Jan Bełczącki 180503
Marcin Wawrzonowski 180729

Rok akademicki 2013/14
Środa, 12:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – Implementacja metody aproksymacji

Opis rozwiązania

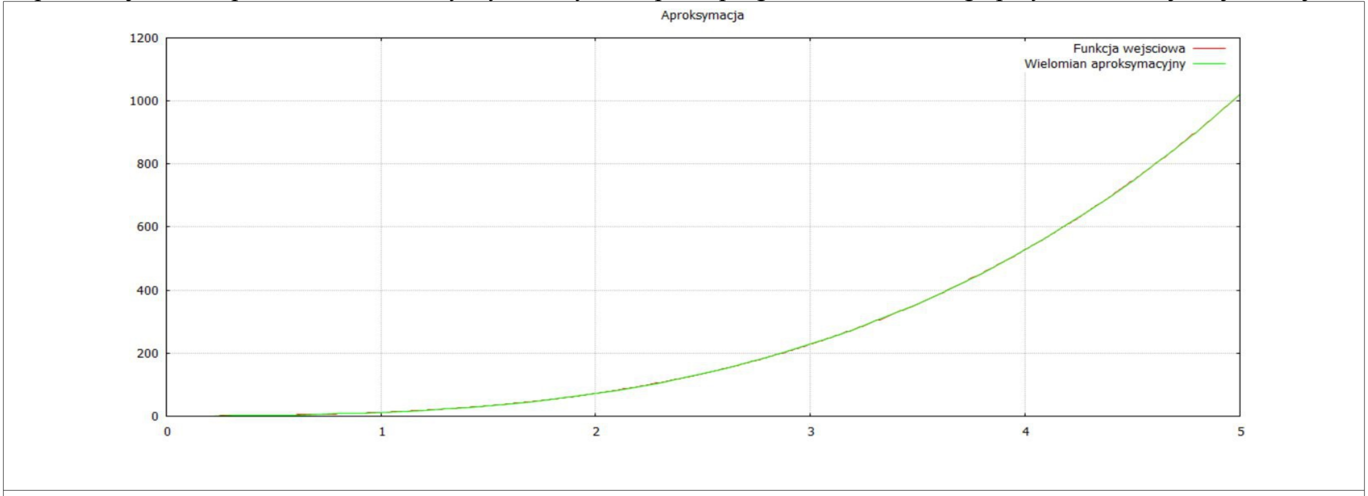
W zadaniu zastosowano metodę opartą o wielomiany Laguerre'a postaci $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k$, . W przypadku tych wielomianów mamy do czynienia z przedziałem całkowania [0; +∞) co zostało zachowane dzięki użyciu kwadratury Gaussa, w celu obliczenia potrzebnych współczynników λ_k. Współczynniki te pozwalają na wyznacznie wielomianu aproksymującego k-tego stopnia w postaci $y(x)=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i L_i(x)$.

Algorytm metody prezentuje się następująco:

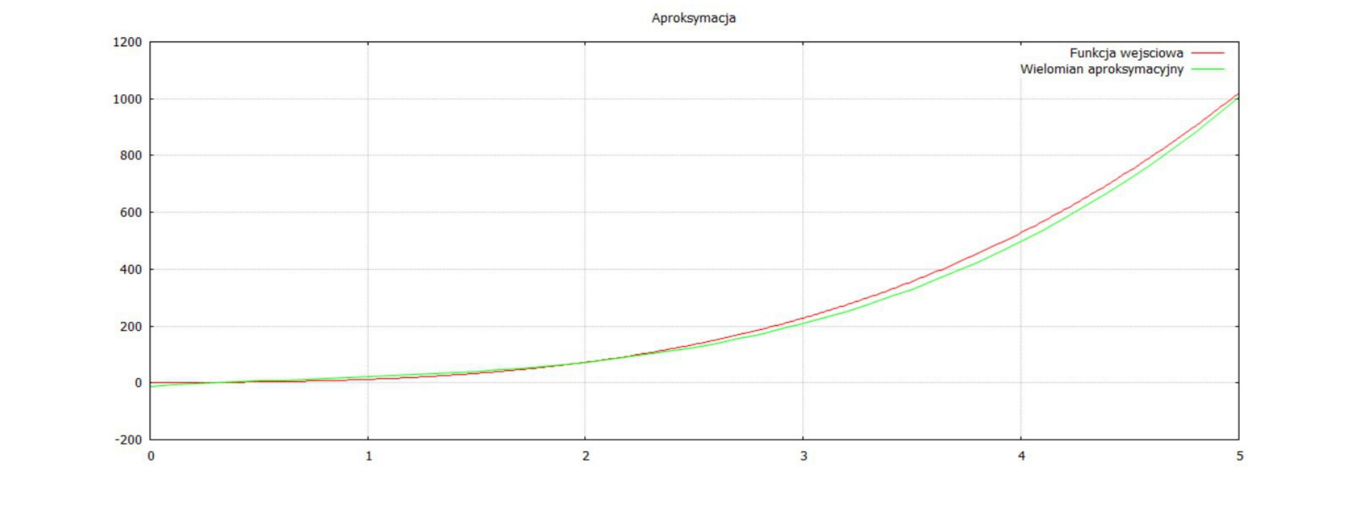
1. Dla zadanego stopnia wielomianu aproksymującego, oblicza się kolejne wartości współczynników λ_k, zgodnie ze wzorem $\lambda_k=\int_0^{\infty} f(x)L_k(x)e^{-x}dx$, gdzie *f(x)* jest aproksymowaną funkcją.
2. Zgodnie ze wzorem należy wyznaczyć współczynniki wielomianu aproksymującego, w celu wyliczenia jego wartości metodą Hornera.
3. Błąd aproksymacji określony jako pole między wykresami funkcji wejściowej i wielomianu aproksymującego i obliczany zgodnie ze wzorem $E=\int_0^{\infty}|f(x)-y(x)|e^{-x}dx$.

Wyniki

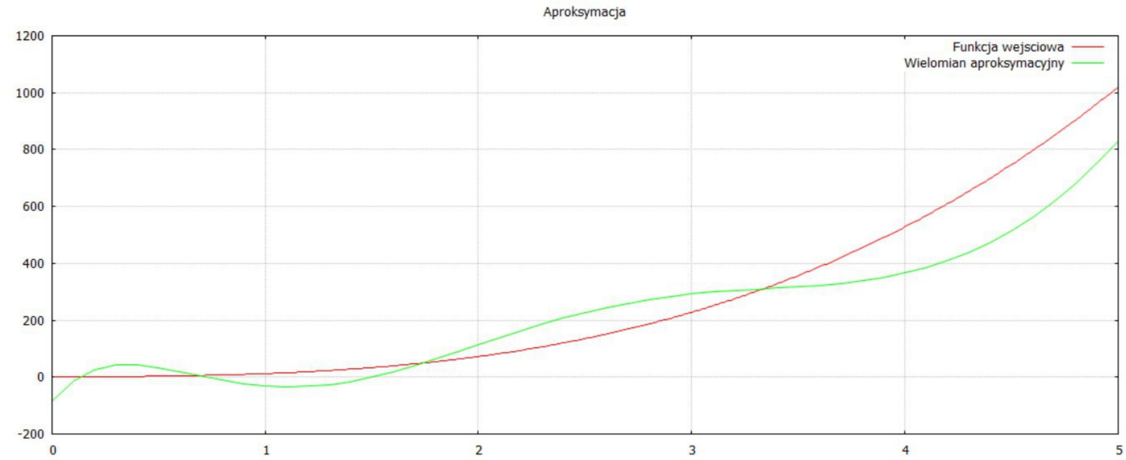
W poniższej tabeli zaprezentowane zostały wyniki uzyskane przez program dla konkretnego przykładu funkcji wejściowej.



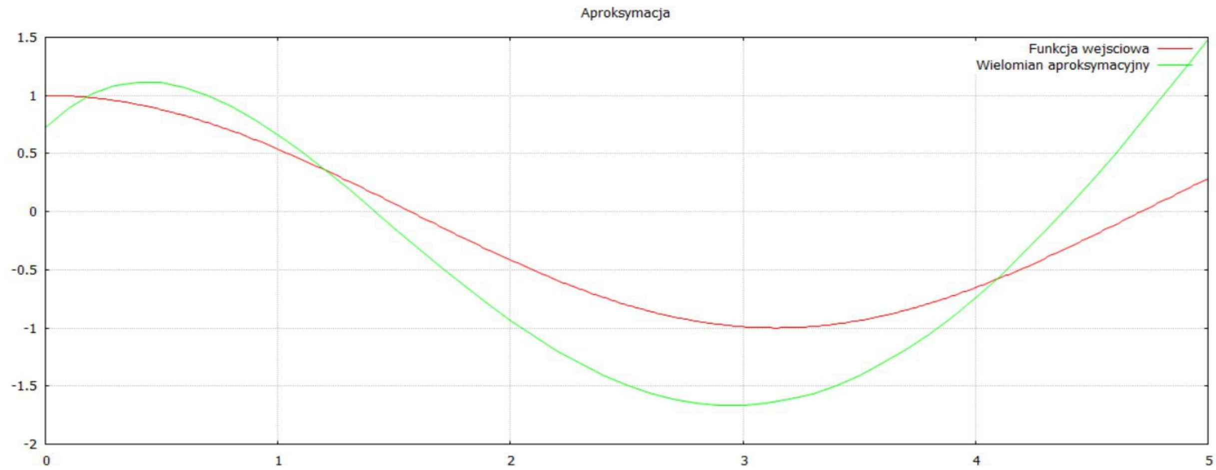
Funkcja: 8x^3 + 4x + 0.25
Liczba węzłów: 4; Zakres: [0, 5]; Stopień wielomianu: 3; Błąd aproksymacji: 0.002
Należy użyć wielomianu co najmniej *n*-tego stopnia w celu aproksymowania wielomianu *n*-tego stopnia



Funkcja: 8x^3 + 4x + 0.25
Liczba węzłów: 5; Zakres: [0, 5]; Stopień wielomianu: 3; Błąd aproksymacji: 7.5177
Zbyt duża ilość węzłów może nie dać odpowiedniego wyniku. Wynika to z charakterystyki metody całkowania z użyciem kwadratury Gaussa i pewnej niedokładności dla wyższych węzłów.



Funkcja: 8x^3 + 4x + 0.25
Liczba węzłów: 5; Zakres: [0, 5]; Stopień wielomianu: 10; Błąd aproksymacji: 43.6716
Z powodu ograniczeń metody całkowania z użyciem kwadratury Gaussa, rozbieżności pojawiają się przy podaniu zbyt dużego stopnia wielomianu aproksymującego.



Funkcja: cos(x)
Liczba węzłów: 3; Zakres: [0, 5]; Stopień wielomianu: 5; Błąd aproksymacji: 0.356238
Funkcje trygonometryczne są trudne do zaproksymowania przy użyciu wielomianów algebraicznych.

Wnioski

- Ilość węzłów wpływa na wartości współczynników $\lambda_{k,}$ co wpływa pośrednio na postać wielomianu aproksymującego. Mogą pojawiać się rozbieżności wynikające z ograniczeń metody całkowania z użyciem kwadratury Gaussa.
- Dla funkcji będących wielomianami użycie co najmniej *n* węzłów zapewnia nałożenie się wykresu wielomianu aproksymującego z aproksymowanym wielomianem *n*-tego stopnia.
- W trakcie realizacji programu, pojawiły się problemy dokładnością aproksymowania funkcji trygonometrycznych. Takie funkcje lepiej jest aproksymować wielomianami trygonometrycznymi.