Sebastian Thomas

RWTH Aachen, WS 2016/17
17.11.2016

Diskrete Strukturen

Vorlesung 9 (vorläufig)

7 Ordnungsstrukturen

Ordnungen

(7.1) Definition (Präordnung, Ordnung, Totalordnung)**.** Es sei eine Menge X gegeben.

(a) Eine *Präordnung* (oder *Präordnungsrelation*) auf X ist eine Relation auf X, welche transitiv und reflexiv ist.

(b) Eine *Ordnung* (genauer *partielle Ordnung*, oder *Ordnungsrelation* oder *partielle Ordnungsrelation*) auf X ist eine antisymmetrische Präordnung auf X.

(c) Eine *Totalordnung* (oder *Totalordnungsrelation*) auf X ist eine vollständige Ordnung auf X.

Wir erinnern an die übliche Ordnung auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$: Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $m \leq n$, wenn es ein $p \in \mathbb{N}_0$ mit $n = p + m$ gibt.

(7.2) Beispiel.

(a) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Totalordnung.

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die Relation $\subseteq$ auf $\operatorname{Pot}(X)$ ist eine Ordnung.

(c) Die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Präordnung.

Beweis.

(a) Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $n \leq p$ gegeben. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit $n = q + m$ und $p = r + n$. Es folgt $p = r + n = r + q + m$, also $m \leq p$. Folglich ist $\leq$ transitiv.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $m = 0 + m$ und damit $m \leq m$. Folglich ist $\leq$ reflexiv.

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $n \leq m$ gegeben, so dass es ein $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n = p + m$ und $m = q + n$ gibt. Dann folgt $m = q + n = q + p + m$, also $q + p = 0$. Dies impliziert aber $p = 0$ und damit $m = n$. Folglich ist $\leq$ antisymmetrisch.

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es ferner $p \in \mathbb{N}_0$ mit $n = p + m$ oder $m = p + n$, d.h. es gilt $m \leq n$ oder $n \leq m$. Folglich ist $\leq$ vollständig.

Insgesamt ist $\leq$ eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

(b) Für $U, V, W \in \operatorname{Pot}(X)$ mit $U \subseteq V$ und $V \subseteq W$ gilt auch $U \subseteq W$. Folglich ist $\subseteq$ transitiv.

Für $U \in \operatorname{Pot}(X)$ gilt $U \subseteq U$. Folglich ist $\subseteq$ reflexiv.

Für $U, V \in \operatorname{Pot}(X)$ mit $U \subseteq V$ und $V \subseteq U$ gilt nach dem Gleichheitskriterium für Mengen (2.13) stets $U = V$. Folglich ist $\subseteq$ antisymmetrisch.

Insgesamt ist $\subseteq$ eine Ordnung auf $\operatorname{Pot}(X)$.

(c) Nach Beispiel (4.5) ist $<$ nicht reflexiv, also insbesondere keine Präordnung. □

(7.3) Beispiel. Es seien verschiedene Objekte a, b und c gegeben.

(a) Die Relation $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$ ist eine Ordnung auf $\{a, b, c\}$.

(b) Die Relation $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$ ist eine Ordnung auf $\{a, b, c\}$.

(c) Die Relation $\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, c), (b, c)\}$ ist eine Totalordnung auf $\{a, b, c\}$.

(d) Die Relation $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$ ist eine Totalordnung auf $\{a, b, c\}$.

(e) Die Relation $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$ ist eine Präordnung auf $\{a, b, c\}$.

Geordnete Mengen

(7.4) Definition (prägeordnete Menge, geordnete Menge, total geordnete Menge)**.**

(a) Eine *prägeordnete Menge* besteht aus einer Menge X zusammen mit einer Präordnung o auf X. Unter Missbrauch der Notation bezeichnen wir sowohl die besagte prägeordnete Menge als auch die unterliegende Menge mit X. Die Präordnung o wird *Präordnung* von X genannt.

Für eine prägeordnete Menge X mit Präordnung o schreiben wir $\leq = \leq^X := o$.

(b) Eine *geordnete Menge* (genauer *partiell geordnete Menge*) ist eine prägeordnete Menge X derart, dass die Präordnung von X eine Ordnung auf der unterliegenden Menge von X ist. Die Präordnung einer geordneten Menge wird auch *Ordnung* von X genannt.

(c) Eine *totalgeordnete Menge* (oder *angeordnete Menge*) ist eine geordnete Menge X derart, dass die Ordnung von X eine Totalordnung auf der unterliegenden Menge von X ist. Die Ordnung einer totalgeordneten Menge wird auch *Totalordnung* von X genannt.

(7.5) Beispiel.

(a) Die Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit der üblichen Ordnung ist eine totalgeordnete Menge.

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die Potenzmenge $\mathrm{Pot}(X)$ zusammen mit der Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine geordnete Menge.

(7.6) Konvention.

(a) Wenn wir in Zukunft von der geordneten Menge $\mathbb{N}$ sprechen, so meinen wir damit stets $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung. Ähnlich für $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Wenn wir in Zukunft von der geordneten Menge $\mathrm{Pot}(X)$ sprechen, so meinen wir damit stets $\mathrm{Pot}(X)$ mit der Inklusionsrelation. Ähnlich für $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

(7.7) Definition (Striktordnung)**.** Es sei eine geordnete Menge X gegeben. Für $x, y \in X$ gelte genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$ ist. Die Relation $< = <^U$ auf X wird *Striktordnung* von X genannt.

(7.8) Bemerkung. Es seien eine prägeordnete Menge X und eine Teilmenge U von X gegeben. Die Menge U wird zu einer prägeordneten Menge mit Präordnung $\leq^U$ gegeben wie folgt. Für $u, v \in U$ gilt genau dann $u \leq^U v$ in U, wenn $u \leq^X v$ in X gilt. Wenn X eine geordnete Menge ist, dann wird U ebenfalls eine geordnete Menge. Wenn X eine total geordnete Menge ist, dann wird U ebenfalls eine total geordnete Menge.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

(7.9) Beispiel.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wird $[1, n]$ eine totalgeordnete Menge.

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die Menge $\mathrm{Pot}(X) \setminus \{0\}$ wird eine geordnete Menge.

Extremale Elemente

Nun studieren wir Elemente von geordneten Mengen, welche extremal bzgl. der gegebenen Ordnung sind.

(7.10) Definition (minimales Element, kleinstes Element, maximales Element, größtes Element)**.** Es seien eine prägeordnete Menge X und ein $x \in X$ gegeben.

(a) (i) Wir sagen, dass x ein *minimales* Element in X ist, falls für alle $y \in X$ mit $y \leq x$ auch $x \leq y$ gilt.

(ii) Wir sagen, dass x ein *kleinstes* Element in X ist, falls $x \leq y$ für alle $y \in X$ gilt.

(b) (i) Wir sagen, dass x ein *maximales* Element in X ist, falls für alle $y \in X$ mit $x \leq y$ bereits $y \leq x$ gilt.

(ii) Wir sagen, dass x ein *größtes* Element in X ist, falls $y \leq x$ für alle $y \in X$ gilt.

(7.11) Beispiel.

(a) Es ist 1 ein minimales und kleinstes Element in $\mathbb{N}$. Maximale und größte Elemente gibt es in $\mathbb{N}$ nicht.

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist $\emptyset$ ein minimales und kleinstes Element und X ein maximales und größtes Element in $\operatorname{Pot}(X)$.

(c) Die minimalen Elemente in $\operatorname{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$ (bzgl. der Inklusionsrelation) sind die einelementigen Mengen $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$. Kleinste Elemente gibt es in $\operatorname{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$ nicht.

(d) Die maximalen Elemente in $\operatorname{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$ (bzgl. der Inklusionsrelation) sind die zweielementigen Mengen $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ und $\{2,3\}$. Größte Elemente gibt es in $\operatorname{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$ nicht.

(7.12) Bemerkung. Es sei eine prägeordnete Menge X gegeben.

(a) Jedes kleinste Element in X ist auch minimal.

(b) Jedes größte Element in X ist auch maximal.

Beweis.

(a) Es sei ein kleinstes Element x in X gegeben, so dass $x \leq y$ für alle $y \in X$ gilt. Dann gilt aber insbesondere für alle $y \in X$ mit $y \leq x$ auch $x \leq y$. Folglich ist x minimal in X.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

(7.13) Bemerkung. Es sei eine geordnete Menge X und ein $x \in X$ gegeben.

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

(i) Das Element x ist minimal in X

(ii) Für $y \in X$ gilt genau dann $y \leq x$, wenn $y = x$ gilt.

(b) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

(i) Das Element x ist maximal in X

(ii) Für $y \in X$ gilt genau dann $x \leq y$, wenn $y = x$ gilt.

Beweis.

(a) Zunächst gelte Bedingung (i), d.h. x sei minimal in X. Für $y \in X$ mit $y \leq x$ gilt dann auch $x \leq y$ und damit $y = x$ auf Grund der Antisymmetrie der Ordnung $\leq$. Für $y \in X$ mit $y = x$ gilt hingegen auch $y \leq x$ auf Grund der Reflexivität von $\leq$. Somit gilt für $y \in X$ genau dann $y \leq x$, wenn $y = x$ gilt, d.h. es gilt Bedingung (ii).

Umgekehrt gelte Bedingung (ii), d.h. für $y \in X$ gelte genau dann $y \leq x$, wenn $y = x$ gilt. Dann gilt insbesondere für $y \in X$ mit $y \leq x$ auch $y = x$, auf Grund der Reflexivität von $\leq$ also auch $x \leq y$. Folglich ist x minimal in X, d.h. es gilt Bedingung (i).

Insgesamt sind Bedingung (i) und Bedingung (ii) äquivalent.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

In Beispiel (7.11)(c) haben wir gesehen, dass es mehrere minimale Elemente bzgl. einer Ordnung geben kann. Nun werden wir zeigen, dass kleinste Elemente in geordneten Mengen hingegen stets eindeutig sind.

(7.14) Bemerkung. Es sei eine geordnete Menge X gegeben.

(a) Es seien ein kleinstes Element x und ein minimales Element y in X gegeben. Dann ist $x = y$.

(b) Es seien ein größtes Element x und ein maximales Element y in X gegeben. Dann ist $x = y$.

Beweis.

(a) Da x ein kleinstes Element in X ist, gilt insbesondere $x \leq y$. Die Minimalität von y impliziert nun aber bereits $x = y$ nach Bemerkung (a).

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

(7.15) Korollar. Es sei eine geordnete Menge X gegeben.

(a) Es gibt höchstens ein kleinstes Element in X.

(b) Es gibt höchstens ein größtes Element in X.

Beweis.

(a) Es seien x und x' kleinste Elemente in X. Dann ist x' auch minimal nach Bemerkung (7.12)(a) und daher $x = x'$ nach Bemerkung (7.14)(a).

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

(7.16) Proposition. Es seien eine total geordnete Menge X und ein $x \in X$ gegeben.

(a) Genau dann ist x minimal in X, wenn es ein kleinstes Element in X ist.

(b) Genau dann ist x maximal in X, wenn es ein größte Element in X ist.

Beweis.

(a) Zunächst sei x minimal in X. Nach Bemerkung (7.13)(a) gilt dann für alle $y \in X$ mit $y \leq x$ bereits $y = x$. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass für alle $y \in X \setminus \{x\}$ nicht $y \leq x$ ist. Die Vollständigkeit von $\leq$ impliziert dann aber bereits, dass $x \leq y$ für alle $y \in X \setminus \{x\}$ gilt. Andererseits gilt aber auch $x \leq x$ wegen der Reflexivität von $\leq$. Insgesamt ist also $x \leq y$ für alle $y \in X$, d.h. x ist ein kleinstes Element in X.

Umgekehrt, wenn x ein kleinstes Element in X ist, so ist x nach Bemerkung (7.12)(a) auch minimal.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □