Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Introducción al Análisis Combinatorio
Taller Semana 1 (2025-I)

Prof. José L. Ramírez ....

Los problemas que aparecen señalados con el símbolo deben ser resueltos en Mathematica. Adicional a la tarea en físico deben enviar adjuntar el archivo .nb con las soluciones de Mathematica. **No olvide justificar cada una de sus respuestas.**

Resuelva uno de los siguientes problemas: Problema 1 o Problema 2, y además resuelva el Problema 3.

1. **Problema 1:** Considere una variante del problema clásico de las Torres de Hanói en la que se permite una regla especial denomina *movimiento mágico*. Bajo ciertas condiciones, dos discos pueden moverse simultáneamente. Específicamente, si el disco d está en la cima de una pila y el disco $d-1$ está en la base de otra, ambos pueden moverse juntos a una tercera varilla. Denotemos por a_n el número mínimo de movimientos requeridos para resolver esta variante con n discos. Por ejemplo, se puede verificar que:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 12.$$

   a) (0.5) Muestre todos los movimientos requeridos para resolver el caso de $n = 4$.

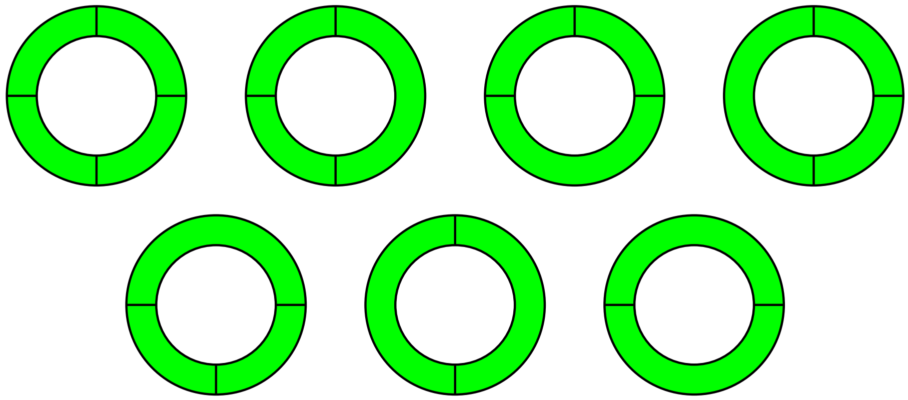
   b) (1.0) Demuestre que el número mínimo de movimientos para resolver este problema con n discos satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, \quad \text{con } a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

   c) (1.0)() Utilizando *Mathematica*® , calcule los primeros 100 valores de a_n. Determine una expresión cerrada en términos de los números de Fibonacci y pruébela. Luego, use la fórmula de Binet para los números de Fibonacci para encontrar la expresión asintótica de a_n.

   d) (1.0) Encuentre la función generatriz de la sucesión a_n.

2. **Problema 2:** Sea c_n el número de formas de teselar una cinta circular de tamaño 1×1 o 1×2. Por ejemplo, a partir de la siguiente figura se puede verificar que $c_4 = 7$.



   a) (0.5) Calcule c_5 mostrando todas las teselaciones.

   b) (1.0) Determine una expresión cerrada para c_n en términos de los números de Fibonacci y pruébela.

   c) (1.0) Determine la función generatriz de la sucesión c_n. A partir de la función generatriz obtenida calcule con ayuda de *Mathematica*® c_{99} y c_{100}.

   d) (1.0) A partir de la función generatriz obtenida determine una expresión cerrada tipo Binet para la sucesión c_n y luego encuentre una expresión asintótica.

. . . .

3. **Problema 3:** Sea $B(x)$ la función generatriz de la sucesión b_n que cuenta el promedio de las comparaciones para el algoritmo Quicksort, es decir que $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

   a) (1.0) A partir de la igualdad $(n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 2n$ demuestre que

   $$B(x)' = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{2}{1-x}B(x),$$

   donde $B(x)'$ denota la derivada de $B(x)$. Luego, con ayuda de *Mathematica*® solucione la anterior ecuación diferencial, tenga en cuenta el valor inicial.

   b) (0.5) Utilice la expresión obtenida en el punto anterior y deduzca que

   $$b_n = 2(n+1)H_n - 4n, \quad n \geq 1,$$

   donde H_n es el n-ésimo número armónico.

   En este ejercicio puede utilizar el hecho de que la función generatriz de los números armónicos es
   $$\sum_{n\geq 0} H_n x^n = \frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}.$$

   Observe que esto se puede verificar con ayuda de *Mathematica*®

   In[1]:= $\sum_{n=0}^{\infty}$ `HarmonicNumber[n] x^n`

   Out[1]= $\dfrac{\texttt{Log[1-x]}}{\texttt{-1+x}}$