es seien eine nicht-leere Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I ([9]) gegeben. Die Menge

$$\bigcap X = \bigcap_{i \in I} X_i := \{x \mid x \in X_i \text{ für } i \in I\}$$

heißt *Schnitt* (oder *Durchschnitt*) von X.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und ein n-Tupel von Mengen $(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben. Wir schreiben auch

$$X_1 \cap \ldots \cap X_n := \bigcap X.$$

(iii) Es seien Mengen X und Y gegeben. Der Schnitt $X \cap Y$ von (X, Y) wird auch *Schnitt* (oder *Durchschnitt*) von X und Y genannt.

(b) (i) Es seien eine Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I gegeben. Die Menge

$$\bigcup X = \bigcup_{i \in I} X_i := \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in X_i\}$$

heißt *Vereinigung* von X.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel von Mengen $(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben. Wir schreiben auch

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n := \bigcup X.$$

(iii) Es seien Mengen X und Y gegeben. Die Vereinigung $X \cup Y$ von (X, Y) wird auch *Vereinigung* von X und Y genannt.

(2.38) Beispiel.

(a) (i) Es ist

$$\{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\}.$$

(ii) Es ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{qi \mid q \in \mathbb{Z}\} = \{0\}.$$

(b) (i) Es ist

$$\{1,2,3\} \cup \{1,4\} = \{1,2,3,4\}.$$

[9] Wir nehmen also an, dass X_i für $i \in I$ stets eine Menge ist.

(ii) Es ist

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{qi \mid q \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. $\square$

(2.39) Bemerkung. Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel von Mengen $(X_1, \dots, X_n)$ gegeben.

(a) Es sei $n \neq 0$. Dann ist

$$X_1 \cap \ldots \cap X_n = \{x \mid x \in X_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x \in X_n\}.$$

(b) Es ist

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n = \{x \mid x \in X_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } x \in X_n\}.$$

Im Folgenden studieren wir einige Verträglichkeiten von Schnitt- und Vereinigungsoperation untereinander.

(2.40) Bemerkung.

(a) (i) *Assoziativität des Schnitts.* Für alle Mengen X, Y, Z ist $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.
(ii) *Assoziativität der Vereinigung.* Für alle Mengen X, Y, Z ist $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.

(b) (i) *Neutrales Element des Schnitts von Teilmengen.* Für jede Menge X und jede Teilmenge U von X ist $U \cap X = U$.
(ii) *Neutrales Element der Vereinigung.* Für jede Menge X ist $X \cup \emptyset = X$.

(c) (i) *Kommutativität des Schnitts.* Für alle Mengen X, Y ist $X \cap Y = Y \cap X$.
(ii) *Kommutativität der Vereinigung.* Für alle Mengen X, Y ist $X \cup Y = Y \cup X$.

(d) (i) *Idempotenz des Schnitts.* Für jede Menge X ist $X \cap X = X$.
(ii) *Idempotenz der Vereinigung.* Für jede Menge X ist $X \cup X = X$.

(e) (i) *Distributivität.* Für alle Mengen X, Y, Z ist $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
(ii) *Distributivität.* Für alle Mengen X, Y, Z ist $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

(f) (i) *Absorption.* Für alle Mengen X, Y ist $X \cap (X \cup Y) = X$.
(ii) *Absorption.* Für alle Mengen X, Y ist $X \cup (X \cap Y) = X$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. Wir begnügen uns hier mit dem Beweis von (e)(i).

(e) (i) Für alle Mengen X, Y, Z ist

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y \cup Z\} = \{x \mid x \in X \text{ und } (x \in Y \text{ oder } x \in Z)\} \\ &= \{x \mid (x \in X \text{ und } x \in Y) \text{ oder } (x \in X \text{ und } x \in Z)\} \\ &= \{x \mid x \in X \cap Y \text{ oder } x \in X \cap Z\} = (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$ $\square$

(2.41) Definition (Disjunktheit)**.**

(a) Es seien eine Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I gegeben. Wir sagen, dass X *disjunkt* ist, falls für $i, j \in I$ mit $i \neq j$ stets $X_i \cap X_j = \emptyset$ gilt.

(b) Es seien Mengen X und Y gegeben. Wir sagen, dass X und Y *disjunkt* sind, falls (X, Y) disjunkt ist.

(2.42) Beispiel. Es seien $X := \{1, 2, 4\}$, $Y := \{3, 6\}$, $Z := \{5, 6\}$.

(a) Die Menge X und Y sind disjunkt.

(b) Die Menge X und Z sind disjunkt.

(c) Die Mengen Y und Z sind nicht disjunkt.

Beweis. (a) Es ist $\{1, 2, 4\} \cap \{3, 6\} = \emptyset$.

(b) Es ist $\{1, 2, 4\} \cap \{5, 6\} = \emptyset$.

(c) Es ist $\{3, 6\} \cap \{5, 6\} = \{6\} \neq \emptyset$. $\square$

(2.43) Definition ((innere) disjunkte Vereinigung)**.**

(a) Es seien eine Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I gegeben. Wenn X disjunkt ist, so sagen wir, dass $\bigcup X$ eine (*innere*) *disjunkte Vereinigung* von X ist, und schreiben

$$\dot{\bigcup} X = \dot{\bigcup_{i \in I}} X_i := \bigcup X.$$

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und ein disjunktes n-Tupel von Mengen $(X_1, \dots, X_n)$ gegeben. Wir schreiben auch

$$X_1 \,\dot{\cup}\, \dots \,\dot{\cup}\, X_n := \dot{\bigcup} X.$$

(c) Es seien disjunkte Mengen X und Y gegeben. Die disjunkte Vereinigung $X \,\dot{\cup}\, Y$ von (X, Y) wird auch (*innere*) *disjunkte Vereinigung* von X und Y genannt.

(2.44) Beispiel. Es ist

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} \,\dot{\cup}\, \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}.$$

(2.45) Bemerkung. Für alle Mengen X und Y sind $X \setminus Y$ und $Y \setminus X$ disjunkt.

Beweis. Es seien Mengen X und Y gegeben. Für alle $x \in X \setminus Y$ gilt $x \notin Y$, also insbesondere auch $x \notin Y \setminus X$. Folglich ist $(X \setminus Y) \cap (Y \setminus X) = \emptyset$, d.h. $X \setminus Y$ und $Y \setminus X$ sind disjunkt. $\square$

(2.46) Definition (symmetrische Differenz)**.** Es seien Mengen X und Y gegeben. Die Menge

$$X \bigtriangleup Y := (X \setminus Y) \,\dot{\cup}\, (Y \setminus X)$$

heißt *symmetrische Differenz* von X und Y.

(2.47) Beispiel. Es ist

$$\{1, 2, 3\} \bigtriangleup \{1, 4\} = \{2, 3, 4\}.$$

Beweis. Es ist

$$\{1, 2, 3\} \bigtriangleup \{1, 4\} = (\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4\}) \,\dot{\cup}\, (\{1, 4\} \setminus \{1, 2, 3\}) = \{2, 3\} \,\dot{\cup}\, \{4\} = \{2, 3, 4\}.$$ $\square$

Äußere Mengenoperationen

Schließlich führen wir das kartesische Produkt und die (äußere) disjunkte Vereinigung ein. Informell gesprochen stellt letztere eine Methode dar, um nicht disjunkte Mengen künstlich disjunkt zu machen.

(2.48) Definition (kartesisches Produkt, disjunkte Vereinigung)**.**

(a) (i) Es seien eine Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I gegeben. Die Menge

$$\bigtimes X = \bigtimes_{i \in I} X_i := \{x \mid x = (x_i)_{i \in I} \text{ ist eine Familie über } I \text{ mit } x_i \in X_i \text{ für } i \in I\}$$

heißt *kartesisches Produkt* (oder *Mengenprodukt* oder *Produkt*) von X.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel von Mengen $(X_1, \dots, X_n)$ gegeben. Wir schreiben auch

$$X_1 \times \dots \times X_n := \bigtimes_{i \in [1, n]} X_i.$$

(iii) Es seien Mengen X und Y gegeben. Das kartesische Produkt $X \times Y$ von (X, Y) wird auch *kartesisches Produkt* (oder *Mengenprodukt* oder *Produkt*) von X und Y genannt.

(b) (i) Es seien eine Menge I und eine Familie von Mengen $X = (X_i)_{i \in I}$ über I gegeben. Die Menge

$$\bigsqcup X = \bigsqcup_{i \in I} X_i := \dot{\bigcup_{i \in I}} (X_i \times \{i\})$$

heißt *disjunkte Vereinigung* (oder *äußere disjunkte Vereinigung* oder *Mengenkoprodukt* oder *Koprodukt*) von X.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel von Mengen $(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben. Wir schreiben auch

$$X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n := \bigsqcup_{i \in [1,n]} X_i.$$

(iii) Es seien Mengen X und Y gegeben. Die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ von (X, Y) wird auch *disjunkte Vereinigung* (oder *äußere disjunkte Vereinigung* oder *Mengenkoprodukt* oder *Koprodukt*) von X und Y genannt.

(2.49) Beispiel.

(a) Es ist

$$\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

(b) Es ist

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \sqcup \{2, 3, 5, 7\} = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (9, 1), (2, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\}.$$

Beweis.

(a) Es ist

$$\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\} \text{ und } y \in \{3, 4, 5\}\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\{1, 3, 5, 7, 9\} \sqcup \{2, 3, 5, 7\} &= (\{1, 3, 5, 7, 9\} \times \{1\}) \,\dot{\cup}\, (\{2, 3, 5, 7\} \times \{2\}) \\ &= \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (9, 1)\} \,\dot{\cup}\, \{(2, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\} \\ &= \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (9, 1), (2, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\}.\end{aligned}$$

□

Anwendung: Datenbanken

Als Anwendung der Konzepte einer Familie und eines kartesischen Produkts präsentieren wir ein mathematisches Modell für Datenbanken.

Definition (Datenbank)**.** Es seien eine Menge A und eine Familie $(X_a)_{a \in A}$ von Mengen gegeben. Eine *Datenbank* mit Werten in $(X_a)_{a \in A}$ ist eine Teilmenge von $\bigtimes_{a \in A} X_a$.
Es sei eine Datenbank D mit Werten in $(X_a)_{a \in A}$ gegeben. Die Menge A wird *Attributmenge* von D genannt. Ein Element von A wird *Attribut* von D genannt. Für $a \in A$ wird X_a die *Domäne* (oder der *Wertebereich*) von D zum Attribut a genannt. Ein Element von D wird *Datensatz* von D genannt. Für $a \in A$, $x \in D$ wird x_a der *Attributwert* von x zum Attribut a genannt.

Anwendungsbeispiel. Die Datenbank einer Vorlesung *Diskrete Strukturen* lässt sich als (formale) Datenbank mit der Attributmenge

$$A = \{\text{Matrikelnummer}, \text{Nachname}, \text{Vorname}, \text{Studiengang}, \text{Semester}, \text{E-Mail}, \text{Passwort}\}$$

und den Domänen

$$\begin{aligned}
X_{\text{Matrikelnummer}} &= [1, 999999], \\
X_{\text{Nachname}} &= \text{Strings}, \\
X_{\text{Vorname}} &= \text{Strings}, \\
X_{\text{Studiengang}} &= \{\texttt{Informatik (B.Sc.)}, \texttt{Informatik (LAB-GyGe)}, \\
&\quad\ \texttt{Informatik (M.Sc. Auflagenfach)}, \texttt{Technik-Kommunikation (B.Sc.)}, \\
&\quad\ \texttt{Computational Engineering Science (M.Sc.)}, \texttt{Verfahrenstechnik (M.Sc.)}, \\
&\quad\ \texttt{Schülerstudium}, \texttt{Sonstiges}\}, \\
X_{\text{Semester}} &= [1, 99], \\
X_{\text{E-Mail}} &= \text{Strings}, \\
X_{\text{Passwort}} &= \text{Strings}.
\end{aligned}$$

auffassen, wobei Strings ein Modell für die „Menge der Strings“ darstelle ([10]). Ein typischer Datensatz ist dann etwa gegeben durch

$$\begin{aligned}
x_{\text{Matrikelnummer}} &= 123456, \\
x_{\text{Nachname}} &= \texttt{Mustermann}, \\
x_{\text{Vorname}} &= \texttt{Max}, \\
x_{\text{Studiengang}} &= \texttt{Informatik (B.Sc.)}, \\
x_{\text{Semester}} &= 1, \\
x_{\text{E-Mail}} &= \texttt{max.mustermann@rwth-aachen.de}, \\
x_{\text{Passwort}} &= \texttt{qV8atM/dMY22g}.
\end{aligned}$$

Matrizen

Das binäre kartesische Produkt liefert eine neue Sorte von Familien, welche unter einem eigenen Namen bekannt sind:

(2.50) Definition (Matrix)**.** Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

(a) Eine $(m \times n)$-*Matrix* ist eine Familie über $[1, m] \times [1, n]$.

Für eine $(m \times n)$-Matrix x schreiben wir auch

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & \dots & x_{m,n} \end{pmatrix} := (x_{i,j})_{i \in [1,m], j \in [1,n]} := x.$$

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die *Menge der* $(m \times n)$-*Matrizen* in X ist definiert als

$$X^{m \times n} := X^{[1,m] \times [1,n]}.$$

Ein Element von $X^{m \times n}$ wird $(m \times n)$-*Matrix* in X genannt.

(2.51) Beispiel.

(a) Es ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

eine (3×4)-Matrix.

[10] Für eine mögliche Formalisierung siehe Definition (6.23).

(b) Es ist $x = (x_{i,j})_{i \in [1,8], j \in [1,3]}$ gegeben durch

$$x_{i,j} = i^3 j^2$$

für $i \in [1,8]$, $j \in [1,3]$ eine (8×3)-Matrix in $\mathbb{N}$.

(c) Es ist

$$\begin{pmatrix} \{1\} & \{\{\emptyset\}\} \\ \sqrt{3} & (-2)^5 \end{pmatrix}$$

eine (2×2)-Matrix.

(2.52) Beispiel.

(a) Es sei eine (3×2)-Matrix x gegeben durch

$$x = (ij - j)_{i \in [1,3], j \in [1,2]}.$$

Dann ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis.

(a) Es ist

$$x = (ij - j)_{i \in [1,3], j \in [1,2]} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 & 1 \cdot 2 - 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 & 2 \cdot 2 - 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 & 3 \cdot 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \, y := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$x_{1,1} = 1 \neq -2 = y_{1,1}$$

gilt $x \neq y$.

(c) Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \, y := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da x eine (2×3)-Matrix, d.h. eine Familie über $[1,2] \times [1,3]$, und y eine (3×2)-Matrix, d.h. eine Familie über $[1,3] \times [1,2]$, ist und $[1,2] \times [1,3] \neq [1,3] \times [1,2]$ gilt, ist $x \neq y$. □

(2.53) Beispiel. Es ist

$$\{1,3\}^{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\}.$$

(2.54) Anwendungsbeispiel. Eine Situation in einem Schachspiel lässt sich als (8×8)-Matrix auffassen. Die Anfangssituation wird etwa durch die (8×8)-Matrix

$$\begin{pmatrix} \text{WT} & \text{WS} & \text{WL} & \text{WD} & \text{WK} & \text{WL} & \text{WS} & \text{WT} \\ \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} & \text{WB} \\ \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} \\ \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} \\ \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} \\ \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} & \text{leer} \\ \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} & \text{SB} \\ \text{ST} & \text{SS} & \text{SL} & \text{SD} & \text{SK} & \text{SL} & \text{SS} & \text{ST} \end{pmatrix}$$

modelliert.

Matrizen werden unter anderem zur knappen Beschreibung linearer Gleichungssysteme genutzt, siehe Abschnitt 14.
Bei Matrizen, welche nur aus genau einer Zeile oder genau einer Spalte bestehen lassen wir unter Missbrauch von Notationen den jeweils zweiten Index für die Einträge weg:

(2.55) Notation. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

(a) Es sei eine $(n \times 1)$-Matrix x gegeben. Wir schreiben $x_i := x_{i,1}$ für $i \in [1,n]$ sowie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (x_i)_{i \in [1,n]} := x.$$

(b) Es sei eine $(1 \times n)$-Matrix x gegeben. Wir schreiben $x_i := x_{1,i}$ für $i \in [1,n]$ sowie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := (x_i)_{i \in [1,n]} := x.$$

(2.56) Definition (Zeile, Spalte)**.** Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und eine $(m \times n)$-Matrix x gegeben.

(a) Für $i \in [1,m]$ heißt die $(1 \times n)$-Matrix $x_{i,-}$ gegeben durch

$$x_{i,-} = (x_{i,j})_{j \in [1,n]}$$

die *i-te Zeile* von x.

(b) Für $j \in [1,n]$ heißt die $(m \times 1)$-Matrix $x_{-,j}$ gegeben durch

$$x_{-,j} = (x_{i,j})_{i \in [1,m]}$$

die *j-te Spalte* von x.

(2.57) Beispiel. Es sei

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist

$$x_{1,-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ x_{2,-} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$x_{-,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_{-,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_{-,3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schließen legen wir noch eine einfache Notation für „aneinandergehängte“ Matrizen fest:

(2.58) Notation. Es seien $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$ und eine $(m \times n)$-Matrix a, eine $(m \times q)$-Matrix b, eine $(p \times n)$-Matrix c und eine $(p \times q)$-Matrix d gegeben. Die $((m+p) \times (n+q))$-Matrix x gegeben durch

$$x_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } (i,j) \in [1,m] \times [1,n], \\ b_{i,j-n} & \text{für } (i,j) \in [1,m] \times [n+1, n+q], \\ c_{i-m,j} & \text{für } (i,j) \in [m+1, m+p] \times [1,n], \\ d_{i-m,j-n} & \text{für } (i,j) \in [m+1, m+p] \times [n+1, n+q], \end{cases}$$

notieren wir als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) := x.$$

Ähnlich für andere Zusammensetzungen.