Sebastian Thomas

RWTH Aachen, WS 2016/17
17.10.2016–27.10.2016

Diskrete Strukturen

Vorlesungen 1 bis 3

1 Mathematische Logik

Zu Beginn geben wir einen Einblick in die mathematische Logik. Hierbei beschränken wir uns auf einige wenige Grundbegriffe, welche uns helfen sollen, ein Gefühl für die Struktur mathematischer Argumentführung zu entwickeln.
Die durch Anführungsstriche markierten Wörter in diesem Abschnitt werden nicht genauer präzisiert.

Aussagen

Wir beginnen unsere Abhandlung zur mathematischen Logik mit der sogenannten *Aussagenlogik*. Unter einer *Aussage* verstehen wir einen „(umgangssprachlichen, ggf. mit Formeln angereicherten) Ausdruck“, welcher entweder wahr oder falsch ist (Bivalenzprinzip).
Beispiele für Aussagen sind

- „Die RWTH Aachen hat eine Mensa.“ (wahr),
- „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ (wahr),
- „$2 + 3 = 6$.“ (falsch),
- „Zu jeder reellen Zahl y gibt es eine reelle Zahl x mit $y = x^2$.“ (falsch),
- „Jede gerade Zahl, welche größer als 2 ist, ist eine Summe aus zwei Primzahlen.“ (unbekannt).

Hierbei ist der letzte Ausdruck eine Aussage, da er entweder wahr oder falsch ist, auch wenn wir den Wahrheitswert dieser Aussage nicht kennen. ([1])
Keine Aussagen sind

- „Es ist kalt.“ und
- „$a^2 + b^2 = c^2$.“,

denn beim ersten Ausdruck scheitert die Zuordnung eines eindeutigen Wahrheitswertes an der mangelnden Objektivität, während dies beim zweiten Ausdruck nicht (ohne Weiteres) gelingt, da a, b und c nicht spezifiziert ([2]) sind.
Neben solchen einfachen Aussagen gibt es auch zusammengesetzte Aussagen wie etwa

> „Wenn es regnet oder schneit, dann ist die Straße nass.“.

Um diese Aussage zu analysieren, betrachten wir die Aussagen

- „Es regnet.“,
- „Es schneit.“ und
- „Die Straße ist nass.“.

[1] Die *Goldbachsche Vermutung* besagt, dass die Aussage wahr ist.
[2] Sind a, b und c zuvor spezifiziert worden, z.B. indem man a bzw. b bzw. c als Bezeichnung für 3 bzw. 4 bzw. 5 gewählt hat, so wird dieser Ausdruck zu einer (wahren) Aussage.

Unsere ursprüngliche Aussage lässt sich dann umformulieren zu

„Wenn ‚es regnet' oder ‚es schneit', dann ‚die Straße ist nass'."

Auch wenn diese Umformulierung zu einem schlechteren Deutsch führt, so lässt sich die logische Struktur der zusammengesetzten Aussage hierdurch besser erkennen. Noch deutlicher wird dies, wenn wir mit Abkürzungen arbeiten: Verwenden wir anstatt „Es regnet." das Symbol A, anstatt „Es schneit." das Symbol B und anstatt „Die Straße ist nass." das Symbol C, so erhalten wir

„Wenn (A oder B), dann C."

Ersetzen wir schließlich noch die sprachlichen Konnektoren durch Symbole, etwa „oder" durch das Symbol $\vee$ und „wenn …, dann …" durch das Symbol $\Rightarrow$, so ergibt sich der vollständig formalisierte Ausdruck

$$(A \vee B) \Rightarrow C.$$

Wenn wir nun die Aussage „Wenn du ein Smartphone oder ein Tablet besitzt, so kannst du mobil im Internet surfen." auf analoge Weise formalisieren, so landen wir bei demselben logischen Ausdruck

$$(A \vee B) \Rightarrow C.$$

Der Wahrheitswert der jeweiligen zusammengesetzten Aussagen hängt nicht von den Aussagen selbst ab, sondern nur von der logischen Struktur der zusammengesetzten Aussage sowie den Wahrheitswerten der Einzelaussagen (Extensionalitätsprinzip).

Syntax der Aussagenlogik

Nach unserem einführenden Beispiel werden wir nun die Logik beim Zusammensetzen von Aussagen systematisch studieren. Bevor wir die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen betrachten, führen wir zunächst eine formale Sprache ein. Die Wörter dieser Sprache werden uns als Ersatz für unsere konkreten Aussagen dienen.
Da wir noch nicht die Begriffe der Mengenlehre beherrschen, führen wir diese Sprache der Aussagenlogik etwas informell ein. Eine weitergehende Präzisierung wird erst in weiterführenden Veranstaltungen vorgenommen. Vgl. auch Anwendungsbeispiel (6.26).
Unter einem *Alphabet* verstehen wir eine vorgegebene Menge an „Symbolen", welche wir auch *Buchstaben* oder *Zeichen* des Alphabets nennen. Die *Wörter* einer *Sprache* entstehen dann einfach durch *Aneinanderreihung* dieser Buchstaben. Vgl. Definition (6.23) und Definition (6.25).

(1.1) Definition (aussagenlogische Formeln)**.**

(a) Das *Alphabet der Aussagenlogik* besteht aus „Symbolen" A_1, A_2, A_3, …, Symbolen 0, 1, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und Symbolen (und).

Die Symbole A_1, A_2, A_3, … werden *Aussagenvariablen* ([3]) genannt. Die Symbole 0, 1, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ werden (*aussagenlogische*) *Junktoren* genannt. Die Symbole 0 und 1 werden außerdem auch *Boolesche Konstanten* genannt. Die Symbole (und) werden *Hilfsklammern* genannt.

Das Symbol $\neg$ wird als *nicht*, das Symbol $\wedge$ als *und*, das Symbol $\vee$ als *oder*, das Symbol $\Rightarrow$ als *impliziert* und das Symbol $\Leftrightarrow$ als *äquivalent* gelesen.

Statt A_1, A_2, …, A_{26} schreiben wir oft auch A, B, … Z. ([4])

(b) Die *Sprache der Aussagenlogik* besteht aus den Wörtern über dem Alphabet der Aussagenlogik, welche in folgender Weise „sinnvoll" ([5]) zusammengesetzt sind.

- Die Aussagenvariablen sind Wörter in der Sprache der Aussagenlogik.

[3] Auch wenn diese Terminologie sehr etabliert ist, macht sie streng genommen keinen Sinn: Eine Aussagenvariable ist ein einzelnes Symbol und nimmt keine Werte aus einem (festgelegten) Bereich an. Wir können den Aussagenvariablen allerdings gewisse Werte zuordnen, siehe Definition (1.7)(a).

[4] Da wir in Beispielen oft nur eine geringe Anzahl von Aussagenvariablen betrachten, erlaubt uns diese Konvention die Vermeidung von Indizes.

[5] Was „sinnvoll" konkret bedeutet, wird (hoffentlich) in Beispiel (1.2) deutlich. Wir verzichten auf eine Präzision zugunsten einer knapperen Darstellung und verweisen auf weiterführende Veranstaltungen.

- Die Boolesche Konstanten sind Wörter in der Sprache der Aussagenlogik.
- Für jedes Wort F in der Sprache der Aussagenlogik ist $\neg F$ ein Wort in der Sprache der Aussagenlogik, wobei $\neg F$ die Konkatenation des Junktors $\neg$ und des Worts F, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, bezeichnet.
- Für Wörter F und G in der Sprache der Aussagenlogik ist $F \wedge G$ ein Wort in der Sprache der Aussagenlogik, wobei $F \wedge G$ die Konkatenation des Worts F, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, des Junktors $\wedge$, und des Worts G, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, bezeichnet.
- Für Wörter F und G in der Sprache der Aussagenlogik ist $F \vee G$ ein Wort in der Sprache der Aussagenlogik, wobei $F \vee G$ die Konkatenation des Worts F, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, des Junktors $\vee$, und des Worts G, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, bezeichnet.
- Für Wörter F und G in der Sprache der Aussagenlogik ist $F \Rightarrow G$ ein Wort in der Sprache der Aussagenlogik, wobei $F \Rightarrow G$ die Konkatenation des Worts F, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, des Junktors $\Rightarrow$, und des Worts G, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, bezeichnet.
- Für Wörter F und G in der Sprache der Aussagenlogik ist $F \Leftrightarrow G$ ein Wort in der Sprache der Aussagenlogik, wobei $F \Leftrightarrow G$ die Konkatenation des Worts F, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, des Junktors $\Leftrightarrow$, und des Worts G, nötigenfalls umschlossen mit Hilfsklammern, bezeichnet.

Die Wörter in der Sprache der Aussagenlogik werden *aussagenlogische Formeln* (oder *Aussageformen* oder *Aussageschemata*) genannt. Für eine aussagenlogische Formel F wird $\neg F$ die *Negation* von F genannt. Für aussagenlogische Formeln F und G wird $F \wedge G$ die *Konjunktion* von F und G genannt; und es werden F und G die *Konjunkte* von $F \wedge G$ genannt. Für aussagenlogische Formeln F und G wird $F \vee G$ die *Disjunktion* von F und G genannt; und es werden F und G die *Disjunkte* von $F \vee G$ genannt. Für aussagenlogische Formeln F und G wird $F \Rightarrow G$ die *Implikation* (oder die *Subjunktion* oder das *Konditional*) von F und G genannt; und es wird F die *Prämisse* von $F \Rightarrow G$ und G die *Konklusion* (oder *Conclusio*) von $F \Rightarrow G$ genannt. Für aussagenlogische Formeln F und G wird $F \Leftrightarrow G$ die *Äquivalenz* (oder das *Bikonditional*) von F und G genannt.

(1.2) Beispiel.

(a) Es ist A eine aussagenlogische Formel.

(b) Es ist 1 eine aussagenlogische Formel.

(c) Es ist $\neg B$ eine aussagenlogische Formel.

(d) Es ist $A \wedge B$ eine aussagenlogische Formel.

(e) Es ist $0 \vee 1$ eine aussagenlogische Formel.

(f) Es ist $A \vee (B \wedge (\neg C))$ eine aussagenlogische Formel.

(g) Es ist $\vee D$ keine aussagenlogische Formel.

(h) Es ist $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ keine aussagenlogische Formel.

Wie wir an Beispiel (1.2)(f) erahnen können, tauchen in längeren aussagenlogischen Formeln vergleichsweise viele Hilfsklammern auf. Da dies zu unübersichtlichen Ausdrücken führen kann, vereinbaren wir der besseren Lesbarkeit wegen:

(1.3) Konvention. Gemäß den folgenden Regeln lassen wir im Folgenden oftmals Klammern in aussagenlogischen Formeln weg:

- Es binde $\neg$ stärker als alle anderen Junktoren.
- Es binde $\wedge$ stärker als $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.
- Es binde $\vee$ stärker als $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

Nach Konvention (1.3) schreiben wir etwa $A \vee B \wedge \neg C$ statt $A \vee (B \wedge (\neg C))$, und wir schreiben $A \Rightarrow \neg B$ statt $A \Rightarrow (\neg B)$.

Durch die Sprache der Aussagenlogik können wir jede zusammengesetzte Aussage durch eine aussagenlogische Formel formalisieren, wie zu Beginn des Abschnitts angedeutet. Umgekehrt kommt man von einer aussagenlogischen Formel zu einer (zusammengesetzten) Aussage, indem man jede Aussagenvariable durch eine Aussage und $\neg$ durch „nicht“, $\wedge$ durch „und“, usw. ersetzt.
Die (formalsprachlichen) Junktoren entsprechen dabei wie folgt den (umgangssprachlichen) Konnektoren:

- Der Junktor $\neg$ entspricht „nicht“.
- Der Junktor $\wedge$ entspricht „und“.
- Der Junktor $\vee$ entspricht „oder“. ([6])
- Der Junktor $\Rightarrow$ entspricht „aus ... folgt ...“ oder „wenn ..., dann ...“ oder „nur dann ..., wenn ...“.
- Der Junktor $\Leftrightarrow$ entspricht „genau dann ..., wenn ...“, „... genau dann, wenn ...“, „... ist äquivalent zu ...“.

(1.4) Anwendungsbeispiel. Die Aussage „Es regnet.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable A. Die Aussage „Es schneit.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable B. Die Aussage „Die Straße ist nass.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable C. Die Aussage „Es regnet oder es schneit.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable D. Die Aussage „Die Straße ist trocken.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable E. Die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable F. Die Aussage „$2 + 3 = 6$.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable G. Die Aussage „Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit $x + y = 0$.“ werde modelliert durch die Aussagenvariable H.

(a) Die aussagenlogische Formel $A \vee B \Rightarrow C$ ist ein Modell für die Aussage „Wenn es regnet oder schneit, dann ist die Straße nass.“.

(b) Die aussagenlogische Formel $D \Rightarrow C$ ist ein Modell für die Aussage „Wenn es regnet oder schneit, dann ist die Straße nass.“.

(c) Die aussagenlogische Formel $A \vee B \Rightarrow E$ ist ein Modell für die Aussage „Wenn es regnet oder schneit, dann ist die Straße trocken.“.

(d) Die aussagenlogische Formel $A \vee B \Rightarrow \neg D$ ist ein Modell für die Aussage „Wenn es regnet oder schneit, dann ist die Straße trocken.“.

(e) Die aussagenlogische Formel $A \Rightarrow F$ ist ein Modell für die Aussage „Wenn es regnet, dann gibt es unendlich viele Primzahlen.“.

(f) Die aussagenlogische Formel $\neg A \wedge \neg F$ ist ein Modell für die Aussage „Es regnet nicht und es gibt endlich viele Primzahlen.“.

(g) Die aussagenlogische Formel $C \wedge G$ ist ein Modell für die Aussage „Die Straße ist nass und $2 + 3 = 6$.“.

(h) Die aussagenlogische Formel $C \wedge \neg G$ ist ein Modell für die Aussage „Die Straße ist nass und es gilt nicht $2 + 3 = 6$.“.

(i) Die aussagenlogische Formel $C \wedge \neg G$ ist ein Modell für die Aussage „Die Straße ist nass und $2 + 3 \neq 6$.“.

(j) Die aussagenlogische Formel $H \Leftrightarrow C \wedge G$ ist ein Modell für die Aussage „Genau dann gibt es zu jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl y mit $x + y = 0$, wenn die Straße nass ist und $2 + 3 = 6$ gilt.“.

(1.5) Definition (aussagenlogische Formel)**.** Es seien eine nicht-negative ganze Zahl n und eine aussagenlogische Formel F gegeben. Wir sagen, dass F eine *aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen* $A_1, \ldots, A_n$ ist, falls an keiner Stelle von F eine Aussagenvariable A_i für eine natürliche Zahl i mit $i > n$ vorkommt.

(1.6) Beispiel (aussagenlogische Formel)**.**

(a) Es ist $A \wedge B \Rightarrow C$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C.

[6] Genauer entspricht der Junktor $\vee$ einem *einschließenden oder*: Wenn wir sagen, dass eine Aussage oder eine andere gilt, so schließt dies die Möglichkeit ein, dass beide Aussagen gelten. Vgl. die Wahrheitstafel zu $A \vee B$ in Definition (1.7)(b).

(b) Es ist $A \wedge B \Rightarrow D$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C, D.

(c) Es ist $A \wedge B \Rightarrow C$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C, D.

(d) Es ist $A \wedge B \Rightarrow D$ keine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C.

Beweis.

(a) In der aussagenlogischen Form $A \wedge B \Rightarrow C$ kommt an keiner Stelle eine Aussagenvariable ungleich A, B oder C vor. Somit ist $A \wedge B \Rightarrow C$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C.

(b) In der aussagenlogischen Form $A \wedge B \Rightarrow D$ kommt an keiner Stelle eine Aussagenvariable ungleich A, B, C oder D vor. Somit ist $A \wedge B \Rightarrow D$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C, D.

(c) In der aussagenlogischen Form $A \wedge B \Rightarrow C$ kommt an keiner Stelle eine Aussagenvariable ungleich A, B, C oder D vor. Somit ist $A \wedge B \Rightarrow C$ eine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C, D.

(d) In der aussagenlogischen Form $A \wedge B \Rightarrow D$ kommt die Aussagenvariable D und damit eine Aussagenvariable ungleich A, B oder C vor. Somit ist $A \wedge B \Rightarrow D$ keine aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A, B, C. □

Semantik der Aussagenlogik

Oftmals sind wir lediglich an der logischen Struktur einer zusammengesetzten Aussage interessiert. Aus logischen Gesichtspunkten ist aber nicht der konkrete Inhalt einer zusammengesetzten Aussage von Belang, sondern nur deren Wahrheitswert. Dieser lässt sich allein aus der zugehörigen aussagenlogischen Formel gemäß folgenden Regeln ableiten.

(1.7) Definition (Wahrheitswert)**.** Es sei eine nicht-negative ganze Zahl n gegeben.

(a) Eine *Interpretation* (oder *Belegung*) der Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ ist eine „eindeutige Zuordnung“ von entweder 0 (*falsch*) oder 1 (*wahr*) zur Aussagenvariablen A_j für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$. ([7])

Es sei eine Interpretation der Aussagenvariablen A_1, …, A_n gegeben. Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ nennen wir den A_j zugeordneten Wert v_j den *Wahrheitswert* von A_j unter der Interpretation. Ferner notieren wir die gegebene Interpretation als $v_1 \dots v_n$.

(b) Es sei eine Interpretation der Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Der *Wahrheitswert* einer aussagenlogischen Formel in den Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ ergebe sich rekursiv gemäß folgender *Wahrheitstafeln.*

0-*stellige Junktoren.*

0
0

1
1

1-*stellige Junktoren.*

F	$\neg F$
1	0
0	1

2-*stellige Junktoren.*

F	G	$F \wedge G$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

F	G	$F \vee G$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

F	G	$F \Rightarrow G$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

F	G	$F \Leftrightarrow G$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Es sei eine nicht-negative ganze Zahl n gegeben. Durch eine Interpretation der Aussagenvariablen A_1, …, A_n geben wir uns also Wahrheitswerte für die Aussagenvariablen A_1, …, A_n vor und erhalten einen eindeutigen Wahrheitswert für jede aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen A_1, …, A_n. Dieser hängt lediglich von den Aussagenvariablen ab, welche in der aussagenlogischen Formel tatsächlich vorkommen.

[7] Im Fall $n = 0$ ordnet eine Interpretation also *keiner* Aussagenvariablen den Wert 0 oder 1 zu.

(1.8) Beispiel.

(a) Es ist 101 eine Interpretation der Aussagenvariablen A, B, C.

(b) Der Wahrheitswert von $A \vee B \Rightarrow C$ unter der Interpretation 101 ist 1.

Beweis.

(b) Unter der Interpretation 101 ist der Wahrheitswert von A gleich 1 und der Wahrheitswert von B gleich 0, also ist der Wahrheitswert von $A \vee B$ gleich 1. Ferner ist der Wahrheitswert von C gleich 1 und damit auch der Wahrheitswert von $A \vee B \Rightarrow C$ gleich 1. □

(1.9) Beispiel. Die Interpretationen der Aussagenvariablen A, B, C sind gegeben durch

$$111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000.$$

Der Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel bzgl. *aller* möglichen Interpretationen lässt sich am Besten kompakt mit Hilfe einer sogenannten *Wahrheitstafel* angeben. Eine solche Tabelle ist stets wie folgt aufgebaut. Die Spalten links des Doppelstrichs sind mit Aussagenvariablen beschriftet, wobei jede in der betrachteten aussagenlogischen Formel vorkommende Aussagenvariable auch eine solche Spalte beschriften muss. Die Spalte rechts vom Doppelstrich wird mit der betrachteten aussagenlogischen Formel beschriftet. In den Spalten links stehen die Werte der jeweiligen Interpretation (welche mit den Wahrheitswerten der Aussagenvariablen übereinstimmen), wobei alle möglichen Interpretationen durchlaufen werden. Rechts steht der sich jeweils resultierende Wahrheitswert der aussagenlogischen Formel.
Durch die Betrachtung mehrerer rechter Seiten lassen sich auch die Wahrheitswerte komplexerer aussagenlogischer Formeln schrittweise ermitteln, indem man zunächst Teilformeln betrachtet, siehe den Beweis zu Beispiel (1.10)(a). Sofern wir mehrere aussagenlogische Formeln simultan zu betrachten haben, welche von den gleichen Aussagenvariablen abhängen, fassen wir mehrere Wahrheitstafeln oftmals zu einer einzigen Wahrheitstafel zusammen. Hierbei schreiben wir die Aussagenvariablen links des Doppelstrichs nur einmal, während wir die betrachteten aussagenlogischen Formeln zusammen mit ihren jeweiligen Teilformeln durch Doppelstriche voneinander abgrenzen, siehe (den Beweis zu) Beispiel (1.10)(b).

(1.10) Beispiel.

(a) Die Wahrheitswerte der aussagenlogischen Formel $A \vee B \Rightarrow A \wedge C$ sind wie folgt gegeben.

A	B	C	$A \vee B \Rightarrow A \wedge C$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(b) Die Wahrheitswerte der aussagenlogischen Formeln $A \vee B \Leftrightarrow B$ und $A \wedge \neg B$ sind wie folgt gegeben.

A	B	$A \vee B \Leftrightarrow B$	$A \wedge \neg B$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Beweis.

(a) Wir erstellen eine Wahrheitstafel, in welcher wir die Wahrheitswerte der Teilformeln von $A \vee B \Rightarrow A \wedge C$ rekursiv berechnen:

A	B	C	$A \vee B$	$A \wedge C$	$A \vee B \Rightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

(b) Wir erstellen eine Wahrheitstafel, in welcher wir die Wahrheitswerte der Teilformeln von $A \vee B \Leftrightarrow B$ und $A \wedge \neg B$ jeweils rekursiv berechnen:

A	B	$A \vee B$	$A \vee B \Leftrightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0

□

Tautologien und Kontradiktionen

Für aussagenlogische Formeln, welche unabhängig von der Interpretation stets denselben Wahrheitswert haben, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

(1.11) Definition (Tautologie, Kontradiktion)**.**

(a) Eine aussagenlogische Formel heißt *allgemeingültig* (oder eine *Tautologie*), wenn sie unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 1 hat.

(b) Eine aussagenlogische Formel heißt *unerfüllbar* (oder eine *Kontradiktion* oder ein *Widerspruch*), wenn sie unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 0 hat.

Eine aussagenlogische Formel ist also genau dann eine Tautologie, wenn jede Ersetzung der Aussagenvariablen durch Aussagen stets eine wahre Aussage liefert, und genau dann eine Kontradiktion, wenn jede Ersetzung der Aussagenvariablen durch Aussagen eine falsche Aussage ergibt.

(1.12) Beispiel (tertium non datur, principium contradictionis)**.**

(a) Die aussagenlogische Formel $A \vee \neg A$ ist eine Tautologie.

(b) Die aussagenlogische Formel $A \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion.

Beweis.

(a) Wir erstellen eine Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

Da der Wahrheitswert von $A \vee \neg A$ unter jeder Interpretation gleich 1 ist, bildet diese aussagenlogische Formel eine Tautologie.

(b) Wir erstellen eine Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Da der Wahrheitswert von $A \wedge \neg A$ unter jeder Interpretation gleich 0 ist, bildet diese aussagenlogische Formel eine Kontradiktion. □

(1.13) Bemerkung. Es sei eine aussagenlogische Formel F gegeben. Genau dann ist F eine Tautologie, wenn $\neg F$ eine Kontradiktion ist.

Beweis. Genau dann ist die aussagenlogische Formel F eine Tautologie, wenn sie unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 1 hat. Dies ist aber äquivalent zur Tatsache, dass $\neg F$ unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 0 hat, also dass $\neg F$ eine Kontradiktion ist. □

Logische Äquivalenz

Im Folgenden werden wir oftmals eine zusammengesetzte Aussage in eine andere umformen wollen ohne hierbei den Wahrheitswert zu verändern. Hierzu werden wir uns nun die logischen Grundlagen erarbeiten. Eine solche Umformung können wir nämlich auch ohne Kenntnis des Wahrheitswerts machen, sofern wir die zusammengesetzte Aussage durch eine zusammengesetzte Aussage ersetzen, welche bei *jeder* möglichen Kombination von Wahrheitswerten der Einzelaussagen denselben Wahrheitswert für die umformulierte zusammengesetzte Aussage liefert wie für die ursprüngliche zusammengesetzte Aussage.

(1.14) Definition (logische Äquivalenz)**.** Es seien aussagenlogische Formeln F und G gegeben. Wir sagen, dass F *logisch äquivalent* (oder *semantisch äquivalent*) zu G ist, geschrieben $F \equiv G$, falls die Wahrheitswerte von F und G unter jeder Interpretation gleich sind.

(1.15) Beispiel. Es gilt $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

Beweis. Wir erstellen eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Da die Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ unter jeder Interpretation übereinstimmen, gilt $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. □

Wir haben den Begriff der logischen Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln und den Begriff der Äquivalenz als Junktor. Diese sprachliche Übereinstimmung ist nicht zufällig gewählt, wie folgendes Lemma zeigt:

(1.16) Proposition. Es seien aussagenlogische Formeln F und G gegeben. Genau dann gilt $F \equiv G$, wenn $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie ist.

Beweis. Genau dann gilt $F \equiv G$, wenn F und G unter jeder Interpretation den gleichen Wahrheitswert haben. Dies ist jedoch dazu äquivalent, dass der Wahrheitswert von $F \Leftrightarrow G$ unter jeder Interpretation gleich 1 ist, also dazu, dass $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie ist. □

(1.17) Bemerkung. Es sei eine aussagenlogische Formel F gegeben.

(a) Genau dann ist F eine Tautologie, wenn $F \equiv 1$ ist.

(b) Genau dann ist F eine Kontradiktion, wenn $F \equiv 0$ ist.

Beweis.

(a) Genau dann ist die aussagenlogische Formel F eine Tautologie, wenn sie unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 1 hat. Da 1 unter jeder Interpretation den Wahrheitswert 1 hat, ist dies also dazu äquivalent, dass die Wahrheitswerte von F und 1 für jede Interpretation gleich sind, also dazu, dass $F \equiv 1$ ist.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

Wir halten einige oft benutzte logische Äquivalenzen fest:

(1.18) Beispiel.

(a) (i) *Assoziativität der Konjunktion.* Es gilt $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
    (ii) *Assoziativität der Disjunktion.* Es gilt $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.

(b) (i) *Neutrales Element der Konjunktion.* Es gilt $A \wedge 1 \equiv A$.
    (ii) *Neutrales Element der Disjunktion.* Es gilt $A \vee 0 \equiv A$.

(c) (i) *Kommutativität der Konjunktion.* Es gilt $A \wedge B \equiv B \wedge A$.
    (ii) *Kommutativität der Disjunktion.* Es gilt $A \vee B \equiv B \vee A$.

(d) (i) *Idempotenz der Konjunktion.* Es gilt $A \wedge A \equiv A$.

(ii) *Idempotenz der Disjunktion.* Es gilt $A \vee A \equiv A$.

(e) (i) *Komplemente der Konjunktion.* Es gilt $A \wedge \neg A \equiv 0$.

(ii) *Komplemente der Disjunktion.* Es gilt $A \vee \neg A \equiv 1$.

(f) (i) *Distributivität.* Es gilt $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(ii) *Distributivität.* Es gilt $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

(g) (i) *Absorption.* Es gilt $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.

(ii) *Absorption.* Es gilt $A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

(1.19) Konvention. Wegen der Assoziativität der Konjunktion und der Disjunktion kommt es bei iterierter Bildung bis auf logische Äquivalenz nicht auf die Klammerung an. Im Regelfall lassen wir daher die Klammern im Folgenden weg und schreiben $A \wedge B \wedge C$ statt $A \wedge (B \wedge C)$, usw.

(1.20) Beispiel. Es gilt $\neg(\neg A) \equiv A$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

(1.21) Beispiel (De Morgansche Gesetze)**.**

(a) Es gilt $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

(b) Es gilt $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Semantische Implikation

Die logische Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln F und G ist äquivalent zur Tatsache, dass $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie ist, siehe Proposition (1.16). Wir können nun einen analogen Begriff für die Implikation definieren, welcher in Beweisen beim Schließen von gegebenen Aussagen auf neue Aussagen benutzt wird.

(1.22) Definition (semantische Implikation)**.** Es seien aussagenlogische Formeln F und G gegeben. Wir sagen, dass G *semantisch* durch F *impliziert* wird (oder dass G *semantisch* aus F *folgt*), geschrieben $F \models G$, falls unter jeder Interpretation, unter der F den Wahrheitswert 1 annimmt, auch G den Wahrheitswert 1 annimmt.

(1.23) Beispiel. Es gilt $A \wedge B \models A \vee C$.

Beweis. Wir erstellen eine Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Da unter jeder Interpretation, unter der $A \wedge B$ den Wahrheitswert 1 annimmt, auch $A \vee C$ den Wahrheitswert 1 annimmt, gilt $A \wedge B \models A \vee C$. □

(1.24) Proposition. Es seien aussagenlogische Formeln F und G gegeben. Genau dann gilt $F \models G$, wenn $F \Rightarrow G$ eine Tautologie ist.

Beweis. Zunächst gelte $F \models G$, d.h. unter jeder Interpretation, unter der F den Wahrheitswert 1 annimmt, nehme auch G den Wahrheitswert 1 an. Ferner sei eine beliebige Interpretation gegeben. Wenn F unter dieser den Wahrheitswert 1 annimmt, so nach unserer Annahme auch G und folglich auch $F \Rightarrow G$. Wenn hingegen F den Wahrheitswert 0 annimmt, so hat $F \Rightarrow G$ ebenfalls den Wahrheitswert 1, unabhängig vom Wahrheitswert von G. Also hat $F \Rightarrow G$ in jedem Fall den Wahrheitswert 1, d.h. $F \Rightarrow G$ ist eine Tautologie.
Nun sei umgekehrt $F \Rightarrow G$ eine Tautologie, d.h. unter jeder Interpretation habe $F \Rightarrow G$ den Wahrheitswert 1. Unter jeder Interpretation, unter der F den Wahrheitswert 1 annimmt, nimmt G dann nicht den Wahrheitswert 0 an, muss also notwendigerweise ebenfalls den Wahrheitswert 1 annehmen, d.h. es gilt $F \models G$. □

(1.25) Proposition. Es seien aussagenlogische Formeln F und G gegeben. Genau dann gilt $F \equiv G$, wenn $F \models G$ und $G \models F$ gilt.

Beweis. Zunächst gelte $F \equiv G$, d.h. die Wahrheitswerte von F und G seien unter jeder Interpretation gleich. Dann nimmt G unter jeder Interpretation, unter der F den Wahrheitswert 1 annimmt, ebenfalls den Wert 1 an, d.h. es gilt $F \models G$, und umgekehrt nimmt F unter jeder Interpretation, unter der G den Wahrheitswert 1 annimmt, ebenfalls den Wert 1 an, d.h. es gilt $G \models F$.
Nun gelte umgekehrt $F \models G$ und $G \models F$. Um zu zeigen, dass $F \equiv G$ gilt, sei eine beliebige Interpretation gegeben. Wenn F unter dieser den Wahrheitswert 1 annimmt, so wegen $F \models G$ auch G. Nimmt hingegen F unter dieser den Wahrheitswert 0 an, so nimmt G wegen $G \models F$ nicht den Wahrheitswert 1 an, also den Wahrheitswert 0. Also haben F und G unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert, d.h. es gilt $F \equiv G$. □

Direkter Beweis

Im Folgenden werden wir einige Strategien betrachten, um eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu beweisen. (De facto lässt sich jede Aussage der Form C in eine Aussage dieser Form umformulieren, es ist C logisch äquivalent zu $1 \Rightarrow C$.)
Wir beginnen mit der Strategie des *direkten Beweises*. Um zu zeigen, dass eine gegebene Aussage der Form $A \Rightarrow B$ gilt, nehmen wir oft an, dass die Aussage der Form A gilt, und zeigen unter dieser Annahme, dass auch die Aussage der Form B gilt. Dieses Vorgehen lässt sich an Hand der Wahrheitstafel der Implikation begründen:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ist die Aussage der Form A falsch, so ist die Aussage der Form $A \Rightarrow B$ unabhängig vom Wahrheitswert der Aussage der Form B wahr. Können wir also unter der Annahme, dass die Aussage der Form A wahr ist, zeigen, dass auch die Aussage der Form B wahr ist, so wissen wir, dass unabhängig vom Wahrheitswert der Aussage der Form A in jedem Fall die Aussage der Form $A \Rightarrow B$ wahr ist.
Wollen wir umgekehrt die Aussage der Form $A \Rightarrow B$ widerlegen, d.h. wollen wir zeigen, dass diese Aussage falsch ist, so müssen wir unter der Annahme, dass die Aussage der Form A gilt, zeigen, dass die Aussage der Form B falsch ist.
Der Beweis einer Aussage der Form $A \Rightarrow B$ geschieht durch eine endliche Folge von logischen Schlussfolgerungen (etwa durch Anwenden von Definitionen oder bereits bewiesenen Aussagen, siehe Beispiel (1.27)). Hierbei entspricht die Aussage der Form A der Prämisse der ersten Implikation und die Aussage der Form B der Konklusion der letzten Implikation in dieser Folge. Wir rechtfertigen das „Zusammensetzen logischer Schlussfolgerungen" wie folgt.

(1.26) Beispiel. Es gilt $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \models (A \Rightarrow C)$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Als nächstes betrachten wir einige Typen logischer Schlussfolgerungen. Wir beginnen mit dem Anwenden bereits bewiesener Aussagen der Form einer Implikation:

(1.27) Beispiel (modus ponens)**.** Es gilt $A \wedge (A \Rightarrow B) \models B$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Es sei eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ bereits bewiesen, d.h. deren Gültigkeit sei bereits gezeigt. Aus der Gültigkeit der Aussage der Form A folgt dann die Gültigkeit der Aussage der Form $A \wedge (A \Rightarrow B)$. Da aber B nach dem modus ponens (1.27) semantisch aus $A \wedge (A \Rightarrow B)$ folgt, impliziert die Gültigkeit der Aussage der Form $A \wedge (A \Rightarrow B)$ bereits die Gültigkeit der Aussage der Form B. Somit können wir also aus der Gültigkeit der Aussage A die Gültigkeit der Aussage B schließen.
Dies folgt auch direkt aus der Wahrheitstafel der Implikation, denn die Ungültigkeit der Aussage der Form B hätte die Ungültigkeit der Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zur Folge. Letztere haben wir durch den Beweis der Aussage der Form $A \Rightarrow B$ aber bereits widerlegt.
Die nächste in der Praxis vorkommende logische Schlussfolgerung ist das Spezialisieren: Wenn eine Aussage der Form $A \wedge B$ gilt, so folgt hieraus insbesondere die Gültigkeit der Aussage der Form A.
Wenn wir hingegen wissen, dass eine Aussage der Form A gilt, so wissen wir auch, dass für jede Aussage der Form B die Aussage der Form $A \vee B$ gilt.

(1.28) Beispiel.

(a) Es gilt $A \wedge B \models A$.

(b) Es gilt $A \models A \vee B$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Alternativer Beweis von Beispiel (1.23). Nach Beispiel (1.28)(a) gilt $A \wedge B \models A$ und nach (einem Analogon zu) Beispiel (1.28)(b) gilt $A \models A \vee C$. Folglich gilt auch $A \wedge B \models A \vee C$. □

Um eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kommt es in der Praxis oft vor, dass wir mehrere bereits bewiesene Aussagen anwenden müssen. Hierzu ist es oftmals nötig, die Gültigkeit der Aussage der Form A für mehr als einmal anzuwenden. In einer Folge von Implikationen können wir aber zunächst nicht ohne weiteres davon ausgehen, dass wir die Aussage der Form A in einem Zwischenschritt noch zur Verfügung haben. Dass ein „Mitschleppen“ bereits angewandter Aussagen trotzdem möglich ist, wird wie folgt begründet:

(1.29) Beispiel. Es gilt $A \Rightarrow B \equiv A \Rightarrow A \wedge B$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

An Hand eines Beispiels wollen wir nun einen direkten Beweis einer Aussage der Form $A \Rightarrow B$ durchführen. Um dies zu machen, werden wir annehmen, dass die Aussage der Form A gilt und werden dann zeigen, dass aus dieser Annahme die Gültigkeit der Aussage der Form B folgt.
Bevor wir uns dem Beispiel widmen, merken wir an, dass der Beweis jeder Aussage auf Definitionen oder bereits bewiesene Aussagen zurückgeführt wird. Da das Beispiel eine Aussage über gerade Zahlen macht, erinnern wir daher an deren Definition: Eine ganze Zahl n heißt *gerade*, falls es eine ganze Zahl k mit $n = 2k$ gibt.

(1.30) Anwendungsbeispiel. Für jede gerade ganze Zahl n ist auch n^2 gerade.

Beweis. Es sei eine ganze Zahl n gegeben. Wir zeigen: Wenn n gerade ist, dann ist auch n^2 gerade.
Wenn n gerade ist, dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n = 2k$. Wenn es eine ganze Zahl k mit $n = 2k$ gibt, dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n^2 = (2k)^2$. Wenn es eine ganze Zahl k mit $n^2 = (2k)^2$ gibt, dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n^2 = 4k^2$. Wenn es eine ganze Zahl k mit $n^2 = 4k^2$ gibt, dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n^2 = 2(2k^2)$. Wenn es eine ganze Zahl k mit $n^2 = 2(2k^2)$ gibt, dann ist n^2 gerade.
Insgesamt gilt ([8]): Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade. □

Im Beweis zu Anwendungsbeispiel (1.30) ist die logische Struktur sehr gut ersichtlich. Dies führt leider zu einem länglichen, schwer zu erfassenden Text. Üblicherweise würde man den Beweis wie folgt verkürzen:

Beweis. Es sei eine gerade ganze Zahl n gegeben. Dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n = 2k$. Es folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Somit ist auch n^2 gerade. □

Der zweite gegebene Beweis von (1.30) unterscheidet sich nur unwesentlich vom ersten, da die zu Grunde liegende logische Struktur die gleiche ist – er wird lediglich durch sprachliche Konventionen lesbarer gestaltet.

[8] In diesem Schritt benutzen wir die uns verinnerlichte logische Tatsache des „Zusammensetzens logischer Schlussfolgerungen“, deren formale Entsprechung sich in Beispiel (1.26) findet.

Kontraposition

Als nächstes betrachten wir das Beweisverfahren des *Umkehrschlusses*, auch *Kontraposition* genannt. Anstatt eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir auch die Aussage der Form $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen:

(1.31) Beispiel (Kontraposition)**.** Es gilt $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Wir verdeutlichen die Strategie der Kontraposition wieder an einem Beispiel.

(1.32) Anwendungsbeispiel. Für jede ganze Zahl n gilt: Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis. Es sei eine ganze Zahl n gegeben. Wir zeigen: Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.
Es sei also n ungerade. Dann gibt es eine ganze Zahl k mit $n = 2k + 1$. Es folgt

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Somit ist auch n^2 ungerade.
Im Umkehrschluss folgt: Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade. □

Indirekter Beweis

Eine weitere Beweisstrategie ist der sogenannte *indirekte Beweis*. Anstatt der Gültigkeit einer Aussage der Form $A \Rightarrow B$ beweist man hierbei die Ungültigkeit der Aussage der Form $A \wedge \neg B$, was der Gültigkeit der Aussage der Form $\neg(A \wedge \neg B)$ entspricht:

(1.33) Beispiel (indirekter Beweis)**.** Es gilt $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$.

Beweis. Nach Beispiel (1.15), Beispiel (1.20) und dem De Morganschen Gesetz (1.21)(b) gilt

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg A \vee \neg(\neg B) \equiv \neg(A \wedge \neg B).$$ □

Auch das Prinzip des indirekten Beweises verdeutlichen wir wieder durch ein Beispiel.

(1.34) Anwendungsbeispiel. Jede reelle Zahl x mit $x^3 + x = 1$ ist irrational.

Beweis. Es sei eine reelle Zahl x gegeben. Wir zeigen: Wenn $x^3 + x = 1$ ist, dann ist x irrational.
Angenommen, es gilt $x^3 + x = 1$ und x ist rational. Dann gibt es teilerfremde ([9]) ganze Zahlen a und b mit $x = \frac{a}{b}$.
Es folgt

$$1 = x^3 + x = (\frac{a}{b})^3 + \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b}$$

und damit $b^3 = a^3 + ab^2$.
Wäre nun b ungerade, so wäre einerseits b^3 ungerade ([10]) und andererseits $a^3 + ab^2$ gerade (unabhängig davon, ob a gerade oder ungerade ist). Da $b^3 = a^3 + ab^2$ nicht gleichzeitig ungerade und gerade sein kann, ist somit b gerade. Wäre nun weiter a ungerade, so wäre b^3 gerade und $a^3 + ab^2$ ungerade. Da $b^3 = a^3 + ab^2$ nicht gleichzeitig gerade und ungerade sein kann, ist somit auch a gerade. Damit sind aber a und b beide gerade, also durch 2 teilbar im Widerspruch zu ihrer Teilerfremdheit.
Folglich war unsere Annahme, dass $x^3 + x = 1$ und x rational ist, falsch. Wenn also $x^3 + x = 1$ gilt, so muss notwendigerweise x irrational sein. □

Die Gültigkeit einer Aussage der Form A können wir ebenfalls indirekt zeigen. Hierzu zeigen wir die Gültigkeit der Aussage der Form $\neg A \Rightarrow 0$, d.h. wir führen die Annahme, dass die Aussage der Form $\neg A$ richtig ist, also dass die Aussage der Form A falsch ist, zu einem Widerspruch. Hierbei wird die Aussage der Form 0, also die unter jeder Interpretation stets falsche Aussage, in der Regel durch den Widerspruch $B \wedge \neg B$ für eine beliebige Aussage der Form B gezeigt, d.h. man zeigt die logisch äquivalente Aussage der Form $\neg A \Rightarrow B \wedge \neg B$, vgl. Beispiel (1.18)(e)(i).

(1.35) Beispiel. Es gilt $A \equiv \neg A \Rightarrow 0$.

Beweis. Nach Beispiel (1.15), Beispiel (1.20) und Beispiel (1.18)(b)(ii) gilt

$$\neg A \Rightarrow 0 \equiv \neg(\neg A) \vee 0 \equiv A \vee 0 \equiv A.$$ □

[9] Die Teilerfremdheit bedeutet, dass der Bruch gekürzt ist.
[10] An dieser Stelle und weiteren Stellen im Beweis benutzen wir implizit zu Anwendungsbeispiel (1.30) analoge Aussagen.

Beweis einer Äquivalenz

Um eine Äquivalenz zweier Aussagen, also eine Aussage der Form $A \Leftrightarrow B$, zu zeigen, zerlegen wir diese oft in zwei Implikationen:

(1.36) Beispiel. Es gilt $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Beweis. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

(1.37) Anwendungsbeispiel. Für jede ganze Zahl n gilt: Genau dann ist n^2 gerade, wenn n gerade ist.

Beweis. Es sei eine ganze Zahl n gegeben. Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade nach Anwendungsbeispiel (1.32). Umgekehrt, wenn n gerade ist, dann ist auch n^2 gerade nach Anwendungsbeispiel (1.30). Insgesamt ist n^2 genau dann gerade, wenn n gerade ist. □

Disjunktive und konjunktive Normalform

Als nächstes wollen wir zeigen, dass jede potentielle Wahrheitstafel im folgenden Sinn als Wahrheitstafel einer aussagenlogischen Formel vorkommt.

(1.38) Definition (potentielle Wahrheitstafel)**.** Es sei eine nicht-negative ganze Zahl n gegeben. Eine *potentielle Wahrheitstafel* für die Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ ist eine „eindeutige Zuordnung“ von entweder 0 oder 1 zu jeder Interpretation der Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$.

Wir können potentielle Wahrheitstafeln wie Wahrheitstafeln von aussagenlogischen Formeln verbildlichen; der einzige Unterschied ist das Fehlen einer aussagenlogischen Formel, zu denen die Wahrheitswerte auf der rechten Seite gehören:

(1.39) Beispiel. Es ist

A	B	C	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

eine potentielle Wahrheitstafel für die Aussagenvariablen A, B, C.

Wir werden sehen, dass wir potentielle Wahrheitstafeln sogar durch aussagenlogische Formeln in einer speziellen Normalform realisieren können, genau genommen sogar auf zwei verschiedene zueinander duale Weisen. Zunächst definieren wir die auftauchenden Normalformen:

(1.40) Definition (disjunktive Normalform, konjunktive Normalform)**.** Es seien eine nicht-negative ganze Zahl n und eine aussagenlogische Formel F in den Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ gegeben.

(a) Wir sagen, dass F in (*kanonischer*) *disjunktiver Normalform* bzgl. $A_1, \ldots, A_n$ ist, wenn es eine nicht-negative ganze Zahl k und verschiedene ([11]) aussagenlogische Formeln $F_1, \ldots, F_k$ derart gibt, dass

$$F = F_1 \vee \ldots \vee F_k,$$

und so, dass für alle natürlichen Zahlen i mit $1 \leq i \leq n$ stets

$$F_i = X_{i,1} \wedge \ldots \wedge X_{i,n}$$

gilt, wobei $X_{i,j} = A_j$ oder $X_{i,j} = \neg A_j$ für alle natürlichen Zahlen j mit $1 \leq j \leq n$. ([12])

[11]„Objekte“ $x_1, \ldots, x_k$ werden *verschieden* genannt, falls für alle natürlichen Zahlen i und j mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ stets $x_i \neq x_j$ gilt, oder äquivalent ausgedrückt, falls für alle natürlichen Zahlen i und j mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ aus $x_i = x_j$ bereits $i = j$ folgt.

[12]Im Fall $k = 0$ ist F eine Disjunktion über 0 Disjunkte, eine sogenannte *leere Disjunktion*, was per Konvention der Booleschen Konstanten 0 entspricht.

(b) Wir sagen, dass F in (*kanonischer*) *konjunktiver Normalform* bzgl. $A_1, \ldots, A_n$ ist, wenn es eine nicht-negative ganze Zahl k und verschiedene aussagenlogische Formeln $F_1, \ldots, F_k$ derart gibt, dass

$$F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_k,$$

und so, dass für alle natürlichen Zahlen i mit $1 \leq i \leq n$ stets

$$F_i = X_{i,1} \vee \ldots \vee X_{i,n}$$

gilt, wobei $X_{i,j} = A_j$ oder $X_{i,j} = \neg A_j$ für alle natürlichen Zahlen j mit $1 \leq j \leq n$. ([13])

(1.41) Beispiel.

(a) Die aussagenlogische Formel

$$A \wedge B \vee A \wedge \neg B$$

ist in disjunktiver Normalform.

(b) Die aussagenlogische Formel

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

ist in konjunktiver Normalform.

Wir leiten nun eine Methode her, mit der sich zu einer gegebenen potentiellen Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform konstruieren lässt, welche die gegebene potentielle Wahrheitstafel als Wahrheitstafel hat. Die Methode beruht auf der Beobachtung, dass sich die Wahrheitstafel einer aussagenlogischen Formel in disjunktiver Normalform sehr leicht aus der Gestalt der aussagenlogischen Formel bestimmen lässt. Beispielsweise nimmt die aussagenlogische Formel $A \wedge B \vee A \wedge \neg B$ aus Beispiel (1.41)(a) genau dann den Wahrheitswert 1 an, wenn $A \wedge B$ den Wahrheitswert 1 oder $A \wedge \neg B$ den Wahrheitswert 1 annimmt. Ersteres ist genau dann der Fall, wenn A den Wahrheitswert 1 annimmt und B den Wahrheitswert 1 annimmt, und zweiteres ist genau dann der Fall, wenn A den Wahrheitswert 1 und B nicht den Wahrheitswert 0 annimmt.
Wir werden gleich zum ersten Mal das Symbol „:=" sehen, welches bei Definitionen von „mathematischen Objekten" verwendet wird. Wenn ein *gegebener Ausdruck* y als x *definiert* werden soll, so schreibt man $x := y$; man gibt also dem „bekannten" Ausdruck y den neuen Namen x.

(1.42) Definition (zu einer Interpretation zugehöriges Disjunkt/Konjunkt)**.** Es seien eine nicht-negative ganze Zahl n und eine Interpretation $v_1 \ldots v_n$ der Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ gegeben.

(a) Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ setzen wir

$$X_j := \begin{cases} A_j, & \text{falls } v_j = 1, \\ \neg A_j, & \text{falls } v_j = 0. \end{cases}$$

Die aussagenlogische Formel

$$\operatorname{Dis}(v_1 \ldots v_n) := X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$$

heißt das zu $v_1 \ldots v_n$ gehörige *Disjunkt.*

(b) Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ setzen wir

$$X_j := \begin{cases} \neg A_j, & \text{falls } v_j = 1, \\ A_j, & \text{falls } v_j = 0. \end{cases}$$

Die aussagenlogische Formel

$$\operatorname{Con}(v_1 \ldots v_n) := X_1 \vee \ldots \vee X_n$$

heißt das zu $v_1 \ldots v_n$ gehörige *Konjunkt.*

[13] Im Fall $k = 0$ ist F eine Konjunktion über 0 Konjunkte, eine sogenannte *leere Konjunktion*, was per Konvention der Booleschen Konstanten 1 entspricht.

(1.43) Beispiel.

(a) Das zur Interpretation 1011 der Aussagenvariablen A, B, C, D gehörige Disjunkt ist

$$\mathrm{Dis}(1011) = A \wedge \neg B \wedge C \wedge D.$$

(b) Das zur Interpretation 1011 der Aussagenvariablen A, B, C, D gehörige Konjunkt ist

$$\mathrm{Con}(1011) = \neg A \vee B \vee \neg C \vee \neg D.$$

(1.44) Bemerkung. Es seien eine nicht-negative ganze Zahl n und Interpretationen $v_1 \dots v_n$ und $w_1 \dots w_n$ der Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

(a) Der Wahrheitswert von $\mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n)$ für die Interpretation $v_1 \dots v_n$ ist gleich 1.

(b) Der Wahrheitswert von $\mathrm{Con}(w_1 \dots w_n)$ für die Interpretation $v_1 \dots v_n$ ist gleich 0.

(c) Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ ist $w_j = v_j$.

Beweis. Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ setzen wir

$$X_j := \begin{cases} A_j, & \text{falls } w_j = 1, \\ \neg A_j, & \text{falls } w_j = 0, \end{cases}$$

so dass $\mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n) = X_1 \wedge \dots \wedge X_n$ gilt. Nun ist aber genau dann der Wahrheitswert von $\mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n)$ unter der Interpretation $v_1 \dots v_n$ gleich 1, wenn der Wahrheitswert von X_j für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ gleich 1 ist, also genau dann, wenn $w_j = v_j$ für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ gilt. Dies zeigt die Äquivalenz von Bedingung (a) und Bedingung (c).
Die Äquivalenz von Bedingung (b) und Bedingung (c) lässt sich dual zeigen.
Insgesamt sind Bedingung (a), Bedingung (b) und Bedingung (c) äquivalent. □

Die nachfolgende Proposition gibt an, wie wir zu den Werten einer potentiellen Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel in disjunktiver bzw. konjunktiver Normalform erstellen können.

(1.45) Proposition. Es seien eine nicht-negative ganze Zahl n und eine potentielle Wahrheitstafel für die Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ gegeben.

(a) Es sei F eine Disjunktion (in beliebiger Reihenfolge) über all diejenigen Disjunkte, welche zu Interpretationen der Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ gehören, die in der potentiellen Wahrheitstafel den Wahrheitswert 1 zugewiesen bekommen. Dann ist F die bis auf der Reihenfolge der Disjunkte eindeutige aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform bzgl. $A_1, \dots, A_n$, welche die Wahrheitswerte der gegebenen potentiellen Wahrheitstafel annimmt.

(b) Es sei F eine Konjunktion (in beliebiger Reihenfolge) über all diejenigen Konjunkte, welche zu Interpretationen der Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ gehören, die in der potentiellen Wahrheitstafel den Wahrheitswert 0 zugewiesen bekommen. Dann ist F die bis auf der Reihenfolge der Konjunkte eindeutige aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform bzgl. $A_1, \dots, A_n$, welche die Wahrheitswerte der gegebenen potentiellen Wahrheitstafel annimmt.

Beweis.

(a) Um zu zeigen, dass F die Wahrheitswerte der gegebenen potentiellen Wahrheitstafel annimmt, sei eine beliebige Interpretation $v_1 \dots v_n$ gegeben. Zunächst sei der $v_1 \dots v_n$ zugewiesene Wahrheitswert in der potentiellen Wahrheitstafel gleich 1, so dass $\mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ ein Disjunkt von F ist. Da der Wahrheitswert von $\mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ unter der Interpretation $v_1 \dots v_n$ nach Bemerkung (1.44) gleich 1 ist, gilt dies auch für die Disjunktion F. Im Folgenden sei also der $v_1 \dots v_n$ zugewiesene Wahrheitswert in der potentiellen Wahrheitstafel gleich 0. Dann ist $\mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ kein Disjunkt von F. Folglich ist jedes Disjunkt von F gleich $\mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n)$ für eine Interpretation $w_1 \dots w_n$, für welche es eine natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ und $w_j \neq v_j$ gibt. Da aber unter jeder solchen Interpretation $w_1 \dots w_n$ der Wahrheitswert von $\mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n)$ nach Bemerkung (1.44) gleich 0 ist, gilt dies auch für die Disjunktion F. Somit ist in jedem Fall der Wahrheitswert von F unter der Interpretation $v_1 \dots v_n$ gleich dem $v_1 \dots v_n$ zugewiesenen Wahrheitswert in der potentiellen Wahrheitstafel.

Umgekehrt sei G eine beliebige aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform derart, dass G die Wahrheitswerte der gegebenen potentiellen Wahrheitstafel annimmt. Dann gibt es eine nicht-negative ganze Zahl k und verschiedene aussagenlogische Formeln $G_1, \dots, G_k$ derart, dass $G = G_1 \vee \dots \vee G_k$, und so, dass für alle natürlichen Zahlen i mit $1 \leq i \leq k$ stets $G_i = X_{i,1} \wedge \dots \wedge X_{i,n}$ gilt, wobei $X_{i,j} = A_j$ oder $X_{i,j} = \neg A_j$ für alle natürlichen Zahlen j mit $1 \leq j \leq n$. Ferner sei eine Interpretation $v_1 \dots v_n$ gegeben.

Zunächst sei angenommen, dass der Wert von $v_1 \dots v_n$ in der potentiellen Wahrheitstafel gleich 1 ist. Da G die Wahrheitswerte der potentiellen Wahrheitstafel annimmt, ist somit auch der Wahrheitswert von G unter $v_1 \dots v_n$ gleich 1. Wegen $G = G_1 \vee \dots \vee G_k$ gibt es also eine natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq k$ und derart, dass G_i unter $v_1 \dots v_n$ den Wahrheitswert 1 annimmt. Für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ sei

$$w_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } X_{i,j} = A_j, \\ 0, & \text{falls } X_{i,j} = \neg A_j. \end{cases}$$

Dann ist $G_i = X_{i,1} \wedge \dots \wedge X_{i,n} = \mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n)$. Da aber der Wahrheitswert von G_i unter der Interpretation $v_1 \dots v_n$ gleich 1 ist, gilt $w_j = v_j$ für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ nach Bemerkung (1.44). Folglich ist $G_i = \mathrm{Dis}(w_1 \dots w_n) = \mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ ein Disjunkt von G.

Nun sei angenommen, dass der Wert von $v_1 \dots v_n$ in der potentiellen Wahrheitstafel gleich 0 ist. Da G die Wahrheitswerte der potentiellen Wahrheitstafel annimmt, ist somit auch der Wahrheitswert von G unter$v_1 \dots v_n$ gleich 0. Wegen $G = G_1 \vee \dots \vee G_k$ gilt somit für jede natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq k$, dass G_i unter $v_1 \dots v_n$ den Wahrheitswert 0 annimmt. Nach Bemerkung (1.44) ist aber der Wahrheitswert von $\mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ unter $v_1 \dots v_n$ gleich 1, so dass für jede natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq k$ also notwendigerweise $G_i \neq \mathrm{Dis}(v_1 \dots v_n)$ ist.

Insgesamt ist G eine Disjunktion über all diejenigen Disjunkte, welche zu Interpretationen gehören, die in der potentiellen Wahrheitstafel den Wahrheitswert 1 zugewiesen bekommen, d.h. es ist G bis auf Reihenfolge der Disjunkte gleich F.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

(1.46) Beispiel. Es sei die folgende potentielle Wahrheitstafel für die Aussagenvariablen A, B, C gegeben.

A	B	C	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(a) Eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche die gegebene potentielle Wahrheitstafel als Wahrheitstafel hat, ist

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

(b) Eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, welche die gegebene potentielle Wahrheitstafel als Wahrheitstafel hat, ist

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C).$$

Beweis.

(a) Nach Proposition (1.45)(a) ist

$$\begin{aligned}&\mathrm{Dis}(111) \vee \mathrm{Dis}(101) \vee \mathrm{Dis}(001) \vee \mathrm{Dis}(000)\\&= A \wedge B \wedge C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C\end{aligned}$$

eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche die gegebene potentielle Wahrheitstafel als Wahrheitstafel hat.

(b) Nach Proposition (1.45)(b) ist

$$\begin{aligned}&\mathrm{Con}(110) \wedge \mathrm{Con}(100) \wedge \mathrm{Con}(011) \wedge \mathrm{Con}(010)\\&= (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)\end{aligned}$$

eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, welche die gegebene potentielle Wahrheitstafel als Wahrheitstafel hat. □

(1.47) Satz. Es sei eine nicht-negative ganze Zahl n gegeben.

(a) Jede aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ ist bis auf Reihenfolge der Disjunkte zu genau einer aussagenlogischen Formel in disjunktiver Normalform bzgl. $A_1, \ldots, A_n$ logisch äquivalent.

(b) Jede aussagenlogische Formel in den Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ ist bis auf Reihenfolge der Konjunkte zu genau einer aussagenlogischen Formel in konjunktiver Normalform bzgl. $A_1, \ldots, A_n$ logisch äquivalent.

Beweis.

(a) Nach Proposition (1.45)(a) gibt es für jede aussagenlogische Formel F bis auf Reihenfolge der Disjunkte genau eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche die Wahrheitswerte der Wahrheitstafel von F annimmt, welche also zu F logisch äquivalent ist.

(b) Dies lässt sich dual zu (a) beweisen. □

(1.48) Beispiel.

(a) Eine zu $A \vee B \Rightarrow A \wedge C$ logisch äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform ist durch

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

gegeben.

(b) Eine zu $A \vee B \Rightarrow A \wedge C$ logisch äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform ist durch

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C).$$

gegeben.

Beweis. Es sei $F := (A \vee B \Rightarrow A \wedge C)$. Nach Beispiel (1.10)(a) sind die Wahrheitswerte von F wie folgt gegeben.

A	B	C	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(a) Nach Beispiel (1.46)(a) ist

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert wie F annimmt und damit zu F logisch äquivalent ist.

(b) Nach Beispiel (1.46)(b) ist

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C).$$

eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, welche unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert wie F annimmt und damit zu F logisch äquivalent ist. $\square$

Alternativer Beweis. Nach Beispiel (1.10)(a) sind die Wahrheitswerte von $\neg F$ wie folgt gegeben.

A	B	C	$\neg F$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

(a) Nach Proposition (1.45)(b) ist

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)$$

eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, welche unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert wie $\neg F$ annimmt und damit zu $\neg F$ logisch äquivalent ist. Nach Beispiel (1.20) und den De Morganschen Gesetzen (1.21) folgt

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg(\neg F) \equiv \neg((\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)) \\ &\equiv A \wedge B \wedge C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C. \end{aligned}$$

(b) Nach Proposition (1.45)(a) ist

$$A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee \neg A \wedge B \wedge \neg C$$

eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert wie $\neg F$ annimmt und damit zu $\neg F$ logisch äquivalent ist. Nach Beispiel (1.20) und den De Morganschen Gesetzen (1.21) folgt

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg(\neg F) \equiv \neg(A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee \neg A \wedge B \wedge \neg C) \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C). \end{aligned}$$ $\square$

Prädikate

Zum Abschluss dieses Abschnitts skizzieren wir noch einige Aspekte der Prädikatenlogik. Dabei werden wir diesen Kalkül noch knapper und informeller als den der Aussagenlogik behandeln, da eine weiterführende Formalisierung ohne Kenntnis einiger mathematischer Strukturen sehr abstrakt und nur schwer verständlich ist. Weitergehende Präzisierungen überlassen wir daher weiterführenden Vorlesungen. Der Zweck dieser kurzen Abhandlung ist es, eine intuitive Idee von Ausdrücken der Form $\exists x : P(x)$ zu bekommen.

Während die Aussagenlogik Modelle für Aussagen und deren logische Zusammensetzungen studiert, wird in der Prädikatenlogik auf die innere Struktur von Aussagen eingegangen. Anstelle von Aussagen betrachtet man nun Prädikate über einem zuvor festgelegten *Individuenbereich* (auch *Diskursuniversum* genannt). Ein *Prädikat* (manchmal etwas irreführend auch *Aussageform* genannt, vgl. Definition (1.1)(b)) ist hierbei eine „Eigenschaft" oder eine „Beziehung", welche für die Individuen aus dem zuvor festgelegten Bereich entweder gilt oder nicht. Betrachtet man ein Prädikat von konkreten Individuen, so erhält man eine Aussage.

Beispielsweise ist „Anne speist mit Christian." eine Aussage. Betrachten wir nun den Individuenbereich „Freundeskreis (des Dozenten)", so sind „Anne" und „Christian" Individuen und es ist „... speist mit ..." ein zweistelliges Prädikat über diesem Bereich (zweistellig, da das Prädikat zwei Individuen in Verbindung setzt).

Syntax der Prädikatenlogik

So wie in der Aussagenlogik die Aussagen durch Aussagenvariablen abstrahiert werden, treten bei der Formalisierung der Prädikatenlogik nun *Individuenvariablen* an die Stelle von Individuen und *Prädikatvariablen* an die Stelle der Prädikate. So lässt sich oben genanntes Beispiel etwa durch $P(x, y)$ formalisieren, wobei „Anne" durch x bzw. „Christian" durch y sowie „... speist mit ..." durch P ersetzt wird.
Desweiteren können in einer *prädikatenlogischen Formel* noch die aus der Aussagenlogik bekannten *Junktoren*, Hilfsklammern und die sogenannten *Quantoren* auftreten. Der *Existenzquantor* (Symbol $\exists$) formalisiert hierbei die Existenz eines Individuums, für welches ein gewisses Prädikat gilt, während der *Allquantor* (Symbol $\forall$) für die Allgemeingültigkeit des Prädikats für alle Individuen steht. Dabei wird $(\exists x)(P(x))$ als *es gibt ein x mit $P(x)$* und $(\forall x)(P(x))$ als *für alle x gilt $P(x)$* gelesen. Um die Bildung von Klammern zu reduzieren, schreiben wir meist $\exists x : P(x)$ statt $(\exists x)(P(x))$ sowie $\forall x : P(x)$ statt $(\forall x)(P(x))$.
Bei mehreren Individuenvariablen kommt es auf die Art und die Reihenfolge der Quantoren an. Wollen wir etwa die beiden in $P(x, y)$ vorkommenden *freien* Individuenvariablen x und y durch Quantoren *binden*, so haben wir die vier Möglichkeiten $\exists x : \exists y : P(x, y)$, $\exists x : \forall y : P(x, y)$, $\forall x : \exists y : P(x, y)$ und $\forall x : \forall y : P(x, y)$. Steht $P(x, y)$ wie oben für das Prädikat „... speist mit ...", so steht $\exists x : \exists y : P(x, y)$ für die Aussage, dass es zwei nicht notwendigerweise verschiedene Individuen gibt ([14]), welche miteinander speisen („es gibt ein Paar von Individuen, welches miteinander speist"), während $\forall x : \forall y : P(x, y)$ der Aussage entspricht, dass jeder mit jedem speist. Die prädikatenlogische Formel $\exists x : \forall y : P(x, y)$ repräsentiert die Aussage, dass es ein Individuum gibt, welches mit allen (anderen und sich selbst) speist, während $\forall x : \exists y : P(x, y)$ die Existenz eines Tischpartners für jedes Individuum formalisiert.

Semantik der Prädikatenlogik

Bei einer *Interpretation* werden ein Individuenbereich, für jede Prädikatvariable ein Prädikat und für alle freien Individuenvariablen konkrete Individuen festgelegt. Interpretieren wir die Quantoren noch wie oben angedeutet, so ergibt sich bei einer gegebenen Interpretation der *Wahrheitswert* einer prädikatenlogischen Formel als Wahrheitswert der erhaltenen Aussage.
Oftmals stehen an Stelle der Prädikatvariablen bereits konkrete mathematische Symbole, welche aber erst durch Wahl des Individuenbereichs eine feste Bedeutung erhalten. Betrachten wir beispielsweise die prädikatenlogische Formel $x > 0$ in der Individuenvariablen x. Anstelle einer Prädikatvariablen $P(x)$ steht hier der Ausdruck $x > 0$. Hierbei handelt es sich *nicht* um ein Prädikat; wir haben es lediglich mit einer Aneinanderreihung von Symbolen zu tun, da wir für die einstellige Prädikatvariable > 0 noch keine inhaltliche Bedeutung zugewiesen haben. Dies geschieht erst bei einer Interpretation: Legen wir beispielsweise als Individuenbereich die natürlichen Zahlen fest und interpretieren > 0 wir üblich, also $>$ als die übliche Striktordnung auf den natürlichen Zahlen und 0 als die übliche ganze Zahl 0, so erhalten wir für jede mögliche Zuordnung eines Individuums aus dem gewählten Bereich eine wahre Aussage. Wählen wir hingegen als Individuenbereich die reellen Zahlen und interpretieren > 0 wie üblich, also $>$ als die übliche Striktordnung auf den reellen Zahlen und 0 als die übliche reelle Zahl 0, so gibt es Individuen, für welche wir eine wahre Aussage erhalten (etwa $\frac{1}{2}$), aber auch Individueen, für welche wir eine falsche Aussage erhalten (etwa $-\sqrt{2}$).
Während in der prädikatenlogischen Formel $F(x) = (x > 0)$ die Individuenvariable x frei ist und daher bei einer Interpretation durch ein konkretes Individuum des Individuenbereichs ersetzt wird, ist dies in $G = (\forall x : x > 0)$ und $H = (\exists x : x > 0)$ nicht der Fall. Wählen wir als Individuenbereich die natürlichen Zahlen, so erhalten wir für G und H jeweils den Wahrheitswert 1, während wir für den Individuenbereich der reellen Zahlen für G den Wahrheitswert 0 und für H den Wahrheitswert 1 erhalten.
Auch bei der Bestimmung des Wahrheitswerts einer prädikatenlogischen Formel bzgl. einer gegebenen Interpretation kommt es natürlich auf die Reihenfolge der Quantoren an. Betrachten wir hierzu beispielsweise die prädikatenlogischen Formeln $G = (\forall y : \exists x : y = x^2)$, $H = (\exists x : \forall y : y = x^2)$, $K = (\forall x : \exists y : y = x^2)$ und $L = (\exists y : \forall x : y = x^2)$. Bei einer Interpretation durch die reellen Zahlen liefern G, H und L jeweils den Wahrheitswert 0, während wir für K den Wahrheitswert 1 erhalten.

Logische Äquivalenz von prädikatenlogischen Formeln

Wie in der Aussagenlogik lässt sich auch für prädikatenlogische Formeln ein Begriff der *logischen Äquivalenz* definieren. Für beliebige Prädikatvariablen $P(x)$ in der Individuenvariablen x sind dann $\neg(\forall x : P(x))$

[14] Der Existenzquantor formalisiert die Existenz *mindestens eines* Objekts.

und $\exists x : \neg P(x)$ sowie $\neg(\exists x : P(x))$ und $\forall x : \neg P(x)$ jeweils logisch äquivalente prädikatenlogische Formeln.

Zur Verwendung von logischen Symbolen

Wir werden das Studium der mathematischen Logik und insbesondere die Formalisierung logischer Strukturen nun beenden und verweisen auf weiterführende Vorlesungen. Da bereits die mathematischen Sachverhalte, über welche wir im Folgenden reden werden, formalisiert werden, unterhalten wir uns über diese in der Umgangssprache. Unsere Texte schreiben wir ebenfalls in dieser *Metasprache* auf, lediglich die Objekte (wie im nächsten Abschnitt Mengen, Elemente, etc.) werden formalisiert. Da die mathematische Logik nicht mehr Gegenstand unserer Untersuchungen ist, verzichten wir dementsprechend auch auf die Verwendung logischer Symbole. Hierdurch können wir eine Überformalisierung vermeiden und den Text lesbarer halten. Der Verzicht auf logische Symbole außerhalb der mathematischen Logik wird gemeinhin als guter Stil empfunden.
Man beachte, dass wir durch diese Regelung im weiteren Verlauf streng genommen nichts anderes machen werden als zuvor: Auch bisher haben wir logische Symbole nur in aussagen- und prädikatenlogischen Formeln benutzt, nicht jedoch bei den Aussagen selbst verwandt – und schon gar nicht in den Aussagen über die Aussagen bzw. den Aussagen über die aussagenlogischen Formeln. Logische Symbole sind Bestandteile der *Objektsprache*, d.h. der formalen Sprache, die wir in diesem Abschnitt studiert haben, und die uns als formales Modell für Aussagen und Prädikate dient.
Wir haben die Logik in diesem Abschnitt studiert, um die logischen Strukturen der im Folgenden auftauchenden Sätze besser verstehen und einordnen zu können. Ferner hilft uns das logische Verständnis beim Auffinden von Beweisen. Aus diesen Gründen wird von der oben getroffenen Konvention, auf logische Symbole zu verzichten, in Ausnahmesituationen Abstand genommen (auch wenn dies streng genommen wegen der Trennung von Objektsprache und Metasprache keinen Sinn macht); etwa wenn man bei umgangssprachlich vergleichsweise kompliziert auszudrückenden Sachverhalten die logische Struktur genauer präzisieren möchte. Ein Beispiel hierfür ist etwa die Definition der Konvergenz einer Folge in der Analysis, dessen prädikatenlogische Formalisierung vergleichsweise viele Quantoren beinhaltet, bei welchen es zudem auf die Reihenfolge ankommt.
Eine zweite Ausnahme von dieser Regelung ist der Anschrieb von Vorlesungsnotizen an einer Tafel oder ähnlichen Präsentationsgeräten wie einem Overheadprojektor: Da eine Vorlesung oder ein Vortrag durch die Verwendung der mündlichen Sprache einen anderen Charakter als ein geschriebener Text hat, werden logische Symbole hier gerne als Abkürzung genommen.

Sprachliche Konventionen

Wenn wir sagen, dass eine erste Aussage *oder* eine zweite Aussage gilt, so lassen wir damit stets zu, dass auch beide Aussagen gelten. Die aussagenlogische Formalisierung dieses umgangssprachlichen Konstrukts entspricht einer Disjunktion. Möchten wir darstellen, dass *entweder* die erste Aussage *oder* die zweite Aussage gilt, so sagen wir dies explizit. Analog bei mehr als zwei Aussagen.
Die Existenz *eines* Objektes bedeute stets die Existenz von *mindestens einem* Objekt. Bei einer Formalisierung im Sinne der Prädikatenlogik würden wir in diesem Fall einen Existenzquantor erhalten. Möchten wir die Existenz von *genau einem* Objekt ausdrücken, so sagen wir auch dies explizit dazu.
Wenn wir sagen, dass eine Eigenschaft *für* gewisse Objekte gilt, so meinen wir damit stets, dass die Eigenschaft *für alle* diese Objekte gilt. Eine prädikatenlogische Formalisierung würde in diesem Fall einen Allquantor ergeben. Möchten wir hingegen ausdrücken, dass die Eigenschaft *für eines* der Objekte gilt, dass es also ein Objekt (unter allen potentiellen Objekten) mit dieser Eigenschaft gibt, so sagen wir dies explizit dazu. Bei einer Formalisierung würden wir dann einen Existenzquantor erhalten.
Die Formulierung, dass ein (beliebiges) Objekt *gegeben sein* soll, bedeute, dass das danach Dargestellte *für jedes* solche Objekt gilt. Dieser Ausdruck entspricht bei einer Formalisierung einem Allquantor.
Wenn wir sagen, dass wir uns ein Objekt mit einer Eigenschaft *wählen*, so bedeute dies, dass ein Objekt mit dieser Eigenschaft *existiert* (per Definition oder nach einer vorher gezeigten Aussage). Formal entspricht dies einem Existenzquantor.