Sebastian Thomas

RWTH Aachen, WS 2016/17
09.11.2016–10.11.2016

Diskrete Strukturen

Vorlesungen 6 und 7

4 Relationen

Durch Relationen werden Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge formalisiert. In diesem Abschnitt studieren wir Eigenschaften von allgemeinen (binären) Relationen.

Begriffsbildung

Wir beginnen mit der Definition einer Relation.

(4.1) Definition (Relation)**.** Es sei eine Menge X gegeben. Eine *Relation* (genauer *binäre Relation*) auf X ist eine Teilmenge von $X \times X$.
Es seien eine Relation r auf X und $x, y \in X$ gegeben. Falls $(x, y) \in r$ ist, so sagen wir, dass x bzgl. r in *Relation* zu y *steht* und schreiben $x \mathrel{r} y$.

Etwas allgemeiner lässt sich für Mengen X und Y eine *Relation* zwischen X und Y als Teilmenge von $X \times Y$ definieren. Wir werden dieses Konzept in dieser Veranstaltung nicht weiter verfolgen.

(4.2) Beispiel.

(a) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gelte $m < n$, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $n = p + m$ gibt. Dann ist $<$ eine Relation auf $\mathbb{N}$. Als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist $<$ gegeben durch

$$< \, = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } p \in \mathbb{N} \text{ mit } n = p + m\}.$$

(b) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist $\subseteq$ eine Relation auf $\operatorname{Pot}(X)$. Wir nennen $\subseteq$ die *Teilmengenrelation* (oder *Inklusionsrelation* oder *Inklusion*) auf $\operatorname{Pot}(X)$. Als Teilmenge von $\operatorname{Pot}(X) \times \operatorname{Pot}(X)$ ist $\subseteq$ gegeben durch

$$\subseteq \, = \{(U, V) \in \operatorname{Pot}(X) \times \operatorname{Pot}(X) \mid \text{für } x \in U \text{ gilt } x \in V\}.$$

(c) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist $=$ eine Relation auf X. Wir nennen $=$ die *Gleichheitsrelation* (oder *Gleichheit*) auf X. Als Teilmenge von $X \times X$ ist $=$ gegeben durch

$$= \, = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

(d) Es sei eine Menge X gegeben. Dann ist $X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ eine Relation auf X, die *Allrelation* auf $X \times X$.

(e) Es ist $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$.

Wie in Beispiel (4.2)(a), (b), (c) schon angedeutet, ist es üblich, Relationen durch Angabe der Eigenschaft, welche für die in Relation stehenden Elemente erfüllt ist, zu definieren. Dies ist äquivalent zur Angabe der Teilmenge des kartesischen Produkts und meistens etwas leserlicher.
Wir geben noch einige Modellierungen von Beziehungen aus dem täglichen Leben durch Relationen an:

(4.3) Anwendungsbeispiel.

(a) Die Einwohner von Aachen seien als Elemente einer Menge A modelliert. Für $a, b \in A$ gelte genau dann $a \mathrel{n} b$, wenn der durch a modellierte Einwohner ein Nachkomme des durch b modellierten Einwohners ist. Dann ist n eine Relation auf A.

(b) Die Studierenden des Moduls *Diskrete Strukturen* seien als Elemente einer Menge D modelliert. Für $s, t \in D$ gelte genau dann $s \; e \; t$, wenn der oder die durch s modellierte Studierende die gleichen Eltern wie der oder die durch t modellierte Studierende hat. Für $s, t \in D$ gelte genau dann $s \; g \; t$, wenn der oder die durch s modellierte Studierende den gleichen Geburtstag wie der oder die durch t modellierte Studierende hat. Dann sind e und g Relationen auf D.

(c) Die Stichwörter in einem Lexikon seien als Elemente einer Menge L modelliert. Für $v, w \in L$ gelte genau dann $v \; a \; w$, wenn das durch v modellierte Stichwort den gleichen Anfangsbuchstaben wie das durch w modellierte Stichwort hat. Für $v, w \in L$ gelte genau dann $v \; o \; w$, wenn das durch v modellierte Stichwort einen Anfangsbuchstaben hat, welcher im Alphabet vorm Anfangsbuchstaben des durch w modellierten Stichwort vorkommt. Dann sind a und o Relationen auf L.

(d) Farbige Glasperlen in einer Dose seien als Elemente einer Menge P modelliert. Für $p, q \in P$ gelte genau dann $p \; f \; q$, wenn die durch p modellierte Glasperle die gleiche Farbe wie die durch q modellierte Glasperle hat. Dann ist f eine Relation auf P.

Eigenschaften

Wir betrachten einige potentielle Eigenschaften von Relationen.

(4.4) Definition (Transitivität, Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Vollständigkeit)**.** Es seien eine Menge X und eine Relation r auf X gegeben.

(a) Wir sagen, dass r *transitiv* ist, falls für $x, y, z \in X$ aus $x \; r \; y$ und $y \; r \; z$ stets $x \; r \; z$ folgt.

(b) Wir sagen, dass r *reflexiv* (auf X) ist, falls für $x \in X$ stets $x \; r \; x$ gilt.

(c) Wir sagen, dass r *symmetrisch* ist, falls für $x, y \in X$ aus $x \; r \; y$ stets $y \; r \; x$ folgt.

(d) Wir sagen, dass r *antisymmetrisch* ist, falls für $x, y \in X$ aus $x \; r \; y$ und $y \; r \; x$ stets $x = y$ folgt.

(e) Wir sagen, dass r *vollständig* (auf X) ist, falls für $x, y \in X$ stets $x \; r \; y$ oder $y \; r \; x$ gilt.

(4.5) Beispiel. Die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ ist transitiv und antisymmetrisch, aber nicht reflexiv, nicht symmetrisch und nicht vollständig.

Beweis. Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $n < p$ gegeben. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}$ mit $n = q + m$ und $p = r + n$. Es folgt $p = r + n = r + q + m$, also $m < p$. Folglich ist $<$ transitiv.
Für keine $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m < n$ und $n < m$. Folglich ist $<$ antisymmetrisch.
Für kein $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $m = p + m$, d.h. es gilt $m < m$ für kein $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $<$ nicht reflexiv und nicht vollständig.
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gegeben. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $n = p + m$. Gäbe es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $m = q + n$, so wäre $m = q + n = q + p + m$ und damit $q + p = 0$. Da mit $p, q \in \mathbb{N}$ dann aber auch $0 = q + p \in \mathbb{N}$ sein müsste, ist dies ein Widerspruch. Folglich gilt $n < m$ nicht. Insbesondere ist $<$ nicht symmetrisch. □

Vorsicht sind bei den Begriffen der Reflexivität und der Vollständigkeit geboten, da diese von der unterliegende Menge abhängig sind.

Beispiel.

(a) Die Relation $\{(1, 1)\}$ auf $\{1\}$ ist reflexiv.

(b) Die Relation $\{(1, 1)\}$ auf $\{1, 2\}$ ist nicht reflexiv.

Beweis. Es sei $r := \{(1, 1)\}$.

(a) Wegen $1 \; r \; 1$ gilt $x \; r \; x$ für alle $x \in \{1\}$. Folglich ist r reflexiv.

(b) Da $2 \; r \; 2$ nicht gilt, gibt es ein $x \in \{1, 2\}$ so, dass $x \; r \; x$ nicht gilt. Folglich ist r nicht reflexiv. □

Indikatormatrix

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Eine Relation r auf $[1, n]$ ist eine Teilmenge von $[1, n] \times [1, n]$. Die Indikatormatrix, vgl. Definition (3.34), liefert eine Verbildlichung einer solchen Relation.
Durch Wahl einer Abzählung, vgl. Definition (3.39)(b), lässt sich das Konzept auf Relationen auf beliebigen endlichen Mengen verallgemeinern:

(4.6) Definition (Indikatormatrix)**.** Es seien $n \in \mathbb{N}_0$, eine Menge X, eine Abzählung $e\colon [1, n] \to X$ und eine Relation r auf X gegeben. Die $(n \times n)$-Matrix $\chi_{r,e}$ in $\{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_{r,e} = ((\chi_r)_{e(i),e(j)})_{i,j \in [1,n]}$$

wird *Indikatormatrix* von r bzgl. e genannt.

(4.7) Beispiel.

(a) Es sei eine Relation r auf $\{1, 2, 3\}$ gegeben durch

$$r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Die Indikatormatrix von r ist gegeben durch

$$\chi_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei eine Relation r auf $\{-1, 0, 1\}$ gegeben durch

$$r = \{(-1, -1), (1, 1), (-1, 1), (1, -1)\}.$$

Die Indikatormatrix von r bzgl. der Abzählung $e\colon [1, 3] \to \{-1, 0, 1\}$, $1 \mapsto -1$, $2 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$ ist gegeben durch

$$\chi_{r,e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etwas informeller lässt sich die Indikatormatrix in Beispiel (4.7)(b) durch Beschriftung mit den abgezählten Elementen in einer *Indikatortafel* darstellen:

r	-1	0	1
-1	1	0	1
0	0	0	0
1	1	0	1