Sebastian Thomas RWTH Aachen, WS 2016/17
07.11.2016–09.11.2016

Diskrete Strukturen
Vorlesungen 5 und 6

3 Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir Abbildungen zwischen Mengen ein. Während Mengen von der Vorstellung her starre Gebilde sind, stellen wir uns unter einer Abbildung eine „Vorschrift“ vor, welche die Elemente einer Menge eindeutig auf gewisse Elemente einer anderen Menge „abbildet“.

Begriffsbildung

In der Mathematik ist es allgemein üblich, neue Begriffe auf bereits bekannte Begriffe zurückzuführen. Auch wenn wir uns unter einer Abbildung etwas anderes vorstellen werden als unter einer Menge, werden wir nun zunächst den Abbildungsbegriff mit Hilfe des Mengenbegriffs definieren. Oder anders ausgedrückt: wir wollen unsere intuitive Vorstellung von einer Abbildung mit Hilfe von Mengen „modellieren“. Dies hätten wir bereits beim Konzept einer Familie, siehe (2.16), machen können; allerdings ist hierbei die Formalisierung auf den ersten Blick weniger einsichtig.
Aus der Schule sind uns Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vertraut. Diese veranschaulichen wir an Hand eines „Graphen“, welchen wir als Teilmenge der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auffassen können. Für eine allgemeine Abbildung ersetzen wir nun $\mathbb{R}$ durch beliebige Mengen und nehmen die beschreibende Teilmenge als Bestandteil der Definition:

(3.1) Definition (Abbildung)**.**

(a) Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) besteht aus Mengen X und Y zusammen mit einer Teilmenge f von $X \times Y$ so, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt. Unter Missbrauch der Notation bezeichnen wir sowohl die besagte Abbildung als auch die Teilmenge von $X \times Y$ mit f. Die Menge X wird *Startmenge* (oder *Definitionsbereich*) von f genannt. Ein Element von X wird *Argument* von f genannt. Die Menge Y wird *Zielmenge* (oder *Wertebereich*) von f genannt. Ein Element von Y wird *Zielwert* (oder *Zielelement*) von f genannt.

Für eine Abbildung f mit Startmenge X und Zielmenge Y schreiben wir $\operatorname{Source} f := X$ und $\operatorname{Target} f := Y$. Für $x \in X$ heißt das Element $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ das *Bild* (oder *Bildelement*) von x unter f, wir schreiben $f(x) := y$. Für $y \in Y$, $x \in X$ mit $y = f(x)$ wird x ein *Urbild* (oder *Urbildelement*) von y unter f genannt.

(b) Es seien Mengen X und Y gegeben. Die *Menge der Abbildungen* von X nach Y ist definiert als

$$\operatorname{Map}(X, Y) := \{f \mid f \text{ ist eine Abbildung mit } \operatorname{Source} f = X \text{ und } \operatorname{Target} f = Y\}.$$

Ein Element von $\operatorname{Map}(X, Y)$ wird *Abbildung* von X nach Y genannt; wir schreiben $f\colon X \to Y$ sowie $f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ für $f \in \operatorname{Map}(X, Y)$.

Wir betonen, dass in der vorangegangenen Definition $f \neq f(x)$ ist. Während f eine Abbildung angibt, bezeichnet $f(x)$ für $x \in X$ das Bildelement von x unter f, also ein Element von Y.

(3.2) Beispiel.

(a) Es ist $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 5$, $3 \mapsto 4$ eine Abbildung.

(b) Es ist $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x^2$ eine Abbildung.

(c) Es gibt keine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

(d) Es gibt keine Abbildung $f\colon \{-2, 3, \sqrt{61}\} \to \mathbb{Q}$ mit $f(3) = -5$ und $f(3) = \frac{2}{7}$.

(e) Die Teilmenge $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ liefert keine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(f) Es ist $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine Abbildung.

Beweis.

(c) Es ist etwa $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

(d) Es ist $-5 \neq \frac{2}{7}$ in $\mathbb{Q}$. □

In den Fällen von Beispiel (3.2)(c), (d) sagen wir auch, dass solche Abbildungen nicht *wohldefiniert* wären.

(3.3) Beispiel. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Map}(\{1,2\},\{3,4,5\}) = \{&(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4), \\ &(1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 5)\}, \end{aligned}$$

wobei wir etwa $(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3)$ als Kurzschreibweise für die Abbildung $\{1,2\} \to \{3,4,5\}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 3$ verwendet haben. ([1])

Wir betrachten noch einige Modellierungen von alltäglichen Zuordnungen:

(3.4) Anwendungsbeispiel.

(a) Der Briefpostversand der Aachener Post (an einem festgelegten Tag) lässt sich als Abbildung auffassen, bei der die Elemente der Startmenge die abgegebenen Briefe und die Elemente der Zielmenge die Postadressen modellieren.

(b) Eine Nachrichtenverschlüsselung lässt sich als Abbildung auffassen, bei der die Elemente der Startmenge die Klartexte und die Elemente der Zielmenge die Geheimtexte modellieren. Eine Nachrichtenentschlüsselung lässt sich als Abbildung auffassen, bei der die Elemente der Startmenge die Geheimtexte und die Elemente der Zielmenge die Klartexte modellieren.

(c) Ein Ticketverkauf zu einer Filmvorstellung lässt sich als Abbildung auffassen, bei der die Elemente der Startmenge die Sitzplätze und die Elemente der Zielmenge die Menschen modellieren.

(3.5) Anwendungsbeispiel. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Eine potentielle Wahrheitstafel für die Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ lässt sich als Abbildung von $\{0,1\}^n$ nach $\{0,1\}$ ([2]) modellieren.

(3.6) Bemerkung (Gleichheitskriterium für Abbildungen)**.** Es seien Abbildungen $f \colon X \to Y$ und $f' \colon X' \to Y'$ gegeben. Genau dann gilt $f = f'$, wenn $X = X'$, $Y = Y'$ und $f(x) = f'(x)$ in Y für alle $x \in X$ ist.

Beweis. Als Teilmenge von $X \times Y$ ist $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} := \{z \mid \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } z = (x, f(x))\}$, und als Teilmenge von $X' \times Y'$ ist $f' = \{(x', f'(x')) \mid x' \in X'\}$. Nun gilt $f = f'$ als Abbildungen genau dann, wenn $X = X'$, $Y = Y'$ und $f = f'$ als Teilmenge von $X \times Y = X' \times Y'$ ist. Letzteres ist aber äquivalent zu $\{(x, f(x)) \mid x \in X\} = \{(x', f'(x')) \mid x' \in X'\} = \{(x, f'(x)) \mid x \in X\}$. Schließlich sind diese Mengen genau dann gleich, wenn für $x \in X$ stets $f(x) = f'(x)$ gilt. □

(3.7) Beispiel.

(a) Es seien $f \colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 2$ und $f' \colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$. Dann ist $f = f'$.

[1] Start- und Zielmenge der jeweiligen Abbildungen sind bereits durch die Bezeichnung $\operatorname{Map}(\{1,2\},\{3,4,5\})$ festgelegt. Würden wir eine Menge betrachten, deren Elemente Abbildungen mit verschieden Start- und/oder Zielmengen sind, so müssten wir die jeweiligen Start- und Zielmengen der Elemente natürlich angeben.

[2] Eine solche Abbildung wird auch *Boolesche Funktion* genannt.

(b) Es sei eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ 0, & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Ferner sei eine Abbildung $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ -1, & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Dann ist $f \neq f'$.

(c) Es seien $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^2$ und $f'\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^2$. Dann ist $f \neq f'$.

(d) Es seien $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+1$ und $f'\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$. Dann ist $f \neq f'$.

Beweis.

(a) Es ist $\operatorname{Source} f = \{1, 2, 3\} = \operatorname{Source} f'$ und $\operatorname{Target} f = \mathbb{N} = \operatorname{Target} f'$. Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 2 = 3 = f'(1), \\ f(2) &= 2 + 2 = 4 = f'(2), \\ f(3) &= 3 + 2 = 5 = f'(3) \end{aligned}$$

ist daher $f = f'$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6).

(b) Wegen

$$f(-1) = 0 \neq -1 = f(-1)$$

ist $f \neq f'$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6).

(c) Wegen

$$\operatorname{Source} f = \mathbb{N}_0 \neq \mathbb{Z} = \operatorname{Source} f'$$

ist $f \neq f'$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6).

(d) Wegen

$$\operatorname{Target} f = \mathbb{N} \neq \mathbb{Z} = \operatorname{Target} f'$$

ist $f \neq f'$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6). □

Zusammenhang zu Familien

Zwischen Abbildungen und Familien besteht ein enger Zusammenhang:

(3.8) Bemerkung. Es seien Mengen X und I gegeben.

(a) Es sei eine Familie x in X über I gegeben. Dann ist $I \to X$, $i \mapsto x_i$ eine Abbildung.

(b) Es sei eine Abbildung $f\colon I \to X$ gegeben. Dann ist $(f(i))_{i \in I}$ eine Familie.

Obwohl es einen formalen Unterschied zwischen Abbildungen und Familien gibt (insbesondere gehören Start- und Zielmenge zu einer gegebenen Abbildung, die Menge in welcher die Einträge einer Familie liegen jedoch nicht zu einer Familie), fassen wir Familien hin und wieder als Abbildungen auf, und umgekehrt ebenso.

(3.9) Konvention. Es seien Mengen X und I gegeben.

(a) Es sei eine Familie x in X über I gegeben. Unter Missbrauch der Notation bezeichnen wir die Abbildung $I \to X$, $i \mapsto x_i$ wieder als x.

(b) Es sei eine Abbildung $f\colon I \to X$ gegeben. Unter Missbrauch der Notation bezeichnen wir die Familie $(f(i))_{i \in I}$ wieder als f.

Komposition von Abbildungen

Als nächstes wollen wir gleich mehrere Abbildungen auf einmal betrachten. Haben wir Abbildungen f und g so gegeben, dass die Zielmenge von f gleich der Startmenge von g ist, so können wir diese Abbildungen nacheinander ausführen, d.h. wir können sie komponieren:

(3.10) Definition (Kompositum)**.** Es seien Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ gegeben. Die Abbildung

$$g \circ f\colon X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$$

heißt *Kompositum* von f und g.

(3.11) Beispiel. Es seien $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $y \mapsto 2y^2$. Dann ist $g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2(x+1)^2$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{N}$ ist

$$g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1)^2.$$ □

(3.12) Bemerkung. Es seien Abbildungen $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to A$ gegeben. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Es sind $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ Abbildungen von X nach A. Für alle $x \in X$ gilt außerdem

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6) haben wir daher $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

(3.13) Konvention. Da es nach Bemerkung (3.12) bei der iterierten Bildung von Komposita nicht auf die Klammerung ankommt, lassen wir die Klammern im Folgenden meist weg.

Wir werden nun sehen, dass es möglich ist, für jede Menge X mindestens eine Abbildung $X \to X$ hinzuschreiben, egal welche Elemente X besitzt.

(3.14) Definition (Identität)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Die Abbildung

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}_X\colon X \to X,\ x \mapsto x$$

heißt *Identität* (oder *identische Abbildung*) auf X.

(3.15) Beispiel. Die Identität auf $\{1, 2, 3\}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\},\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3.$$

(3.16) Bemerkung. Für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

Beweis. Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann sind $f \circ \mathrm{id}_X$ und $\mathrm{id}_Y \circ f$ auch Abbildungen von X nach Y. Für alle $x \in X$ gilt außerdem

$$(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x),$$
$$(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x).$$

Nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6) gilt daher $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_Y \circ f = f$. □

Schließlich wollen wir zu einer gegebenen Abbildung f solche Abbildungen g betrachten, welche durch Komposition mit f eine Identität liefern. Da die Identität einer Menge, anschaulich gesprochen, mit den Elementen dieser Menge nichts macht, macht g also die Abbildung f „rückgängig“ und umgekehrt.

(3.17) Definition (Invertierbarkeit von Abbildungen)**.** Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben.

(a) Eine *Inverse* (oder *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung*) zu f ist eine Abbildung $g\colon Y \to X$ derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

(b) Die Abbildung f heißt *invertierbar*, falls es eine Inverse zu f gibt.

(3.18) Beispiel. Es seien $\mathbb{Q}_{>0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ und $\mathbb{Q}_{<0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

(a) Es seien $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -2x$ und $g\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -\frac{1}{2}y$. Dann ist g eine zu f inverse Abbildung.

(b) Es seien $h\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -x$ und $k\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -y$. Dann ist k eine zu h inverse Abbildung.

(c) Die Abbildung $l\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -x$ ist zu sich selbst invers.

Beweis.

(a) Für $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ ist

$$g(f(x)) = g(-2x) = -\frac{1}{2}(-2x) = x,$$

und für $y \in \mathbb{Q}_{<0}$ ist

$$f(g(y)) = f(-\frac{1}{2}y) = -2(-\frac{1}{2}y) = y.$$

Nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6) gilt daher $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_{>0}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_{<0}}$, d.h. es ist g eine zu f inverse Abbildung. □

(3.19) Bemerkung. Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann gibt es höchstens eine Inverse zu f.

Beweis. Es seien $g\colon Y \to X$ und $g'\colon Y \to X$ zu f inverse Abbildungen. Nach Bemerkung (3.16) gilt dann

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ f \circ g' = \mathrm{id}_X \circ g' = g'.$$ □

Da wir nun wissen, dass die zu einer gegebenen Abbildung f inverse Abbildung, sofern sie existiert, eindeutig durch f festgelegt ist, können wir ihr eine feste Bezeichnung (in Abhängigkeit von f) geben:

(3.20) Notation. Die zu einer invertierbaren Abbildung $f\colon X \to Y$ gegebene inverse Abbildung notieren wir als $f^{-1}\colon Y \to X$.

(3.21) Proposition.

(a) Es seien invertierbare Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ gegeben. Dann ist auch $g \circ f\colon X \to Z$ invertierbar mit

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Die Identität $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ist eine invertierbare Abbildung mit

$$\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X.$$

(c) Es sei eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann ist auch $f^{-1}\colon Y \to X$ invertierbar mit

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Beweis.

(a) Da f invertierbar ist, gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. Ferner, da g invertierbar ist, gilt $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z$. Nach Bemerkung (3.16) ist also

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$
$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z.$$

Somit ist $g \circ f$ invertierbar mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(b) Nach Bemerkung (3.16) gilt $\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$. Folglich ist id_X invertierbar mit $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.

(c) Da $f^{-1}\colon Y \to X$ zu f invers ist, gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. Dann ist aber auch $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, d.h. es ist f^{-1} invertierbar mit $(f^{-1})^{-1} = f$. □

Für iterierte Komposita verwenden wir folgende vereinfachte Schreibweise. ([3])

(3.22) Notation. Es sei eine Abbildung $f\colon X \to X$ gegeben. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$f^k := \begin{cases} \mathrm{id}_X, & \text{falls } k = 0, \\ f \circ f^{k-1}, & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Wenn f invertierbar ist, so setzen wir

$$f^{-k} := (f^{-1})^k$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Injektivität und Surjektivität

Bisher haben wir Abbildungen unter algebraischen Gesichtspunkten studiert, d.h. wir haben Abbildungen komponiert und Eigenschaften der Komposition und der damit verwandten Begriffe wie Identität und Inverse betrachtet. Als nächstes wollen wir Abbildungen mehr unter qualitativen, rein mengentheoretischen Gesichtspunkten verstehen. Wir wollen also Fragen nach dem „Aussehen" einer Abbildung, d.h. nach ihrem Verhalten gegenüber den Elementen und Teilmengen von Start- und Zielmenge, untersuchen. Der Höhepunkt wird schließlich Satz (3.29) sein, welcher die algebraische und die mengentheoretische Sichtweise miteinander verknüpft.

(3.23) Definition (injektiv, surjektiv)**.** Es seien Mengen X und Y gegeben.

(a) Die *Menge der injektiven Abbildungen* von X nach Y ist definiert als

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{inj}}(X, Y) := \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid \text{für } x, x' \in X \text{ folgt aus } f(x) = f(x') \text{ stets } x = x'\}.$$

Ein Element von $\mathrm{Map}_{\mathrm{inj}}(X, Y)$ wird *injektive* Abbildung von X nach Y genannt.

(b) Die *Menge der surjektiven Abbildungen* von X nach Y ist definiert als

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{surj}}(X, Y) := \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid \text{für } y \in Y \text{ gibt es ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Ein Element von $\mathrm{Map}_{\mathrm{surj}}(X, Y)$ wird *surjektive* Abbildung von X nach Y genannt.

(c) Die *Menge der bijektiven Abbildungen* von X nach Y ist definiert als

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{bij}}(X, Y) := \mathrm{Map}_{\mathrm{inj}}(X, Y) \cap \mathrm{Map}_{\mathrm{surj}}(X, Y).$$

Ein Element von $\mathrm{Map}_{\mathrm{bij}}(X, Y)$ wird *bijektive* Abbildung von X nach Y genannt.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist also injektiv, wenn sie verschiedene Elemente in X stets auf verschiedene Elemente in Y abbildet; surjektiv, wenn jedes Element aus Y das Bild eines Elements aus X unter f ist; und bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

(3.24) Beispiel.

(a) Die Abbildung $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) Die Abbildung $\{1, 2\} \to \{4, 5, 6\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 5$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(c) Die Abbildung $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 4$ ist bijektiv.

(d) Die Abbildung $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 5$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(3.25) Beispiel. Die Abbildung $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -2x + 3$ ist eine Bijektion.

[3] Bzgl. Komposition wird für jede Menge X die Menge der Abbildungen $\mathrm{Map}(X, X)$ ein Monoid, siehe Bemerkung (10.1) und Definition (6.12). Die Potenznotation in (3.22) entspricht dann gerade der Potenznotation in abstrakten (multiplikativ geschriebenen) Monoiden, siehe Notation (6.40)(a).

Beweis. Für $x, x' \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = f(x')$ gilt $-2x+3 = -2x'+3$, folglich $-2x = -2x'$ und damit $x = x'$. Somit ist f injektiv.
Für $y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$f(-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}) = -2(-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}) + 3 = y - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = y.$$

Somit ist f surjektiv.
Insgesamt ist f bijektiv. □

Zum Beweis der Surjektivität in Beispiel (3.25) haben wir für jedes $y \in \mathbb{Q}$ ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $y = f(x)$ angegeben, nämlich $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$. Hierbei ist es nicht entscheidend, wie man auf diese Formel gekommen ist, wichtig ist allein, dass für jedes $y \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $y = f(x)$ gilt.
Nichtsdestotrotz stellt sich die Frage nach einer systematischen Methode zur Bestimmung eines solchen $x \in \mathbb{Q}$ für gegebenes $y \in \mathbb{Q}$. Hierzu können wir in diesem Fall eine *Analyse* verwenden: Wir nehmen an, dass wir ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $y = f(x)$ gegeben haben. Dann gilt nämlich $y = f(x) = -2x + 3$, also $y - 3 = -2x$ und damit

$$x = -\frac{1}{2}(y-3) = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}.$$

Die Analyse ersetzt hierbei nicht den Beweis der Surjektivität und aus der Surjektivität folgt umgekehrt auch nicht die Aussage der Analyse: Bei der Analyse folgern wir für gegebenes $x \in \mathbb{Q}$ aus der Aussage $y = f(x)$ die Aussage $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ (also die genaue Gestalt von x), während wir im Beweis der Surjektivität aus der Aussage $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ die Aussage $y = f(x)$ folgern.

(3.26) Beispiel.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Map}_{\text{inj}}(\{1,2\},\{3,4,5\}) = \{&(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5),\\ &(1 \mapsto 5, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4)\}.\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Map}_{\text{surj}}(\{1,2,3\},\{4,5\}) = \{&(1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 5),\\ &(1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 4), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4)\}.\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Map}_{\text{bij}}(\{1,2,3\},\{4,5,6\}) = \{&(1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 6), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6),\\ &(1 \mapsto 5, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 4), (1 \mapsto 6, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 6, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4)\}.\end{aligned}$$

(3.27) Definition (Bild, Urbild)**.** Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben.

(a) Für eine Teilmenge U von X heißt

$$f(U) := \{f(u) \mid u \in U\} := \{y \in Y \mid \text{es gibt ein } u \in U \text{ mit } y = f(u)\}$$

das *Bild* von U unter f. Ferner heißt $\operatorname{Im} f := f(X)$ das *Bild* von f.

(b) Für eine Teilmenge V von Y heißt

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

das *Urbild* von V unter f. Für $y \in Y$ heißt $f^{-1}(\{y\})$ die *Faser* von f über y.

Wir betonen, dass die Notation von Urbild und Faser nicht die Existenz einer inversen Abbildung voraussetzt; stattdessen haben wir es mit einer mehrdeutigen Schreibweise zu tun.

(3.28) Beispiel. Es sei $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7,8,9\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 8$, $3 \mapsto 5$, $4 \mapsto 9$. Dann ist $f(\{1,2,3\}) = \{5,8\}$, $\operatorname{Im} f = \{5,8,9\}$, $f^{-1}(\{5,9\}) = \{1,3,4\}$, $f^{-1}(\{5\}) = \{1,3\}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&f(\{1,2,3\}) = \{f(u) \mid u \in \{1,2,3\}\} = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{5,8,5\} = \{5,8\}, \\
&\operatorname{Im} f = f(\{1,2,3,4\}) = \{f(u) \mid u \in \{1,2,3,4\}\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{5,8,5,9\} = \{5,8,9\}, \\
&f^{-1}(\{5,9\}) = \{x \in \{1,2,3,4\} \mid f(x) \in \{5,9\}\} = \{x \in \{1,2,3,4\} \mid f(x) = 5 \text{ oder } f(x) = 9\} = \{1,3,4\}, \\
&f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \{1,2,3,4\} \mid f(x) \in \{5\}\} = \{x \in \{1,2,3,4\} \mid f(x) = 5\} = \{1,3\}.
\end{aligned}$$

□

(3.29) Satz. Es sei eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gegeben.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

 (i) Die Abbildung f ist injektiv.
 (ii) Jede Faser von f besitzt höchstens ein Element.
 (iii) Es ist $X = \emptyset$ oder es gibt eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

 (i) Die Abbildung f ist surjektiv.
 (ii) Jede Faser von f besitzt mindestens ein Element.
 (iii) Es gibt eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

 (i) Die Abbildung f ist bijektiv.
 (ii) Jede Faser von f besitzt genau ein Element.
 (iii) Die Abbildung f ist invertierbar.

Beweis.

(a) Zuerst zeigen wir die Äquivalenz von Bedingung (i) und Bedingung (ii), danach die Äquivalenz von Bedingung (i) und Bedingung (iii).

Zunächst gelte Bedingung (i), d.h. f sei injektiv. Ferner sei $y \in Y$ beliebig gegeben. Für $x, x' \in f^{-1}(\{y\})$ gilt dann $f(x) = y = f(x')$, wegen der Injektivität von f also $x = x'$. Folglich ist $f^{-1}(\{y\})$ entweder leer oder enthält genau ein Element. Da $y \in Y$ beliebig war, gilt also Bedingung (ii).

Nun sei umgekehrt angenommen, dass Bedingung (ii) gilt, d.h. dass jede Faser von f höchstens ein Element enthält. Außerdem seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$ gegeben. Dann ist $x \in f^{-1}(f(x))$ und $x' \in f^{-1}(f(x'))$, wegen $f(x) = f(x')$ also $x, x' \in f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x'))$. Nach unserer Voraussetzung enthält $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x'))$ jedoch höchstens ein Element, so dass $x = x'$ folgt. Somit ist f injektiv, d.h. es gilt Bedingung (i).

Folglich sind Bedingung (i) und Bedingung (ii) äquivalent.

Als nächstes gelte wieder Bedingung (i), d.h. f sei injektiv. Ferner nehmen wir an, dass $X \neq \emptyset$ ist. Da mit Bedingung (i) auch Bedingung (ii) gilt, enthält jede Faser von f höchstens ein Element. Die Faser von f unter jedem $y \in \operatorname{Im} f$ ist nach Definition von $\operatorname{Im} f$ jedoch auch nicht leer, d.h. sie enthält also genau ein Element. Mit anderen Worten: Für jedes $y \in \operatorname{Im} f$ gibt es genau ein $g'(y) \in X$ mit $f(g'(y)) = y$. Dies definiert eine Abbildung $g'\colon \operatorname{Im} f \to X$. Wegen $X \neq \emptyset$ gibt es ferner eine Abbildung $g''\colon Y \setminus \operatorname{Im} f \to X$. Wir definieren $g\colon Y \to X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} g'(y), & \text{für } y \in \operatorname{Im} f, \\ g''(y), & \text{für } y \in Y \setminus \operatorname{Im} f. \end{cases}$$

Es ergibt sich $f(g(f(x))) = f(g'(f(x))) = f(x)$ und somit $g(f(x)) = x$ für $x \in X$ wegen der Injektivät von f. Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, d.h. es gilt Bedingung (iii).

Schließlich gelte Bedingung (iii), d.h. es sei $X = \emptyset$ oder es existiere eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Für $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$ folgt dann

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'.$$

Somit ist f injektiv, d.h. es gilt Bedingung (i).

Folglich sind auch Bedingung (i) und Bedingung (iii) äquivalent.

Insgesamt sind Bedingung (i), Bedingung (ii) und Bedingung (iii) äquivalent.

(b) Wir führen einen Ringschluss, d.h. wir zeigen, dass Bedingung (i) Bedingung (ii) impliziert, dass Bedingung (ii) Bedingung (iii) impliziert, und dass Bedingung (iii) Bedingung (i) impliziert.

Zunächst gelte Bedingung (i), d.h. f sei surjektiv. Ferner sei $y \in Y$ beliebig gegeben. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $y = f(x)$, d.h. mit $x \in f^{-1}(\{y\})$. Folglich ist $f^{-1}(\{y\})$ nicht leer. Da $y \in Y$ beliebig war, gilt also Bedingung (ii).

Als nächstes sei angenommen, dass Bedingung (ii) gilt, d.h. dass jede Faser von f mindestens ein Element enthält. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(\{y\})$. Wir wählen uns für jedes $y \in Y$ ein $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ und erhalten so eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f(g(y)) = y$ für $y \in Y$. Somit ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, d.h. es gilt Bedingung (iii).

Schließlich gelte Bedingung (iii), d.h. es existiere eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Für alle $y \in Y$ ist dann $f(g(y)) = y$, d.h. $g(y)$ ist ein Urbild von y unter f. Also ist f surjektiv, d.h. es gilt Bedingung (i).

Insgesamt sind Bedingung (i), Bedingung (ii) und Bedingung (iii) äquivalent.

(c) Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Restriktion von Abbildungen

Als nächstes werden wir kurz aufzeigen, dass Teilmengen Anlass zu Abbildungen geben.

(3.30) Definition (Restriktion)**.** Es seien eine Abbildung $f\colon X \to Y$, eine Teilmenge U von X und eine Teilmenge V von Y mit $f(U) \subseteq V$ gegeben. Die Abbildung

$$f|_U^V\colon U \to V,\ u \mapsto f(u)$$

wird *Restriktion* (oder *Einschränkung*) von f bzgl. U und V genannt.
Für $U \subseteq X$ setzen wir

$$f|_U := f|_U^Y.$$

Für $V \subseteq Y$ mit $\operatorname{Im} f \subseteq V$ setzen wir

$$f|^V := f|_X^V.$$

(3.31) Beispiel. Es sei $f\colon \{2,3,5,7,11\} \to \{0,1,2,3\}$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 3$, $5 \mapsto 1$, $7 \mapsto 3$, $11 \mapsto 3$.

(a) Es ist

$$f|_{\{3,7,11\}}^{\{0,1,3\}}\colon \{3,7,11\} \to \{0,1,3\},\ 3 \mapsto 3,\ 7 \mapsto 3,\ 11 \mapsto 3.$$

(b) Es ist

$$f|_{\{2,7,11\}}\colon \{2,7,11\} \to \{0,1,2,3\},\ 2 \mapsto 2,\ 7 \mapsto 3,\ 11 \mapsto 3.$$

(c) Es ist

$$f|^{\{1,2,3\}}\colon \{2,3,5,7,11\} \to \{1,2,3\},\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3,\ 5 \mapsto 1,\ 7 \mapsto 3,\ 11 \mapsto 3.$$

(3.32) Definition (Inklusion)**.** Es seien eine Menge X und eine Teilmenge U von X gegeben. Die Abbildung

$$\mathrm{inc} = \mathrm{inc}^U := \mathrm{id}_X|_U\colon U \to X$$

heißt *Inklusion* (oder *Inklusionsabbildung*) von U in X.

(3.33) Beispiel. Die Inklusion von $\{2,5,7\}$ in $\{2,3,5,7,11\}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{inc}\colon \{2,5,7\} \to \{2,3,5,7,11\},\ 2 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 5,\ 7 \mapsto 7.$$

Indikatorfunktion

Ein Zusammenhang zwischen Teilmengen und Abbildungen ist durch die Indikatorfunktion gegeben, welche eine Bijektion zwischen der Potenzmenge einer gegebenen Menge und den Abbildungen von dieser Menge in eine zweielementige Menge liefert, siehe Satz (3.36).

(3.34) Definition (Indikatorfunktion)**.** Es seien eine Menge X und eine Teilmenge U von X gegeben. Die Abbildung $\chi_U \colon X \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in U, \\ 0, & \text{für } x \in X \setminus U, \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* (oder *charakteristische Funktion*) von U in X.

Gemäß Konvention (3.9) fassen wir eine Indikatorfunktion ggf. auch als Familie auf und sprechen dann von einer *Indikatorfamilie* bzw. in den Spezialfällen von einem *Indikatortupel* bzw. einer *Indikatorfolge* bzw. einer *Indikatormatrix*.

(3.35) Beispiel.

(a) Die Indikatorfunktion von $\{2, 5, 7\}$ in $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ ist gegeben durch

$$\chi_{\{2,5,7\}} \colon \{2, 3, 5, 7, 11\} \to \{0, 1\},\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 0,\ 5 \mapsto 1,\ 7 \mapsto 1,\ 11 \mapsto 0.$$

(b) Das Indikatortupel von $\{2, 3, 4, 7\}$ in $[1, 7]$ ist gegeben durch

$$\chi_{\{2,3,4,7\}} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1).$$

(3.36) Satz. Es sei eine Menge X gegeben. Die Abbildungen

$$\operatorname{Pot}(X) \to \operatorname{Map}(X, \{0, 1\}),\ U \mapsto \chi_U,$$
$$\operatorname{Map}(X, \{0, 1\}) \to \operatorname{Pot}(X),\ f \mapsto \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

sind zueinander invers.

Beweis. Für den Zweck dieses Beweises sei

$$\mathrm{U}_f := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

für $f \in \operatorname{Map}(X, \{0, 1\})$. Wir wollen zeigen, dass sich die Abbildungen

$$\chi_- \colon \operatorname{Pot}(X) \to \operatorname{Map}(X, \{0, 1\}),\ U \mapsto \chi_U,$$
$$\mathrm{U}_- \colon \operatorname{Map}(X, \{0, 1\}) \to \operatorname{Pot}(X),\ f \mapsto \mathrm{U}_f$$

gegenseitig invertieren. Für $U \in \operatorname{Pot}(X)$ ist

$$(\mathrm{U}_- \circ \chi_-)(U) = \mathrm{U}_{\chi_U} = \{x \in X \mid \chi_U(x) = 1\} = \{x \in X \mid x \in U\} = U = \mathrm{id}_{\operatorname{Pot}(U)}(U).$$

Nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6) gilt folglich $\mathrm{U}_- \circ \chi_- = \mathrm{id}_{\operatorname{Pot}(U)}$. Für $f \in \operatorname{Map}(X, \{0, 1\})$ gilt umgekehrt

$$\chi_{\mathrm{U}_f}(x) = \left.\begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathrm{U}_f, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathrm{U}_f \end{cases}\right\} = \left.\begin{cases} 1, & \text{falls } f(x) = 1, \\ 0, & \text{falls } f(x) \neq 1 \end{cases}\right\} = f(x)$$

für $x \in X$, also $(\chi_- \circ \mathrm{U}_-)(f) = \chi_{\mathrm{U}_f} = f = \mathrm{id}_{\operatorname{Map}(X,\{0,1\})}(f)$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6). Somit gilt auch $\chi_- \circ \mathrm{U}_- = \mathrm{id}_{\operatorname{Map}(X,\{0,1\})}$ nach dem Gleichheitskriterium für Abbildungen (3.6). Insgesamt sind χ_- und U_- zueinander inverse Abbildungen. □

Endlichkeit und Kardinalität

Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir noch das Konzept der Kardinalität einer endlichen Menge.

(3.37) Definition (Gleichmächtigkeit)**.** Es seien Mengen X und Y gegeben. Wir sagen, dass X *gleichmächtig* zu Y ist, falls es eine Bijektion von X nach Y gibt.

(3.38) Beispiel.

(a) Die Menge $\{1, 2, 3\}$ ist gleichmächtig zur Menge $\{4, 5, 6\}$.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$.

Beweisskizze.

(a) Die Abbildung $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $x \mapsto x + 3$ ist eine Bijektion.

(b) Die Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gegeben für $x \in \mathbb{N}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ \frac{1-x}{2}, & \text{falls } x \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist eine Bijektion. □

(3.39) Definition ((un)endliche Menge)**.** Es sei eine Menge X gegeben.

(a) Wir sagen, dass X *endlich* ist, falls es ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart gibt, dass X gleichmächtig zu $[1, n]$ ist, und ansonsten, dass X *unendlich* ist.

(b) Es seien ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Menge X gegeben. Eine Bijektion von $[1, n]$ nach X wird *Abzählung* von X genannt.

(3.40) Beispiel.

(a) Die Menge $\{1, 3, 17\}$ ist endlich.

(b) Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\}$ sind unendlich.

(c) Die leere Menge ist endlich.

(d) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x = 3x^2\}$ ist endlich.

Es lässt sich zeigen, dass es für jede endliche Menge X genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart gibt, dass X gleichmächtig zu $[1, n]$ ist.

(3.41) Definition (Kardinalität)**.** Es seien eine endliche Menge X und ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart gegeben, dass X gleichmächtig zu $[1, n]$ ist. Wir nennen

$$|X| := n$$

die *Kardinalität* (oder *Mächtigkeit*) von X.

(3.42) Beispiel.

(a) Es ist $|\{1, 3, 17\}| = 3$.

(b) Es ist $|\{1, 1, 1\}| = 1$.

(c) Es ist $|\{\{1\}\}| = 1$.

(d) Es ist $|\{1, \{1\}\}| = 2$.