Sebastian Thomas RWTH Aachen, WS 2016/17
10.11.2016

Diskrete Strukturen
Vorlesung 7

5 Äquivalenzrelationen und Quotientenmengen

Ziel dieses Abschnitts ist es, den Begriff der (absoluten) Gleichheit von Objekten abzuschwächen und zu formalisieren, was wir unter einer „Gleichheit unter einem gewissen Gesichtspunkt“ verstehen. Hierzu dient der Begriff der Äquivalenzrelation. Fassen wir die bzgl. einer Äquivalenzrelation in Relation stehende Objekte auf geeignete Art und Weise zusammen, so erhalten wir eine neue Menge, die sogenannte Quotientenmenge, wo dann tatsächliche Gleichheit herrscht.

Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, siehe Definition (4.1), welche drei der in Definition (4.4) eingeführten Eigenschaften erfüllt:

(5.1) Definition (Äquivalenzrelation)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Eine *Äquivalenzrelation* auf X ist eine Relation auf X, welche transitiv, reflexiv und symmetrisch ist.

(5.2) Beispiel.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte genau dann $x \mathrel{c} y$, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist. Dann ist c eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte genau dann $x \equiv_2 y$, wenn x und y entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dann ist $\equiv_2$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

(c) Die Relation $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2)\}$ auf $\{1, 2, 3, 4\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(d) Für jede Menge X ist die Gleichheitsrelation $=$ auf X eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis.

(a) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \mathrel{c} y$ und $y \mathrel{c} z$ gegeben. Dann gilt $x = y$ oder $x = -y$, sowie $y = z$ oder $y = -z$. Wir erhalten

$$x = \begin{Bmatrix} \begin{cases} y, & \text{falls } x = y, \\ -y, & \text{falls } x = -y \end{cases} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{cases} z, & \text{falls } x = y,\ y = z, \\ -z, & \text{falls } x = y,\ y = -z, \\ -z, & \text{falls } x = -y,\ y = z, \\ -(-z), & \text{falls } x = -y,\ y = -z \end{cases} \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{cases} z, & \text{falls } x = y,\ y = z \text{ oder } x = -y,\ y = -z, \\ -z, & \text{falls } x = y,\ y = -z \text{ oder } x = -y,\ y = z. \end{cases}$$

Also ist $x = z$ oder $x = -z$, und damit $x \mathrel{c} z$. Folglich ist c transitiv.

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen $x = x$ auch $x \mathrel{c} x$ gilt, ist c reflexiv.

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \mathrel{c} y$ gegeben. Dann gilt $x = y$ oder $x = -y$, also auch $y = x$ oder $y = -x$ und damit $y \mathrel{c} x$. Folglich ist c symmetrisch.

Insgesamt ist c eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

(b) Es seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv_2 y$ und $y \equiv_2 z$ gegeben. Wenn x gerade ist, dann ist wegen $x \equiv_2 y$ auch y gerade und wegen $y \equiv_2 z$ dann auch z gerade. Wenn x ungerade ist, dann ist wegen $x \equiv_2 y$ auch y ungerade und wegen $y \equiv_2 z$ dann auch z ungerade. Also sind x und z entweder beide gerade oder beide ungerade, d.h. es gilt $x \equiv_2 z$. Folglich ist $\equiv_2$ transitiv.

Da x entweder gerade oder ungerade ist, ist $\equiv_2$ reflexiv.

Die Symmetrie von $\equiv_2$ folgt aus der symmetrischen Definition von $\equiv_2$.

Insgesamt ist $\equiv_2$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. □

(5.3) Anwendungsbeispiel.

(a) Die Studierenden des Moduls *Diskrete Strukturen* seien als Elemente einer Menge D modelliert. Für $s, t \in D$ gelte genau dann $s\ e\ t$, wenn der oder die durch s modellierte Studierende die gleichen Eltern wie der oder die durch t modellierte Studierende hat. Für $s, t \in D$ gelte genau dann $s\ g\ t$, wenn der oder die durch s modellierte Studierende den gleichen Geburtstag wie der oder die durch t modellierte Studierende hat. Dann sind e und g Äquivalenzrelationen auf D.

(b) Die Stichwörter in einem Lexikon seien als Elemente einer Menge L modelliert. Für $v, w \in L$ gelte genau dann $v\ a\ w$, wenn das durch v modellierte Stichwort den gleichen Anfangsbuchstaben wie das durch w modellierte Stichwort hat. Dann ist a eine Äquivalenzrelation auf L.

(c) Farbige Glasperlen in einer Dose seien als Elemente einer Menge P modelliert. Für $p, q \in P$ gelte genau dann $p\ f\ q$, wenn die durch p modellierte Glasperle die gleiche Farbe wie die durch q modellierte Glasperle hat. Dann ist f eine Äquivalenzrelation auf P.

Die bzgl. einer Äquivalenzrelation in Relation stehenden Elemente wollen wir nun zu Teilmengen zusammenfassen:

(5.4) Definition (Äquivalenzklasse)**.** Es seien eine Menge X und eine Äquivalenzrelation c auf X gegeben. Für $x \in X$ heißt $[x] = [x]_c := \{\tilde{x} \in X \mid \tilde{x}\ c\ x\}$ die *Äquivalenzklasse* von x in X bzgl. c, und es heißt x ein *Repräsentant* von $[x]_c$.

Wir greifen die Bespiele aus (5.2) noch einmal auf:

(5.5) Beispiel.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte genau dann $x\ c\ y$, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist. Dann ist $[x]_c = \{x, -x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte genau dann $x \equiv_2 y$, wenn x und y entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dann ist $[0]_{\equiv_2} = 2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ und $[1]_{\equiv_2} = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2q + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Es sei $c := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2)\}$. Dann ist $[1]_c = [2]_c = [4]_c = \{1, 2, 4\}$ und $[3]_c = \{3\}$.

(d) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist $[x]_= = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(5.6) Proposition. Es seien eine Menge X und eine Äquivalenzrelation c auf X gegeben.

(a) Für $x \in X$ ist $x \in [x]_c$.

(b) Für $x, y \in X$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

  (i) Es ist $[x]_c = [y]_c$.
  (ii) Es ist $[x]_c \subseteq [y]_c$.
  (iii) Es gilt $x\ c\ y$.

Beweis.

(a) Da c reflexiv ist, haben wir $x\ c\ x$ und damit $x \in [x]$ für alle $x \in X$.

(b) Es seien $x, y \in X$ gegeben.

Wenn $[x] \subseteq [y]$ gilt, dann haben wir $x \in [x] \subseteq [y]$ nach (a) und somit $x \; c \; y$. Es sei also umgekehrt angenommen, dass $x \; c \; y$ gilt. Für alle $\tilde{x} \in [x]$ haben wir $\tilde{x} \; c \; x$, die Transitivität von c liefert also $\tilde{x} \; c \; y$, d.h. $\tilde{x} \in [y]$. Folglich ist $[x] \subseteq [y]$.

Somit gilt genau dann $[x] \subseteq [y]$, wenn $x \; c \; y$ ist; wir haben also die Äquivalenz von Bedingung (ii) und Bedingung (iii) gezeigt. Nun ist aber c symmetrisch, d.h. aus $x \; c \; y$ folgt $y \; c \; x$. Folglich impliziert $[x] \subseteq [y]$ bereits $[y] \subseteq [x]$ und damit $[x] = [y]$. Da $[x] = [y]$ aber stets $[x] \subseteq [y]$ impliziert, sind auch Bedingung (i) und Bedingung (ii) äquivalent.

Insgesamt sind Bedingung (i), Bedingung (ii) und Bedingung (iii) äquivalent. □

Quotientenmengen

Als nächstes wollen wir die Äquivalenzklassen bzgl. einer Äquivalenzrelation wieder zu einer Menge zusammenfassen:

(5.7) Definition (Quotientenmenge)**.** Es seien eine Menge X und eine Äquivalenzrelation c auf X gegeben. Die Menge

$$X/c := \{[x]_c \mid x \in X\}$$

heißt *Quotientenmenge* (oder *Quotient*) von X modulo c. Die Abbildung

$$\mathrm{quo} = \mathrm{quo}^{X/c} \colon X \to X/c,\, x \mapsto [x]_c$$

wird *Quotientenabbildung* von X/c genannt.

Wir bestimmen die Quotientenmenge im Fall von Beispiel (5.2)(c):

(5.8) Beispiel. Es sei $c := \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2)\}$. Dann ist

$$\{1,2,3,4\}/c = \{[1]_c, [3]_c\}.$$

Beweis. Nach Beispiel (5.5)(c) ist $[1] = [2] = [4]$ und damit

$$\{1,2,3,4\}/c = \{[1], [2], [3], [4]\} = \{[1], [3]\}.$$ □

Unter der Quotientenmenge einer Menge X bzgl. einer Äquivalenzrelation c auf X stellen wir uns eine „Vergröberung“ der Menge X vor. Diejenigen Elemente in X, welche in X nur äquivalent bzgl. c sind, werden über die Quotientenabbildung zu gleichen Elementen in der Quotientenmenge.

(5.9) Definition (Transversale)**.** Es seien eine Menge X und eine Äquivalenzrelation c auf X gegeben. Eine *Transversale* (oder ein *Repräsentantensystem*) von X bzgl. c ist eine Teilmenge T von X so, dass es für jedes $K \in X/c$ genau ein $t \in T$ mit $K = [t]_c$ gibt.

Wir bestimmen einige Transversalen für die Äquivalenzrelationen aus Beispiel (5.2):

(5.10) Beispiel.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte genau dann $x \; c \; y$, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist. Dann sind $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ oder } 0 \leq x \leq 2\}$ Transversalen von $\mathbb{R}$ bzgl. c.

(b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte genau dann $x \equiv_2 y$, wenn x und y entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dann sind $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{-3, 88\}$ Transversalen von $\mathbb{Z}$ bzgl. $\equiv_2$.

(c) Es sei $c := \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2)\}$. Dann sind $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ Transversalen von $\{1, 2, 3, 4\}$ bzgl. c.

(d) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist X die einzige Transversale von X bzgl. $=$.

Der Homomorphiesatz für Mengen

Wir werden nun sehen, dass jede Abbildung Anlass zu einer Äquivalenzrelation gibt, welche schließlich zu einer Bijektion führt.

(5.11) Definition (Bildgleichheit)**.** Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte genau dann $x =_f \tilde{x}$, wenn $f(x) = f(\tilde{x})$ ist. Die Relation $=_f$ auf X heißt *Bildgleichheit* bzgl. f.

(5.12) Beispiel. Es sei $f\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 1$. Dann ist

$$=_f \, = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(2,4),(4,2)\}$$

(5.13) Bemerkung. Für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ ist $=_f$ eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

(5.14) Satz (Homomorphiesatz für Mengen)**.** Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann haben wir eine induzierte Abbildung $\bar{f}\colon X/{=_f} \to Y$, $[x] \mapsto f(x)$, welche $f = \bar{f} \circ \mathrm{quo}$ erfüllt. Es ist $\bar{f}$ injektiv und $\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$. Insbesondere ist

$$\bar{f}|^{\operatorname{Im} f}\colon X/{=_f} \to \operatorname{Im} f$$

eine Bijektion.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{quo}"'] & & Y \\
& X/{=_f} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Für $x, x' \in X$ ist nach Proposition (5.6)(b) genau dann $[x] = [x']$ in $X/{=_f}$, wenn $x =_f x'$ in X gilt, und dies ist nach Definition von $=_f$ äquivalent zu $f(x) = f(x')$ in Y. Folglich ist $\bar{f}\colon X/{=_f} \to Y$, $[x] \mapsto f(x)$ eine wohldefinierte Abbildung. Da für $x \in X$ stets

$$\bar{f}(\mathrm{quo}(x)) = \bar{f}([x]) = f(x)$$

ist, gilt $f = \bar{f} \circ \mathrm{quo}$. Ferner ist

$$\operatorname{Im} \bar{f} = \{\bar{f}(K) \mid K \in X/c\} = \{\bar{f}([x]) \mid x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\} = \operatorname{Im} f.$$

Für $x, x' \in X$ mit $\bar{f}([x]) = \bar{f}([x'])$ in Y gilt schließlich

$$f(x) = \bar{f}([x]) = \bar{f}([x']) = f(x')$$

in Y, also $x =_f x'$ in X und damit $[x] = [x']$ in $X/{=_f}$ nach Proposition (5.6)(b). Also ist $\bar{f}$ in der Tat injektiv. □

(5.15) Beispiel. Es sei $f\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 1$. Dann ist $\{1,2,3,4\}/{=_f} = \{[1],[3]\}$ und es gilt $f = \bar{f} \circ \mathrm{quo}$ mit $\bar{f}\colon \{1,2,3,4\}/{=_f} \to \mathbb{Z}$, $[1] \mapsto 1$, $[3] \mapsto 3$.

Wir erläutern den Homomorphiesatz für Mengen (5.14) auch noch an einem Beispiel aus dem täglichen Leben:

(5.16) Anwendungsbeispiel. Farbige Glasperlen in einer Dose seien als Elemente einer Menge P modelliert. Farben seien als Elemente einer Menge F modelliert. Die Zuordnung der zugehörigen Farbe zu jeder Glasperle sei als Abbildung $a\colon P \to F$ modelliert. Für $p, q \in P$ gilt genau dann $p =_a q$, wenn die durch p modellierte Glasperle die gleiche Farbe wie die durch q modellierte Glasperle hat. Eine Äquivalenzklasse bzgl. $=_a$ entspricht der Gesamtheit aller Glasperlen einer Farbe. Die Quotientenmenge $P/{=_a}$ entspricht einer „Sortierung“ aller Glasperlen nach Farben; die Quotientenabbildung $\mathrm{quo}\colon P \to P/{=_a}$ entspricht der Zuordnung jeder Perle zu ihrem „Farbhäufchen“; und die induzierte Abbildung $\bar{a}\colon P/{=_a} \to F$ entspricht der Zuordnung jedes Häufchens zu „seiner“ Farbe.

Partitionen

Zum Abschluss wollen wir den mengentheoretischen Aspekt von Quotientenmengen noch etwas genauer beleuchten: Jede Äquivalenzrelation c auf einer Menge X partitioniert (also unterteilt) via X/c die Menge X in Teilmengen, nämlich in die Elemente von X/c. Gehen wir umgekehrt von einer Unterteilung von X in Teilmengen aus, so liefert uns dies wiederum eine Äquivalenzrelation, indem wir zwei Elemente als äquivalent betrachten, wenn sie im gleichen Teil der Unterteilung liegen. Es lässt sich zeigen, dass sich diese Konstruktionen gegenseitig umkehren, siehe den Hauptsatz über Äquivalenzrelationen (5.19).
Zunächst präzisieren wir, was wir unter einer Unterteilung einer Menge verstehen wollen:

(5.17) Definition (Partition)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Eine *Partition* (genauer *Mengenpartition*) von X ist eine Teilmenge $\mathcal{P}$ von $\operatorname{Pot}(X)$ so, dass $\emptyset \notin \mathcal{P}$ und

$$X = \dot{\bigcup_{P \in \mathcal{P}}} P.$$

Für $x \in X$ heißt das eindeutige $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$ der *Teil* von x in $\mathcal{P}$.

(5.18) Beispiel. Es ist $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ eine Partition von $\{1, 2, 3, 4\}$.

(5.19) Satz (Hauptsatz über Äquivalenzrelationen)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Wir haben eine wohldefinierte Bijektion

$$X/-\colon \{c \mid c \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\} \to \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } X\},\ c \mapsto X/c.$$

Für jede Partition $\mathcal{P}$ von X ist die eindeutige Äquivalenzrelation c auf X mit $\mathcal{P} = X/c$ wie folgt gegeben: Für $x, y \in X$ gilt genau dann $x\ c\ y$, wenn es ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$ und $y \in P$ gibt.

Beweis. Zunächst sei eine Äquivalenzrelation c gegeben. Dann ist $X/c = \{[x]_c \mid x \in X\}$. Für alle $K \in X/c$ gibt es also ein $x \in X$ mit $K = [x]_c$, und mit Proposition (5.6)(a) folgt $x \in [x]_c = K$. Insbesondere ist $K \neq \emptyset$ für alle $K \in X/c$ und damit $\emptyset \notin X/c$. Für $x \in X$ gilt ferner

$$x \in [x]_c \subseteq \bigcup_{y \in X} [y]_c = \bigcup_{K \in X/c} K,$$

es ist also $X = \bigcup_{K \in X/c} K$. Um die Disjunktheit von $(K)_{K \in X/c}$ zu zeigen, seien $K, L \in X/c$ mit $K \cap L \neq \emptyset$ gegeben. Ferner seien $x, y, z \in X$ mit $K = [x]_c$, $L = [y]_c$ und $z \in K \cap L$ gegeben. Wegen $z \in K = [x]_c$ gilt $z\ c\ x$ und wegen $z \in L = [y]_c$ gilt $z\ c\ y$. Wir erhalten also $x\ c\ y$ und somit $K = [x]_c = [y]_c = L$ nach Proposition (5.6)(b). Insgesamt ist X/c eine Partition von X.
Somit haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$X/-\colon \{c \mid c \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\} \to \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } X\},\ c \mapsto X/c.$$

Umgekehrt sei eine Partition $\mathcal{P}$ von X gegeben. Da $(P)_{P \in \mathcal{P}}$ disjunkt ist, gibt es für jedes $x \in X$ genau ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$. Somit haben wir eine Abbildung $q_{\mathcal{P}}\colon X \to \mathcal{P}$ mit $x \in q_{\mathcal{P}}(x)$. Die Bildgleichheit $=_{q_{\mathcal{P}}}$ ist nach Bemerkung (5.13) eine Äquivalenzrelation auf X.
Folglich haben wir auch eine wohldefinierte Abbildung

$$=_{q_-}\colon \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } X\} \to \{c \mid c \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\},\ \mathcal{P} \mapsto {=_{q_{\mathcal{P}}}}.$$

Wir wollen zeigen, dass sich die Abbildungen $X/-$ und $=_{q_-}$ gegenseitig invertieren. Für jede Äquivalenzrelation c auf X gilt

$$\begin{aligned} =_{q_{X/c}} &= \{(x, y) \in X \times X \mid q_{X/c}(x) = q_{X/c}(y)\} = \{(x, y) \in X \times X \mid [x]_c = [y]_c\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid x\ c\ y\} = c \end{aligned}$$

nach Proposition (5.6)(b). Folglich ist $=_{q_-} \circ X/- = \operatorname{id}_{\{c \mid c \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\}}$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6). Umgekehrt sei eine Partition $\mathcal{P}$ von X gegeben. Für $x, y \in X$ gilt genau dann $y =_{q_{\mathcal{P}}} x$, wenn $q_{\mathcal{P}}(y) = q_{\mathcal{P}}(x)$ ist, und da $(P)_{P \in \mathcal{P}}$ disjunkt ist, ist dies äquivalent zu $y \in q_{\mathcal{P}}(x)$. Folglich ist

$$[x]_{=_{q_{\mathcal{P}}}} = \{y \in X \mid y =_{q_{\mathcal{P}}} x\} = q_{\mathcal{P}}(x)$$

für $x \in X$, also

$$X/{=_{q_\mathcal{P}}} = \{[x]_{=_{q_\mathcal{P}}} \mid x \in X\} = \{q_\mathcal{P}(x) \mid x \in X\} = \mathcal{P}.$$

Nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6) ist somit auch $X/- \circ =_{q_-} = \mathrm{id}_{\{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } X\}}$. Insgesamt sind $X/-$ und $=_{q_-}$ zueinander inverse Abbildungen. $\square$