

## Taller 2

15. Demostrar directamente que la transformación

$$Q = \arctan \frac{\alpha q}{p},$$

$$P = \frac{\alpha q^2}{2} \left( 1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right)$$

es canónica, donde  $\alpha$  es una constante.

### Respuesta a Problema 1

Sean en  $(p, q)$  la coordenadas generalizadas de un sistema en el espacio de fase, y sea  $H(p, q)$  la función de Hamilton, entonces las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (15,1)$$

Dado que la transformación puntual de coordenadas generalizadas  $(p, q)$  a coordenadas generalizadas  $(P, Q)$  dada por:

$$Q = \arctan \frac{\alpha q}{p},$$

$$P = \frac{\alpha q^2}{2} \left( 1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha} \right) \quad (15,2)$$

es canónica, entonces deben satisfacer las ecuaciones de Hamilton (15.1) con  $K(P, Q) = K$  constante, es decir:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad \text{y} \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad \text{y} \quad \frac{\partial K}{\partial t} = 0 \quad (15,3)$$

Para mostrar esto último, usando la regla de la cadena en las ecuaciones (15.2) y reemplazando (15.1)

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{dp}{dt} \\ &= -\frac{\alpha q}{p^2 + \alpha^2 q^2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2 q^2} \left( q \frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\alpha}{p^2 + \alpha^2 q^2} \left( q \frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \frac{1}{2P} \left( q \frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad (15,4,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial P}{\partial p} \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{p}{\alpha} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) + q\alpha \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad (15,4,2) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena en (15.1) tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2} - \frac{\partial H}{\partial P} \alpha q \quad (15,7,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha q}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{p}{\alpha} \quad (15,7,2)\end{aligned}$$

Reemplazando (15.5) en (15.7.1) y (15.7.2) tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{1}{2P} \left( q \frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \frac{1}{2P} \left( q \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \alpha q \right) + p \left( -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha q}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{p}{\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2P} \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha p q}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \alpha q^2 - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha p q}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{p^2}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} \alpha q^2 + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{p^2}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2P} \frac{\partial H}{\partial P} \left( \alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2P} \frac{\partial H}{\partial P} 2P = \frac{\partial H}{\partial P}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{p}{\alpha} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) + q \alpha \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \frac{p}{\alpha} \left( -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2} - \frac{\partial H}{\partial P} \alpha q \right) + q \alpha \left( -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha q}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{p}{\alpha} \right) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{p^2}{p^2 + \alpha^2 q^2} - \frac{\partial H}{\partial P} p q - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\alpha^2 q^2}{p^2 + \alpha^2 q^2} + \frac{\partial H}{\partial P} p q \\ &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{p^2 + \alpha^2 q^2}{p^2 + \alpha^2 q^2} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial Q}\end{aligned}$$

Por lo que si  $K = H(P, Q)$  entonces las anteriores ecuaciones son las ecuaciones de Hamilton (15.3) y por lo tanto la transformacion (15.2) es canónica. Vease que como  $H = H(q, p)$  no depende de  $t$  entonces  $K = H(P, Q)$  tampoco depende de  $t$ , es decir  $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$ .

16. Mostrar que una funcion generatriz del segundo tipo cuya forma particular sea  $F_2 = q_j P_j$ , genera la transformacion identidad

**Respuesta a Punto 2**

De las ecuaciones de transformacion asociadas a la funcion generatriz  $F_2(q_j, P_j)$   $j = 1, \dots, n$  dadas por:

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \quad \text{y} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (16,1)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial t} &= 0 \Rightarrow K = H(Q_j, P_j) \\ Q_j &= \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}(P_j q_j) = q_j \\ p_j &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(P_j q_j) = P_j \end{aligned}$$

De esta forma la matriz de transformacion  $M$  es tal que:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

17. Use una funci'on generatriz para construir una transformaci'on que intercambie cantidades de movimiento y coordenadas.

### Respuesta a Punto 3

Dado que se busca una funcion generatriz  $F' = F'(q_j, p_k, Q_l, P_m, t)$ ,  $j = l, k = m = 1, \dots, n$  o  $j = m, l = m = 1, \dots, n$ , para algun  $j, k, l, m$  tal que la transformacion canonica  $M$  asociada satisfaga que:

$$\dot{\mathbf{X}} = M\dot{\mathbf{x}} \quad (17,1)$$

Donde:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Q_j \\ P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (17,2)$$

Por lo que de (17.2):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} & \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17,3)$$

Vease que  $M$  de (17.3) no es una transformacion canonica, pues:

$$M^T J M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq J$$

Por lo que en su lugar se propone:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Q_j \\ P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_j \\ -q_j \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (17,4)$$

Asi de (17.4):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} & \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial(-q_j)}{\partial q_i} & \frac{\partial(-q_j)}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17,5)$$

Vease que  $M$  de (17.5) es una transformacion canonica, pues:

$$M^T J M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Una una funcion generatriz que me genera este tipo de transformacion canonica es:

$$F(q_j, Q_j, t) = q_j Q_j \quad (17,6)$$

Pues de (17.6) se tiene que:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(q_j Q_j) = Q_i \quad y \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} = -\frac{\partial}{\partial Q_i}(q_j Q_j) = -q_i$$

18. Las ecuaciones de transformación entre dos sistemas de coordenadas son

$$Q = \log \left( 1 + q^{1/2} \cos p \right) \\ P = 2 \left( 1 + q^{1/2} \cos p \right) q^{1/2} \sin p$$

a) A partir de estas ecuaciones de transformación, demostrar directamente que  $Q, P$  son variables canónicas si lo son  $q$  y  $p$ . b) Demostrar que la función que genera esta transformación es

$$F_3 = - \left( e^Q - 1 \right)^2 \tan p$$

#### Respuesta a Punto 4

- Si  $(q, p)$  son variables canónicas entonces satisfacen las ecuaciones canonicas de Hamilton, es decir:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad y \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (18,1)$$

Si ademas define la transformacion:

$$Q = \log \left( 1 + q^{1/2} \cos p \right) \\ P = 2 \left( 1 + q^{1/2} \cos p \right) q^{1/2} \sin p \quad (18,2)$$

Entonces se tiene que por la regla de la cadena aplicada en (18.1) y (18.2):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{q^{1/2} \sin p}{1 + q^{1/2} \cos p} \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^2 p}{P} \quad (18,3,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p}{2(q^{1/2} + q \cos p)} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \quad (18,3,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} \\
&= \frac{\cos p}{2(q^{1/2} + q \cos p)} \dot{q} - \frac{q^{1/2} \sin p}{1 + q^{1/2} \cos p} \dot{p} \\
&= \frac{\cos p \sin p}{P} \dot{q} - \frac{2q \sin^2 p}{P} \dot{p} \quad (18,4,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P} &= \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial P}{\partial p} \dot{p} \\
&= \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p \dot{q} + 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) \dot{p} \quad (18,4,2)
\end{aligned}$$

Reemplazando (18.3.1) y (18.3.2) en (18.4.1) y (18.4.2):

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\cos p \sin p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^2 p}{P} \right) \\
&\quad - \frac{2q \sin^2 p}{P} \left( -\frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \right) \\
&= \frac{\cos p \sin p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos^2 p - q \sin^2 p \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^2 p}{P} \right) \\
&\quad + \frac{2q \sin^2 p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1 + q^{1/2} \cos p}{q^{1/2}} + \cos p \right) \sin p + \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \right) \\
&= \frac{\cos p \sin p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} + q \cos p \right) \frac{\sin p}{\sin p} \cos p - \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q \sin^2 p \right) \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p \cos p}{P^2} \\
&\quad + \frac{2q \sin^2 p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( \frac{q^{1/2} + q \cos p}{2q} \sin p \right) + \frac{\partial H}{\partial P} \cos p \sin p \right) + \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p \cos p}{P^2} \\
&= \frac{\cos p \sin p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} P \frac{\cos p}{\sin p} - \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q \sin^2 p \right) \right) + \frac{2q \sin^2 p}{P} \left( \frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{P}{2q} \right) + \frac{\partial H}{\partial P} \cos p \sin p \right) \\
&= \frac{\partial H}{\partial P} \cos^2 p - 2 \frac{\partial H}{\partial P} q \sin^3 p \cos p \frac{1}{P} + \frac{\partial H}{\partial P} \sin^2 p + 2 \frac{\partial H}{\partial P} \cos p \sin^3 p \frac{1}{P} \\
&= \frac{\partial H}{\partial P} \quad (18,5,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P} &= \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p \left( \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^2 p}{P} \right) \\
&\quad + 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) \left( -\frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \right) \\
&= \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p \frac{\partial H}{\partial P} 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) - \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p}{P} \\
&\quad + 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) \frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{1}{q^{1/2}} + 2 \cos p \right) \sin p + 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos(2p) \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \\
&= - \left( \frac{1 + q^{1/2} \cos p}{q^{1/2}} + \cos p \right) \sin p \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p}{P} - 2 \left( q^{1/2} \cos p + q \cos^2 p - q \sin^2 p \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \\
&= - \left( \frac{P}{2q} + \cos p \sin p \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^2 p}{P} - \left( 2 \left( q^{1/2} + q \cos p \right) \frac{\sin p}{\sin p} \cos p - 2 \left( q \sin^2 p \right) \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \\
&= - \frac{\partial H}{\partial Q} \sin^2 p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p \cos p}{P} - \left( P \frac{\cos p}{\sin p} - 2 \left( q \sin^2 p \right) \right) \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\cos p \sin p}{P} \\
&= - \frac{\partial H}{\partial Q} \sin^2 p + \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \sin^3 p \cos p}{P} - \frac{\partial H}{\partial Q} \cos^2 p - \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{2q \cos p \sin^3 p}{P} \\
&= - \frac{\partial H}{\partial Q} \quad (18,5,2)
\end{aligned}$$

Por que si  $K = H(Q, P)$  entonces las anteriores ecuaciones son las ecuaciones canonicas de Hamilton y por lo tanto  $(P, Q)$  son variables canonicas.

- Dado que  $F_3 = F_3(p, Q)$ , pues:

$$F_3 = - \left( e^Q - 1 \right)^2 \tan p$$

Entonces de la ecuaciones de canonicas de transformacion para  $F_3$ :

$$q = - \frac{\partial F_3}{\partial p} \quad \text{y} \quad P = \frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad (18,6)$$

se sigue que:

$$q = - \frac{\partial F_3}{\partial p} = - \frac{\partial}{\partial p} \left( - \left( e^Q - 1 \right)^2 \tan p \right) = \left( e^Q - 1 \right)^2 \sec^2 p \quad (18,7,1)$$

$$P = \frac{\partial F_3}{\partial Q} = - \frac{\partial}{\partial Q} \left( - \left( e^Q - 1 \right)^2 \tan p \right) = 2 \left( e^Q - 1 \right) e^Q \tan p \quad (18,7,2)$$

Despejando  $Q$  de (18.7.1):

$$\begin{aligned}
 q = (e^Q - 1)^2 \sec^2 p &\Rightarrow (e^Q - 1)^2 = \frac{q}{\sec^2 p} \\
 &\Rightarrow e^Q - 1 = \sqrt{\frac{q}{\sec^2 p}} \\
 &\Rightarrow e^Q = 1 + \sqrt{\frac{q}{\sec^2 p}} \\
 &\Rightarrow Q = \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{q}{\sec^2 p}} \right) \\
 &\Rightarrow Q = \ln \left( 1 + q^{1/2} \cos p \right) \quad (18,8,1)
 \end{aligned}$$

Reemplazando (18.8.1) en (18.7.2):

$$\begin{aligned}
 P = 2(e^Q - 1)e^Q \tan p &\Rightarrow P = -2(1 - q^{1/2} \cos p - 1)(1 - q^{1/2} \cos p) \tan p \\
 &\Rightarrow P = -2(1 - 2q^{1/2} \cos p + q \cos^2 p - 1 + q^{1/2} \cos p) \tan p \\
 &\Rightarrow P = -2(q^{1/2} \cos p + q \cos^2 p) \tan p \\
 &\Rightarrow P = -2q^{1/2} \cos p (1 + q^{1/2} \cos p) \tan p \quad (18,8,2)
 \end{aligned}$$

De (18.8.1) y (18.8.2) se concluye que  $F_3$  es una funcion generatriz de (18.2)

6. Demuestre que el calor transferido durante un proceso cuasiestático infinitesimal de un gas ideal se puede escribir

$$dQ = \frac{C_V}{nR} V dP + \frac{C_P}{nR} P dV$$

Aplicando esta ecuación a un proceso adiabático, demuestre que  $PV^\gamma = \text{const.}$

### Respuesta a Punto 6

Dado que la ecuacion de estado para un gas ideal es:

$$PV = nRT \quad (6,1) \quad \text{con} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V = 0$$

Por lo que la energia interna cumple que  $U = U(T)$

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \Rightarrow C_V = \frac{dU}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (6,2)$$

Por otro lado de la primera ley de la termodinamica para el gas ideal, desde las ecuacion (2.1) y (6.2), toma la forma:

$$dQ = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + P dV = C_V dT + P dV \quad (6,3)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 dT &= \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP \\
 &= \frac{P}{nR} dV + \frac{V}{nR} dP
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (6.3) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 dQ &= C_V \left( \frac{P}{nR} dV + \frac{V}{nR} dP \right) + PdV \Rightarrow dQ = \frac{C_V}{nR} PdV + \frac{C_V}{nR} V dP + PdV \\
 &\Rightarrow dQ = \frac{C_V}{nR} V dP + \left( \frac{C_V}{nR} + 1 \right) PdV \\
 &\Rightarrow dQ = \frac{C_V}{nR} V dP + \left( \frac{C_V + nR}{nR} \right) PdV \\
 &\Rightarrow dQ = \frac{C_V}{nR} V dP + \frac{C_P}{nR} PdV \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Donde se uso que  $C_P - C_V = nR$  para un gas ideal. Ahora si consideramos tambien que es gas esta sometido a un proceso adiabatico entonces de (6.4)

$$\begin{aligned}
 dQ = 0 &\Rightarrow \frac{C_V}{nR} V dP + \frac{C_P}{nR} PdV = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{C_V}{nR} V dP = -\frac{C_P}{nR} PdV \\
 &\Rightarrow \frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P} \\
 &\Rightarrow \gamma \ln(V) = -\ln(P) + C \\
 &\Rightarrow \ln(V^\gamma) = \ln(P^{-1}) + C \\
 &\Rightarrow V^\gamma = P^{-1} e^C \\
 &\Rightarrow PV^\gamma = e^C = \text{constante}
 \end{aligned}$$

7. Un mol de un sistema paramagnético ideal obedece la ley de Curie.

$$\mathcal{M} = \frac{C_C \mathcal{H}}{T}$$

Donde  $\mathcal{M}$  es la magnetización y  $\mathcal{H}$  es un campo magnético externo, con constante de Curie  $C_C$ . Suponga que la energía interna  $U$  es función de  $T$  únicamente, de modo que  $dU = C_{V,\mathcal{M}} dT$ , donde  $C_{V,\mathcal{M}}$  es una capacidad calorífica a volumen y magnetización constantes. Demostrar que la ecuación de la familia de superficies adiabáticas es

$$\frac{C_{V,\mathcal{M}}}{nR} \ln T + \ln V = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{2nRC_C} + \ln A,$$

Donde A es una constante.

### Respuesta a Punto 7

Dado que este es un sistema paramagnetico e hidrostático con función de energía interna  $U = U(T)$  tal que  $dU = C_{V,\mathcal{M}} dT$ , entonces de el ejercicio 5 tenemos que la primera ley de la termodinámica queda:

$$dQ = C_{V,\mathcal{M}} dT + PdV - \mu_0 \mathcal{H} d\mathcal{M} \quad (7.1) \quad \text{donde} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{\mathcal{M},T} = 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}} \right)_{T,V} = 0$$

Y para un proceso adiabático  $dQ = 0$  entonces de (7.1) tenemos que:

$$0 = C_{V,\mathcal{M}} dT + PdV - \mu_0 \mathcal{H} d\mathcal{M} \Rightarrow C_{V,\mathcal{M}} + P \frac{dV}{dT} = \mu_0 \mathcal{H} \frac{d\mathcal{M}}{dT} \quad (7.2)$$



Donde para un gas ideal y para un sistema paramagnetico se cumplen respectivamente que:

$$PV = nRT \quad \text{y} \quad \mathcal{M} = \frac{C_C \mathcal{H}}{T} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{nRT}{P} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathcal{M}}{dT} = -\frac{C_C \mathcal{H}}{T^2}$$

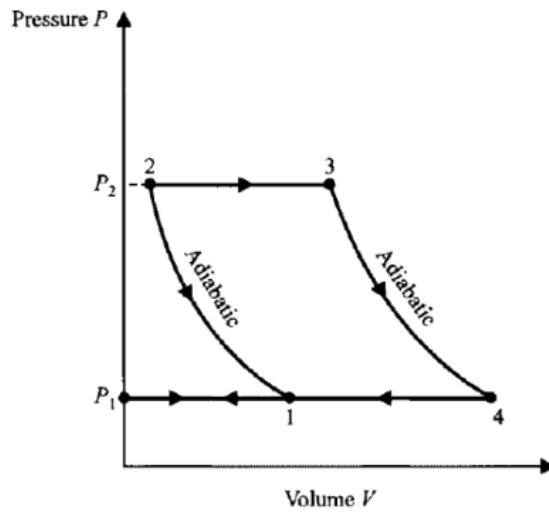
Reemplazando en (7.2)

$$\begin{aligned} C_{V,\mathcal{M}} + P \frac{dV}{dT} &= \mu_0 \mathcal{H} \frac{d\mathcal{M}}{dT} \quad \Rightarrow \quad \frac{nRT}{V} dV = - \left( C_{V,\mathcal{M}} + \mu_0 \mathcal{H} \frac{C_C \mathcal{H}}{T^2} \right) dT \\ &\Rightarrow \quad \frac{nR}{V} dV + C_{V,\mathcal{M}} \frac{dT}{T} + \mu_0 C_C \mathcal{H}^2 \frac{dT}{T^3} = 0 \\ &\Rightarrow \quad nR \ln(V) + C_{V,\mathcal{M}} \ln(T) - \frac{\mu_0 C_C \mathcal{H}^2}{2T^2} = C \\ &\Rightarrow \quad nR \ln(V) + C_{V,\mathcal{M}} \ln(T) - \frac{\mathcal{M}^2}{2C_C} = C \quad \frac{\mathcal{H}^2}{T^2} = \frac{\mathcal{M}^2}{C_C^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{C_{V,\mathcal{M}}}{nR} + \ln(V) = \frac{\mathcal{M}^2}{2C_C nR} + \ln(A) \quad \text{donde } A = e^C = \text{constante} \end{aligned}$$

8. La figura 1 , se representa un diagrama  $PV$  simplificado del ciclo de gas ideal de Joule. Todos los procesos son cuasi-estáticos y  $C_P$  es constante. Demuestre que la eficiencia térmica de un motor que realiza este ciclo es

$$\eta = 1 - \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

figura 1. Ciclo de gas ideal Joule



Respuesta a Punto 8

Dado que durante todo el ciclo se tiene que durante proceso isobarico se cumple

$$\begin{aligned} C_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P &\Rightarrow Q_{12} = C_P \int_{T_1}^{T_2} dT = C_P(T_2 - T_1) \quad (8,1,1) \quad \text{si el calor es absorbido} \\ &\Rightarrow Q_{12} = -C_P \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_P(T_2 - T_1) \quad (8,1,2) \quad \text{si el calor es cedido} \end{aligned}$$

Como de  $1 \rightarrow 2$  es un proceso adiabatico entonces  $dQ = 0$  y por lo tanto

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (8,2)$$

De  $2 \rightarrow 3$  es un proceso isobarico el calor absorbido por el sistema es:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = C_P \Delta T = C_P(T_3 - T_2) \quad \text{Aplicando (8.1.1)}$$

De  $3 \rightarrow 4$  es un proceso adiabatico:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_3^\gamma \quad (8,3)$$

Por ultimo de  $4 \rightarrow 1$  es un proceso isocorico por lo que el calor absorbido es

$$Q_{4 \rightarrow 1} = C_V \Delta T = C_V(T_4 - T_1) \quad \text{Aplicando (8.1.2)}$$

Dividiendo ahora las expresiones (8.2) y (8.3) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{V_1^\gamma}{V_4^\gamma} = \frac{V_2^\gamma}{V_3^\gamma} &\Rightarrow \frac{V_1}{V_4} = \frac{V_2}{V_3} \\ &\Rightarrow V_1 V_3 = V_2 V_4 \quad (8,4) \end{aligned}$$

Por la definicion de eficiencia:

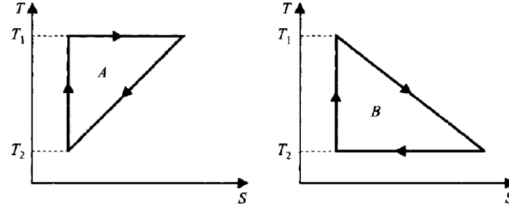
$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = 1 - \frac{C_P(T_4 - T_1)}{C_P(T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = 1 - \frac{\frac{P_1 V_4}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR}}{\frac{P_2 V_3}{nR} - \frac{P_2 V_2}{nR}} \quad \text{Aplicando (6.1)} \\ &= 1 - \frac{P_1 V_4 - P_1 V_1}{P_2 V_3 - P_2 V_2} = 1 - \frac{P_1}{P_2} \frac{V_3 - V_2}{V_1 - V_4} \\ &= 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \frac{V_4 - V_1}{V_3 - V_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \frac{V_4 V_2 - V_1 V_2}{V_3 V_1 - V_2 V_1} \quad \text{Aplicando (8.2)} \\ &= 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \frac{V_3 V_1 - V_2 V_1}{V_3 V_1 - V_2 V_1} = 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \quad \text{Aplicando (8.4)} \\ &= 1 - \left( \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{Aplicando (8.2)} \end{aligned}$$

9. (a) Deduzca la expresión para la eficiencia de un motor de Carnot directamente de un diagrama TS (Temperatura vs Entropía). (b) Compare las eficiencias de los ciclos A y B de la Figura 2. figura 2.

### Respuesta a Punto 9

Dado que el calor y la entropia estan relacionada por la ecuacion:

$$dQ = T dS \quad (9,1)$$



- a. En un diagrama  $PV$  del un ciclo de Carnot consiste de dos curvas adiabaticas, la cuales en un digrama  $TS$  consisten de dos lineas rectas que representa la entropia constante para distintos valores de la temperatura, pero a difrencia del diagrama anterior, este diagrama tambien consistira de dos curvas isotermicas representadas por dos lineas horizontales conectando las dos lineas adiabaticas, como se ve en la figura 1 De esta manera la eficiencia va estar dada por

$$\begin{aligned}
 \eta &= 1 - \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \\
 &= 1 - \frac{T_L \Delta S_L}{T_H \Delta S_H} \quad \text{Aplicando (9.1)} \\
 &= 1 - \frac{T_L}{T_H}
 \end{aligned}$$

Esto ultimo debido a que  $2 \rightarrow 3$  y  $4 \rightarrow 1$  son isoentropicos es decir  $S_3 = S_2$  y  $S_4 = S_1 \Rightarrow \Delta S_L = \Delta S_H$

- b. Del diagrama de la izquierda obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 |Q_H| &= T_1(S_1 - S_2) = T_1 \Delta S_H \\
 |Q_L| &= - \int_{S_1}^{S_2} T(S) dS = - \int_{S_1}^{S_2} \left( \frac{T_1 - T_2}{S_1 - S_2} S - \frac{T_1 S_2 - T_2 S_1}{S_1 - S_2} \right) dS \\
 &= - \left( \frac{T_1 - T_2}{S_1 - S_2} \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} - \frac{T_1 S_2 - T_2 S_1}{S_1 - S_2} (S_2 - S_1) \right) \\
 &= - \left( T_2 - T_1 \frac{S_2 + S_1}{2} + T_1 S_2 - T_2 S_1 \right) \\
 &= - \left( \frac{1}{2} T_2 S_1 + \frac{1}{2} T_2 S_2 - \frac{1}{2} T_1 S_1 - \frac{1}{2} T_1 S_2 + T_1 S_2 - T_2 S_1 \right) \\
 &= - \left( -\frac{1}{2} T_1 S_1 + \frac{1}{2} T_1 S_2 - \frac{1}{2} T_2 S_1 + \frac{1}{2} T_2 S_2 \right) \\
 &= - \left( \frac{1}{2} T_1 (S_2 - S_1) + \frac{1}{2} T_2 (S_2 - S_1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (T_1 + T_2) (S_1 - S_2)
 \end{aligned}$$

De esta manera la eficiencia queda:

$$\eta_L = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{2T_1} = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}$$

Ahora del diagrama de la derecha obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 |Q_L| &= T_2(S_2 - S_1) \\
 |Q_H| &= \int_{S_1}^{S_2} T(S) dS = \int_{S_1}^{S_2} \left( \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1} S - \frac{T_2 S_1 - T_1 S_2}{S_2 - S_1} \right) dS \\
 &= \left( \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1} \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} - \frac{T_2 S_1 - T_1 S_2}{S_2 - S_1} (S_2 - S_1) \right) \\
 &= \left( T_2 - T_1 \frac{S_2 + S_1}{2} - T_2 S_1 + T_1 S_2 \right) \\
 &= \left( -\frac{1}{2} T_1 S_1 - \frac{1}{2} T_1 S_2 + \frac{1}{2} T_2 S_1 + \frac{1}{2} T_2 S_2 - T_2 S_1 + T_1 S_2 \right) \\
 &= \left( -\frac{1}{2} T_1 S_1 + \frac{1}{2} T_1 S_2 - \frac{1}{2} T_2 S_1 + \frac{1}{2} T_2 S_2 \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2} T_1 (S_2 - S_1) + \frac{1}{2} T_2 (S_2 - S_1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (T_1 + T_2) (S_2 - S_1)
 \end{aligned}$$

Por lo que ahora la eficiencia queda:

$$\eta_R = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{2T_2}{T_1 + T_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}$$

Si realizamos la difrencia de estas dos eficiencias tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \eta_L - \eta_R &= \frac{T_1 - T_2}{2T_1} - \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} = \frac{(T_1 - T_2)(T_1 + T_2) - 2T_1(T_1 - T_2)}{2T_1(T_1 + T_2)} \\
 &= \frac{T_1^2 - T_2^2 - 2T_1^2 + 2T_1T_2}{2T_1(T_1 + T_2)} = \frac{-T_1^2 + 2T_1T_2 - T_2^2}{2T_1(T_1 + T_2)} \\
 &= \frac{-(T_1 - T_2)^2}{2T_1(T_1 + T_2)} < 0
 \end{aligned}$$

De esta forma el ciclo de la derecha es mas eficiente que el de la izquierda.

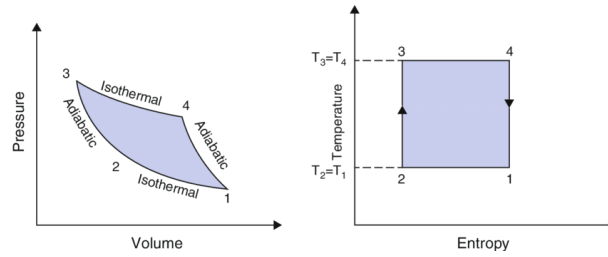


Figura 1: Diagrama  $TS$  de un ciclo de Carnot

10. La capacidad calorífica molar a campo magnético constante de un sólido paramagnético a bajas temperaturas varía con la temperatura y el campo según la relación

$$C_{\mathcal{H}} = \frac{B + C\mathcal{H}}{T^2} + DT^2$$

donde B, C y D son constantes. ¿Cuál es el cambio de entropía de n moles de material cuando la temperatura cambia de  $T_i$  a  $T_f$  mientras que  $\mathcal{H}_0$  permanece constante en el valor  $\mathcal{H}$

**Respuesta a Punto 10**

La entropía está definida por:

$$\begin{aligned}
dQ = TdS &\Rightarrow \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\mathcal{H}} = T \left(\frac{dS}{dT}\right)_{\mathcal{H}} \\
&\Rightarrow C_{\mathcal{H}} = T \left(\frac{dS}{dT}\right)_{\mathcal{H}} \\
&\Rightarrow dS = \frac{C_{\mathcal{H}}}{T} dT \\
&\Rightarrow dS = \left(\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{T^2} + DT^2\right) \frac{dT}{T} \\
&\Rightarrow S = \int_{T_i}^{T_f} \left(\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{T^2} + DT^2\right) \frac{dT}{T} \\
&\Rightarrow S = \int_{T_i}^{T_f} \left(\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{T^3} + DT\right) dT \\
&\Rightarrow S = \left[-\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{2T^2} + D\frac{T^2}{2}\right]_{T_i}^{T_f} \\
&\Rightarrow S = -\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{2T_f^2} + D\frac{T_f^2}{2} + \frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{2T_i^2} - D\frac{T_i^2}{2} \\
&\Rightarrow S = \frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{2} \left(\frac{1}{T_i^2} - \frac{1}{T_f^2}\right) + D\left(\frac{T_f^2}{2} - \frac{T_i^2}{2}\right) \\
&\Rightarrow S = \frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{2} \left(\frac{T_f^2 - T_i^2}{T_i^2 T_f^2}\right) + D\left(\frac{T_f^2 - T_i^2}{2}\right) \\
&\Rightarrow S = \frac{T_f^2 - T_i^2}{2} \left[\left(\frac{B + C\mathcal{H}_0^2}{T_i^2 T_f^2}\right) + D(T_f^2 - T_i^2)\right]
\end{aligned}$$